APRUEBA TUS EXÁMENES

4 ESO

M.ª Belén Rodríguez Rodríguez

Opción B

Matemáticas

SOLUCIONARIO

Oxford
EDUCACIÓN

Índice

1 Los números reales

1.1. Números racionales y números irracionales

Una **fracción** es un cociente entre dos números enteros, $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$.

Dos **fracciones**, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ si $a \cdot d = b \cdot c$.

El conjunto formado por una fracción y todas sus equivalentes recibe el nombre de **número racional.**

Cada número racional q es representable por una **fracción irreducible,** esto es, existen enteros m y n primos entre sí tales que $q = \frac{m}{n}$.

Si escribimos $q = \frac{a}{b}$ y denotamos d = M.C.D. (a, b), para encontrar la fracción irreducible equivalente a la fracción $q = \frac{a}{b}$ basta con dividir el numerador y el denominador por d.

1 **Completa en cada caso el numerador o el denominador que falta para que las siguientes fracciones sean equivalentes:**

a) $\frac{-2}{3} = \frac{\boxed{-10}}{15}$ **b)** $\frac{9}{11} = \frac{18}{\boxed{22}}$ **c)** $\frac{\boxed{-16}}{52} = -\frac{8}{26}$ **d)** $\frac{17}{\boxed{25}} = \frac{34}{50}$

2 **Encuentra las fracciones irreducibles de los siguientes números racionales:**

$$q_1 = \frac{153}{27};\ q_2 = \frac{26}{143};\ q_3 = \frac{1\,225}{1\,715}$$

$q_1 = \frac{17}{3}$, $q_2 = \frac{2}{11}$ y, por último, $q_3 = \frac{5}{7}$.

Expresión decimal de un número racional. Los números racionales admiten otra expresión, llamada **decimal,** que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. En este proceso podemos obtener tres tipos de expresiones decimales: decimal **exacto,** decimal **periódico puro** y decimal **periódico mixto.**

Ejemplos:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ decimal exacto ⟶ $\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$

$\frac{47}{33} = 1{,}\widehat{42}$ decimal periódico puro ⟶ $\begin{array}{r|l} 47 & 33 \\ \cline{2-2} 140 & 1{,}42 \\ 80 & \\ 14 & \end{array}$

$\frac{1}{6} = 0{,}1\widehat{6}$ decimal periódico mixto ⟶ $\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}16 \\ 4 & \end{array}$

donde el símbolo $\widehat{x}$ significa que la cantidad x se repite indefinidamente.

3 Encuentra la expresión decimal de los siguientes números racionales e indica de qué tipo son:

a) $q_1 = \dfrac{203}{21}$

$q_1 = 9{,}\widehat{6}$ (decimal periódico puro)

c) $q_3 = \dfrac{3}{100}$

$q_3 = 0{,}03$ (decimal exacto)

b) $q_2 = \dfrac{35}{44}$

$q_2 = 0{,}79\widehat{54}$ (decimal periódico mixto)

d) $q_4 = \dfrac{57}{72}$

$q_4 = 0{,}791\widehat{6}$ (decimal periódico mixto)

Todo número decimal exacto, periódico puro y periódico mixto puede ser expresado en forma de **fracción irreducible.**

Ejemplos:

Decimal exacto: $0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3 \cdot 5^2}{4 \cdot 5^2} = \dfrac{3}{4}$

Decimal periódico puro: $q_2 = 1{,}\widehat{42}$

$$\begin{array}{rrl} & 100q_2 = & 142{,}\widehat{42} \\ - & q_2 = & 1{,}\widehat{42} \\ \hline & 99q_2 = & 141 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{141}{99} = \frac{47}{33}$$

Decimal periódico mixto: $q_3 = 2{,}5\widehat{6}$

$$\begin{array}{rrl} & 100q_3 = & 256{,}\widehat{6} \\ - & 10q_3 = & 25{,}\widehat{6} \\ \hline & 90q_3 = & 231 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_3 = \frac{231}{90} = \frac{77}{30}$$

4 Encuentra las fracciones irreducibles de los siguientes números racionales:

a) $q_1 = 3{,}62$

$q_1 = \dfrac{362}{100} = \dfrac{181}{50}$

c) $q_3 = 1{,}12\widehat{7}$

$q_3 = \dfrac{1\,015}{900} = \dfrac{203}{180}$

b) $q_2 = 0{,}\widehat{63}$

$q_2 = \dfrac{63}{99} = \dfrac{7 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \dfrac{7}{11}$

d) $q_4 = 12{,}\widehat{51}$

$q_4 = \dfrac{1\,239}{99} = \dfrac{413}{33}$

Los números reales que no son racionales, esto es, que no admiten una expresión en forma de fracción, se denominan **irracionales.**

Hay infinitos números irracionales.

Ejemplos:

- La raíz *n*-ésima $\sqrt[n]{z}$, donde *z* es un entero positivo que no es la potencia *n*-ésima de un número entero, es un número irracional.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, … son irracionales, pero $\sqrt{9} = 3$ no lo es.
- También el **número** π, que es el cociente entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro, es irracional.

Los **números irracionales** también admiten desarrollo decimal, pero tienen **infinitas** cifras decimales **no periódicas.**

5 **Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:**

$$\sqrt[3]{-8}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ \sqrt{36}\ ;\ -3{,}\widehat{5}\ ;\ 3{,}5\ ;\ 2{,}3\widehat{7}\ ;\ \sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$$

$\sqrt{5}$ es el único número irracional, pues:

$$\sqrt[3]{-8}=-2; \qquad \sqrt{36}=6; \qquad -3{,}\widehat{5}=\frac{-32}{9};$$

$$3{,}05=\frac{305}{100}=\frac{61}{20}; \qquad 2{,}3\widehat{7}=\frac{214}{90}=\frac{107}{45};$$

$$\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}=\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+4}}}=\sqrt{1+\sqrt{6+3}}=\sqrt{1+3}=2$$

son racionales.

6 **¿Es racional el número $v = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$?**

Elevando al cuadrado se tiene:

$$v^2=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=6-2\sqrt{4}=2$$

Como $v > 0$ se deduce que $v=\sqrt{2}$, que no es racional.

1.2. Operaciones con números racionales

Los números racionales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo que el denominador sea nulo), y el resultado es un número racional. La mejor forma de efectuar estas operaciones es **escribir** los números que queremos operar en **forma de fracción.**

7 **Sean $q_1 = 0{,}34\hat{6}$ y $q_2 = 0{,}25\hat{7}$. Calcula:**

$$q_2 + q_1; \quad q_2 - q_1; \quad q_2 \cdot q_1; \quad \frac{q_2}{q_1}$$

Comenzamos escribiendo q_1 y q_2 como fracciones irreducibles. Para ello:

$$\begin{array}{r} 1\,000q_1 = 346{,}\hat{6} \\ -\quad 100q_1 = 34{,}\hat{6} \\ \hline 900q_1 = 312 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{312}{900} = \frac{26}{75} \qquad \begin{array}{r} 1\,000q_2 = 257{,}\hat{7} \\ -\quad 100q_2 = 25{,}\hat{7} \\ \hline 900q_2 = 232 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{232}{900} = \frac{58}{225}$$

Ahora, sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos q_1 y q_2:

$$q_2 + q_1 = \frac{58}{225} + \frac{26}{75} = \frac{58+78}{225} = \frac{136}{225}; \qquad q_2 - q_1 = \frac{58}{225} - \frac{26}{75} = \frac{58-78}{225} = \frac{-20}{225} = \frac{-4}{45}$$

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{58}{225} \cdot \frac{26}{75} = \frac{1\,508}{16\,875}; \qquad \frac{q_2}{q_1} = \frac{58}{225} : \frac{26}{75} = \frac{58 \cdot 75}{26 \cdot 225} = \frac{29}{13 \cdot 3} = \frac{29}{39}$$

8 **Expresa como fracción irreducible la diferencia $q = \dfrac{0{,}4}{0{,}\widehat{18}} - 0{,}7\hat{2}$.**

Comenzamos expresando como fracción los números $q_1 = 0{,}7\hat{2}$ y $q_2 = 0{,}\widehat{18}$.

$$\begin{array}{r} 100q_1 = 72{,}\hat{2} \\ -\quad 10q_1 = 7{,}\hat{2} \\ \hline 90q_1 = 65 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{65}{90} = \frac{13}{18} \qquad \begin{array}{r} 100q_2 = 18{,}\widehat{18} \\ -\quad q_2 = 0{,}\widehat{18} \\ \hline 99q_2 = 18 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

Finalmente, puesto que $0{,}4 = \dfrac{2}{5}$ se tiene:

$$q = \frac{0{,}4}{0{,}\widehat{18}} - 0{,}7\hat{2} = \frac{\frac{2}{5}}{q_2} - q_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{11}} - \frac{13}{18} = \frac{11}{5} - \frac{13}{18} = \frac{198-65}{90} = \frac{133}{90}$$

1.3. Operaciones con números irracionales

La suma y resta de números irracionales puede **no ser irracional;** por ejemplo el número, $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$ es irracional, y su resta $r_1 - r_2 = 0$ es racional. Lo mismo sucede con el producto y el cociente; con estos datos, $r_1 \cdot r_2 = 2$ y $r_1 / r_2 = 1$ son racionales.

Existen ejemplos más sofisticados donde se ve que la apariencia engaña.

9 **¿Es irracional el número $u = \sqrt{2 + \frac{\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{2 - \frac{\sqrt{7}}{2}}$? Calcula u^2.**

Escribimos, para simplificar $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$, por lo que:

$$u = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} \Rightarrow u^2 = \left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)^2 = (2+x) + (2-x) - 2\sqrt{(2+x)(2-x)} =$$

$$= 4 - 2\sqrt{4 - x^2} = 4 - 2\sqrt{4 - \frac{7}{4}} = 4 - 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 4 - 3 = 1$$

Como $u > 0$ y $u^2 = 1$ deducimos que $u = 1$, que es racional.

10 **Si a y b números positivos. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son falsas?**

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

c) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

d) $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

Son falsas las igualdades a) y b).

11 **Calcula:**

a) $(1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

b) $\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} - 1)^2 = \sqrt{3} \cdot (2^2 \cdot 3 + 1 - 4\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot (13 - 4\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12$

Racionalizar. Es escribir, por ejemplo, los cocientes $\alpha = \frac{16}{\sqrt[7]{2^4}}$, $\beta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ y $\gamma = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ sin radicales en el denominador.

$$\alpha = \frac{16}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{16 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^4} \cdot \sqrt[7]{2^3}} = \frac{16 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{2} = 8\sqrt[7]{8}$$

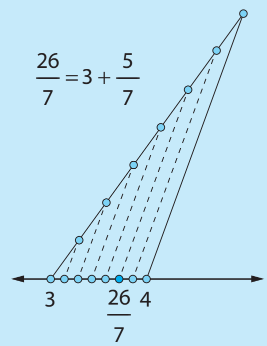
$$\beta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

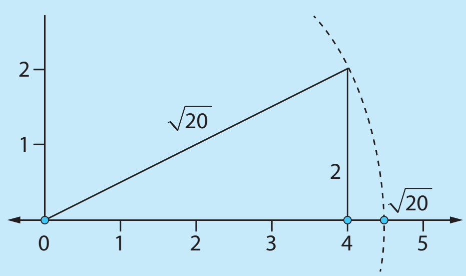
$$\gamma = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

1.4. Representación en la recta real. Intervalos

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales. Los números racionales junto con los irracionales constituye el llamado **cuerpo de los números reales,** que llenan completamente una recta.

Para **representar números racionales** en la recta real nos apoyamos en el **teorema de Tales.** En primer lugar escribimos el número mixto correspondiente. Así localizamos entre qué dos enteros se encuentra y posteriormente dividimos el segmento unidad en tantas partes como indique el denominador y tomamos tantas como marque el numerador de la fracción que aparece en el número mixto.



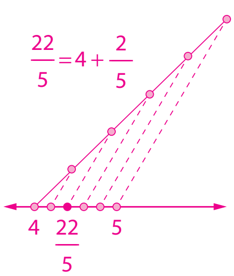


Para **representar números irracionales** como $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$ emplearemos el **teorema de Pitágoras.** Sin embargo, para otros irracionales nos tendremos que conformar con representar una aproximación del mismo, por defecto o por exceso, y con tantas cifras decimales como deseemos.

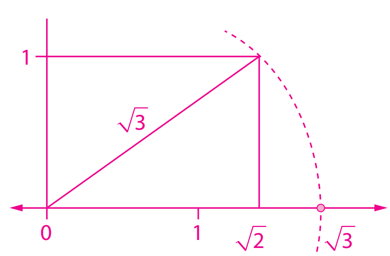
El teorema de Pitágoras permite representar $\sqrt{n}$ para cada entero positivo *n*.

12 Representa en una recta:

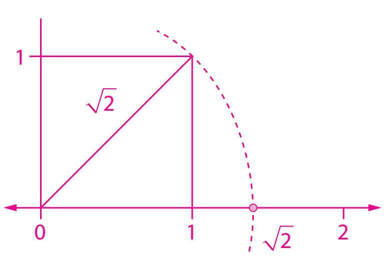
a) $\frac{22}{5}$



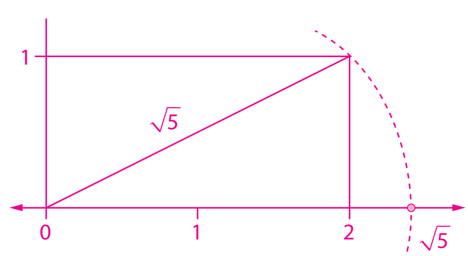
c) $\sqrt{3}$



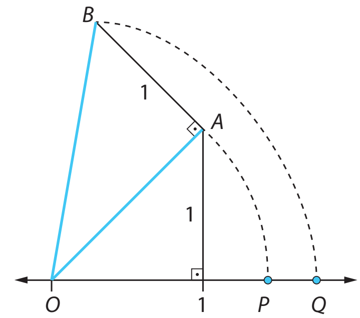
b) $\sqrt{2}$



d) $\sqrt{5}$



13 ¿Cuál es la longitud del segmento *PQ* de la figura?



Aplicando dos veces el teorema de Pitágoras se tiene que: la longitud del segmento *OA*, que es la misma que la del segmento *OP*, es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, mientras que la del segmento *OB*, que es la misma que la del segmento *OQ* es $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$.

De este modo concluimos que la longitud del segmento *PQ* es $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Intervalos. Sean *a* y *b* dos números reales tales que $a < b$.

- Se llama **intervalo abierto** de extremos *a* y *b*, **(a, b)**, al conjunto formado por los números reales mayores que *a* y menores que *b*:

$$(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

- Se llama **intervalo cerrado** de extremos *a* y *b*, **[a, b]**, al conjunto formado por los números reales mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*:

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

- Se llama **intervalo semiabierto** en *a* o intervalo abierto en *a* y cerrado en *b*, **(a, b]**, al conjunto formado por los números reales mayores que *a* y menores o iguales que *b*:

$$(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

- Se llama **intervalo semicerrado** en *a* o intervalo cerrado en *a* y abierto en *b*, **[a, b)**, al conjunto formado por los números reales mayores o iguales que *a* y menores que *b*:

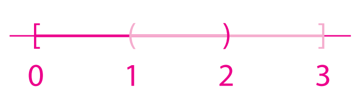
$$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

En todos los casos anteriores se dice que la **longitud del intervalo** es $b - a$ y que $m = \frac{a+b}{2}$ es el **centro del intervalo.**

14 Dibuja los intervalos $[0,\ 2)$ y $(1,\ 3]$ y calcula su unión y su intersección.

$[0, 2) \cup (1, 3] = [0, 3]$

$[0, 2) \cap (1, 3] = (1, 2)$



15 Contesta los siguientes apartados:

a) Expresa en forma de intervalo el conjunto formado por los números reales x tales que $|x| < 2$.

El conjunto pedido es el intervalo:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

b) Expresa en forma de intervalo el conjunto formado por los números reales x tales que $|x - 1| < 4$.

El conjunto pedido es el intervalo:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 4\} = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x - 1 < 4\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 5\} = (-3, 5)$$

c) Demuestra que el conjunto formado por los números reales x tales que $|x + 2| \leq 6$ es un intervalo cerrado y determina sus extremos.

El conjunto pedido es el intervalo:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x + 2 \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x \leq 4\} = [-8, 4]$$

Semirrectas: Dado un número real a:

- Se llaman **semirrectas abiertas de extremo *a*** a los conjuntos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ formados, respectivamente, por los números reales menores que a y los números reales mayores que a. Esto es, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
- Se llaman **semirrectas cerradas de extremo *a*** a los conjuntos $(-\infty, a]$ y $[a, +\infty)$ formados, respectivamente, por los números reales menores o iguales que a y los números reales mayores o iguales que a. Esto es, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ y $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

16 Demuestra que el conjunto formado por todos los números reales *x* tales que $x > |x| - 2$ es una semirrecta. Decide si es abierta o cerrada.

$$x > |x| - 2 \Leftrightarrow |x| < x + 2 \Leftrightarrow -x - 2 < x < x + 2$$

Cualquier número real x satisface la segunda de estas desigualdades: $x < x + 2$

La primera se traduce en que: $-x - 2 < x \Leftrightarrow -2 < 2x \Leftrightarrow -1 < x$

En conclusión, los números reales x tales que $x > |x| - 2$ son los de la semirrecta abierta $(-1, +\infty)$ de extremo -1.

1.5. Aproximación decimal. Error absoluto, relativo y porcentual

- Decimos que un valor aproximado *a* de un número *x* es una **aproximación por defecto** de *x* cuando $a < x$, y es *una* **aproximación por exceso** si $x < a$.
- Para dar una **aproximación de un número decimal** se suele truncar o redondear:
  - **Truncar** un número consiste en eliminar todas las cifras decimales que siguen a aquélla por la que hemos decidido truncar.
  - **Redondear** un número a un determinado orden decimal consiste en sustituirlo por el número truncado al orden decimal deseado si la siguiente cifra decimal es menor que 5. En caso contrario a la última cifra del número truncado le añadimos una unidad.

Ejemplo:

Número exacto	Truncamiento a las centésimas	Redondeo a las centésimas
0,7645	0,76	0,76
12,4373	12,43	12,44

17 Completa la siguiente tabla:

Número exacto	Truncamiento a las milésimas	Redondeo a las milésimas
$3,\overset{\frown}{21}$	3,212	3,212
$8,7\overset{\frown}{63}$	8,763	8,764
$1,\overset{\frown}{9}$	1,999	2
π	3,141	3,142

- Se llama **error absoluto** cometido al aproximar un número real *x* por otro *a* al número $|x - a|$.
- Se llama **error relativo** cometido al aproximar un número real no nulo *x* por otro *a* al número $\frac{|x - a|}{|x|}$.
- Se llama **error porcentual** cometido al aproximar un número real no nulo *x* por otro *a* al número $100 \cdot \frac{|x - a|}{|x|}$.

Ejemplo:

Tomemos como aproximación del número $x = 0,\widehat{7}$ el número $a = 0,78$ y calculemos los errores cometidos al tomar dicha aproximación.

Error absoluto: $|x - a| = \left|0,\widehat{7} - 0,78\right| = \left|\frac{7}{9} - \frac{78}{100}\right| = \left|\frac{7}{9} - \frac{39}{50}\right| = \left|\frac{350 - 351}{450}\right| = \frac{1}{450}$

Error relativo: $\frac{|x - a|}{|x|} = \frac{1/450}{7/9} = \frac{9}{450 \cdot 7} = \frac{1}{50 \cdot 7} = \frac{1}{350}$

Error porcentual: $100 \cdot \frac{|x - a|}{|x|} = \frac{100}{350} = \frac{2}{7} = 0,\widehat{285714}\%$

18 **Halla el error relativo que se comete al aproximar el número $x = 0,4\widehat{6}$ por su redondeo a las décimas.**

Tomamos como aproximación del número $x = 0,4\widehat{6} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ *el número* $a = 0,5 = \frac{1}{2}$.

Así el error absoluto que se comete es $|x - a| = \left|\frac{7}{15} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{14 - 15}{30}\right| = \frac{1}{30}$*, y el relativo es* $\frac{|x - a|}{|x|} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{7 \cdot 30} = \frac{1}{14}$.

El **error relativo** aporta **más información** que el **error absoluto.** Imaginemos que el error al medir la longitud de una habitación ha sido 50 cm y el error al medir la longitud de un campo de fútbol también ha sido 50 cm. Aunque el error absoluto cometido en ambas medidas es el mismo, la aproximación de la medida de la longitud del campo de fútbol es mucho mejor que la de la habitación, ya que en el primer caso la longitud de partida es mucho mayor.

19 **La casa de Eduardo dista 420 m del colegio mientras que la de Antonio está a 1,02 km. Sin embargo, cuándo les han preguntado a qué distancia estaba el colegio de sus respectivas casas, Eduardo ha contestado que a 400 m y Antonio a 1 km. ¿Quién ha dado mejor aproximación?**

Aunque ambos cometen un error absoluto de 20 metros, Eduardo ha cometido un error relativo de $\frac{|420 - 400|}{420} = \frac{20}{420} = \frac{1}{21}$ *y Antonio de* $\frac{|1,02 - 1|}{1,02} = \frac{0,02}{1,02} = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$.

Como $\frac{1}{51} < \frac{1}{21}$ *concluimos que Antonio ha dado una mejor aproximación.*

Ejemplo:

Veamos cómo hallar un número racional a que aproxime por defecto al número $x = \sqrt{2}$ tal que el error absoluto que se comete sea menor que 0,02.

Observamos que $14^2 = 196$, así que el número $a = 1{,}4$ cumple que: $a^2 = 1{,}96 < 2 = x^2$

Luego: $1 < a < x$

Por lo que: $|x + a| = x + a > 2a > 2$

Y así:

$$|x - a| \cdot |x + a| = |x^2 - a^2| = |2 - 1{,}96| = 0{,}04 \Rightarrow |x - a| = \frac{0{,}04}{|x + a|} < \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$$

Por tanto, el número racional $a = 1{,}4$ cumple lo requerido.

20 **Halla un número racional a que aproxime por defecto al número $x = \sqrt{3}$ tal que el error absoluto que se comete sea menor que 0,04.**

Observamos que $17^2 = 289$, así que el número racional $a = 1{,}7$ cumple que:

$$a^2 = 2{,}89 < 3 = x^2$$

Luego:

$$1{,}5 < a < x$$

Por lo que:

$$|x + a| = x + a > 2a > 3$$

Y así:

$$|x - a| \cdot |x + a| = |x^2 - a^2| = |3 - 2{,}89| = 0{,}11 \Rightarrow |x - a| = \frac{0{,}11}{|x + a|} < \frac{0{,}11}{3} < 0{,}037 < 0{,}04$$

Por tanto, el número racional $a = 1{,}7$ cumple lo requerido.

21 **Obtén el redondeo con dos cifras decimales de un número x, sabiendo que el error absoluto que se comete al aproximarlo por defecto por 8,12 es menor que 4 milésimas.**

Como 8,12 es una aproximación por defecto entonces $x > 8{,}12$, esto es:

$$0 < x - 8{,}12$$

Por otro lado, como el error absoluto cometido con esta aproximación es menor que 0,004 entonces:

$$0 < x - 8{,}12 < 0{,}004 \Leftrightarrow 8{,}12 < x < 8{,}124$$

De aquí se deduce que la tercera cifra decimal de x es menor que 4 luego $x \cong 8{,}12$ es el redondeo con dos cifras decimales.

1.6. Notación científica

Notación científica. Un número racional escrito en notación científica es un producto de dos factores. El primero es un número decimal cuya parte entera tiene una única cifra distinta de cero, y el segundo es una potencia de base 10 y exponente entero.

Ejemplo: la notación científica de los números 2010000000 y 0,00098 es:

$$2010000000 = 2{,}01 \cdot 10^{9} \quad \text{y} \quad 0{,}00098 = 9{,}8 \cdot 10^{-4}$$

22 **Completa los exponentes que faltan:**

a) $618{,}7 = 6{,}187 \cdot 10^{\boxed{2}}$ **b)** $0{,}023 = 2{,}3 \cdot 10^{\boxed{-2}}$ **c)** $0{,}3 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{\boxed{-4}}$

Para **multiplicar** o **dividir** números en notación científica se multiplican o dividen sus partes decimales por un lado y las potencias de 10 por otro.

Ejemplo:

- $(0{,}24 \cdot 10^{15}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3}) = (0{,}24 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{15+(-3)} = 0{,}6 \cdot 10^{12} = 6 \cdot 10^{11}$
- $\dfrac{3{,}1 \cdot 10^{6}}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = \left(\dfrac{3{,}1}{0{,}5}\right) \cdot 10^{6-(-3)} = 6{,}2 \cdot 10^{9}$

23 **Calcula y expresa el resultado en notación científica:**

a) $(2 \cdot 10^{8}) \cdot 0{,}0025 = 5 \cdot 10^{5}$ **b)** $(56 \cdot 10^{8}) : (8 \cdot 10^{-3}) = 7 \cdot 10^{11}$

c) $(8 \cdot 10^{5}) \cdot (2{,}2 \cdot 10^{2}) = 1{,}76 \cdot 10^{8}$ **d)** $(28 \cdot 10^{4}) : (4 \cdot 10^{-2}) = 7 \cdot 10^{6}$

Para **sumar** o **restar** números en notación científica, en primer lugar, se saca factor común a la potencia de 10 con menor exponente y luego se suma o resta las partes decimales resultantes.

Ejemplo:

$(3{,}2 \cdot 10^{11}) + (5{,}5 \cdot 10^{8}) = (3200 + 5{,}5) \cdot 10^{8} = 3205{,}5 \cdot 10^{8} = 3{,}2055 \cdot 10^{11}$

24 **Calcula y expresa el resultado en notación científica:**

a) $6 \cdot 10^{6} - 0{,}5 \cdot 10^{8} =$
$= (6 - 50) \cdot 10^{6} = -4{,}4 \cdot 10^{7}$

b) $35 \cdot 10^{-2} + 43{,}1 \cdot 10^{-3} =$
$= (35 \cdot 10 + 43{,}1) \cdot 10^{-3} =$
$= 393{,}1 \cdot 10^{-3} = 3{,}931 \cdot 10^{-1}$

c) $34 \cdot 10^{-3} + 22{,}1 \cdot 10^{-2} =$
$= (34 + 221) \cdot 10^{-3} = 255 \cdot 10^{-3} = 2{,}55 \cdot 10^{-1}$

d) $6 \cdot 10^{7} - 0{,}6 \cdot 10^{8} =$
$= 6 \cdot 10^{7} - 6 \cdot 10^{7} = 0$

1 Evaluación

1 **En la clase de Álvaro aprueba el $0,\widehat{7}$ de los alumnos, mientras que en la clase de Irene suspenden 3 de los 23 alumnos que la componen.**

a) ¿En cuál de las dos clases es mayor el porcentaje de suspensos?

En la clase de Álvaro aprueban $\frac{7}{9} = 0,\widehat{7}$, luego suspenden $\frac{2}{9}$.
En la de Irene suspenden $\frac{3}{23}$. El porcentaje de suspensos en la clase de Álvaro es mayor que en la de Irene pues $\frac{3}{23} < \frac{2}{9}$.

b) ¿Cuántos alumnos ha y en clase de `I varo, si hay menos de 30 y más de 18? ¿Cuántos ha n aprobado?

Si n es el número de alumnos en la clase de Álvaro, como aprueban $\frac{7}{9}$ de n y el número de aprobados es un número entero, entonces n es un múltiplo de 9 mayor que 18 y menor que 30, esto es, en clase de Álvaro hay $n = 27$ alumnos y han aprobado: $\frac{7}{9}$ de 27. Esto es, 21 alumnos.

2 **Ordena de menor a mayor los siguientes números: $\sqrt{40}$; 6,28; $\frac{32}{5}$; $6,\widehat{28}$**

Denotamos: $q_1 = \sqrt{40}$; $q_2 = 6,28$; $q_3 = \frac{32}{5} = 6,4$; $q_4 = 6,\widehat{28}$

Es claro que $q_2 < q_4 < q_3$, esto es, $6,28 < 6,\widehat{28} < 6,4$ así que solo falta colocar q_1.
A la vista de los números ya ordenados parece razonable comparar $\sqrt{40}$ con 6,3 y 6,4. Se tiene:

$$6,3^2 = 39,69 < \left(\sqrt{40}\right)^2 < 40,96 = 6,4^2 \Rightarrow 6,3 < \sqrt{40} < 6,4$$

En conclusión: $6,28 < 6,\widehat{28} < \sqrt{40} < \frac{32}{5}$

3 **Racionaliza el número irracional $\alpha = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$. ¿Es α mayor que $\frac{1}{8}$?**

Al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ se tiene:

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \frac{7+5-2\sqrt{35}}{2} = 6-\sqrt{35}$$

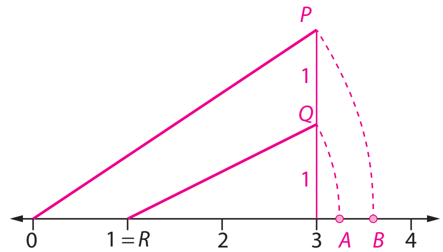
Supongamos que $\alpha \geq \frac{1}{8}$, es decir, $8\alpha \geq 1$. Entonces:

$$8\left(6-\sqrt{35}\right) \geq 1 \Rightarrow 47 \geq 8\sqrt{35} \Rightarrow 47^2 \geq 64 \cdot 35 \Rightarrow 2\,209 \geq 2\,240$$

Y esto es falso. Por tanto: $\alpha < \frac{1}{8}$.

4 Representa sobre una recta los números reales $\sqrt{13}$ y $1+\sqrt{5}$. ¿Cuál de ellos es mayor?

La longitud del segmento *OP*, que coincide con la de *OB* es $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, mientras que la longitud del segmento *RQ* que coincide con la de *RA* es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ y así la longitud del segmento *OA* es $1+\sqrt{5}$. Como el punto *A* queda situado a la izquierda del punto *B* se tiene que: $\sqrt{13}>1+\sqrt{5}$



5 Escribe como unión de dos semirrectas abiertas el conjunto formado por todos los números reales *x* tales que $|x+2|>8$.

Los números reales *x* que satisfacen $|x+2|>8$ son los que no satisfacen $|x+2|\le 8$.

Es decir: $|x+2|\le 8 \Leftrightarrow -8\le x+2\le 8 \Leftrightarrow -10\le x\le 6 \Leftrightarrow x\in[-10,6]$

Por tanto, el conjunto del enunciado es la unión $(-\infty,-10)\cup(6,+\infty)$ de dos semirrectas.

6 Expresa en millas las siguientes distancias. Expresa el resultado en notación científica. Considera 1 km $\cong$ 0,6214 millas.

a) La distancia entre la Luna y la Tierra es de 378 196 km.

$378\,196\cdot 0{,}6214=235\,010{,}9944=2{,}350\,109\,944\cdot 10^5$ millas

b) La distancia entre el Sol y la Tierra es de unos 149 700 000 km.

$149\,700\,000\cdot 0{,}6214=93\,023\,580=9{,}302\,358\cdot 10^7$ millas

7 Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a) $(0{,}02)^{-4}+\dfrac{12{,}4\cdot 10^{-4}+0{,}06\cdot 10^{-3}}{3{,}2\cdot 10^{-9}:4\cdot 10^{-10}}=$

$$(0{,}02)^{-4}+\frac{1{,}24\cdot 10^{-3}+0{,}06\cdot 10^{-3}}{32\cdot 10^{-10}:4\cdot 10^{-10}}=(2\cdot 10^{-2})^{-4}+\frac{(1{,}24+0{,}06)\cdot 10^{-3}}{(32:4)\cdot 10^{-10}}=$$

$$=\frac{10^8}{16}+\frac{1{,}3\cdot 10^7}{8}=\frac{10^8+2{,}6\cdot 10^7}{16}=\frac{12{,}6\cdot 10^7}{16}=7{,}875\cdot 10^6$$

b) $\dfrac{20{,}6\cdot 10^6+6{,}4\cdot 10^5}{3\cdot 10^2-4{,}8\cdot 10^2}=$

$$\frac{20{,}6\cdot 10^6+6{,}4\cdot 10^5}{3\cdot 10^2-4{,}8\cdot 10^2}=\frac{(206+6{,}4)\cdot 10^5}{(3-4{,}8)\cdot 10^2}=-\left(\frac{212{,}4}{1{,}8}\right)\cdot 10^3=$$

$$=-118\cdot 10^3=-1{,}18\cdot 10^5$$

2 Potencias, raíces y logaritmos

2.1. Potencias

Si a es un número real no nulo y n es un entero positivo se define la **potencia n-ésima de a,** que se denota a^n, como el producto de a por sí mismo n veces. Se dice que $\boldsymbol{a}$ es la **base** de a^n y $\boldsymbol{n}$ el **exponente.** En particular, $a^1 = a$, y se define $a^0 = 1$. Obsérvese que:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

1 Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $13^2 = 169$ **b)** $1^5 = 1$ **c)** $(-5)^3 = -125$ **d)** $\left(\frac{-1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Potencias de exponente negativo. Se define: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En particular: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \frac{b^n}{a^n}$

Ejemplos:

- $6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 1 : \left(\frac{2^2}{5^2}\right) = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

2 Expresa en forma de potencia de base 10 los siguientes números:

a) Mil diezmilésimas

$$0{,}1 = \frac{1000}{10\,000} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

b) Una millonésima

$$0{,}000\,001 = \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

3 Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$ **b)** $0{,}1^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{1}\right)^3 = 1000$ **c)** $\left(\frac{-5}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

4 ¿A qué número debemos elevar 4^4 para obtener 8^8?

Como $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$ y $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ debemos elevar 4^4 al cubo para obtener 8^8, ya que:

$$(4^4)^3 = (2^8)^3 = 2^{24} = 8^8$$

Propiedades de las operaciones con potencias

Si a y b son números reales no nulos y m y n son dos números enteros se cumple que:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

En particular:

- $a^n : a^m = a^n \cdot \left(\frac{1}{a^m}\right) = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$
- $(a : b)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5 **Expresa como potencia única:**

a) $(3^4 \cdot 2^4)^7 : 6^2 = (6^4)^7 : 6^2 = 6^{28} : 6^2 = 6^{26}$

b) $(24^7 : 8^7)^3 : 3^4 = (3^7)^3 : 3^4 = 3^{21} : 3^4 = 3^{17}$

c) $(7^3)^5 : 7^{-2} = 7^{15} : \left(\frac{1}{7^2}\right) = 7^{15} \cdot 7^2 = 7^{17}$

6 **Expresa como potencia de base 3 los siguientes números:**

a) $9 \cdot 27 \cdot 81 = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^9$

b) $\left(\frac{1}{3^6} \cdot (-27)^4\right)^5 = \left(3^{-6} \cdot (-3^3)^4\right)^5 = \left(3^{-6} \cdot (-1)^4 \cdot (3^3)^4\right)^5 = \left(3^{-6} \cdot 1 \cdot 3^{12}\right)^5 = \left(3^6\right)^5 = 3^{30}$

7 **Expresa $\frac{2^5}{4}$ y $(\sqrt{2})^6$ como potencias de base 2.**

$$\frac{2^5}{4} = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right) = 2^5 \cdot 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3$$

$$(\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

8 **¿Cuál de los números $u = (2^3)^2$ y $v = 2^{3^2}$ es mayor?**

Ambos números son potencias de base 2. Como $u = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ y $v = 2^9$, al dividir se tiene:

$$\frac{v}{u} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3 > 1 \Rightarrow v > u$$

9 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{a^{-2} \cdot b \cdot c^6}{a^{-5} \cdot b^{-2} \cdot c^3} = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (a \cdot b \cdot c)^3$

b) $\dfrac{a \cdot b}{b^{-1}} : \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^{-4} = \dfrac{a \cdot b^2}{1} : \left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^4 = \dfrac{a \cdot b^2}{1} : \dfrac{b^{12}}{a^8} = \dfrac{a^9 \cdot b^2}{b^{12}} = \dfrac{a^9}{b^{10}}$

Sean a un número real y $n > 0$ un entero positivo. Entonces:

1. $a > 1 \Rightarrow a^n > 1$

Pues $\dfrac{a^{k+1}}{a^k} = a > 1$, luego $a^k < a^{k+1}$, y por tanto: $1 < a < a^2 < \ldots < a^{n-1} < a^n \Rightarrow 1 < a^n$

2. $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < 1$

Pues, como $0 < a < 1$, su inverso $\dfrac{1}{a} > 1$ y por **1.**: $\dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n > 1 \Rightarrow a^n < 1$

3. $a^n = 1 \Rightarrow a = 1$

Ya que de los apartados anteriores se deduce que el número positivo a no es ni mayor que 1 ni menor que 1, luego: $a = 1$.

10 **Completa las casillas que hemos dejado en blanco con alguno de los signos <, > o =.**

a) $0{,}1^3 \boxed{>} 0{,}1^5$ **b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^8 \boxed{<} \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ **c)** $\left(\dfrac{7}{2}\right)^{-4} \boxed{>} \left(\dfrac{7}{2}\right)^{-6}$ **d)** $\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-2} \boxed{>} \left(\dfrac{6}{7}\right)^4$

Sean a, b números reales y $n > 0$ un entero positivo. Entonces:

- Si a y b son positivos y $a^n = b^n \Rightarrow a = b$

  En efecto, el cociente $c = \dfrac{a}{b}$ es positivo por serlo a y b, y cumple que:

$$c^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

- Si $a^n = b^n \Rightarrow a = b$ o $a = -b$

  En efecto, los números reales positivos $|a|$ y $|b|$ cumplen que $|a|^n = |a^n| = |b^n| = |b|^n$, y se deduce del apartado anterior que $|a| = |b|$, luego $a = b$ o $a = -b$.

11 **Calcula el valor de x en cada una de las siguientes igualdades:**

a) $x^{-3} = 27 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow \dfrac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) $x^4 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow x^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

12 **Completa las casillas que hemos dejado en blanco:**

a) $2^{\boxed{-3}} = \dfrac{1}{8}$ **b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\boxed{-4}} = \dfrac{81}{16}$ **c)** $\boxed{0{,}1}^{-4} = 10000$ **d)** $\boxed{1}^{-20} = 1$

2.2. Radicales

Si n es un entero positivo impar y a es un número real se define su **raíz n-ésima,** y se escribe como $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, como el único número real b cuya potencia n-ésima es a:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

13 Calcula los siguientes números enteros:

a) $\sqrt[5]{3\,125} = 5$, pues: $5^5 = 3\,125$ **b)** $\sqrt[7]{-128} = -2$, pues: $(-2)^7 = -128$

Si n es un entero positivo par y a es un número real positivo se define:

- Su **raíz n-ésima positiva,** $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, como el único número real positivo cuya potencia n-ésima es a. Esto es: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b > 0$ y $b^n = a$
- Su **raíz n-ésima negativa,** $-\sqrt[n]{a}$, como el único número real negativo cuya potencia n-ésima es a. En fórmulas: $-\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b < 0$ y $b^n = a$. (Es el **opuesto** de la raíz n-ésima positiva de a.)

Se dice que $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$ son las **raíces reales n-ésimas de a.**

14 Calcula las raíces cuartas de 256.

La raíz cuarta positiva de 256 es $\sqrt[4]{256} = 4$ pues $4^4 = 256$, luego la raíz cuarta negativa de 256 es $-\sqrt[4]{256} = -4$.

Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical cuyo índice es el denominador de la fracción, y cuyo radicando es la base elevada al numerador, esto es, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. De las propiedades de las potencias se deducen las de los radicales:

- $a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}} = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/m\cdot n} = \sqrt[m\cdot n]{a} \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = a^{1/n}\cdot b^{1/n} = (a\cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a\cdot b} \Rightarrow \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

15 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[15]{7^{12}} = \sqrt[5]{7^4}$ **b)** $\sqrt[32]{3^{64}} = 3^2 = 9$ **c)** $\sqrt[72]{11^{18}} = \sqrt[4]{11}$

16 Reduce a un único radical:

a) $\sqrt[8]{2\,700\,000}\cdot\sqrt[8]{243\,000}=\sqrt[8]{3^3\cdot10^5}\cdot\sqrt[8]{3^5\cdot10^3}=\sqrt[8]{3^8\cdot10^8}=30$

b) $\sqrt[5]{125}:\left(\sqrt[5]{5}\right)^2=\sqrt[5]{5^3:5^2}=\sqrt[5]{5}$

17 Simplifica, como en el ejemplo, las siguientes expresiones:

$$3\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{147}=3\sqrt{3^3}+2\sqrt{3\cdot5^2}-\sqrt{3\cdot7^2}=9\sqrt{3}+10\sqrt{3}-7\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

a) $\sqrt{500}+3\sqrt{245}-6\sqrt{125}=\sqrt{5\cdot10^2}+3\sqrt{5\cdot7^2}-6\sqrt{5^3}=$

$=10\sqrt{5}+21\sqrt{5}-30\sqrt{5}=\sqrt{5}$

b) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}}=\sqrt{2^9}+\sqrt{2^3\cdot3^4}-\dfrac{\sqrt{2^7}}{9}=2^4\sqrt{2}+2\cdot3^2\sqrt{2}-\dfrac{2^3\sqrt{2}}{9}=$

$=\sqrt{2}\cdot\left(16+18-\dfrac{8}{9}\right)=\dfrac{298}{9}\sqrt{2}$

Para **multiplicar y dividir radicales** conviene reducirlos a índice común. **Ejemplos:**

- $\sqrt[4]{56}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[4]{56}\cdot\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{56\cdot4}=\sqrt[4]{224}=\sqrt[4]{2^5\cdot7}=2\cdot\sqrt[4]{2\cdot7}=2\cdot\sqrt[4]{14}$
- $\sqrt[6]{60}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{60}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{60:2^2}=\sqrt[6]{60:4}=\sqrt[6]{15}$

18 Efectúa estas operaciones:

a) $\left(\sqrt[3]{20}:\sqrt[3]{5}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt[3]{20:5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{36}:\sqrt[6]{18}=\sqrt[6]{36^2}:\sqrt[6]{18}=\sqrt[6]{36^2:18}=\sqrt[6]{\dfrac{3^4\cdot2^4}{3^2\cdot2}}=\sqrt[6]{72}$

c) $\sqrt[3]{25^2\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\sqrt[3]{\left(5^2\right)^2\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\sqrt[3]{5^4\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^{16}\cdot5^3}}=\sqrt[12]{5^{19}}=5\,\sqrt[12]{5^7}$

Para **comparar radicales** también conviene expresarlos con el mismo índice, pues dados dos números reales positivos a y b, y un número entero positivo n se cumple que:

$$a<b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo: Vamos a comparar $\sqrt[3]{25}$ y $\sqrt{7}$. Para ello expresamos los radicales con el mismo índice: $\sqrt[3]{25}=\sqrt[6]{25^2}=\sqrt[6]{625}$, $\sqrt{7}=\sqrt[6]{7^3}=\sqrt[6]{343}$. Como $625>343$ entonces:

$$\sqrt[6]{625}>\sqrt[6]{343}\Rightarrow\sqrt[3]{25}>\sqrt{7}$$

19 Ordena de menor a mayor los siguientes números reales: $\sqrt{5^3}$; $\sqrt[3]{5^7}$; $\sqrt[4]{5^7}$

Expresamos los radicales con el mismo índice: $\sqrt{5^3}=\sqrt[12]{5^{18}}$; $\sqrt[3]{5^7}=\sqrt[12]{5^{28}}$; $\sqrt[4]{5^7}=\sqrt[12]{5^{21}}$

Así: $5^{18}<5^{21}<5^{28}\Rightarrow\sqrt[12]{5^{18}}<\sqrt[12]{5^{21}}<\sqrt[12]{5^{28}}\Rightarrow\sqrt{5^3}<\sqrt[4]{5^7}<\sqrt[3]{5^7}$

2.3. Logaritmos

Dados números reales positivos a y $b \neq 1$ se llama **logaritmo en base *b* de *a*** al único número real x que cumple la igualdad $b^x = a$. Esto se escribe $\log_b a = x$, y se puede reescribir así: $a = b^{\log_b a}$

Si la **base** es el número $\boldsymbol{b = 10}$ se suele omitir en la escritura anterior, y ponemos $\log a$ en lugar de $\log_{10} a$.

Obsérvese que $\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$ sea cual sea la base b, ya que $b^0 = 1$ y $b^1 = b$.

Ejemplos:

- $\log_7 2401 = 4$, pues: $7^4 = 2401$
- $\log_2 0{,}25 = -2$, pues: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

20 Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 27 = 3$, ya que: $3^3 = 27$

b) $\log_2 16 = 4$, ya que: $2^4 = 16$

c) $\log_5 0{,}2 = -1$, ya que: $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$

d) $\log 10000 = 4$, pues: $10000 = 10^4$

e) $\log 0{,}01 = -2$, ya que: $0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$

f) $\log 10 = 1$, ya que: $10 = 10^1$

21 Calcula x sabiendo que $\log_{16} x = 0{,}5$.

De la definición se sigue que: $x = 16^{0,5} = 16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$

De las propiedades de las potencias se deducen las siguientes **propiedades de los logaritmos.** Dados números reales positivos a, b y c tales que $b \neq 1$ se cumple que:

- El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores: $\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c$
- El **logaritmo de un cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor: $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- El **logaritmo de una potencia** es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base: $\log_b (a^c) = c \cdot \log_b a$

22 Utiliza las propiedades de los logaritmos para calcular los siguientes:

a) $\log 4 + \log 25 = \log (4 \cdot 25) = \log 100 = 2$

b) $\log_2 288 - \log_2 72 = \log_2 \left(\frac{288}{72}\right) = \log_2 4 = 2$

c) $\log_5 \sqrt{125} = \log_5 125^{1/2} = \frac{1}{2}\log_5 125 = \frac{1}{2}\log_5 5^3 = \frac{3}{2}$

23 Sabiendo que $\log 2 \cong 0{,}301$ y $\log 3 \cong 0{,}477$, calcula $\log 0{,}375$.

$$\log 0{,}375 = \log\left(\frac{375}{1000}\right) = \log\left(\frac{3}{8}\right) = \log\left(2^{-3}\cdot 3\right) = \log 2^{-3} + \log 3 = -3\log 2 + \log 3 \cong$$
$$\cong -3\cdot 0{,}301 + 0{,}477 = -0{,}903 + 0{,}477 = -0{,}426$$

24 Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$$\log_7 2\,401; \quad \log_4 64; \quad \log_7 0{,}\widehat{142\,857}; \quad \log 100\,000$$

$\log_7 2\,401 = \log_7\left(7^4\right) = 4$

$\log_7 0{,}\widehat{142\,857} = \log_7\left(\frac{1}{7}\right) = -1$

$\log_4 64 = \log_4\left(4^3\right) = 3$

$\log 100\,000 = \log\left(10^5\right) = 5$

Entonces: $\log_7 0{,}\widehat{142\,857} < \log_4 64 < \log_7 2\,401 < \log 100\,000$

Cambio de base. Dados números reales positivos a, b y c tales que $b \neq 1$ y $c \neq 1$ se cumple que:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esto permite hallar cualquier logaritmo a partir de los logaritmos decimales.

Ejemplo:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$$

25 Halla con la calculadora los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \cong \frac{0{,}845}{0{,}477} \cong 1{,}771$

b) $\log_6 23 = \frac{\log 23}{\log 6} \cong \frac{1{,}362}{0{,}778} \cong 1{,}751$

Propiedad importante. Si a, b y c son números reales positivos tales que $b \neq 1$ y $\log_b a = \log_b c$, entonces $a = c$. En efecto, basta observar que:

$$a = b^{\log_b a} = b^{\log_b c} = c$$

26 Resuelve la ecuación: $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$

$$\log 5 = \log(2x+7) - \log(x-1) = \log\left(\frac{2x+7}{x-1}\right) \Rightarrow 5 = \frac{2x+7}{x-1} \Rightarrow 5x - 5 = 2x + 7 \Rightarrow x = 4$$

27 Calcula el valor de x sabiendo que: $\log_3 x = 2 + \log_3 16 - 2\log_3 2$

$$\log_3 x = \log_3\left(3^2\right) + \log_3 16 - \log_3 2^2 = \log_3\left(\frac{9\cdot 16}{4}\right) = \log_3 36 \Rightarrow x = 36$$

28 **Calcula el valor de la siguiente suma:**

$$S = \log 1 + \log 10 + \log 1\,000 + \log 0{,}1 + \log 0{,}001$$

Como $\log 10^k = k$ para cada entero k la suma se calcula directamente:

$S = \log 1 + \log 10 + \log 1\,000 + \log 0{,}1 + \log 0{,}001 =$

$= \log 10^0 + \log 10^1 + \log 10^3 + \log 10^{-1} + \log 10^{-3} = 0 + 1 + 3 - 1 - 3 = 0$

29 **¿Qué número b cumple la igualdad $\log_b 8 = 0{,}75$?**

De la definición de logaritmo se desprende que:

$2^3 = 8 = b^{0{,}75} = b^{3/4} \Rightarrow 2 = b^{1/4} \Rightarrow 2 = \sqrt[4]{b} \Rightarrow b = 2^4 = 16$

30 **Si $\log a - 3\log b = 0$, ¿qué relación existe entre a y b?**

$\log a - 3\log b = 0 \Leftrightarrow \log a = 3\log b \Leftrightarrow \log a = \log b^3 \Leftrightarrow a = b^3$

Por tanto, a es el cubo de b.

31 **Si $\log a + \log b = 0$, ¿qué relación existe entre a y b?**

$\log a + \log b = 0 \Leftrightarrow \log a = -\log b \Leftrightarrow \log a = \log b^{-1} \Leftrightarrow \log a = \log\left(\dfrac{1}{b}\right) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{b}$

Por tanto, a es el inverso de b.

32 **Sean $a = 10^{0{,}7}$, $b = 10^{2{,}65}$ y $c = \sqrt[3]{ab^2}$. Calcula $\log c$.**

$\log c = \log\left(\sqrt[3]{ab^2}\right) = \dfrac{1}{3}\log\left(a \cdot b^2\right) = \dfrac{\log a + \log b^2}{3} = \dfrac{\log a + 2\log b}{3}$

De la definición de a y b se desprende que $\log a = 0{,}7$ y $\log b = 2{,}65$, lo que sustituido en la fórmula anterior nos proporciona el valor de $\log c$, esto es:

$$\log c = \frac{\log a + 2\log b}{3} = \frac{0{,}7 + 2 \cdot 2{,}65}{3} = \frac{0{,}7 + 5{,}3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

33 **Resuelve la ecuación: $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$**

$\log\left(35 - x^3\right) = 3\log(5 - x) = \log(5 - x)^3 \Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)^3 = (5 - x)(5 - x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)\left(25 + x^2 - 10x\right) = 125 - 75x + 15x^2 - x^3 \Rightarrow 15x^2 - 75x + 90 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

Evaluación

1 **Simplifica la expresión:** $\dfrac{7^{-3}\cdot 21^4\cdot 3^2}{(-49)^2\cdot 42^2}$

$$\frac{7^{-3}\cdot(7\cdot 3)^4\cdot 3^2}{\left(-7^2\right)^2\cdot(2\cdot 3\cdot 7)^2}=\frac{7^{-3}\cdot 7^4\cdot 3^4\cdot 3^2}{7^4\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 7^2}=\frac{7\cdot 3^6}{7^6\cdot 3^2\cdot 2^2}=\frac{3^4}{7^5\cdot 2^2}$$

2 **Cierta bacteria se reproduce por bipartición cada segundo. Si se parte de 625 bacterias, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que haya 10 000 bacterias?**

Denotamos t el tiempo, medido en segundos, que debe transcurrir para que haya 10 000 bacterias. Entonces: $625\cdot 2^t=10\,000\Rightarrow 2^t=\dfrac{10\,000}{625}=16=2^4\Rightarrow t=4$

Por tanto, han de transcurrir 4 s.

3 **El volumen de un cubo es 729 m³. ¿Cuánto mide la arista del mismo?**

Denotamos a la longitud, expresada en metros, de la arista del cubo, y V su volumen, expresado en m³. Entonces: $9^3=729=V=a^3\Rightarrow a=9$ m

4 **Halla el volumen de un cubo cuya área es 726 m².**

Si denotamos por a la longitud, expresada en metros, de la arista del cubo, su área es $6a^2$ m², por lo que: $726=6a^2\Rightarrow a^2=\dfrac{726}{6}=121\Rightarrow a=\sqrt{121}=11$ m

Entonces: $V=a^3\Rightarrow V=11^3=1\,331$ m³

5 **Calcula el número entero $n\neq 0$ sabiendo que existe un número real $a>1$ que cumple la igualdad $(a^2)^n=a^{n^2}$.**

Se desprende del enunciado que $a^{2n}=a^{n^2}$, luego:

$$2n=n^2\Rightarrow n(n-2)=0\overset{n\neq 0}{\Rightarrow}n-2=0\Rightarrow n=2$$

6 **Calcula el valor de x en cada una de las siguientes igualdades:**

a) $3^{x-9}=27\Leftrightarrow 3^{x-9}=3^3\Leftrightarrow x-9=3\Leftrightarrow x=12$

b) $2^{x-1}=\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow 2^{x-1}=2^{-4}\Leftrightarrow x-1=-4\Leftrightarrow x=-3$

7 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los números:**
$\sqrt[4]{5};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt{2}$

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125};\quad \sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81};\quad \sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$

$64<81<125\Rightarrow\sqrt[12]{64}<\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{125}\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$

8 **Un número entero es múltiplo de 10, su raíz cúbica es mayor que 4 y la raíz cúbica de su cuadrado es menor que 17. ¿De qué número se trata?**

El número buscado n cumple las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{n} > 4 \Rightarrow n > 4^3 = 64 \\ \sqrt[3]{n^2} < 17 \Rightarrow n^2 < 17^3 = 4\,913\end{array}\right\} \Rightarrow n^2 < 4\,913 \Rightarrow n < \sqrt{4\,913} < 70{,}093 \Rightarrow n \le 70$$

El número n es múltiplo de 10 y $64 < n \le 70$. Por tanto, el número pedido es $n = 70$.

9 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:** $\dfrac{8^{0,\hat{6}}}{\sqrt[16]{2}}$ **;** $\sqrt[9]{3} \cdot 3^{3,\hat{3}}$

Expresamos los exponentes como fracciones: $u = 0{,}\hat{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$; $v = 3{,}\hat{3} = \dfrac{30}{9} = \dfrac{10}{3}$

Ahora efectuamos las operaciones propuestas:

- $\dfrac{8^{0,\hat{6}}}{\sqrt[16]{2}} = \dfrac{8^{2/3}}{2^{1/16}} = \dfrac{(2^3)^{2/3}}{2^{1/16}} = \dfrac{2^2}{2^{1/16}} = 2^{(2-1/16)} = 2^{31/16} = \sqrt[16]{2^{31}}$
- $\sqrt[9]{3} \cdot 3^{3,\hat{3}} = 3^{1/9} \cdot 3^{10/3} = 3^{31/9} = \sqrt[9]{3^{31}}$

10 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \dfrac{\sqrt[12]{7^3}}{\sqrt[12]{7^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{7^3}{7^2}} = \sqrt[12]{7}$

b) $\sqrt[4]{343} \cdot \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[12]{7} = \sqrt[4]{7^3} \cdot \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[12]{7} = \sqrt[12]{7^9} \cdot \sqrt[12]{7^2} \cdot \sqrt[12]{7} = \sqrt[12]{7^9 \cdot 7^2 \cdot 7} = \sqrt[12]{7^{12}} = 7$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[12]{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[12]{3}} = \dfrac{\sqrt[12]{3^9} \cdot \sqrt[12]{3^4}}{\sqrt[12]{3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^9 \cdot 3^4}{3}} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3$

11 **¿Qué número b cumple la igualdad $\log_b 0{,}125 = -3$?**

Sabemos que: $\log_b 0{,}125 = \log_b\left(\dfrac{125}{1000}\right) = \log_b\left(\dfrac{1}{8}\right) = \log_b 2^{-3}$

Entonces: $\log_b 0{,}125 = -3 \Leftrightarrow \log_b 2^{-3} = -3 \Leftrightarrow 2^{-3} = b^{-3} \Leftrightarrow b = 2$

12 **El precio de una vivienda que costó 300 000 € se ha depreciado, hasta valer 240 000 €, a razón de un 6% anual. ¿Qué tiempo transcurrió entre la compra y su posterior venta?**

Denotamos por t el número de años transcurridos entre la adquisición y la venta de la vivienda. El valor de la misma al cabo de t años es:

$$300\,000 \cdot (1 - 0{,}06)^t = 300\,000 \cdot (0{,}94)^t$$

Luego ha de cumplirse que: $240\,000 = 300\,000 \cdot (0{,}94)^t \Rightarrow 0{,}8 = (0{,}94)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 0{,}8 = \log(0{,}94)^t = t \cdot \log 0{,}94 \Rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}8}{\log 0{,}94} \cong \dfrac{-0{,}096\,9}{-0{,}026\,9} = \dfrac{969}{269} \cong 3{,}6$ años

3 Polinomios

3.1. Polinomios

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^n donde a es un número, n es un entero no negativo y x es un símbolo, que se llama **variable.** Por convenio, $ax^0 = a$. Si a es no nulo, el exponente n se llama **grado del monomio** ax^n.

Un **polinomio** es una suma de monomios

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

donde $a_n \neq 0$ y n es el mayor de los exponentes, llamado **grado del polinomio** $P(x)$, que se escribe $gr(P) = n$. Los polinomios de la forma $P(x) = a_0$ se llaman constantes, y los números $a_0, \ldots, a_n$ se llaman coeficientes de $P(x)$.

Se dice que a_n es el coeficiente director de $P(x)$ y que a_0 es su término independiente.

1 **Escribe los siguientes polinomios ordenando sus monomios en orden creciente y determinar su grado. ¿Cuánto valen sus coeficientes directores y sus términos independientes?**

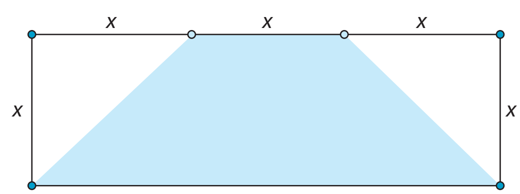
$$P_1(x) = 3x^2 + 1 + x^5, \qquad P_2(x) = 3x^2 + x^3 + 3; \quad P_3(x) = 2x^4 + x^3 + 1$$

Los polinomios dados se reescriben así:

$$P_1(x) = 1 + 3x^2 + x^5, \qquad P_2(x) = 3 + 3x^2 + x^3, \qquad P_3(x) = 1 + x^3 + 2x^4,$$

y sus grados son 5, 3 y 4, respectivamente. Sus coeficientes directores son 1, 1 y 2. Sus tØrminos independientes son 1, 3 y 1.

2 **Calcula el grado del monomio que expresa el área sombreada de la figura.**



Primero calculamos el área del rectángulo:

$$A_r = \text{base} \cdot \text{altura} = 3x \cdot x = 3x^2$$

Ahora hay que restarle el área de los dos triángulos. El área de estos es la mitad del área del cuadrado de lado x:

$$A_r = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2}$$

El área de la región sombreada es, por tanto:

$$P(x) = 3x^2 - 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) = 2x^2$$

Concluimos, por tanto, que el grado del monomio es igual a 2.

Evaluación de polinomios. Dado un número r, el resultado de evaluar el polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

en $x = r$ es el número

$$P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n$$

También se dice que $P(r)$ es el valor numérico del polinomio $P(x)$ en $x = r$.

Raíces. Se dice que un número r es raíz del polinomio $P(x)$ si $P(r) = 0$.

3 **Evalúa el polinomio $P(x) = 1 + x - x^2$ en $x = 0$ y en $x = 1$.**

Sin más que sustituir se obtiene: $P(0) = 1 + 0 - 0^2 = 1$; $P(1) = 1 + 1 - 1^2 = 1$

4 **Comprueba que $r = 1$ es raíz del polinomio $P(x) = 1 + x^9 - 2x^{15}$.**

$P(1) = 1 + 1^9 - 2 \cdot 1^{15} = 1 + 1 - 2 = 0$, luego 1 es raíz de $P(x)$.

5 **Calcula el valor de a sabiendo que es raíz del polinomio $P(x) = a - 1 - ax^2 + x^3$.**

Al evaluar en $x = a$ se tiene $0 = P(a) = a - 1 - a \cdot a^2 + a^3 = a - 1 \Rightarrow a = 1$

Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Si el número racional $z = \frac{r}{s}$, donde r y s son números enteros primos entre sí, es raíz del polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

cuyos coeficientes son números enteros, entonces, r divide a a_0 y s divide a a_n.

6 **¿Tiene alguna raíz racional el polinomio $P(x) = 1 + x^2 + x^7$?**

Si $P(x)$ tuviese alguna raíz racional esta sería un divisor entero del tØrmino independiente de $P(x)$, que vale 1.

Por tanto, las únicas posibles raíces racionales de $P(x)$ son 1 y -1. Pero $P(1) = 3$ y $P(-1) = 1$, luego $P(x)$ carece de raíces racionales.

7 **Calcula las raíces racionales del polinomio $P(x) = 2 - 3x - 3x^2 + x^4$.**

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son los divisores enteros de 2. Estos son, -2, -1, 1 y 2. Pero $P(-2) = 12$, $P(-1) = 3$, $P(1) = -3$ y $P(2) = 0$, luego la única raíz racional de $P(x)$ es 2.

8 Calcula las raíces racionales del polinomio $P(x) = -1 - x + 4x^2 + 4x^3$.

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son los cocientes de números enteros $\frac{r}{s}$ tales que r es un divisor entero de -1 y s lo es de 4. Así $\frac{r}{s} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$. Evaluamos:

$$P(1)=6,\quad P(-1)=0,\quad P\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad P\left(-\frac{1}{2}\right)=0, P\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{15}{16}\quad \text{y}\ P\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{16}.$$

Así, las raíces racionales del polinomio dado son $\left\{□1, □\frac{1}{2}\right\}$.

9 ¿Tiene alguna raíz racional el polinomio $P(x) = 2 - 4x + 2x^2 + 3x^3$?

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son los cocientes de números enteros $\frac{r}{s}$ donde r divide a 2 y s divide a 3. Estos números son los siguientes:

$$1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3},$$

y al evaluar $P(x)$ en todos ellos resulta que ninguno es raíz, ya que:

$$P(-1)=5,\ P(1)=3,\ P(-2)=-6,\ P(2)=26,\ P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{31}{9},$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right)=1,\ P\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{3}\quad \text{y}\quad P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$$

10 Asocia cada polinomio con sus raíces racionales:

$f(x) = -2 + x + 8x^2 + 5x^3$	$\left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$
$g(x) = 6 - 11x - 26x^2 + 15x^3$	$\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, 2\right\}$
$h(x) = 2 - 5x - 18x^2 + 45x^3$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$

11 ¿Tiene raíces racionales el polinomio $P(x) = -6 - 9x - x^3 + x^4$?

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ y 6. Al evaluar $P(x)$ en estos números se tiene

$$P(-6)=1\,560,\ P(-3)=129,\ P(-2)=36,\ P(-1)=5,$$

$$P(6)=1\,020,\ P(3)=21,\ P(2)=-16,\ P(1)=-15$$

lo que demuestra que el polinomio $P(x)$ carece de raíces racionales.

3.2. Operaciones con polinomios

La suma de dos polinomios se realiza **coeficiente a coeficiente,** es decir, dados polinomios

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \text{ y } Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

su **suma** es el polinomio $P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$.

Ejemplo: dados los polinomios $P(x) = 1 + x + 7x^2 + 2x^3$ y $Q(x) = 4 + 2x + 5x^2$ calculamos el polinomio suma:

$$P(x) + Q(x) = (1 + 4) + (1 + 2)x + (7 + 5)x^2 + (2 + 0)x^3 = 5 + 3x + 12x^2 + 2x^3$$

El **producto** del polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ por el número λ es el polinomio

$$(\lambda P)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda a_nx^n$$

cuyos coeficientes son el resultado de multiplicar por λ los coeficientes de $P(x)$.

Nótese que si $\lambda = 0$ el producto $(\lambda P)(x)$ es el polinomio nulo, y si $\lambda = -1$ el producto

$$(-1 \cdot P)(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n$$

se llama **opuesto** de $P(x)$ y se denota $-P(x)$.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ para calcular el polinomio **resta** $(P - Q)(x)$ basta sumar al polinomio $P(x)$ el polinomio opuesto de $Q(x)$, es decir:

$$(P - Q)(x) = P(x) - Q(x)$$

Conviene observar que dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y números α, β y r, al evaluar en $x = r$ se tiene $(\alpha P + \beta Q)(r) = \alpha P(r) + \beta Q(r)$.

12 **Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que el polinomio suma $P(x) + Q(x)$ satisfaga que $gr(P(x) + Q(x)) < gr(P(x))$ y $gr(P(x) + Q(x)) < gr(Q(x))$.**

Basta considerar dos polinomios del mismo grado cuyos coeficientes directores sean opuestos, por ejemplo, los polinomios $P(x) = 1 + x^2$ y $Q(x) = x - x^2$, ambos de grado 2, cuya suma es el polinomio $P(x) + Q(x) = 1 + x$ que tiene grado 1.

13 **Dados los números $\alpha = 2$ y $\beta = 3$ y los polinomios $P(x) = 1 + 3x^2 + x^3$ y $Q(x) = 7 - 3x + x^5$ escribe el polinomio $(\alpha P + \beta Q)(x)$.**

Sin más que aplicar la definición se obtiene:

$$(\alpha P + \beta Q)(x) = 2(1 + 3x^2 + x^3) + 3(7 - 3x + x^5) = 23 - 9x + 6x^2 + 2x^3 + 3x^5$$

14 **Dados los polinomios $P(x) = a_0 - 3x + a_2x^2 - x^4$ y $Q(x) = -5 + b_1x - x^3 + b_4x^4$, calcula los coeficientes a_0, a_2, b_1 y b_4 para que $P(x)$ y $Q(x)$ satisfagan la siguiente igualdad:**

$$2P(x) - 3Q(x) = -3 - 6x - 4x^2 + 3x^3 + 7x^4$$

$$2P(x) - 3Q(x) = 2\left(a_0 - 3x + a_2x^2 - x^4\right) - 3\left(-5 + b_1x - x^3 + b_4x^4\right) =$$
$$= (2a_0 + 15) + (-6 - 3b_1)x + 2a_2x^2 + 3x^3 + (-2 - 3b_4)x^4 = -3 - 6x - 4x^2 + 3x^3 + 7x^4$$

Igualando coeficientes resulta:

$$2a_0 + 15 = -3 \iff a_0 = -9, \quad -6 - 3b_1 = -6 \iff b_1 = 0$$
$$2a_2 = -4 \iff a_2 = -2 \quad \text{y} \quad -2 - 3b_4 = 7 \iff b_4 = -3$$

15 **Prueba que si r es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ entonces también es raíz del polinomio $\alpha P(x) + \beta Q(x)$.**

Si r es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ entonces $P(r) = Q(r) = 0$, y por tanto, $(\alpha P + \beta Q)(r) = \alpha P(r) + \beta Q(r) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Esto significa que r también es raíz del polinomio $\alpha P(x) + \beta Q(x)$.

Producto de polinomios. La **multiplicación** o **producto** de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio, que denotamos $(PQ)(x)$, cuyo grado es la suma de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$ y que se calcula aplicando la propiedad distributiva a los monomios.

Conviene observar que dados polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y un número r, al evaluar en $x = r$ se tiene $(PQ)(r) = P(r)\,Q(r)$.

Ejemplo: dados los polinomios $P(x) = 1 + 3x + x^3$ y $Q(x) = 7 - 3x^2 + x^4$ su producto es:

$$(PQ)(x) = (1 + 3x + x^3)\,(7 - 3x^2 + x^4) = 7 - 3x^2 + x^4 + 21x - 9x^3 + 3x^5 + 7x^3 - 3x^5 + x^7 =$$
$$= 7 + 21x - 3x^2 - 2x^3 + x^4 + x^7$$

16 **Multiplica los polinomios $P(x) = 1 + x + x^2$ y $Q(x) = 1 - x + x^2$.**

Aplicamos directamente la definición de producto y obtenemos:

$$(PQ)(x) = \left(1 + x + x^2\right)\left(1 - x + x^2\right) = 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 + x^2 - x^3 + x^4 = 1 + x^2 + x^4$$

División de polinomios. Dados dos polinomios no nulos $D(x)$ y $d(x)$ existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{y} \quad gr(R) < gr(d)$$

Además, los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, llamados **cociente** y **resto** de la división de $D(x)$ entre $d(x)$, son únicos cumpliendo las condiciones anteriores.

En la división de polinomios, $\dfrac{D(x)}{d(x)}$ no siempre es un polinomio. En lo que sigue supondremos que los coeficientes de todos los polinomios involucrados son números racionales.

Ejemplo: Calcularemos el cociente y el resto de la división del polinomio

$$D(x) = 7 - 5x + x^2 \text{ entre } d(x) = x - 2.$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -5x & +7 & x-2 \\ \cline{4-4}
-x^2 & +2x & & x-3 \\ \cline{1-3}
 & -3x & +7 & \\
 & 3x & -6 & \\ \cline{2-3}
 & & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow Q(x) = x - 3 \text{ es el cociente y } R(x) = 1 \text{ el resto.}$$

Si $R(x)$ es el polinomio nulo se dice que $d(x)$ **divide** $D(x)$, o también, que $D(x)$ es **múltiplo** de $d(x)$.

17 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $D(x) = 2 - 3x - 7x^2 + 3x^3 + 5x^4$ entre $d(x) = -1 + x^2$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +3x^3 & -7x^2 & -3x & +2 & x^2-1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +5x^2 & & & 5x^2+3x-2 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & -2x^2 & -3x & +2 & \\
 & -3x^3 & & +3x & & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & & +2 & \\
 & & 2x^2 & & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

b) $D(x) = 2 + 7x - 5x^2 + x^3$ entre $d(x) = 2 + 2x + x^2$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +7x & +2 & x^2+2x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & -2x & & x-7 \\ \cline{1-4}
 & -7x^2 & +5x & +2 & \\
 & 7x^2 & +14x & +14 & \\ \cline{2-4}
 & & 19x & +16 &
\end{array}$$

3.3. Regla de Ruffini. Teorema del resto

Regla de Ruffini. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $d(x) = x - a$, podemos emplear la regla de Ruffini, que veremos con un ejemplo.

Ejemplo: Realizaremos la división del polinomio $P(x) = 2 + 3x^2 + x^4$ entre el polinomio $d(x) = x - 3$ aplicando la regla de Ruffini.

Se trazan dos líneas perpendiculares y se escriben los coeficientes de $P(x)$, ordenados y sin omitir términos nulos. Escribimos $a = 3$ al lado izquierdo de la línea vertical y bajo la línea inferior colocamos el primer coeficiente:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxtimes & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (1) por el que se ha colocado a la izquierda (3). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxtimes & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxtimes & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 12 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxtimes & 3 & 9 & 36 & \\ \hline & 1 & 3 & 12 & 36 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxtimes & 3 & 9 & 36 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 12 & 36 & 110 \end{array}$$

El último número se corresponde con el resto de la división mientras que los demás son los coeficientes del cociente. En nuestro caso, el cociente de la división es el polinomio:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 36 \text{ y el resto } r = 110.$$

18 **Calcula, aplicando la regla de Ruffini, el cociente y el resto de $P(x) = 24 - 19x - 2x^2 + x^3$ entre $x - 1$.**

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 24 \\ 1 & & 1 & -1 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 4 \end{array}$$

Por tanto, el cociente de la división es $Q(x) = -20 - x + x^2$ y el resto $r = 4$.

Teorema del resto: El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir $\boldsymbol{P(a)}$, coincide con el **resto** que se obtiene al dividir $\boldsymbol{P(x)}$ **entre** $\boldsymbol{(x - a)}$.

Del teorema del resto se deduce que un polinomio $P(x)$ es múltiplo del polinomio $x - a$ si y solo si a es raíz de $P(x)$.

19 Calcula el resto de la siguiente división $(-3x^{40} - 2x^{20} + x + 1) : (x + 1)$.

Aplicando el teorema del resto obtenemos que el resto de la división es el valor númerico del polinomio $P(x) = -3x^{40} - 2x^{20} + x + 1$ en $x = -1$, esto es:

$$P(-1) = -3(-1)^{40} - 2(-1)^{20} + (-1) + 1 = -5$$

20 Factoriza el polinomio $P(x) = 2 - 3x^2 + x^4$.

Las raíces enteras de $P(x)$, si tiene alguna, dividen a 2, luego son alguno de los números $-2, -1, 1, 2$. Al evaluar obtenemos $P(1) = P(-1) = 0$. Por tanto:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1) \cdot (-2 - 2x + x^2 + x^3) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - 2)$$

Pero $Q_1(x) = x^2 - 2$ carece de raíces racionales pues no lo son ni ± 1 ni ± 2, luego la factorización de $P(x)$ en producto de polinomios irreducibles (es decir, que no se pueden factorizar) con coeficientes racionales es:

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 2)$$

21 Factoriza el polinomio $P(x) = 20 - 19x - 2x^2 + x^3$.

Aplicamos la regla de Ruffini reiteradamente, de modo que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 20 \\ 1 & & 1 & -1 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array} \Rightarrow \quad P(x) = (x - 1)(-20 - x + x^2)$$

De nuevo, al dividir $Q(x) = -20 - x + x^2$ entre $x + 4$.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -20 \\ -4 & & -4 & 20 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array} \Rightarrow \quad Q(x) = (x + 4)(x - 5), \text{ luego, finalmente } P(x) = (x - 1)(x + 4)(x - 5)$$

3.4. Fracciones algebraicas

Fracción algebraica. Se denomina fracción algebraica a cualquier cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tal que $Q(x)$ no es el polinomio nulo. Se dice que las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ son equivalentes si $P(x)\,Q_1(x) = Q(x)\,P_1(x)$.

Se dice que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es nula si lo es el polinomio $P(x)$.

Al igual que con las fracciones numéricas, podemos simplificar las fracciones algebraicas hasta la **fracción irreducible.**

22 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2+3x^2+x^4}{-1+x-x^2+x^3} = \dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

b) $\dfrac{6-5x+x^2}{-81+x^4} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x^2+9)(x+3)(x-3)} = \dfrac{(x-2)}{(x^2+9)(x+3)}$

c) $\dfrac{20-19x-2x^2+x^3}{10x+3x^2-6x^3+x^4} = \dfrac{(x-1)(x-5)(x+4)}{x(x+1)(x-2)(x-5)} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x(x+1)(x-2)}$

d) $\dfrac{18+9x-11x^2-x^3+x^4}{-9+9x+10x^2-10x^3-x^4+x^5} = \dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x-3)} = \dfrac{(x-2)}{(x-1)^2}$

Operaciones con fracciones algebraicas. Dados los números a y b y las fracciones algebraicas

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \text{ y } \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

se definen:

$$a\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right) + b\left(\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\right) = \frac{aP_1(x)Q_2(x) + bP_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$

$$\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)\cdot\left(\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\right) = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$

$$\frac{\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)}{\left(\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\right)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}$$

23 Dadas las fracciones algebraicas $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{x(1+x+x^3)}{(x+1)^3(1+3x+x^3)}$ y $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x}{1+3x+x^2}$, calcula su suma, su producto y su cociente.

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{x(1+x+x^3)(1+3x+x^2)+x(x+1)^3(1+3x+x^3)}{(x+1)^3(1+3x+x^3)(1+3x+x^2)}=$$

$$=\frac{2x+10x^2+16x^3+13x^4+9x^5+4x^6+x^7}{1+9x+31x^2+53x^3+51x^4+32x^5+16x^6+6x^7+x^8}$$

$$\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)\cdot\left(\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\right)=\frac{x^2(1+x+x^3)}{(x+1)^3(1+3x+x^3)(1+3x+x^2)}=$$

$$=\frac{x^2+x^3+x^5}{1+9x+31x^2+53x^3+51x^4+32x^5+16x^6+6x^7+x^8}$$

$$\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}}=\frac{x(1+x+x^3)\cdot(1+3x+x^2)}{(x+1)^3\cdot(1+3x+x^3)\cdot x}=\frac{1+4x+4x^2+2x^3+3x^4+x^5}{1+6x+12x^2+11x^3+6x^4+3x^5+x^6}$$

24 Calcula la suma, la resta, el producto y el cociente de las siguientes fracciones algebraicas. Simplifica el resultado todo lo que se pueda:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{1+x+x^2}{1+x^2} \text{ y } \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{1+x+x^2}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}-\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{1+x+x^2}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{(1+x+x^2)-x}{1+x^2}=\frac{1+x^2}{1+x^2}=1$$

$$\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)\left(\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\right)=\frac{(1+x+x^2)x}{(1+x^2)^2}=\frac{x+x^2+x^3}{1+2x^2+x^4}$$

$$\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}}=\frac{P_1(x)Q_2(x)}{P_2(x)Q_1(x)}=\frac{(1+x+x^2)(1+x^2)}{x(1+x^2)}=\frac{1+x+x^2}{x}$$

Evaluación

1 **¿Tiene el polinomio $P(x) = 2 + 2x + x^5$ alguna raíz racional?**

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son números enteros que dividen a 2, así que solo hay que probar con los números -2, -1, 1 y 2. Pero al evaluar,

$$P(-1) = -1,\ P(1) = 5,\ P(-2) = -34,\ P(2) = 38$$

lo que demuestra que $P(x)$ no tiene ninguna raíz racional.

2 **Calcula las raíces racionales del polinomio $P(x) = -1 + x - x^4 + x^5$.**

Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son números enteros que dividen a -1, luego son -1 y 1.

Al evaluar $P(x)$ en estos números se tiene $P(-1) = -4$ y $P(1) = 0$, así que 1 es la única raíz racional de $P(x)$.

3 **Factoriza el polinomio $P(x) = 4 - 2x - 2x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5$.**

Las raíces enteras de $P(x)$, si tiene alguna, dividen a 4, y al ser $P(1) = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-1)(x^4 - x^3 - 2x - 4)$$

Denotando $Q(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ se tiene $Q(-1) = 0$ por lo que:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & & -1 & 2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-1)(x+1)(x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$$

Si $Q_1(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ comprobamos que $Q_1(2) = 0$, y por ello:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2 + 2)$$

Como el polinomio $x^2 + 2$ no tiene raíces reales la anterior es la factorización de $P(x)$ como producto de polinomios con coeficientes racionales del menor grado posible.

4 Escribe la suma y la resta de los polinomios:

$$P(x) = x + 2x^3 + x^6 \quad \text{y} \quad Q(x) = 1 + 2x^2 + x^5 + x^6$$

La suma y resta de estos polinomios es:

$$(P+Q)(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^5 + 2x^6 \quad \text{y} \quad (Q-P)(x) = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^5$$

5 Calcula el cociente y el resto de la división del polinomio $D(x) = 4 - 3x^2 + x^4$ entre $d(x) = 1 + x^2$.

$$\begin{array}{rrr|l} x^4 & -\ 3x^2 & +\ 4 & x^2+1 \\ \cline{4-4} -x^4 & -\ x^2 & & x^2-4 \\ \cline{1-3} & -\ 4x^2 & +\ 4 & \\ & 4x^2 & +\ 4 & \\ \cline{2-3} & & 8 & \end{array}$$

Así el polinomio $Q(x) = -4 + x^2$ es el cociente y $R(x) = 8$ el resto.

6 Calcula la suma, el producto y el cociente de las fracciones:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{1+x}{2+x} \quad \text{y} \quad \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{1+x^2}{3+x^2}$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} + \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{1+x}{2+x} + \frac{1+x^2}{3+x^2} = \frac{(1+x)(3+x^2)+(2+x)(1+x^2)}{(2+x)(3+x^2)} =$$

$$= \frac{3+3x+x^2+x^3+2+x+2x^2+x^3}{6+3x+2x^2+x^3} = \frac{5+4x+3x^2+2x^3}{6+3x+2x^2+x^3}$$

Para el producto se tiene:

$$\left(\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right)\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}\right) = \frac{P_1(x)Q_1(x)}{P_2(x)Q_2(x)} = \frac{(1+x)(1+x^2)}{(2+x)(3+x^2)} = \frac{1+x+x^2+x^3}{6+3x+2x^2+x^3}$$

Y por ultimo el cociente:

$$\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{P_2(x)Q_1(x)} = \frac{(1+x)(3+x^2)}{(2+x)(1+x^2)} = \frac{3+3x+x^2+x^3}{2+x+2x^2+x^3}$$

4

Ecuaciones e inecuaciones

4.1. Ecuaciones de primer y segundo grado

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de grado 1 con una incógnita tiene la forma:

$$ax = b$$

donde a y b son números reales, a es no nulo y x es la incógnita. La única solución de esta ecuación es: $x = \dfrac{b}{a}$

1 **Indica cuál de los siguientes números es solución de la ecuación $3x = 6$.**

a) $x = 0$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 2$

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se deduce que $x = 2$ es su única solución.

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de grado 2 con una incógnita tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, a es no nulo y x es la incógnita.

Para calcular los números reales x que satisfacen esta ecuación **completamos cuadrados:**

$$ax^2 + bx + c = 0 \overset{\cdot (4a)}{\Leftrightarrow} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama **discriminante** del polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ al número:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta = 0$ la única solución de la ecuación es: $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ la ecuación carece de soluciones reales.
- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2 **Se quieren plantar árboles a lo largo de un paseo con una distancia de 8 m entre dos consecutivos. Se ha comenzado por plantar los árboles de los extremos, y se ha comprobado que distan 168 m. ¿Cuántos árboles quedan por plantar?**

El número x de árboles que faltan por plantar cumple que $8(x+1)=168$, luego $8x+8=168$, es decir, $8x=160$, y por tanto, $x=20$.

Es decir, faltan 20 árboles por plantar.

3 **Calcula, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

La ecuación tiene una única solución, pues el discriminante es:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 4=0$$

Dicha solución es $x=2$.

c) $x^2 + 5x + 7 = 0$

La ecuación $x^2+5x+7=0$ carece de soluciones reales pues:

$$\Delta=5^2-4\cdot 7=-3<0$$

4 **Los nietos de Carmen se envían postales durante el verano. Cada uno de ellos envía una postal a los restantes. ¿Cuántos nietos tiene Carmen si han enviado 12 postales?**

Si Carmen tiene x nietos cada uno ha enviado $x-1$ postales, porque no se envía postal a sí mismo.

Por tanto, el número de postales intercambiadas es $x(x-1)$, y se trata de encontrar las soluciones de la ecuación:

$$x(x-1)=12 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 12}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}$$

Como el número de nietos de Carmen no es negativo, deducimos que tiene $x=4$ nietos.

Un número $x = x_0$ es **solución** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ si y solo si $x = x_0$ es **raíz del polinomio** $P(x) = ax^2 + bx + c$.

5 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los números $x = 7$ y $x = 11$.**

Las raíces del polinomio:

$$P(x) = (x - 7) \cdot (x - 11) = x^2 - 18x + 77$$

son $x = 7$ y $x = 11$, luego $x^2 - 18x + 77 = 0$ es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son los números dados.

6 **Encuentra el polinomio mónico de segundo grado que tenga a $x = 1$ y $x = 9$ por raíces.**

Por el Teorema del resto, el polinomio buscado ha de ser múltiplo de los polinomios $x - 1$ y $x - 9$.

Luego el polinomio pedido es:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 9) = x^2 - 10x + 9$$

Identidades notables

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

7 **Calcula:**

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

b) $(2x - 3x^2)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3x^2) + (3x^2)^2 = 4x^2 - 12x^3 + 9x^4$

c) $(x^3 + 4x) \cdot (x^3 - 4x) = (x^3)^2 - (4x)^2 = x^6 - 16x^2$

d) $(-2x - 5)^2 = (-2x)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

e) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$

f) $(3x^6 - x^2)^2 = (3x^6)^2 - 2 \cdot (3x^6) \cdot (x^2) + (x^2)^2 = 9x^{12} - 6x^8 + x^4$

4.2. Resolución de ecuaciones mediante ensayo y error

Resolver una ecuación mediante ensayo y error consiste en elegir un candidato a solución y comprobar si efectivamente lo es.

- En caso afirmativo, habremos resuelto el problema.
- En caso contrario, se repite el proceso con un segundo candidato.
- Procedemos así sucesivamente, hasta encontrar la solución o una aproximación a la misma.

Obsérvese que la elección de los candidatos a posibles soluciones no debe ser arbitraria. Conviene seguir algún algoritmo de modo que cada paso suponga una mejor aproximación a la solución.

Ejemplo:

Buscamos un número entero que satisfaga que al elevarlo al cubo y sumarle su doble obtenemos el cuádruple de su cuadrado menos tres.

Lo anterior se traduce en que debemos encontrar una solución entera de la ecuación:

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 3 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$$

O lo que es igual, una raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

Observamos que:

$$P(2) = -1 < 0 \text{ y } P(10) = 623 > 0$$

Esto nos lleva a ensayar con un valor mayor que $x_1 = 2$ y menor que $x_2 = 10$, por ejemplo con el punto medio $x_3 = 6$:

$$P(6) = 87 > 0$$

Repetimos el ensayo con el punto medio de $x_1 = 2$ y $x_3 = 6$, esto es, con $x_4 = 4$.

Así, como $P(4) = 11 > 0$, volvemos a intentarlo ahora con el punto medio de $x_1 = 2$ y $x_4 = 4$, es decir con $x_5 = 3$.

Pero $P(3) = 0$, luego hemos encontrado el número buscado.

Obsérvese que tal y como hemos visto en el tema anterior las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ son divisores del término independiente, que es 3; luego, otro modo de emplear el método de ensayo y error es probar si alguno de los divisores enteros de 3, es decir, alguno de los números ± 1, ± 3 es solución de la ecuación.

8 **Calcula las edades de dos hermanos sabiendo que su producto es 28 aæos y la suma de sus cuadrados es 65 aæos.**

Expresamos 28 como producto de dos factores de números naturales de todas las formas posibles, es decir:

$$28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$$

Si denotamos por x la edad del menor y por y la del mayor, de lo anterior deducimos que los candidatos a solución son:

- $x = 1$; $y = 28$, pero $1^2 + 28^2 = 785 \neq 65$
- $x = 2$; $y = 14$, pero $2^2 + 14^2 = 200 \neq 65$
- $x = 4$; $y = 7$, que satisface $4^2 + 7^2 = 65$

Por tanto, las edades de los dos hermanos son 4 y 7 aæos.

9 **Encuentra las soluciones enteras de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 5x - 20 = 0$.**

Los candidatos a solución entera de la ecuación anterior son los divisores enteros de -20, estos son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

Denotamos $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 20$ y evaluamos:

$P(-1) = -30$	$P(1) = -18$	$P(2) = -18$	$P(-2) = -54$
$P(4) = 0$	$P(-4) = -168$	$P(5) = 30$	$P(-5) = -270$
$P(10) = 630$	$P(-10) = -1\,470$	$P(20) = 6\,480$	$P(-20) = -9\,720$

Por tanto, la única raíz entera de la ecuación es $x = 4$.

10 **Calcula, mediante ensayo y error, dos enteros positivos consecutivos cuyo producto es 306.**

Si x es el menor de los números buscados se trata de resolver la ecuación de segundo grado $x(x + 1) = 306$.

En lugar de resolver esta ecuación razonamos de otro modo, dándonos cuenta de que como x y $(x + 1)$ no son muy distintos, deben parecerse a:

$$\sqrt{306} \cong 17{,}5$$

De hecho $x = 17$ y $x + 1 = 18$ son los enteros buscados.

4.3. Otros tipos de ecuaciones

Ecuaciones bicuadradas

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las de la forma $\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ con $a \neq 0$. Para resolverlas se denota $y = x^2$ y se sustituye en la ecuación dada, lo que proporciona $ay^2 + by + c = 0$.

- Si $b^2 < 4ac$ esta ecuación carece de soluciones reales, y lo mismo le sucede a la de partida.
- Si $b^2 \geq 4ac$ las soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que las soluciones de la ecuación inicial son:

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{y_1};\ x_{3;4} = \pm\sqrt{y_2},\ \text{siempre que } y_i \geq 0$$

11 Resuelve la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Ponemos $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

Entonces, $x_{1;2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ *y* $x_{3;4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ *son las soluciones de la ecuación del enunciado.*

Ecuaciones polinómicas resolubles por factorización

En el tema anterior aprendimos a calcular las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Combinando esto con el método de resolución de las ecuaciones de segundo grado se obtienen en algunos casos las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado superior.

Ejemplo:

Resolvamos la ecuación $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Las posibles raíces racionales del polinomio son ± 1, pues son los divisores enteros de su término independiente. Dividiendo por $x - 1$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)\cdot(x^2 - 3x + 1)$$

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ son: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación de partida son 1, $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

12 Resuelve la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

Es claro que $x = 1$ es una solución de la ecuación. Dividiendo por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \quad x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, pues su discriminante es $\Delta = -3 < 0$, luego la única raíz real de $x^3 - 1 = 0$ es $x = 1$.

Ecuaciones con fracciones algebraicas

Para resolver estas ecuaciones multiplicamos los dos miembros por el polinomio que es mínimo común múltiplo de los polinomios que aparecen en los denominadores. Obtenemos así una ecuación polinómica.

Es importante comprobar que las soluciones obtenidas no anulan los denominadores.

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $0 = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 1} - \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}$ pasamos de miembro y factorizamos los denominadores, esto es:

$$\frac{x}{(x + 1)^2} = \frac{x - 1}{(x - 3) \cdot (x + 1)}$$

Multiplicamos ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $(x + 1)^2 \cdot (x - 3)$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$x(x - 3) = (x - 1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = x^2 - 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

13 Resuelve la ecuación: $\dfrac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 49} - \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x - 7}$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$\frac{x-2}{(x+1)\cdot(x+7)} = \frac{2x-5}{(x+7)\cdot(x-7)} - \frac{x-2}{(x+1)\cdot(x-7)}$$

Y multiplicando por $(x + 1) \cdot (x + 7) \cdot (x - 7)$ resulta:

$$(x - 2) \cdot (x - 7) = (2x - 5) \cdot (x + 1) - (x - 2) \cdot (x + 7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 2x^2 - 3x - 5 - x^2 - 5x + 14 \Leftrightarrow x = 5$$

14 ¿Tiene alguna solución la siguiente ecuación: $0 = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$?

Multiplicando por $x^2 - 1$, la ecuación se convierte en:

$$0 = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)+2x-(x+1)}{x^2-1} = \frac{2x-2}{x^2-1} \Rightarrow 0 = 2x-2 \Rightarrow x = 1$$

Pero $x = 1$ anula dos denominadores, luego la ecuación no tiene soluciones.

Ecuaciones irracionales

Una estrategia para resolver algunas ecuaciones en las que aparecen raíces cuadradas de polinomios es elevar al cuadrado para eliminar las raíces, pero hay que tener cuidado, pues en el proceso podemos introducir falsas soluciones.

Ejemplo:

Resolvamos la ecuación $x + \sqrt{x} = 6$.

Despejamos, $\sqrt{x} = 6 - x$, y elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x = (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 = 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son $x_1 = 9$ y $x_2 = 4$.

¡Pero hemos de comprobar si son soluciones de la ecuación de partida!

- Para $x_1 = 9$ se tiene $x + \sqrt{x} = 9 + \sqrt{9} = 12 \neq 6$, luego $x = 9$ no es solución.
- Para $x_2 = 4$ tenemos $x + \sqrt{x} = 4 + \sqrt{4} = 6$, luego $x = 4$ sí es solución.

En consecuencia, la única solución de la ecuación propuesta es $x = 4$.

15 Resuelve la ecuación: $\sqrt{x+1} + x = 5$

Despejamos $\sqrt{x+1} = 5 - x$, y elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (5-x)^2 \Rightarrow x+1 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 11x + 24 \Leftrightarrow x_1 = 8; x_2 = 3$$

Comprobamos si son soluciones de la ecuación de partida:

- *Para $x_1 = 8$ se tiene $\sqrt{x+1} + x = \sqrt{8+1} + 8 = 11 \neq 5$, luego $x = 8$ no es solución.*
- *Para $x_2 = 3$ se tiene $\sqrt{x+1} + x = \sqrt{3+1} + 3 = 5$, luego $x = 3$ sí es solución.*

4.4. Inecuaciones de primer y segundo grado

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Se llaman **soluciones de una inecuación** todos los números reales que sustituidos en la incógnita satisfacen la desigualdad.

16 **¿A cuáles de las soluciones de las siguientes inecuaciones pertenece $x = 3$?**

a) $3x - 7 \geq 0$

b) $x^2 - x + 4 < 0$

c) $x^3 - 2x^2 \leq 3x - 1$

d) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

Inecuación	Sustituimos $x = 3$ en la inecuación	¿Pertenece $x = 3$ a la solución?
$3x - 7 \geq 0$	$3 \cdot 3 - 7 = 2 \geq 0$	Sí
$x^2 - x + 4 < 0$	$3^2 - 3 + 4 = 10 < 0$	No
$x^3 - 2x^2 \leq 3x - 1$	$3^3 - 2 \cdot 3^2 \leq 3 \cdot 3 - 1 \Leftrightarrow 9 \leq 8$	No
$2x^2 - 5x - 3 \leq 0$	$2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 0 \leq 0$	Sí

Para resolver inecuaciones resultan útiles las siguientes **propiedades** relativas al comportamiento de las desigualdades respecto de la suma y el producto.

Sean a, b y c tres números reales. Entonces:

- Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Si $a > 0$ y $b \leq c \Rightarrow ab \leq ac$
- Si $a < 0$ y $b \leq c \Rightarrow ab \geq ac$
- Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- Si $a > 0$ y $b < c \Rightarrow ab < ac$
- Si $a < 0$ y $b < c \Rightarrow ab > ac$

De aquí se desprenden unas **reglas** útiles para resolver inecuaciones, llamadas **de los signos:**

- El producto $ab > 0$ si y solo si a y b son no nulos y tienen el mismo signo.
- El producto $ab \geq 0$ si y solo si bien a o b son nulos, o bien son no nulos y tienen el mismo signo.
- El producto $ab < 0$ si y solo si a y b son no nulos y tienen distinto signo.
- El producto $ab \leq 0$ si y solo si bien a o b son nulos, o bien son no nulos y tienen distinto signo.

17 **¿Cuál de las siguientes inecuaciones carece de soluciones?**

a) $3x^2 + 2 \geq 0$ **b)** $5x^2 + 10 < 0$ **c)** $15x - 45 \leq 0$

La inecuación $5x^2 + 10 < 0$ carece de soluciones pues es $x^2 \geq 0$ para cada número real x, luego: $5x^2 \geq 0 \Rightarrow 5x^2 + 10 \geq 10 > 0$

Las otras dos tienen soluciones; cualquier número real lo es de la primera y, por ejemplo, $x = 0$ lo es de la segunda.

Dos **inecuaciones** se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

donde $a \neq 0$

Para resolverlas emplearemos las propiedades anteriores sobre las desigualdades.

Ejemplo:

Resolvamos la siguiente inecuación: $\dfrac{3x+1}{3} - \dfrac{x-1}{2} \leq \dfrac{x+5}{12}$

Multiplicamos por 12 los dos miembros de la desigualdad:

$$4(3x + 1) - 6(x - 1) \leq x + 5$$

Eliminamos los paréntesis y simplificamos:

$$12x + 4 - 6x + 6 \leq x + 5 \Leftrightarrow 6x + 10 \leq x + 5$$

Se resta 10 a los dos miembros de la inecuación:

$$6x + 10 - 10 \leq x + 5 - 10 \Leftrightarrow 6x \leq x - 5$$

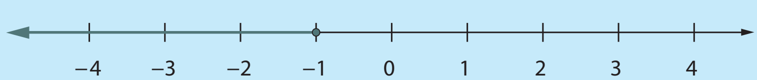
Restamos x en los dos miembros:

$$6x - x \leq x - 5 - x \Leftrightarrow 5x \leq -5$$

Multiplicamos por $\dfrac{1}{5}$ los dos miembros:

$$\left(\frac{1}{5}\right) \cdot 5x \leq \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) \Leftrightarrow x \leq -1$$

Escribimos la solución en forma de intervalo: $x \in (-\infty, -1]$



18 **Escribe en forma de intervalo las soluciones de las siguientes inecuaciones:**

a) $3x + 4 \geq 0$

$3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

Por lo que las soluciones son los puntos del intervalo:

$$x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

b) $2x - 3 < 4x + 9$

$2x - 3 < 4x + 9 \Leftrightarrow 2x - 4x < 9 + 3 \Leftrightarrow -2x < 12 \Leftrightarrow x > -6$

Escribimos la solución en forma de intervalo:

$$x \in (-6, +\infty)$$

c) $4(x + 3) - 2x > 4x + 4$

$4(x + 3) - 2x > 4x + 4 \Leftrightarrow 4x + 12 - 2x > 4x + 4 \Leftrightarrow 2x + 12 > 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x > -8 \Leftrightarrow x < 4$

En forma de intervalo:

$$x \in (-\infty, 4)$$

d) $\frac{7x - 13}{2} \leq \frac{2x - 4}{5}$

$\frac{7x - 13}{2} \leq \frac{2x - 4}{5} \Leftrightarrow 5(7x - 13) \leq 2(2x - 4) \Leftrightarrow 35x - 65 \leq 4x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31x \leq 57 \Leftrightarrow x \leq \frac{57}{31}$

En forma de intervalo:

$$x \in \left(-\infty, \frac{57}{31}\right]$$

e) $\frac{x - 3}{5} + \frac{3x + 5}{2} \geq \frac{x}{4} - \frac{3x - 6}{2}$

$\frac{x - 3}{5} + \frac{3x + 5}{2} \geq \frac{x}{4} - \frac{3x - 6}{2} \Leftrightarrow 4(x - 3) + 10(3x + 5) \geq 5x - 10(3x - 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 12 + 30x + 50 \geq 5x - 30x + 60 \Leftrightarrow 34x + 38 \geq 60 - 25x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 59x \geq 22 \Leftrightarrow x \geq \frac{22}{59}$

Escribimos la solución en forma de intervalo:

$$x \in \left[\frac{22}{59}, +\infty\right)$$

Una **inecuación de segundo grado con una incógnita** es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas, donde $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c > 0;\ ax^2 + bx + c \leq 0;\ ax^2 + bx + c \geq 0$$

Para resolverlas factorizamos sus polinomios y empleamos tablas en las que estudiamos el signo de cada uno de los factores en los diversos intervalos en los que queda dividida la recta real por las raíces del polinomio.

Ejemplo:

Resolvamos la inecuación: $x^2 - 11x + 28 \leq 0$

Comenzamos calculando las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 11x + 28$, que son:

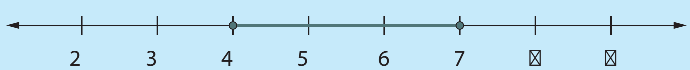
$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{cases} 7 \\ 4 \end{cases}$$

Esto implica, por el teorema del resto, que: $P(x) = (x - 4) \cdot (x - 7)$. Descomponemos la recta real en los siguientes intervalos disjuntos dos a dos: $(-\infty, 4)$, $(4, 7)$, $(7, +\infty)$

En cada uno de ellos es inmediato conocer el signo de los factores, y el de su producto $P(x)$ se calcula empleando la regla de los signos:

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, 7)$	7	$(7, +\infty)$
$(x - 4)$	–	0	+	+	+
$(x - 7)$	–	–	–	0	+
$(x - 4)(x - 7)$	+	0	–	0	+

Por tanto, la solución de la inecuación $x^2 - 11x + 28 \leq 0$ es $x \in [4, 7]$.



19 Resuelve la inecuación: $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$. Se tiene entonces la siguiente tabla de signos:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$(x - 2)$	–	0	+	+	+
$(x - 3)$	–	–	–	0	+
$(x - 2)(x - 3)$	+	0	–	0	+

Las soluciones son los puntos de la unión de dos intervalos abiertos:

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

Algunos polinomios de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ tienen **signo constante** en la recta real: son aquéllos cuyo **discriminante es negativo.**

En tal caso las inecuaciones

$$ax^2 + bx + c < 0;\; ax^2 + bx + c > 0;\; ax^2 + bx + c \le 0;\; ax^2 + bx + c \ge 0$$

o carecen de soluciones, o bien tienen por solución el conjunto de todos los números reales.

20 Resuelve las inecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 5 \le 0$

El discriminante de $P(x) = x^2 - 4x + 5$ es $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 < 0$ luego $P(x)$ tiene signo constante en la recta real.

Como $P(0) = 5 > 0$ entonces $P(x) > 0$ para cada número real x.

Por tanto esta inecuación carece de soluciones.

b) $x^2 - 6x + 9 \ge 0$

El discriminante del polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 9$ es $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$, luego este polinomio tiene una única raíz, que es 3.

Por tanto, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \ge 0$ para cada número real x, así que todos los números reales son solución de esta inecuación.

21 ¿Para qué valores del número real x tiene sentido la expresión $\sqrt{5x - 4 - x^2}$ como número real?

Se trata de averiguar quØ valores de x cumplen $5x - 4 - x^2 \ge 0$, o sea $x^2 - 5x + 4 \le 0$.

Las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 4$ son $x = 1$ y $x = 4$ lo que implica que $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 4)$. Analizamos su signo:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$(x-1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto, la expresión del enunciado tiene sentido como número real si y sólo si x pertenece al intervalo cerrado $[1, 4]$.

22 **Un mago pide dinero a Juan; el mago triplica por arte de magia el dinero que le da, pero luego se queda con 50 € por el trabajo realizado, y le devuelve a Juan lo que queda. Juan mira el dinero recibido y observa que el mago le ha devuelto menos de 100 €. ¿Qué se puede decir de la cantidad que inicialmente Juan le dio al mago?**

Si x es el número de € que Juan le dio al mago, este lo convirtió en $3x$, y le devolvió $3x - 50$ €.

Pero $3x - 50 < 100$, o sea $x < \dfrac{150}{3} = 50$.

Por tanto, Juan le dio al mago menos de 50 €.

23 **El número de cerdos en una granja es mayor que el de ovejas más 2, y el de ovejas es mayor que el triple del de gallinas más 4. Sabiendo que el número total de animales de estas tres especies es menor que 76, ¿cuál es el máximo número de gallinas?**

Si llamamos x al número de gallinas de la granja, el de ovejas es mayor que $3x + 4$, luego es mayor o igual que $3x + 5$ y el de cerdos es mayor que $3x + 7$, luego es mayor o igual que $3x + 8$.

Por tanto, el número total de animales de estas especies es mayor o igual que $x + (3x + 5) + (3x + 8) = 7x + 13$, pero es menor o igual que 75.

Como x es un número entero tenemos entonces:

$$7x + 13 \leq 75 \Rightarrow 7x \leq 62 \Rightarrow x \leq \frac{62}{7} \Rightarrow x \leq 8$$

Es decir, en la granja hay, a lo sumo, 8 gallinas.

24 **Un niño tiene gomas, lápices y sacapuntas en su estuche. El número total de objetos es menor que 27, el número de gomas es mayor que el de sacapuntas más 2, y el de lápices es mayor que el doble del de gomas más 2. ¿Cuál es el número máximo de sacapuntas en el estuche?**

Sea x el número de sacapuntas. El número de gomas es mayor que $x + 2$, luego mayor o igual que $x + 3$, y el número de lápices es mayor que $2(x + 3) + 2$, luego es mayor o igual que $2(x + 3) + 3 = 2x + 9$. Como el estuche tiene, a lo sumo, 26 objetos, tenemos:

$$x + (x + 3) + (2x + 9) \leq 26 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

Y como x es entero, se deduce que $x \leq 3$ es decir, a lo sumo hay 3 sacapuntas.

Evaluación

1 **El perímetro de un triángulo mide 13 cm. Calcula lo que mide cada lado sabiendo que el lado menor mide la mitad que el mayor y este mide 2 cm más que el mediano.**

Si x es la longitud en cm del lado menor, la longitud del lado mayor es $2x$, y el tercer lado mide $2x-2$.

Por tanto: $x+(2x-2)+2x=13 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$

En consecuencia, los lados de este triángulo miden 3, 4 y 6 cm.

2 **Dentro de 3 años mi edad será el cuadrado de la edad que tenía hace 3. ¿Cuántos años tengo?**

Si tengo actualmente x años hace 3 tuve $x-3$, mientras que dentro de 3 años mi edad será $x+3$. Por tanto:

$$x+3=(x-3)^2=x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}1\\6\end{cases}$$

La solución $x=1$ carece de sentido, pues se desprende del enunciado que tengo al menos 3 años.

Por ello mi edad es de $x=6$ años.

3 **¿Qué edad tiene Irene, sabiendo que la que tenía hace 6 años es la raíz cuadrada de la que tendrá dentro de 6?**

Si llamamos x a la edad actual de Irene el enunciado dice:

$$x-6=\sqrt{x+6} \Rightarrow (x-6)^2=x+6 \Rightarrow x^2-13x+30=0 \Rightarrow x=3;\ x=10$$

Hay que desechar la solución $x=3$, pues del enunciado se desprende que $x>6$, mientras que $x=10$ sí satisface el enunciado.

4 **Encuentra las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números enteros consecutivos.**

Sean x, $x+1$ y $x+2$ las longitudes de los lados. Por el Teorema de Pitágoras:

$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=2x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$

Y las soluciones son: $x=3$; $x=-1$. Como las longitudes de los lados son números positivos, la solución es $x=3$.

Por tanto, los catetos de este triángulo miden 3u y 4u y la hipotenusa mide 5u.

5 **Calcula para qué números reales a, la ecuación $x^2 - ax + 9 = 0$ tiene una única solución.**

El discriminante $\Delta = a^2 - 4 \cdot 9$ del polinomio $P(x) = x^2 - ax + 9$ ha de ser nulo, luego $a^2 = 36$, por lo que los números buscados son $a = -6$ y $a = 6$. Entonces nos queda:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \text{ y } x^2 - 6x + 9 = (x+3)^2$$

6 **Encuentra tres números naturales impares consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los dos menores exceda en 9 al cuadrado del mayor.**

Tres números naturales impares consecutivos se escriben como $2x+1$, $2x+3$ y $2x+5$ donde x es un entero. Así la condición del enunciado se escribe:

$$(2x+1)^2+(2x+3)^2=9+(2x+5)^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1+4x^2+12x+9=9+4x^2+20x+25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x-24=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Como los números buscados han de ser positivos, la solución $x=-2$ no se tiene en cuenta, así que $x=3$, por lo que los números buscados son 7, 9 y 11.

7 **Calcula todos los números reales que cumplen $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.**

No hace falta resolver ninguna ecuación para darse cuenta de que cada número real x cumple que $x^4 \geq 0$ y $x^2 \geq 0$, por lo que $x^4 + 7x^2 + 12 \geq 12 > 0$, así que la ecuación del enunciado no tiene ninguna solución real.

8 **Encuentra todos los números reales que cumplen la inecuación $\dfrac{x-4}{x+5} \geq 0$.**

Este cociente se anula, únicamente, para $x=4$ y no tiene sentido para $x=-5$.

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-4)}{(x+5)}$	$+$		$-$	0	$+$

Por tanto, las soluciones de la inecuación del enunciado son: $x \in (-\infty, -5) \cup [4, +\infty)$

5 Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son números reales, y x e y son las incógnitas. Se llaman **soluciones** de esta ecuación lineal a todos los pares de números reales (x_0, y_0) tales que:

$$ax_0 + by_0 = c$$

La representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta del plano, cuyos puntos tienen por coordenadas las soluciones de la ecuación.

Sistemas de dos ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas, que escribimos así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se llaman **soluciones** de este sistema a todos los pares de números reales que son soluciones de ambas ecuaciones lineales.

1 Indica cuáles de los siguientes pares son solución de la ecuación:

$$3x + 2y = 5$$

a) (1, 2) **b)** (3, –2) **c)** (1, 1)

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se observa que (1, 2) no es solución y, sin embargo, tanto (3, –2) como (1, 1) sí lo son.

2 Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

a) $-3x + y = -3$

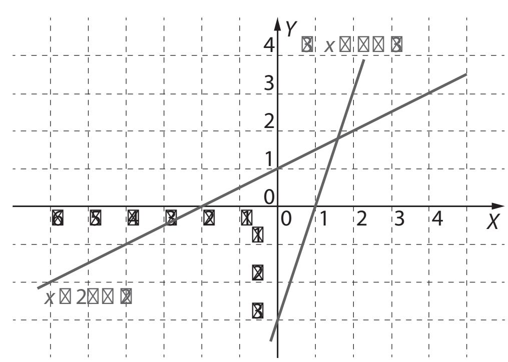
$-3x + y = -3 \Rightarrow y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	–3	0	3

b) $x - 2y = -2$

$x - 2y = -2 \Rightarrow y = \dfrac{x+2}{2}$

x	–2	0	2
y	0	1	2



3 ¿Cuáles de los pares $(-11, 12)$, $(12, 11)$ y $(11, 12)$ son solución del sistema dado?

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se observa que $(-11, 12)$ *y* $(12, 11)$ *no son solución.*

Sin embargo $(11, 12)$ *sí lo es.*

Tipos de sistemas

- La **solución** de un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** está formada por los puntos que comparten las rectas que representan a las ecuaciones del sistema.
- El sistema se llama **incompatible** si carece de soluciones, **compatible determinado** si tiene exactamente una solución y **compatible indeterminado** si tiene más de una.
- Se dice que dos **sistemas son equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Algunos criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones son:
  - Si multiplicamos o dividimos una de las ecuaciones del sistema por un número no nulo entonces el sistema resultante es equivalente al original.
  - Si a una de las ecuaciones del sistema le sumamos o restamos la otra multiplicada por un número no nulo entonces el sistema resultante es equivalente al original.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 5y = -44 \end{cases} \overset{\cdot(-4)}{\Rightarrow} \begin{cases} -4x - 4y = -40 \\ 4x + 5y = -44 \end{cases} \underset{2^a + 1^a}{\Rightarrow} \begin{cases} -4x - 4y = -40 \\ y = -84 \end{cases} \overset{\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\Rightarrow} \begin{cases} -x - y = -10 \\ y = -84 \end{cases}$$

$$\overset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} \begin{cases} -x = -94 \\ y = -84 \end{cases} \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 94 \\ y = -84 \end{cases}$$

4 ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene más de una solución?

Cada ecuación del sistema representa una recta del plano.

Si dos rectas del plano comparten más de un punto entonces son la misma recta, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, que son cada uno de los puntos de la recta que representa a la ecuación dada.

5 Explica cada uno de los pasos dados en la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \overset{a)}{\Rightarrow} \begin{cases} -3x+9y=12 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \overset{b)}{\Rightarrow} \begin{cases} 11y=11 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \overset{c)}{\Rightarrow} \begin{cases} y=1 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \overset{d)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{d)}{\Rightarrow} \begin{cases} y=1 \\ 3x=-3 \end{cases} \overset{e)}{\Rightarrow} \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

a) Multiplicamos la primera ecuación por –3.

b) A la primera ecuación le sumamos la segunda.

c) Multiplicamos por $\frac{1}{11}$ la primera ecuación.

d) A la segunda ecuación le sumamos la primera multiplicada por –2.

e) Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ la segunda ecuación.

Criterios de compatibilidad

El sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$:

- Es **compatible determinado** si y solo si se cumple que: $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$
- Es **compatible indeterminado** si y solo si los coeficientes son proporcionales, esto es, si y solo si existe un número real t tal que: $(a_1, b_1, c_1) = t \cdot (a_2, b_2, c_2)$
- Es **incompatible** si y solo si existe un número real t tal que: $(a_1, b_1) = t \cdot (a_2, b_2)$ pero $c_1 \neq t \cdot c_2$

Ejemplos:

El sistema $\begin{cases} 7x-y=2 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ es compatible determinado pues: $7 \cdot 1 \neq 3 \cdot (-1)$

El sistema $\begin{cases} 12x-21y=33 \\ 4x-7y=11 \end{cases}$ es compatible indeterminado pues: $(12, -21, 33) = 3(4, -7, 11)$

El sistema $\begin{cases} -8x+6y=2 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$ es incompatible pues: $(-8, 6) = (-2) \cdot (4, -3)$ y $2 \neq (-2) \cdot 7$

6 **Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x = 7 \\ -3x - y = 1 \end{cases}$

$2 \cdot (-1) \neq (-3) \cdot 0 \Rightarrow$ *Sistema compatible determinado*

b) $\begin{cases} -8x + 16y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

$(-8, 16) = (-8) \cdot (1, -2)$ y $-5 \neq (-8) \cdot 3 \Rightarrow$ *Sistema incompatible*

c) $\begin{cases} 9x - 21y = 0 \\ 3x - 7y = 0 \end{cases}$

$(9, -21, 0) = 3(3, -7, 0) \Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado*

7 **Calcula el valor de a sabiendo que el sistema $\begin{cases} 6x + ay = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ es incompatible.**

Para que el sistema no sea compatible determinado es necesario que:

$$6 \cdot 2 = 3a \Rightarrow a = 4$$

Como $(6, 4) = 2 \cdot (3, 2)$ y $3 \neq 2 \cdot 1$, *el sistema es incompatible para* $a = 4$.

8 **Escribe un sistema incompatible, otro compatible determinado y otro compatible indeterminado.**

Por ejemplo:

- El sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ *es compatible indeterminado, pues:* $(4, -2{,}2) = 2 \cdot (2, -1{,}1)$

  Tenemos que $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y $(x_1, y_1) = (0, -1)$ *son dos soluciones distintas del mismo.*

- El sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ *es incompatible, pues:* $(2, -1) = 1 \cdot (2, -1)$ y $1 \neq 1 \cdot 2$

- El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ *es compatible determinado ya que:* $1 \cdot 1 \neq 1 \cdot (-1)$

5.2. Métodos de sustitución, reducción e igualación

Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra.

Ejemplo: Resolvamos por el método de sustitución el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$, que es compatible determinado ya que: $3 \cdot 3 \neq 2 \cdot 2$.

1. Despejamos y en la primera ecuación: $y = \dfrac{1-3x}{2}$
2. Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$7 = 2x + 3 \cdot \left(\frac{1-3x}{2}\right) \Leftrightarrow 14 = 4x + 3 - 9x \Leftrightarrow 5x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-11}{5}$$

3. Sustituimos en la ecuación $y = \dfrac{1-3x}{2}$ el valor de x que hemos encontrado:

$$y = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-3\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)}{2} = \frac{5+33}{10} = \frac{19}{5}$$

4. Solución: $\left(\dfrac{-11}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$

9 **Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x + y = 13 \end{cases}$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x = 13 - y$. Sustituimos este valor en la primera:

$$2x - 3y = -14 \Leftrightarrow 2 \cdot (13 - y) - 3y = -14 \Leftrightarrow 26 - 5y = -14 \Leftrightarrow y = 8$$

Así $x = 13 - y = 13 - 8 = 5$. Por lo tanto la solución al sistema es: $(5, 8)$

b) $\begin{cases} 4x + 0{,}3y = 16{,}9 \\ 0{,}5x - 3y = -7 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 10 y la segunda por 2, de modo que tenemos:

$$\begin{cases} 4x + 0{,}3y = 16{,}9 \\ 0{,}5x - 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x + 3y = 169 \\ x - 6y = -14 \end{cases}$$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x = 6y - 14$. Sustituimos este valor en la primera:

$$40 \cdot (6y - 14) + 3y = 169 \Leftrightarrow 240y - 560 + 3y = 169 \Leftrightarrow 243y = 729 \Leftrightarrow y = 3$$

Así $x = 6y - 14 = 6 \cdot 3 - 14 = 4$. Por tanto, la solución al sistema es: $(4, 3)$

10 **La edad de un padre es hoy triple de la de su hijo. Dentro de 14 años será el doble de la que entonces tenga su hijo. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno?**

Denotamos por x e y los años que tienen actualmente el hijo y el padre, respectivamente.

Así: $\begin{cases} y = 3x \\ y + 14 = 2 \cdot (x + 14) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ -2x + y = 14 \end{cases}$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda: $-2x + 3x = 14 \Leftrightarrow x = 14$

De aquí concluimos que las edades del hijo y del padre son 14 y 42 años, respectivamente.

Método de reducción

Consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por números adecuados de modo que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sean opuestos. Hecho esto se suman las ecuaciones resultantes, con lo que se obtiene una ecuación de grado 1 con una incógnita.

Ejemplo: Resolvamos por el método de reducción el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado puesto que $3 \cdot (-7) \neq 4 \cdot 8$. Multiplicamos la primera ecuación por 8 y la segunda por -3 y las sumamos:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 8} \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{array} \begin{cases} 24x + 32y = 56 \\ -24x + 21y = -3 \end{cases} \overset{1^a+2^a}{\Rightarrow} 53y = 53 \Rightarrow y = 1$$

Obtenido el valor $y = 1$ lo remplazamos en una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y resulta $3x + 4 \cdot 1 = 7$, así que $x = 1$.

11 **Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

Sumamos:

$9x = 18 \Rightarrow x = 2$

Sustituimos en la primera ecuación:

$2 \cdot 2 + y = 7 \Rightarrow y = 3$

b) $\begin{cases} 0,2x + 5y = 7 \\ 0,3x + 0,4y = 3,4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0,2x + 5y = 7 \\ 0,3x + 0,4y = 3,4 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 30} \\ \xrightarrow{\cdot(-20)} \end{array} \begin{array}{l} 6x + 150y = 210 \\ -6x - 8y = -68 \end{array}$$

Sumamos:

$142y = 142 \Rightarrow y = 1$

Sustituimos en la primera ecuación:

$0,2x + 5 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 0,2x = 2 \Rightarrow x = 10$

12 **En una fiesta hay 10 chicas más que chicos y, tras llegar 5 chicas más, el número de chicas es el doble del de chicos. ¿Cuántas personas había al comenzar la fiesta?**

Sean x el número de chicas al comenzar la fiesta e y el de chicos. Los datos del enunciado se traducen en el siguiente sistema: $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $y = 15$, luego, $x = y + 10 = 25$. Por tanto, al comenzar la fiesta había $x + y = 40$ personas.

Mé todo de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados obtenidos. Conseguimos así una ecuación con una incógita.

Ejemplo: Resolvamos por el método de igualación el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 7y = 10 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado pues $2 \cdot (-7) \neq 3 \cdot 3$. Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo x, en ambas ecuaciones: $x = \dfrac{-(1+3y)}{2}$, $x = \dfrac{10+7y}{3}$. Igualando ambas expresiones se tiene:

$$\frac{-(1+3y)}{2} = \frac{10+7y}{3} \Leftrightarrow -3(1+3y) = 2(10+7y) \Leftrightarrow -3-9y = 20+14y$$

Es decir, $23y = -23$, luego, $y = -1$. Para hallar el valor de x sustituimos:

$$x = \frac{10+7y}{3} = \frac{10+7\cdot(-1)}{3} = 1$$

13 **Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ -3x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5y - 8 \\ x = \dfrac{y-10}{3} \end{cases}$

Igualando ambas expresiones:

$$5y - 8 = \frac{y-10}{3} \Leftrightarrow 15y - 24 = y - 10$$
$$\Leftrightarrow 14y = 14 \Leftrightarrow y = 1$$

Para hallar el valor de x sustituimos:

$$x = 5y - 8 = 5 \cdot 1 - 8 = -3$$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9-5y}{3} \\ x = \dfrac{6-3y}{2} \end{cases}$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{9-5y}{3} = \frac{6-3y}{2} \Leftrightarrow$$
$$18 - 10y = 18 - 9y \Leftrightarrow y = 0$$

Para hallar el valor de x sustituimos:

$$x = \frac{9-5y}{3} = \frac{9-5\cdot 0}{3} = 3$$

14 **Una madre tiene 25 años más que su hijo, y dentro de 20 años la edad de la madre será doble que la del hijo. ¿Cuánto suman las edades actuales de madre e hijo?**

Si x e y son las edades actuales de la madre y del hijo medidas en años se tiene:

$$\begin{cases} x = y + 25 \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 25 \\ x = 2y + 20 \end{cases}$$

Por igualación, $y + 25 = 2y + 20 \Rightarrow y = 25 - 20 = 5$, mientras que $x = y + 25 = 30$.

Así, las edades actuales del hijo y su madre son 5 y 30 años, cuya suma es 35 años.

Algunos sistemas de dos ecuaciones de grado mayor que uno y con dos incógnitas son tratables por procedimientos muy elementales.

Ejemplo: $\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$. Sustituyendo el valor $y = \dfrac{10}{x}$ en la segunda ecuación queda:

$$x^2 - \left(\frac{10}{x}\right)^2 = 21 \Rightarrow x^2 - \frac{100}{x^2} - 21 = 0 \Rightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$x^2 = \frac{21 + \sqrt{21^2 + 400}}{2} = \frac{21 + 29}{2} = 25$$

De aquí se deduce que $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, y, por tanto: $y = \dfrac{10}{x} = \dfrac{10}{(\pm 5)} = \pm 2$

15 **Calcula las edades de Álvaro e Irene sabiendo que su producto es 28 años, que la suma de los cuadrados de sus edades es 65 años y que Álvaro es el mayor.**

Sean x e y las edades, expresadas en años, de Álvaro e Irene respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x \cdot y = 28 \Rightarrow (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 65 + 56 = 121 \Rightarrow x + y = 11 \\ x^2 + y^2 = 65 \Rightarrow (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 65 - 56 = 9 \Rightarrow x - y = 3 \end{cases}$$

Debemos resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \overset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

Por último: $y = 11 - x = 11 - 7 = 4$

Sus edades son, por tanto, 4 y 7 años.

5.3. Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones

El **método gráfico** para la resolución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, $(S):\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, consiste en representar las rectas de ecuaciones $r_1 \equiv a_1x + b_1y = c_1$ y $r_2 \equiv a_2x + b_2y = c_2$, y estudiar qué puntos comparten.

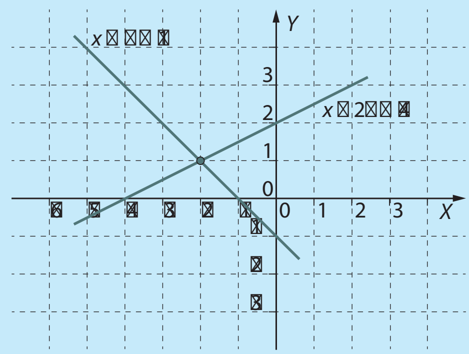
Pueden darse tres casos:

- Si las rectas r_1 y r_2 **se cortan** en un punto (x_0, y_0), **dicho punto es la solución del sistema.**
- Si las rectas r_1 y r_2 **son paralelas,** entonces el **sistema es incompatible.**
- Si las rectas r_1 y r_2 **son coincidentes,** entonces el **sistema es compatible indeterminado** y las soluciones son todos los puntos de la recta.

Ejemplos:

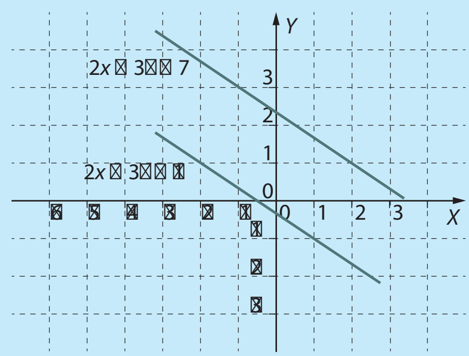
$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Al representar las dos rectas observamos que estas se cortan en el punto (–2, 1), que es, por tanto, la solución al sistema.



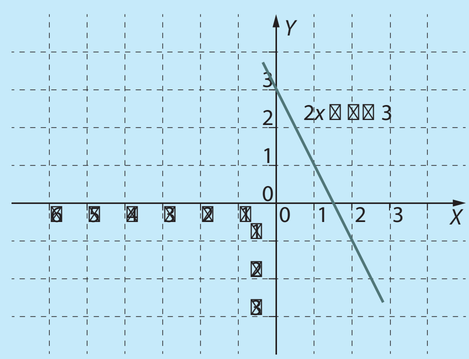
$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Las rectas dibujadas son paralelas, luego no comparten ningún punto. Por tanto, el sistema es incompatible: no tiene solución.



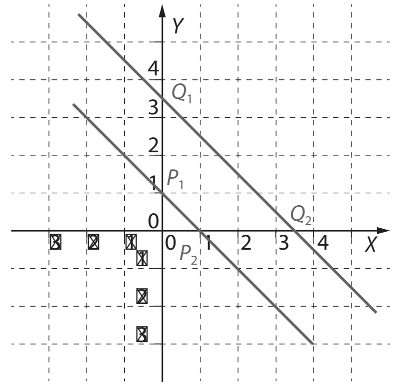
$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$

Las dos ecuaciones son equivalentes pues la segunda es el triple de la primera. Por ello al representarlas observamos que se trata de la misma recta. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, ya que cualquier punto de dicha recta es solución del sistema.



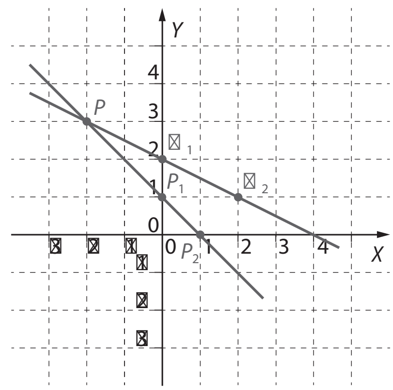
16 Decide gráficamente la naturaleza de los siguientes sistemas de ecuaciones y encuentra sus soluciones cuando las tengan:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$



La primera de estas rectas pasa por los puntos $P_1 = (0, 1)$ y $P_2 = (1, 0)$, mientras que la segunda pasa por los puntos $Q_1 = \left(0, \frac{7}{2}\right)$ y $Q_2 = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Al dibujar las rectas se observa que son paralelas, luego el sistema es incompatible.

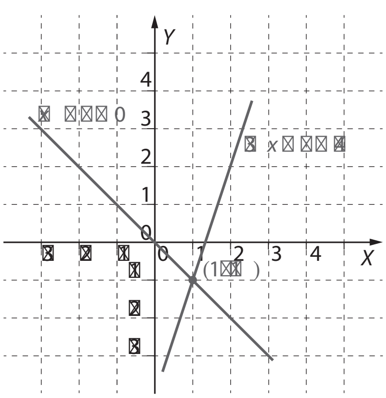
b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$



La segunda de las rectas de este sistema, que llamamos *l*, es la que une los puntos $M_1 = (0, 2)$ y $M_2 = (2, 1)$. Observamos que las rectas se cortan en el punto $P = (-2, 3)$, que es, por tanto, la única solución de este sistema.

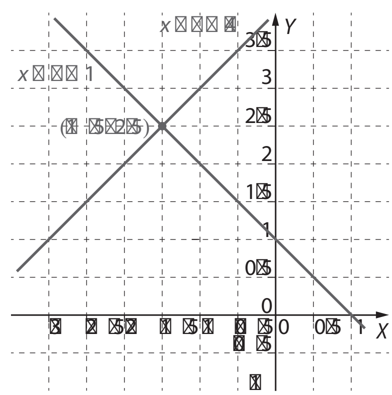
17 Resuelve los siguientes sistemas por el método gráfico:

a) $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$



Solución: $(1, -1)$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$

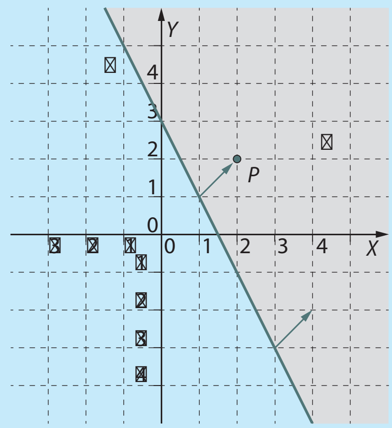


Solución: $(-1{,}5;\ 2{,}5)$

5.4. Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado

Semiplanos

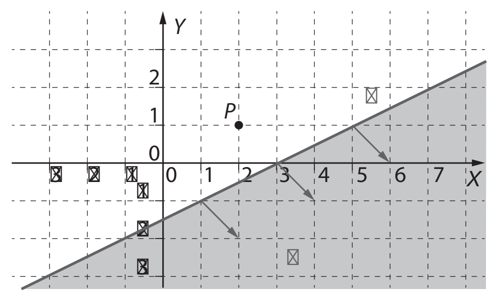
Dados los números reales a, b y c tales que $(a, b) \neq (0, 0)$, el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $ax + by = c$ es una recta, que llamamos r. Los conjuntos de puntos tales que $ax + by \geq c$ o $ax + by \leq c$ son los **semiplanos cerrados definidos por *r*,** y los conjuntos de puntos tales que $ax + by > c$ o $ax + by < c$ son los **semiplanos abiertos definidos por *r*.** Los primeros contienen a la recta r, y los segundos no la cortan.



Ejemplo: En la figura ilustramos el caso en que la recta r es $2x + y = 3$. Para decidir cuál de los dos semiplanos en que r descompone al plano es ⊠: $2x + y \geq 3$ basta tomar un punto cualquiera del plano que no pertenezca a r, por ejemplo el punto de coordenadas $P = (2, 2)$, y comprobar si está o no en el semiplano ⊠. En este caso $2 \cdot 2 + 2 = 6 \geq 3$, luego ⊠ es el semiplano que contiene a P.

18 **Sombrea el semiplano cerrado ⊠: $x - 2y \geq 3$. ¿Contiene al punto $P = (2, 1)$?**

Dibujamos la recta r: $x - 2y = 3$. Al sustituir las coordenadas del punto P en la inecuación observamos que $2 - 2 \cdot 1 = 0 < 3$, luego el semiplano ⊠ es, de los dos en que r divide al plano, el que no contiene a P.

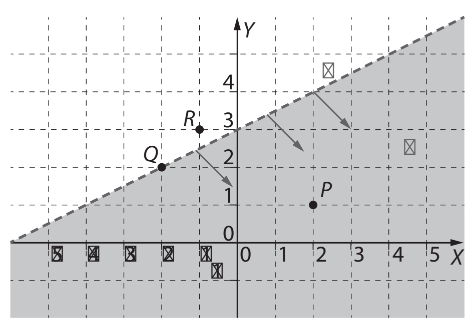


19 **Representa el semiplano ⊠: $x - 2y > -6$. ¿Contiene a los puntos $P = (2, 1)$, $Q = (-2, 2)$ y $R = (-1, 3)$?**

Dibujamos la recta r: $x - 2y = -6$. Al sustituir las coordenadas del punto P en la inecuación observamos que $2 - 2 \cdot 1 = 0 > -6$ luego, de los dos semiplanos en que r divide al plano, ⊠ es el que contiene a P. Como $Q \in r$ y el semiplano ⊠ es abierto, entonces Q ⊠ ⊠.

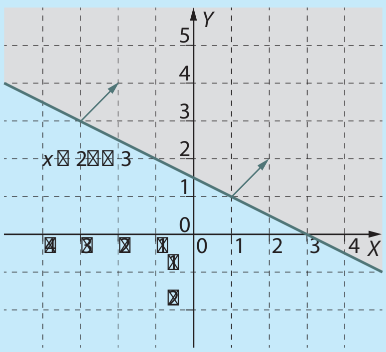
Por último, R ⊠ ⊠ pues:

$$(-1) - 2 \cdot 3 = -7 < -6$$

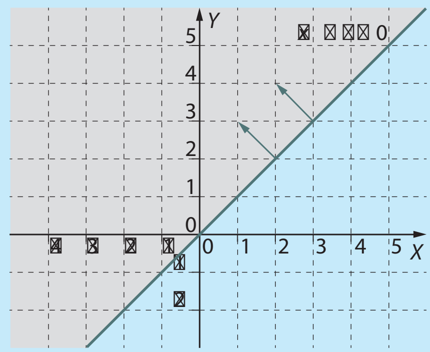


Un **sistema de inecuaciones de primer grado** es un conjunto de inecuaciones de primer grado. La **solución de un sistema de inecuaciones** está formada por los puntos de la región del plano obtenida como intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones que constituyen el sistema.

Ejemplo: Para resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ representaremos las regiones del plano que son solución de cada una de las inecuaciones que lo constituyen.

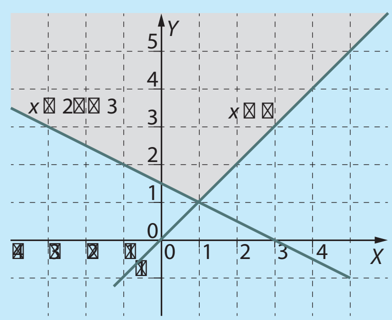


Solución de la inecuación $x + 2y \geq 3$



Solución de la inecuación $x - y \leq 0$

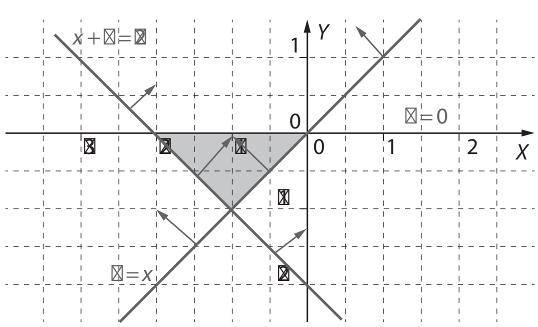
La solución al sistema es la región común a las dos anteriores.

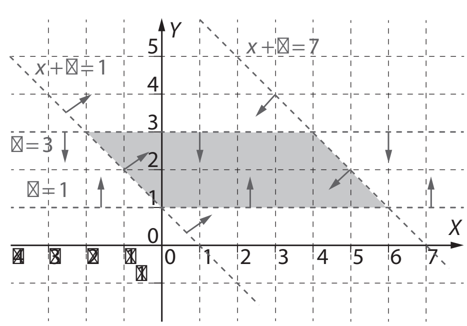


20 Representa la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y < 7 \\ x + y > 1 \\ y < 3 \\ y > 1 \end{cases}$





21 En un número de dos cifras, el dígito de las decenas es el triple que el de las unidades. Además, si se invierte el orden de las cifras obtenemos un número 18 unidades menor. ¿Cuál es el número original?

Denotamos por x e y las cifras de las decenas y las unidades respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x=3y \\ 10x+y=10y+x+18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9x-9y=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ x-y=2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de sustitución, de modo que:

$$x-y=2 \overset{x=3y}{\Rightarrow} 3y-y=2 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1;\ x=3y \overset{y=1}{\Rightarrow} x=3$$

En consecuencia, el número de partida es 31.

22 Leia y Chewbacca juegan una partida de ajedrez. El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el empleado por Chewbacca, mientras que en los restantes movimientos ambos emplearon 35 minutos.
Sabiendo que el tiempo utilizado por Chewbacca en el total de la partida es 3/4 partes del utilizado por Leia, calcula el tiempo empleado por cada jugador.

Denotamos x e y el tiempo, expresado en minutos, empleado por Leia y Chewbacca en ejecutar los primeros 14 movimientos, respectivamente.

- *El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el empleado por Chewbacca, esto es:* $x=3y$
- *En el total de la partida Leia gasta* $x+35$ *min, y Chewbacca* $y+35$ *min.*
- *El tiempo utilizado por Chewbacca en el total de la partida es* $\frac{3}{4}$ *partes del utilizado por Leia, por lo que* $y+35=\frac{3\cdot(x+35)}{4}$*, es decir:* $4y+140=3x+105$

En consecuencia, x e y son solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ 3x-4y=35 \end{cases} \overset{x=3y}{\Rightarrow} 3\cdot 3y-4y=35 \Rightarrow 5y=35 \Rightarrow y=7$$

Por tanto, Chewbacca emplea: $y+35=7+35=42$ *min, mientras que Leia necesita:*

$$x+35=3y+35=21+35=56 \text{ min}$$

23 La edad de una madre es el cuadrado de la de su hijo, y ambas suman 30 aæos. ¿QuØ edad tiene cada uno?

Si el hijo tiene x aæos y la madre tiene y aæos su suma es $x+y=30$.

Además $y=x^2$ esto es, se trata de resolver el sistema: $\begin{cases} x+y=30 \\ y=x^2 \end{cases}$

Por sustitución:

$$x^2+x-30=0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x=\frac{-1+\sqrt{1^2+4\cdot 30}}{2}=\frac{-1+11}{2}=5$$

Por otro lado, $y=x^2=25$ luego las edades del hijo y de la madre son 5 y 25 aæos, respectivamente.

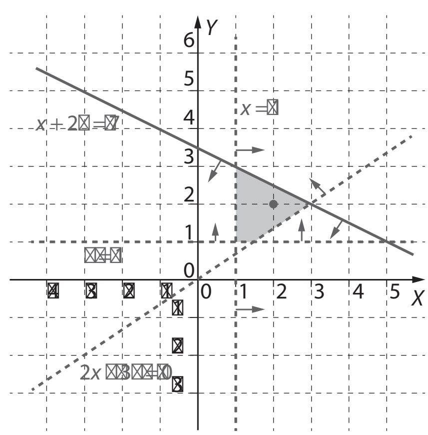
24 Pedro va a la ferreter⊠a con 7 ⊠ y quiere comprar tornillos y tuercas. La caja de tornillos cuesta 1 ⊠ mientras que el precio de la de tuercas es de 2 ⊠. Pedro quiere que el triple del nœmero de cajas de tuercas exceda al doble del nœmero de cajas de tornillos. ¿CuÆntas cajas de cada tipo comprarÆ sabiendo que lleva mÆs de una caja de cada tipo?

Denotamos por x e y el número de cajas de tornillos y tuercas, respectivamente, que compra Pedro. Como sólo lleva 7 ⊠ ha de ser $x+2y\leq 7$.

Por otro lado como el triple del número de cajas de tuercas excede al doble del número de cajas de tornillos, debe ser $2x<3y$.

Además, debe llevar más de una caja de cada tipo, esto es, $x>1$ e $y>1$.

Representamos la región que es solución del sistema $\begin{cases} x+2y\leq 7 \\ 2x<3y \\ x>1 \\ y>1 \end{cases}$ *y observamos que el único punto de coordenadas enteras de dicha región es $(2, 2)$.*



Luego Pedro ha de comprar dos cajas de tornillos y dos cajas de tuercas.

5 Evaluación

1 **Calcula los números reales *a* y *b* sabiendo que ninguno de los dos sistemas siguientes es compatible:** $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ bx+(a+1)y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+by=1 \\ 3x+ay=3 \end{cases}$

Como los sistemas no son compatibles se tiene $3\cdot(a+1)=2b$ y $a=3b$, por lo que se trata de resolver el siguiente sistema en las incógnitas a y b: $\begin{cases} 3a-2b=-3 \\ a=3b \end{cases}$

Lo resolvemos por el mØtodo de sustitución:

$$3\cdot(3b)-2b=-3 \Rightarrow 7b=-3 \Rightarrow b=\frac{-3}{7} \Rightarrow a=3b=\frac{-9}{7}$$

2 **Resuelve mediante el método de reducción el sistema:** $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=-7 \end{cases} \overset{1^a+2^a}{\Rightarrow} 3y=-5 \Rightarrow y=\frac{-5}{3}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-2y=7 \end{cases} \overset{1^a+2^a}{\Rightarrow} 3x=11 \Rightarrow y=\frac{11}{3}$$

3 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x+y=22 \\ x^2-y^2=88 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación $x=22-y$, y sustituimos el valor obtenido en la segunda:

$$(22-y)^2-y^2=88 \Leftrightarrow 484+y^2-44y-y^2=88 \Leftrightarrow 396=44y \Leftrightarrow y=9$$

Calculamos el valor de la otra incógnita: $x=22-y=22-9=13$

b) $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

En la primera ecuación ya tenemos la incógnita y despejada. Al sustituirla en la segunda se tiene una ecuación bicuadrada:

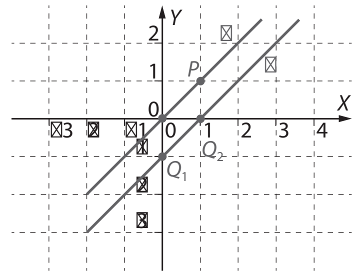
$$x^2+(x^2)^2=20 \Leftrightarrow x^4+x^2-20=0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2=\frac{-1+\sqrt{1+80}}{2}=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Sustituimos en la primera ecuación para hallar el valor de $y=x^2=(⌧2)^2=4$.

Las soluciones del sistema son $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.

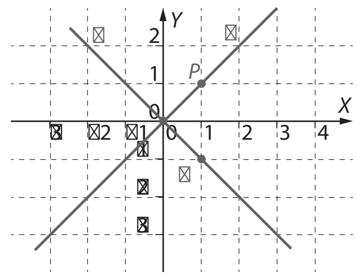
4 Decide gráficamente la naturaleza de los siguientes sistemas de ecuaciones y encuentra sus soluciones cuando las tengan:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$



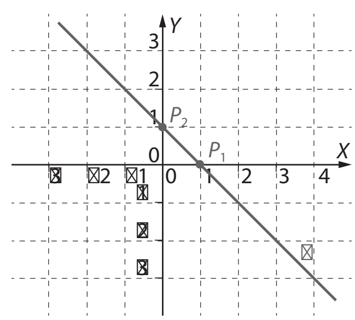
La primera de las rectas del sistema, que llamamos *r*, pasa por los puntos $O = (0, 0)$ y $P = (1, 1)$, y la segunda, que llamamos *s*, pasa por $Q_1 = (0, -1)$ y $Q_2 = (1, 0)$. Se observa que son rectas paralelas, luego este sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$



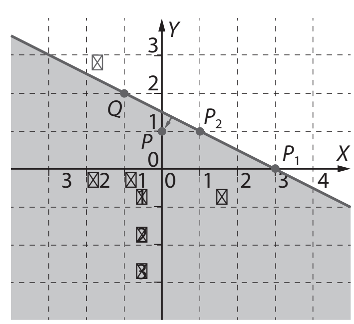
La segunda de las rectas de este sistema, que llamamos *l*, une *O* con $M = (1, -1)$ y corta a *r* en el origen de coordenadas. Se trata, por tanto, de un sistema compatible determinado cuya única solución es $x = 0$, $y = 0$.

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$



Ambas rectas pasa por los puntos $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (0, 1)$, luego el tercer sistema es compatible indeterminado.

5 Sombrea el semiplano ⊠: $x + 2y \leq 3$ y decide si contiene al punto $P = (0, 1)$. ¿Contiene ⊠ al punto $Q = (-1, 2)$?



La recta r: $x + 2y = 3$ pasa por los puntos $P_1 = (3, 0)$ y $P_2 = (1, 1)$. Al sustituir las coordenadas de *P* en la ecuación de *r* se tiene r: $0 + 2 \cdot 1 = 2 < 3$, luego el punto *P* pertenece al semiplano ⊠, que, tambiØn contiene al punto *Q*, pues este pertenece a *r*.

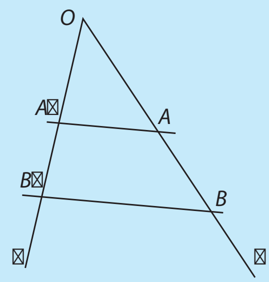
6 Semejanza

6.1. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

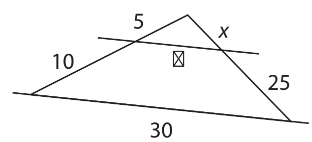
Si dos rectas paralelas cortan a dos rectas *r* y *s* que se cortan en un punto *O*, los segmentos determinados por las paralelas en *r* son proporcionales a los segmentos determinados por las paralelas en *s*:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Además, se cumple que: $\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$



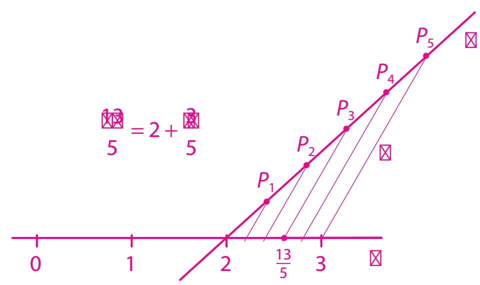
1 **Calcula el valor de las longitudes *x* e *y* de la figura.**



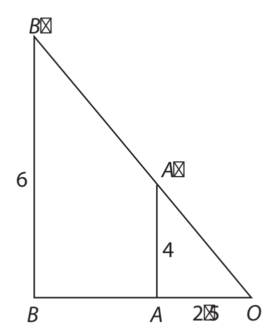
$$\frac{x}{5} = \frac{25}{10} \Rightarrow x = 12{,}5;\ \frac{y}{30} = \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 10$$

2 **Utiliza el Teorema de Tales, una regla y un compás para determinar en la recta *r* el número $\frac{13}{5}$.**

Como $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ se trata de dividir el segmento de extremos 2 y 3 en 5 partes iguales y tomar 3. Para ello, trazamos una semirrecta auxiliar *s* que corta a *r* en el punto 2, a partir del cual llevamos con un compás cinco segmentos de igual longitud. Sean P_1, ..., P_5 los extremos de dichos segmentos y *t* la recta que une P_5 con 3. Por el teorema de Tales el punto en que se cortan *r* y la paralela a *t* que pasa por P_3 es $\frac{13}{5}$.



3 **Dos estacas clavadas en el suelo miden 4 y 6 m, y en cierto instante sus sombras están alineadas y sus extremos coinciden. Si la sombra de la estaca menor mide 2,5 m, ¿qué distancia hay entre las bases de las estacas?**

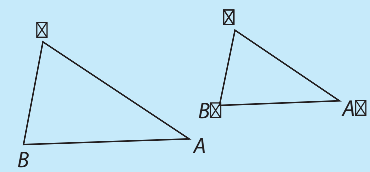


Calculamos primero la sombra *BO* de la estaca mayor:

$$\frac{BO}{2{,}5} = \frac{6}{4} \Rightarrow BO = \frac{15}{4}$$, por lo que la distancia *BA* entre las bases es:

$$BA = BO - AO = \frac{15}{4} - \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ m}$$

Triángulos semejantes. Dos triángulos de vértices $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ **en ese orden,** se dicen **semejantes** si se cumplen las igualdades:

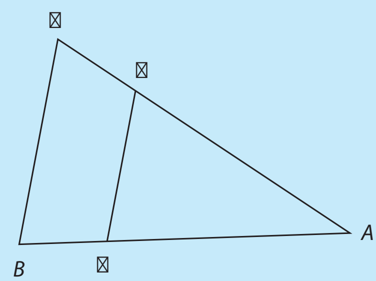


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Este cociente común se llama **razón de semejanza.**

En tal caso los ángulos de ambos triángulos son iguales dos a dos: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$

El Teorema de Tales se puede reformular diciendo que, dados un triángulo $\triangle ABC$ y dos puntos D y E situados en los lados AB y AC respectivamente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes si y solo si los segmentos BC y ED son paralelos.



Criterios de semejanza de triángulos. Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$

- Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ y $\widehat{B} = \widehat{B'}$, entonces los triángulos son semejantes.
- Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ entonces los triángulos son semejantes.

4 **Los lados de un triángulo miden 2, 3 y 4 cm. ¿Cuánto miden los lados de un triángulo semejante al anterior sabiendo que su lado más largo mide 12 cm?**

El lado más largo del segundo triángulo es 3 veces mayor que el lado más largo del primer triángulo, por lo que lo mismo sucede con los otros dos lados.

Por tanto, basta con multiplicar por 3 los lados del triángulo original. Los lados del segundo triángulo miden 6, 9 y 12 cm.

5 **Dos ángulos de un triángulo miden 25° y 85° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 25° y 70° ¿Son semejantes ambos triángulos?**

El otro ángulo del primer triángulo mide:

$$180° - (25° + 85°) = 70°$$

Mientras que el otro ángulo del segundo triángulo mide:

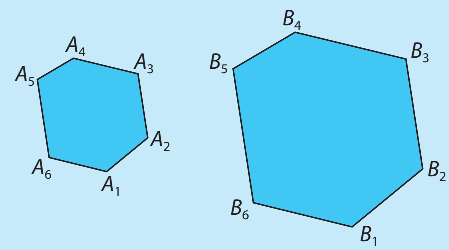
$$180° - (25° + 70°) = 85°$$

Luego los dos triángulos tienen los mismos ángulos y, por tanto, son semejantes.

6.2. Relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes

Polígonos semejantes. Dos polígonos con n vértices, $A_1, ..., A_n$ y $B_1, ..., B_n$ son *semejantes* si sus ángulos son iguales dos a dos, o sea, $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, ..., \widehat{A_n} = \widehat{B_n}$ y, además, sus lados son proporcionales:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \cdots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = r$$



- Este cociente común, r, se llama **razón de semejanza** de ambos polígonos.
- Se dice que $A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ son lados **homólogos** a los lados $B_1B_2, ..., B_{n-1}B_n, B_nB_1$.

En el caso del triángulo la igualdad, dos a dos, de los ángulos, es una condición que se deduce de la proporcionalidad de las longitudes de sus lados, pero esto no es cierto si $n > 3$.

6 Los lados de un pentágono miden 4, 5, 6, 8 y 10 cm. ¿Cuánto mide el perímetro de otro pentágono semejante con razón de semejanza 5 y uno de cuyos lados mide 30 cm?

Los lados del segundo pentágono son más largos que los del primero, pues el lado mayor de este mide 10 cm y uno de los lados del segundo mide 30 cm. Por tanto, las longitudes de los lados del segundo pentágono miden 5 veces más que los del primero, esto es, miden 20, 25, 30, 40 y 50 cm, así que su perímetro mide:

$$p = 20 + 25 + 30 + 40 + 50 = 165 \text{ cm}$$

7 Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a) Dos cuadrados cualesquiera son semejantes.

Verdadera, pues los cuatro ángulos de un cuadrado son rectos. Si los lados del primer cuadrado miden a y los del segundo b, los cocientes de lados homólogos valen $\frac{a}{b}$.

b) Dos rombos cualesquiera son semejantes.

Falsa. Si los lados de un rombo miden a y los del segundo miden b, los cocientes de longitudes de lados homólogos valen $\frac{a}{b}$. Sin embargo, si uno de los rombos es un cuadrado y el otro no, los ángulos del primero no son iguales a los del segundo.

c) Existen cuadriláteros no semejantes que comparten sus ángulos.

Verdadera; basta considerar dos rectángulos, uno cuadrado y el otro no.

La **razón entre las áreas de dos figuras semejantes** es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La **razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes** es igual al cubo de la razón de semejanza.

Es decir, si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

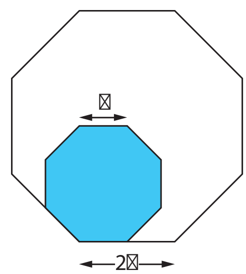
8 **¿Cuánto vale el cociente de las áreas de dos triángulos equiláteros si el perímetro del primero mide 24 cm y el del segundo mide 4 cm?**

Dos triángulos equiláteros son semejantes. La razón de semejanza de ambos triángulos es $r = \frac{24}{4} = 6$, luego el cociente de sus áreas es $r^2 = 36$.

9 **¿Cuál es la razón de semejanza de dos pentágonos cuyas áreas miden 20 cm^2 y 4 cm^2?**

La razón de semejanza r cumple que $r^2 = \frac{20}{4} = 5$ luego $r = \sqrt{5}$.

10 **En la figura siguiente, los dos octógonos son regulares y con sus lados respectivamente paralelos. Calcula la razón entre el área del octógono menor y el mayor.**

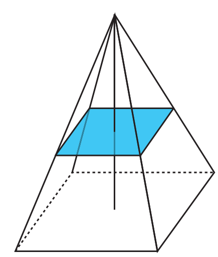


Los dos octógonos son semejantes y la razón de semejanza r cumple que $r = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, luego la razón entre sus áreas es $r^2 = \frac{1}{4}$.

11 **Partimos de un cubo cuyas aristas miden 2 cm y construimos otro semejante al primero aumentando 1 cm cada una de sus aristas ¿En cuánto aumenta su volumen?**

Por este procedimiento hemos construido un cubo semejante al primero de modo que el cociente de las longitudes de las aristas es $r = \frac{3}{2}$. Por tanto, el cociente de los volúmenes de ambos cubos es $r^3 = \frac{27}{8}$. Como el volumen inicial es $2^3 = 8$ cm^3, el del segundo cubo es $\left(\frac{27}{8}\right) \cdot 8 = 27$ cm^3, por lo que el volumen ha aumentado $27 - 8 = 19$ cm^3.

12 **La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide. Calcula la relación que existe entre los volúmenes de la pirámide original y la pirámide semejante a la original que resulta tras el corte.**



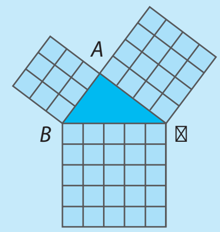
La razón de semejanza entre las aristas de ambas pirámides es 2, luego el volumen de la pirámide mayor es $8 = 2^3$ veces el de la menor.

6.3. Teorema de Pitágoras. Teorema del cateto y de la altura

Sean *A, B* y *C* los vértices de un triángulo y *a, b* y *c* las longitudes de los lados opuestos. Entonces, el triángulo *BAC:*

es rectángulo en *A* $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

El lado más largo se llama **hipotenusa,** *a,* y los otros dos son los **catetos,** *b* y *c.*



13 **Completa los datos de la siguiente tabla, que recoge las longitudes de los lados de ciertos triángulos rectángulos.**

a: hipotenusa	*b*: un cateto	*c*: otro cateto
17 cm	8 cm	$\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{225}=15$ cm
$\sqrt{21^2+20^2}=29$ cm	21 cm	20 cm
37 cm	$\sqrt{37^2-12^2}=\sqrt{1225}=35$ cm	12 cm

14 **¿Son semejantes dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas miden 17 y 34 cm respectivamente, y de los que se conocen las longitudes de uno de sus catetos: 8 cm la del primero y 30 cm la del segundo?**

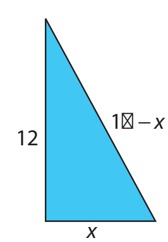
Los catetos restantes miden $\sqrt{17^2-8^2}=15$ cm y $\sqrt{34^2-30^2}=16$ cm, luego los triángulos son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{17}{34}=\frac{15}{30}=\frac{8}{16}$.

15 **El perímetro de un triángulo rectángulo es de 30 cm y uno de los catetos mide 12 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?**

La diferencia entre el perímetro y la longitud del cateto conocido es $30-12=18$ cm luego si la longitud del otro cateto es x, la de la hipotenusa es $18-x$. Por el teorema de Pitágoras,

$$12^2+x^2=(18-x)^2=324-36x+x^2 \Rightarrow 36x=180 \Rightarrow x=5 \text{ cm}$$

y la hipotenusa mide $18-5=13$ cm.



Las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo ⊠ permiten decidir si es **acutángulo,** esto es, que sus tres ángulos son agudos, u **obtusángulo,** es decir, que alguno de sus ángulos es obtuso. Si b y c son menores o iguales que a se tiene:

⊠ es acutángulo $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$ y ⊠ es obtusángulo $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

16 **Las longitudes de los lados de tres triángulos se indican a continuación. Indica cuál de ellos es rectángulo, cuál es acutángulo y cuál es obtusángulo.**

a) $a = 37$ cm, $b = 35$ cm, $c = 12$ cm.

Como $37^2 = 1\,369 = 1225 + 144 = 35^2 + 12^2$ ⊠ El triángulo es rectángulo.

b) $a = 14$ cm, $b = 13$ cm, $c = 12$ cm.

Como $14^2 = 196 < 169 + 144 = 13^2 + 12^2$ ⊠ El triángulo es acutángulo.

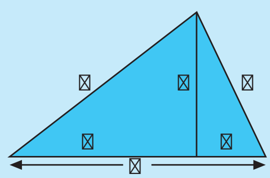
c) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm.

Como $7^2 = 49 > 16 + 16 = 4^2 + 4^2$ ⊠ El triángulo es obtusángulo.

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo en A, y sean m y n las longitudes de las proyecciones sobre la hipotenusa de ambos catetos. Entonces:

Teorema del cateto:

$c^2 = a \cdot n; \quad b^2 = a \cdot m$



Teorema de la altura:

$h^2 = n \cdot m$

17 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 124 cm y 93 cm, respectivamente. Halla la longitud de la hipotenusa, la de las proyecciones de los catetos sobre ella y la de la altura sobre dicha hipotenusa.**

Sean $b = 124$ y $c = 93$ las longitudes, en cm, de los catetos. Entonces, por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{124^2 + 93^2} = \sqrt{24\,025} = 155 \text{ cm}$$

Sean m y n las longitudes, en cm, de las proyecciones de ambos catetos sobre la hipotenusa y h la de la altura. Entonces:

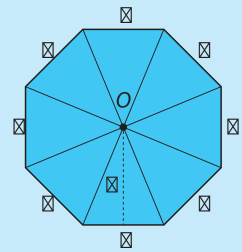
$$m = \frac{b^2}{a} = \frac{124^2}{155} = \frac{496}{5} = 99{,}2 \text{ cm} \qquad n = \frac{c^2}{a} = \frac{93^2}{155} = \frac{279}{5} = 55{,}8 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{mn} = \sqrt{\frac{496}{5} \cdot \frac{279}{5}} = \frac{372}{5} = 74{,}4 \text{ cm}$$

6.4. Longitudes, áreas y volúmenes

Polígonos regulares. Un polígono se dice **regular** si todos sus ángulos miden lo mismo y todos sus lados tienen la misma longitud. Si l es la longitud de cada lado y n es el número de lados, su **perímetro** mide $p = n \cdot l$.

El **baricentro** del polígono, O, es el único punto que equidista de todos los vértices. El **apotema** del polígono es la distancia a del baricentro al punto medio de cada lado.



El **área** del polígono es la suma de las áreas de los n triángulos isósceles en que se descompone. Como el área de cada triángulo es $\frac{l \cdot a}{2}$, el área del polígono es:

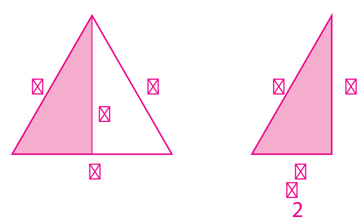
$$\text{`rea} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$

18 **Contesta los siguientes apartados:**

a) ¿Cuánto mide el área del triángulo equilátero cuyo lado mide l cm?

Por el Teorema de Pitágoras, la altura del triángulo equilátero mide $a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,l}{2}$ cm

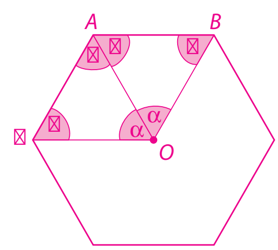
y, por tanto, su área es



$$S = \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}\,l}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4} \text{ cm}^2$$

b) Calcula el área del hexágono regular de lado l cm.

Los triángulos en los que se descompone un hexágono al unir el baricentro con cada uno de los vØrtices son equiláteros, pues observamos en la figura que el ángulo $\alpha = 60°$, pues 6α es una vuelta entera, es decir, 360°.



Por otro lado, como el triángulo AOB es isósceles se tiene $\hat{A} = \hat{B} = \beta$, y como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°,

$$\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = \frac{(180 - \alpha)}{2} = 60°$$

En consecuencia, cada uno de los triángulos es equilátero de lado l. Así, por el apartado anterior, el área de cada uno de ellos es $S_1 = \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}$ cm^2 y, por tanto, el área del hexágono es

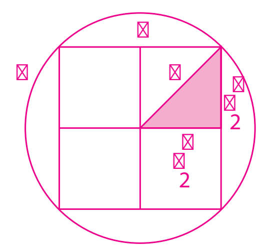
$$6 \cdot S_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,l^2}{2} \text{ cm}^2$$

Círculo y circunferencia. Dados un número real $r > 0$ y un punto O en un plano ⊠ se llama **circunferencia de centro** O y **radio** r al conjunto ⊠ de puntos de ⊠ que distan r de O. El **círculo** de centro O y radio r es el conjunto de puntos de ⊠ cuya distancia a O es menor o igual que r.

La longitud de ⊠ es $2\pi r$ y el área de este círculo es πr^2.

19 **¿Cuál es el cociente del perímetro del cuadrado inscrito en una circunferencia ⊠ de radio r cm y la longitud de ⊠? ¿Cuál es el cociente del área del cuadrado anterior y la del círculo encerrado por ⊠?**

Indicación: Comienza expresando el lado del cuadrado en función del radio de ⊠.



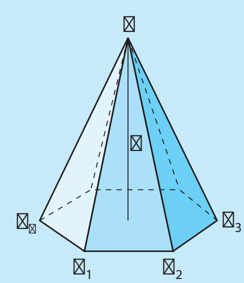
Si l denota la longitud del lado del cuadrado se cumple, por el Teorema de Pitágoras, $r^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$, así que $l = r\sqrt{2}$ cm.

Por tanto, $\frac{\text{perímetro del cuadrado}}{\text{perímetro de la circunferencia}} = \frac{4l}{2\pi r} = \frac{4r\sqrt{2}}{2\pi r} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

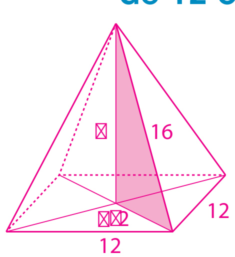
y el cociente de las áreas es: $\frac{\text{área del cuadrado}}{\text{área del círculo}} = \frac{l^2}{\pi r^2} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$

Pirámide de base P y vértice V.

- El **área lateral** de la pirámide es la suma de las áreas de sus caras, y su *Æea t dal* es la suma del área lateral y la del polígono P.
- La **altura** de la pirámide es la distancia h desde V al plano que contiene a P.
- Se llama **volumen** de la pirámide a la región encerrada por ella y vale $V = \frac{\text{`r ea }(P)h}{3}$.
- Un **tetraedro** es una pirámide cuya base y cuyas caras son triángulos equiláteros.



20 **Calcula el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 12 cm de lado y su arista lateral es de 16 cm.**



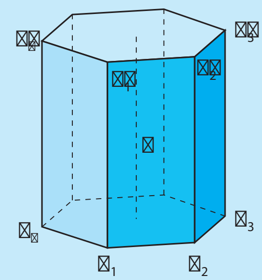
Sean d la longitud de la diagonal del cuadrado y h la de la altura de la pirámide. Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{y} \quad h = \sqrt{16^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46} \text{ cm},$$

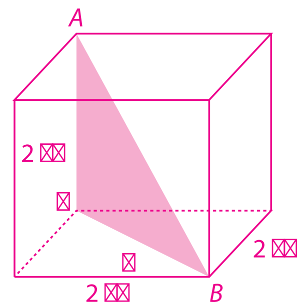
y, por tanto, el volumen de la pirámide es $V = \frac{12^2 \cdot 2\sqrt{46}}{3} = 96\sqrt{46}$ cm^3

Prisma de altura h y bases P y P'.

- El **área lateral** del prisma es la suma de las áreas de sus caras y el **área total** del prisma es la suma del área lateral y las áreas de las bases P y P☒
- La **altura** del prisma es la distancia h entre los planos que contienen a P y a P☒
- El **volumen** del prisma es el de la región encerrada por ella y vale $V =$ \`r ea$(P) \cdot h$.
- Un prisma es un **cubo** si sus bases y sus caras son cuadrados.



21 ¿Cuánto mide la diagonal de un cubo cuyo lado mide 2 cm?

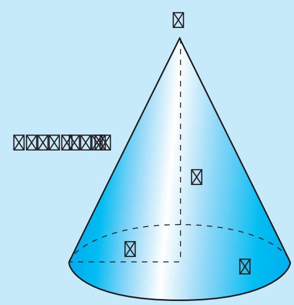


La diagonal de la base mide $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm, y como el triángulo ☒ACB es rectángulo, la diagonal del cubo mide:

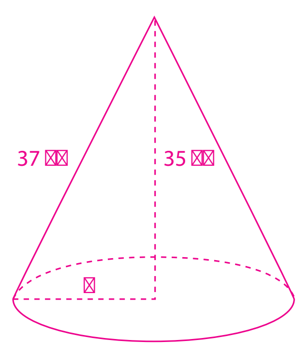
$$AB = \sqrt{AC^2 + d^2} = \sqrt{2^2 + 8} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Cono de vértice V y base la circunferencia ☒ de radio r.

- Se llama **altura** del cono a la distancia h del vértice V al plano ☒ que contiene a ☒.
- Se llama **volumen** del cono a la región limitada por el cono y el círculo encerrado por ☒. Su valor es $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.
- El **área lateral** del cono mide $\pi r h$. Si le sumamos el área de la base $S = \pi r^2$ obtenemos el **área total** del cono.
- Se dice que el cono es **recto** si la recta que pasa por V y el centro de ☒ es perpendicular al plano ☒ que contiene a ☒.



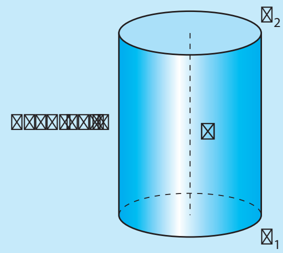
22 ¿Cuánto mide el radio de la base de un cono recto cuyas generatrices miden 37 cm y cuya altura mide 35 cm?



El triángulo cuyos lados son la generatriz, la altura y el radio r es rectángulo, por lo que $r = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12$ cm.

Cilindro de altura h y bases las circunferencias $\boxtimes_1$ y $\boxtimes_2$.

- Se llama **altura** del cilindro a la distancia h entre los planos que contienen a $\boxtimes_1$ y $\boxtimes_2$.
- Se llama **volumen** del cilindro a la región limitada por el cilindro y los círculos encerrados por $\boxtimes_1$ y $\boxtimes_2$. Su valor es $V = S \cdot h$, donde $S = \pi r^2$.
- Se dice que el cilindro es **recto** si sus generatrices son perpendiculares a los planos que contienen a las bases.
- El **área lateral** del cilindro recto mide $2\pi rh$. Si le sumamos el área $2S$ de los círculos encerrados por las bases obtenemos el **área total** del cilindro.



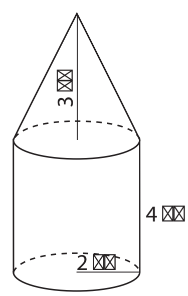
23 **Calcula la cantidad de aluminio que se necesita para hacer 100 botes de forma cilíndrica de 4 cm de radio y 10 cm de altura.**

El área total de cada uno de los botes es:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = 8\pi(10 + 4) = 112\pi \text{ cm}^2$$

Como queremos construir 100 botes necesitamos $11\,200\pi$ cm^2 de aluminio.

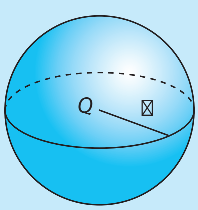
24 **¿Cuánto vale el volumen de la figura?**



Los volúmenes del cilindro y el cono son, respectivamente,

$$V_1 = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ cm}^3 \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{2^2 \pi \cdot 3}{3} = 4\pi \text{ cm}^3$$

$V = V_1 + V_2 = 20\pi$ cm^3 es el volumen de la figura.



Esfera

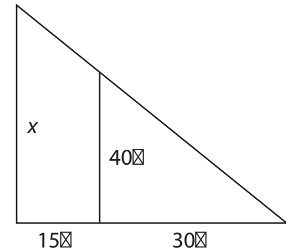
Dados un número real $r > 0$ y punto O en el espacio, se llama **esfera** de centro O y radio r al conjunto de puntos que distan r de O. Su **área** mide $4\pi r^2$ y su **volumen** mide $\frac{4\pi r^3}{3}$.

25 **¿Cuánto vale el radio de una esfera cuyo área, expresada en cm^2, coincide con su volumen, expresado en cm^3?**

Si r es el radio de la esfera buscada, expresado en cm, se debe cumplir que:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 4\pi r^2 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

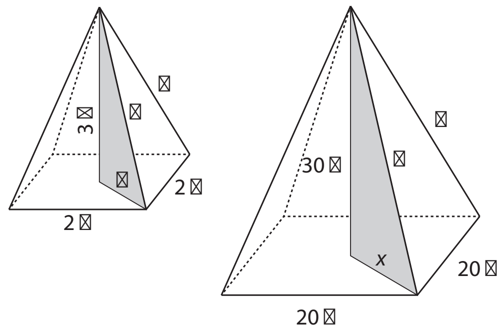
26 En cierto instante las sombras de dos edificios están alineadas y los extremos de las mismas coinciden. ¿Cuánto mide el edificio mayor si la distancia entre los pies de los edificios es 15 m y la altura del edificio menor y su sombra miden 40 y 30 m, respectivamente?



Con las notaciones de la figura, y por el teorema de Tales,

$$\frac{40}{30}=\frac{x}{30+15}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 45}{3}\Rightarrow x=60$$, luego $x=60$ m es la altura del edificio mayor.

27 ¿Cuánto miden las diagonales de las bases de estas pirámides? ¿Y sus aristas laterales? ¿Son semejantes las caras laterales de las pirámides? En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es el cociente de sus volúmenes?



Con las notaciones de la figura se tiene:

$$2^2+2^2=(2z)^2\Rightarrow 8=4z^2\Rightarrow z=\sqrt{2}\ \text{ y }\ 20^2+20^2=(2x)^2\Rightarrow 800=4x^2\Rightarrow x=10\sqrt{2}$$

luego las diagonales miden $d_1=2z=2\sqrt{2}$ m y $d_2=2x=20\sqrt{2}$ m.

Aplicamos de nuevo el Teorema de Pitágoras, para obtener la longitud de las aristas:

$$t=\sqrt{3^2+z^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}\text{ m e } y=\sqrt{30^2+x^2}=\sqrt{30^2+(10\sqrt{2})^2}=10\sqrt{11}\text{ m}$$

Por tanto, las caras laterales de ambas pirámides, son semejantes pues son triángulos isósceles y cumplen que $\frac{y}{t}=\frac{10\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=10=\frac{20}{2}$, y la razón de semejanza es $r=10$.

Los volúmenes de ambas pirámides y su cociente son:

$$Vol_1=20^2\cdot\frac{30}{3}=4\,000\ \text{ y }\ Vol_2=2^2\cdot\frac{3}{3}=4\Rightarrow\frac{Vol_1}{Vol_2}=1000=r^3$$

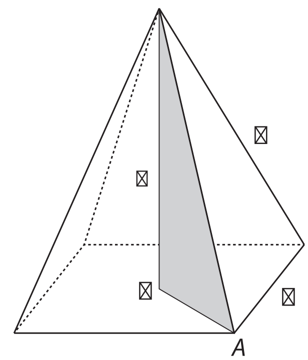
28 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, expresadas en cm, sabiendo que la hipotenusa mide 2 cm más que el cateto mayor y éste mide una unidad menos que el triple del cateto menor.

Llamamos x a la longitud del cateto menor. La del cateto mayor es $3x-1$, y la de la hipotenusa mide $3x+1$. Por el Teorema de Pitágoras:

$$(3x+1)^2=(3x-1)^2+x^2\Rightarrow x^2-12x=0\Rightarrow x(x-12)=0$$

Como $x\neq 0$ se deduce que $x=12$ cm, luego el otro cateto mide 35 cm y la hipotenusa 37 cm.

29 ¿Cuántos kg de pintura debemos comprar para pintar una pirámide cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y cuya base es un cuadrado de lado 2 m, si se necesitan 3 kg de pintura por cada m² y no es necesario pintar el suelo de la misma?

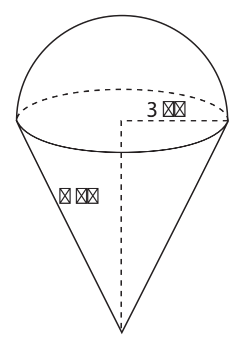


Hemos visto que el área del triángulo equilátero de lado l es $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,l^2}{4}$, luego el área de cada cara lateral de la pirámide es $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^2}{4} = \sqrt{3}$ m², y, por tanto, el área lateral de la pirámide es $S = 4S_1 = 4\sqrt{3}$ m². En consecuencia, necesitamos comprar $3\cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \cong 20{,}79$ kg de pintura.

30 ¿Cuánto mide el lado de un cubo cuyo volumen es doble del volumen del cubo de lado 1 m?

Sea l la longitud del lado del cubo cuyo volumen es doble que el del cubo de lado 1. Entonces $l^3 = 2\cdot 1^3 = 2 \Rightarrow l = \sqrt[3]{2}$ m.

31 ¿Cuál es el volumen del helado de la figura?



El volumen buscado es la suma $V = V_1 + V_2$ donde

$V_1 = \dfrac{\pi\cdot 3^2\cdot 9}{3} = 27\pi$ cm³ es el volumen del cucurucho cónico

y $V_2 = \dfrac{4\pi\cdot 3^3}{2\cdot 3} = 18\pi$ cm³ es el volumen de la semiesfera de helado.

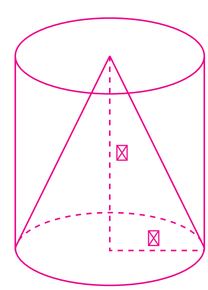
Por tanto, $V = 45\pi$ cm³.

32 Calcula el radio de la base de un cono sabiendo que su volumen, expresado en cm³ coincide con el área lateral expresada en cm².

Si r y h son, expresadas en cm, el radio y la altura deben cumplir que:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \pi r h \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

Calcula la altura de dicho cono, expresada en cm, sabiendo que el área lateral del cilindro que tiene su mismo radio y altura es 12π cm².



Si h es la altura común del cono y el cilindro se tiene $12\pi = 2\pi r h = 6\pi h$, luego $h = 2$ cm.

1 **Halla las longitudes de los lados de un triángulo cuyo perímetro mide 75 cm y que es semejante a otro cuyos lados miden 7, 8 y 10 cm.**

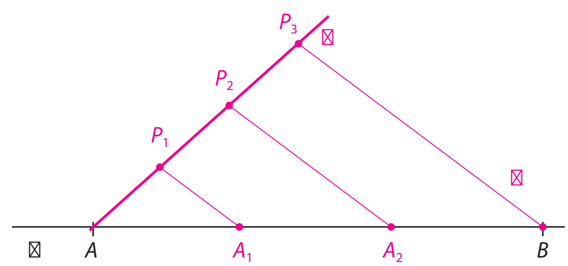
El perímetro del segundo triángulo mide $7 + 8 + 10 = 25$ cm, por lo que la razón de semejanza de ambos triángulos es $r = \frac{75}{25} = 3$.

Luego las longitudes de los lados del primer triángulo son $3 \cdot 7 = 21$ cm, $3 \cdot 8 = 24$ cm y $3 \cdot 10 = 30$ cm.

2 **Divide en tres partes iguales el segmento dado *AB* empleando una regla y un compás.**

Trazamos una semirrecta auxiliar s que corta en A al segmento dado. Mediante un compás llevamos desde A sobre s tres segmentos de igual longitud, cuyos extremos denotamos P_1, P_2 y P_3.

Las rectas que pasan por P_1 y P_2 y son paralelas a la que une P_3 con B cortan al segmento dado en dos puntos A_1 y A_2 dividiØndolo, por el teorema de Tales, en tres partes de igual longitud.



3 **Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas:**

a) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

Esta afirmación es falsa. Basta tomar un triángulo cuyos ángulos miden 20°, 20° y 140°, y otro cuyos ángulos miden 30°, 30° y 120°.

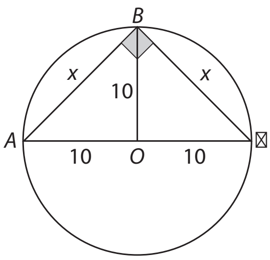
b) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Esta afirmación es cierta, ya que los ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60°.

c) Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 60° son semejantes.

TambiØn esta afirmación es cierta ya que los otros dos ángulos de cualquier triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 60° miden 90° y 30°.

4 ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio 10 cm?



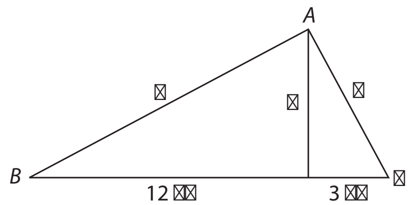
La hipotenusa es un diámetro de la circunferencia, luego mide 20 cm. Los catetos miden lo mismo, digamos x cm, pues el triángulo es isósceles y, por el Teorema de Pitágoras,

$$2x^2 = 20^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro del triángulo es:

$$p = 2x + 20 = 20\sqrt{2} + 20 = 20\left(1 + \sqrt{2}\right) \text{ cm.}$$

5 Halla las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y de su altura sobre la hipotenusa, sabiendo que ésta divide a la hipotenusa en dos segmentos que miden 3 y 12 cm.



Por el Teorema de la altura,

$$h^2 = 3 \cdot 12 = 36,$$

luego la altura sobre la hipotenusa mide $h = 6$ cm. Como la hipotenusa mide $a = 12 + 3 = 15$ cm, por el Teorema del cateto,

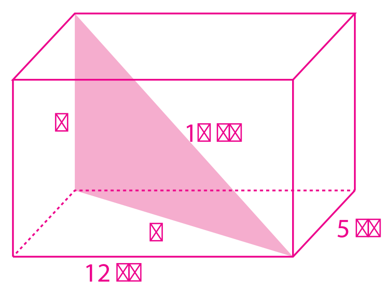
$$c^2 = 12a = 180 \text{ y } b^2 = 3a = 45, \text{ despejando, tenemos que:}$$

$$c = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$b = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

6 ¿Cuánto mide la altura de un prisma de base rectangular sabiendo que los lados de la base miden 5 y 12 cm y la diagonal del prisma mide 18 cm?

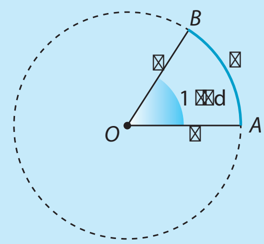
Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la diagonal del rectángulo de la base es $d = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm, por lo que la altura del prisma es $h = \sqrt{18^2 - 13^2} = \sqrt{155}$ cm.



7 Razones trigonométricas

7.1. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Medidas de ángulos en grados y radianes. Introducimos una unidad de medida de ángulos distinta del grado, llamada **radián.** Para ello fijamos una circunferencia de centro O y radio r y elegimos dos puntos A y B en ella de modo que el arco de circunferencia que une A y B en sentido contrario a las agujas del reloj mida r. Se dice que el ángulo $\angle AOB$ mide 1 **radián,** y se escribe 1 rad. Como la circunferencia mide $2\pi r$, la amplitud de la vuelta completa es 2π radianes.



Ejemplos: El ángulo llano abarca media circunferencia, luego su amplitud es π rad, mientras que el ángulo recto es la mitad del llano, así que mide $\frac{\pi}{2}$ rad.

1 **¿Cuántos radianes miden los ángulos de 30°, 45° y 60°?**

Como el ángulo de 180° mide π radianes, entonces $30° = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6}$ rad, $45° = 45\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4}$ rad y $60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$ rad

2 **¿Cuánto miden, en radianes, los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo isósceles?**

Si cada uno de los ángulos no rectos del triángulo rectángulo isósceles mide α grados, se debe cumplir que $180 = 90 + 2\alpha$, *luego , es decir,* $\alpha = 45 \cdot \left(\frac{2\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4}$ rad.

3 **Expresa en grados los siguientes ángulos:**

a) 1 rad *Como el ángulo de 180° mide π radianes, entonces 1 radián son* $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.

b) $\frac{5\pi}{6}$ rad $= \left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 150°$

d) $\frac{7\pi}{4}$ rad $= \left(\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 315°$

c) $\frac{3\pi}{2}$ rad $= \left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 270°$

e) 3π rad $= \left(3\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 540°$

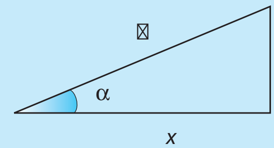
4 **¿Qué ángulo es mayor, $\alpha = 91°$ o $\beta = 1{,}58$ rad?**

Vamos a expresar el ángulo α en radianes. Como el ángulo de 180° mide π radianes,

$$\alpha = \frac{91\pi}{180} \text{ rad} > 1{,}588 \text{ rad} > \beta$$

y por tanto el ángulo α es mayor que el ángulo β.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo α se definen como sigue: Consideramos un triángulo rectángulo como el de la figura, uno de cuyos ángulos es α.



El **seno,** el **coseno** y la **tangente** de α, que se denotan sen α, cos α y tg α, respectivamente, son los siguientes números:

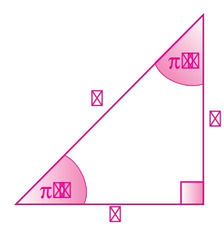
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h},\quad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h},$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$$

De la propia definición se desprende la igualdad: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$

Como en todo triángulo rectángulo la longitud de los catetos es menor que la longitud de la hipotenusa se tiene que $\text{sen}\alpha \le 1$ y $\cos\alpha \le 1$.

5 Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{4}$ rad.



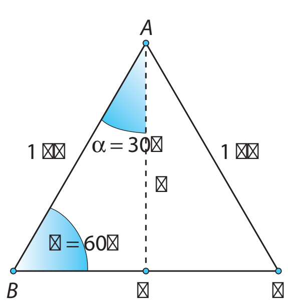
Si el ángulo α de un triángulo rectángulo mide $\frac{\pi}{4}$ rad, el otro ángulo agudo β también mide $\frac{\pi}{4}$ rad, pues:

$$\beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Se trata, por tanto, de un triángulo isósceles. Si la hipotenusa mide h y los catetos c, por el teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}c$

En consecuencia, $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha = \dfrac{c}{h} = \dfrac{c}{\sqrt{2}c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{c}{c} = 1.$

6 Sabiendo que los ángulos del triángulo equilátero miden 60°, calcula el seno y el coseno de 60° y de 30°.



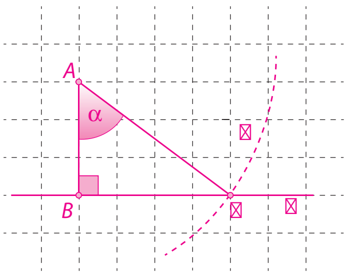
Los lados del triángulo equilátero ABC de la figura miden 1 cm. Por ser equilátero, la altura que pasa por A pasa también por el punto medio M del lado BC, luego el triángulo BMA es rectángulo. El ángulo β de la figura mide 60°. Así, por el teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}\ 60^\circ = \frac{h}{AB} = h = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ y }\ \cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = BM = \frac{1}{2}$$

En cuanto a las razones del ángulo $\alpha = 30°$ se tiene:

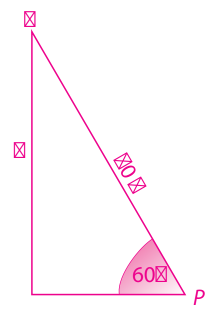
$$\text{sen}\ 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}\ \text{ y }\ \cos 30^\circ = \frac{h}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7 **Dibuja un ángulo α tal que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.**



Elegimos un punto cualquiera B, sobre una recta arbitraria r y levantamos un segmento AB perpendicular a r que mida 3 unidades. Trazamos la circunferencia ⊠ de centro el punto A y de radio 5 unidades. Si denotamos por C a uno de los puntos de intersección de r y ⊠, entonces el ángulo $\alpha = \widehat{AOB}$ cumple que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

8 **Un globo está sujeto por una cuerda de 80 m de largo que forma con el suelo un ángulo de 60⊠. Suponiendo que la cuerda esté recta, ¿a qué altura está el globo?**



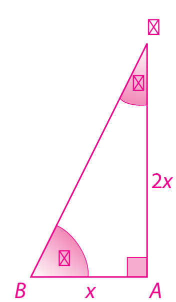
El globo aparece en la figura como G, y quien lo sujeta está situado en P. Nos piden la altura h a la que se encuentra el globo, que se calcula:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{80} \Rightarrow h = 80 \cdot \text{sen } 60° = 80\frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3} \simeq 69{,}28 \text{ m}$$

Si el seno, el coseno y la tangente de un ángulo α no son nulos, tienen inverso, denominados **cosecante, secante** y **cotangente,** y que se denotan cosec α, sec α y cotg α, respectivamente:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

9 **En un triángulo rectángulo un cateto mide el doble que el otro. Calcula las seis razones trigonométricas del ángulo agudo cuya tangente es menor.**



Sea x la longitud del cateto menor AB; así la del cateto AC es $2x$. Por tanto $\text{tg } \gamma = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ y $\text{tg } \beta = \frac{2x}{x} = 2$, luego hay que calcular las razones del ángulo ⊠ Por el Teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$, y

$$\text{sen } \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y}$$

$$\cos\gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

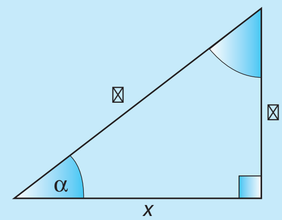
Además, $\text{cotg } \gamma = \frac{1}{\text{tg}\gamma} = 2$, $\sec\gamma = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\text{cosec } \gamma = \frac{1}{\text{sen } \gamma} = \sqrt{5}$

7.2. Relaciones entre las razones trigonométricas

Del Teorema de Pitágoras se deducen las siguientes igualdades fundamentales:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\text{ y }\; 1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Para comprobarlas basta efectuar los siguientes cálculos:



$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2} = \frac{y^2 + x^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \;\text{ y}$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{h^2}{x^2} = \sec^2\alpha$$

10 **Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α cuya tangente vale 3.**

Sabemos que α es agudo y $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha = 10$, luego $\sec\alpha = \sqrt{10}$, por lo que

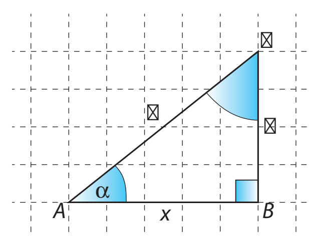
$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. Además, como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se deduce que:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

11 **Dados dos ángulos α y β, ¿es cierto que $\text{sen}^2\alpha - \cos^2\beta = \text{sen}^2\beta - \cos^2\alpha$?**

Al pasar de miembro los términos que están restando, la igualdad del enunciado se transforma en $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \text{sen}^2\beta + \cos^2\beta$. Esta igualdad es cierta pues ambos miembros valen 1. En consecuencia, también es cierta la fórmula del enunciado.

12 **Calcula las seis razones trigonométricas del ángulo α de la figura.**



De la figura se desprende que $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{5}$, por tanto,

$\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{5}{4}$. Por otro lado, $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{16}{25} = \dfrac{41}{25}$,

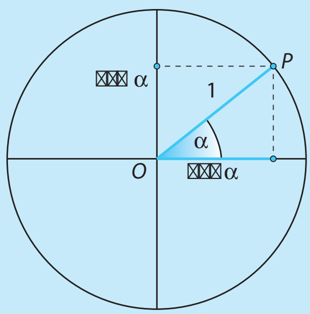
luego $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$, por lo que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{5}{\sqrt{41}} = \dfrac{5\sqrt{41}}{41}$.

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{41}}{41} \;\text{ y }\; \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{41}{4\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$

13 **Simplifica la siguiente expresión cos α + sen α · tg α.**

$$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

7.3. La circunferencia goniométrica



En la sección anterior se han definido las razones trigonométricas de ángulos agudos, y ahora extendemos la definición para ángulos α comprendidos entre 0 y 360°. En la circunferencia de centro *O* y radio 1, llamada circunferencia **goniométrica,** consideramos un punto *P* de modo que el ángulo que forman el semieje de abscisas positivo con la semirrecta *OP* mida α. Sean (*x*, *y*) las coordenadas del punto *P*.

$$\text{Definimos entonces sen } \alpha = y, \ \cos \alpha = x \text{ y } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

donde, para la definición de la tangente, estamos suponiendo $x \neq 0$, es decir, el ángulo α no mide ni 90° ni 270°.

De la definición se deduce el valor del seno y el coseno de algunos ángulos significativos, expresados en grados, y el signo del seno y el coseno de un ángulo según el cuadrante en que se encuentre. Esta información se recoge en las siguientes tablas.

Ángulo	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	–1
Coseno	1	0	–1	0

Cuadrante	1°	2°	3°	4°
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+

14 **Completa la tabla con el signo que toman la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante en cada cuadrante.**

Cuadrante	1°	2°	3°	4°
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–

Cuadrante	1°	2°	3°	4°
Cosecante	+	+	–	–
Secante	+	–	–	+

15 **El seno de un ángulo α del segundo cuadrante vale $\frac{3}{5}$. Calcula el valor del resto de razones trigonométricas de α.**

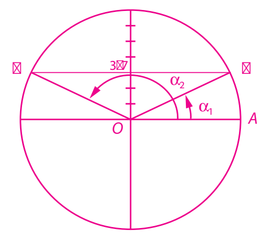
Es inmediato que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{3}$. Además, por tratarse de un ángulo del segundo cuadrante, las restantes razones trigonomØtricas son negativas. En particular,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{-4}{5}, \ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{-5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-3}{4} \text{ y } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{-4}{3}$$

16 Dibuja los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que cumplen que su seno vale $\frac{3}{7}$.

El seno sólo es positivo en los dos primeros cuadrantes, luego en ellos hemos de buscar ángulos cuyo seno valga $\frac{3}{7}$. Para dibujarlos sobre una circunferencia trazamos la paralela a distancia $\frac{3}{7}$ del radio OA. Si M y N son los puntos en que dicha paralela corta a la circunferencia, los ángulos buscados son $\alpha_1 = \widehat{AOM}$ y $\alpha_2 = \widehat{AON}$.



Razones trigonométricas de ángulos positivos cualesquiera.

Las razones de un ángulo α mayor que 360° (o 2π radianes), se definen como las del resto de la división de α entre 360 (o 2π, respectivamente).

Ejemplos: Como $943 = 2 \cdot 360 + 223$, un ángulo de 943° es lo mismo que dar dos vueltas y, además, girar 223°. Las razones trigonométricas de 943° son las mismas que las de 223°:

$$\text{sen}(943°) = \text{sen}(223°),\ \cos(943°) = \cos(223°),\ \dots$$

Como $\frac{23\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}$, girar $\frac{23\pi}{3}$ radianes es dar tres vueltas y girar $\frac{5\pi}{3}$ rad. Por ello se definen las razones trigonométricas de $\frac{23\pi}{3}$ rad como las de $\frac{5\pi}{3}$ rad. Así,

$$\text{sen}\left(\frac{23\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right),\ \cos\left(\frac{23\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), \dots$$

17 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos:

a) $\alpha = 1\,860°$

Al dividir entre 360 se tiene $1\,860 = 360 \cdot 5 + 60$, luego las razones trigonométricas del ángulo α coinciden con las del ángulo de 60°, es decir,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\alpha = \frac{1}{2},\ \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3},\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \sec\alpha = 2,\ \text{cosec}\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $\beta = \frac{33\pi}{4}$ rad

Como $\beta = \frac{33\pi}{4} = 8\pi + \frac{\pi}{4} = 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$ las razones trigonométricas del ángulo β son las del ángulo $\frac{\pi}{4}$. Como conocemos las de este último, tenemos:

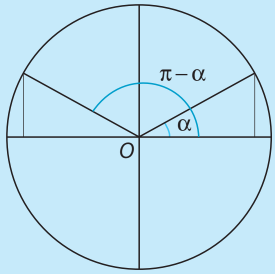
$$\text{sen}\,\beta = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{tg}\,\beta = 1 = \text{cotg}\,\beta,\ \text{cosec}\,\beta = \sqrt{2} = \sec\beta$$

Ángulos opuestos. Se llaman **ángulos negativos** a los recorridos en el sentido de las agujas del reloj. Se cumple que: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ y $\cos(-\alpha) = \cos\ \alpha$

Ángulos suplementarios

$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$

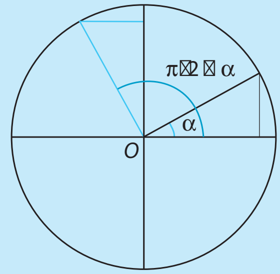
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\ \alpha$



Ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

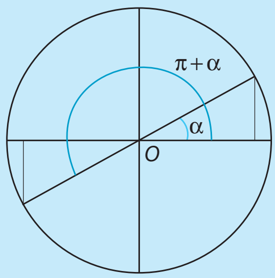
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\ \alpha$



Ángulos que difieren en π

$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

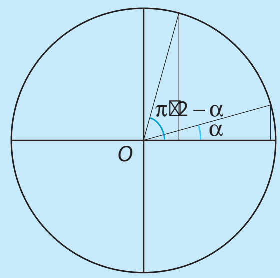
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\ \alpha$



Ángulos complementarios

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\ \alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\ \alpha$



18 **¿Qué relación existe entre la tangente de dos ángulos suplementarios, complementarios, opuestos, que difieren en π y que difieren en $\frac{\pi}{2}$?**

Las tangentes de dos ángulos suplementarios α y $\pi - \alpha$ son opuestas pues:

$$\text{tg}\,(\pi - \alpha) = \frac{\text{sen}\,(\pi - \alpha)}{\cos\,(\pi - \alpha)} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

También las tangentes de dos ángulos opuestos α y $-\alpha$ son opuestas pues:

$$\text{tg}\,(-\alpha) = \frac{\text{sen}\,(-\alpha)}{\cos\,(-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = -\text{tg}\ \alpha$$

Las tangentes de dos ángulos α y $\pi + \alpha$ que difieren en π coinciden ya que:

$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \frac{\text{sen}\,(\pi + \alpha)}{\cos\,(\pi + \alpha)} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

Por último, $\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\ \alpha}{-\text{sen}\ \alpha} = \frac{-1}{\text{tg}\ \alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -1$

19 Calcula sec 15° sabiendo que $tg\,75° = 2 + \sqrt{3}$.

Conviene observar que el ángulo de 15° es un ángulo del primer cuadrante por lo que todas sus razones trigonométricas son positivas. Además como los ángulos de 15° y 75° son complementarios se tiene que:

$$tg\,15° = \frac{1}{tg\,75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2-\sqrt{3}$$

$$sec^2 15° = 1 + tg^2 15° = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 8 - 4\sqrt{3} \Rightarrow sec\,15° = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

20 Completa las razones trigonométricas de los ángulos que aparecen en la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones existentes entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios…

	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

21 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha = 4725°$ y $\beta = 4080°$.

Calculamos el resto de las divisiones de los ángulos dados entre 360, esto es,

$$4725 = 360 \cdot 13 + 45 \quad y \quad 4080 = 360 \cdot 11 + 120$$

Así, las razones trigonométricas de 4725° coinciden con las de 45°, es decir,

$$sen\,\alpha = cos\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\; cosec\,\alpha = sec\,\alpha = \sqrt{2},\; tg\,\alpha = cotg\,\alpha = 1$$

Las razones trigonométricas de 4080° coinciden con las de 120°, suplementario de 60°.

$$sen\,4080° = sen\,120° = sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\; cos\,4080° = cos\,120° = -cos\,60° = -\frac{1}{2},$$

$$tg\,4080° = tg\,120° = -tg\,60° = -\sqrt{3},\; cotg\,4080° = cotg\,120° = -cotg\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

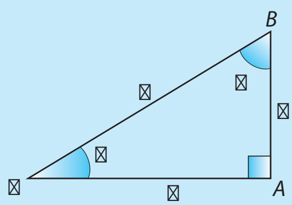
$$sec\,4080° = sec\,120° = -sec\,60° = -2 \quad y \quad cosec\,4080° = cosec\,120° = cosec\,60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7.4. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es conocer lo que miden sus tres lados y sus tres ángulos. Con más conocimientos de trigonometría se pueden resolver todos los triángulos conociendo 3 de esos 6 datos, siempre que se conozca algún lado:

Caso 1. Se conocen un ángulo agudo β y la hipotenusa *a*.

Para calcular el otro ángulo agudo tenemos en cuenta que los ángulos de un triángulo suman 180°, luego



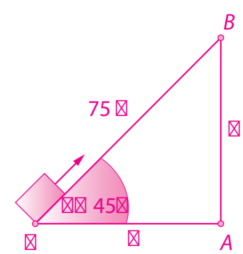
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - \beta$$

y para calcular la longitud de los catetos emplearemos las razones trigonométricas del ángulo dado, así que,

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \text{sen}\,\beta \ \text{ y } \ \cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos\beta$$

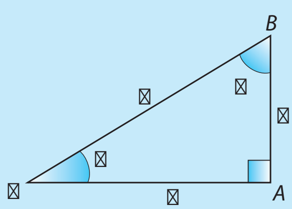
22 **Una cinta transportadora de 75 m forma un ángulo de elevación de 45°. Determina a qué altura eleva la carga.**

Se trata de calcular lo que mide el cateto c del triángulo rectángulo ABC de la figura, sabiendo que a = 75 m y γ = 45°. Así,



$$\frac{c}{a} = \text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = a\,\text{sen}\,45° = \frac{75\cdot\sqrt{2}}{2} \simeq 53{,}03\,\text{m}$$

Caso 2. Se conocen un ángulo agudo β y un cateto *c*.

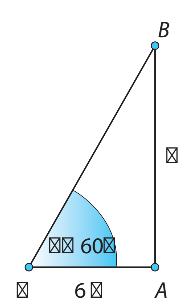


En este caso: $\gamma = 90° - \beta$ y $b = c \cdot \text{tg}\,\beta$

Conocidos los dos catetos podemos emplear el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa, o bien, el valor del seno o del coseno de los ángulos agudos del triángulo.

23 **Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 6 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 60°. ¿Cuánto mide el poste?**

Se trata de calcular lo que mide el cateto c del triángulo rectángulo ABC de la figura, sabiendo que b = 6 m y γ = 60°. Como,



$$\frac{c}{b} = \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,60° = \sqrt{3} \Rightarrow c = b\cdot\text{tg}\,60° = 6\sqrt{3} \simeq 10{,}39\,\text{m}$$

Caso 3. Se conocen la hipotenusa y un cateto.

Mediante el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud del cateto desconocido. Para conocer la amplitud de los ángulos agudos del triángulo necesitaremos la calculadora.

Ejemplo: A continuación se muestra la secuencia que hay que teclear para obtener el ángulo cuyo seno es 0.5: SHIFT SIN 0,5 = 30

Análogamente para obtener el ángulo cuyo coseno es 0.5: SHIFT COS 0,5 = 60

24 **Halla, usando la calculadora, la amplitud de los ángulos agudos α de los que se conoce la siguiente razón trigonométrica:**

a) sen α = 0,299 — $\alpha \approx 17^\circ 23' 51''$

b) cos α = 0,862 — $\alpha \approx 30^\circ 27' 29''$

c) tg α = 1,02 — $\alpha \approx 45^\circ 34' 2''$

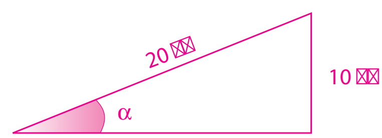
25 **Halla, redondeando a tres decimales y usando la calculadora:**

a) $\text{sen}(25^\circ 13' 52'') = 0{,}426$ **b)** $\cos(72^\circ 42') = 0{,}309$ **c)** $\text{tg}(78^\circ 12') = 4{,}787$

26 **¿Cuál es el ángulo de elevación de una carretera que sube 10 km en una distancia de 20 km medidos sobre el plano inclinado?**

Si α es el ángulo de elevación de la carretera:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \text{sen}\,30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



Caso 4. Se conocen los dos catetos.

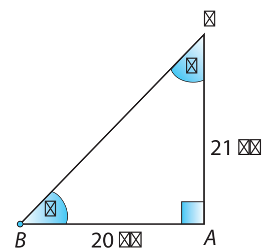
Mediante el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la hipotenusa y para conocer la amplitud de los ángulos agudos del triángulo empleamos las funciones SIN^{-1} y COS^{-1} de la calculadora.

27 **Resuelve el triángulo rectángulo en *A* cuyos catetos miden 20 y 21 cm.**

Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos la longitud de la hipotenusa: $a = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$ cm.

Así, con ayuda de la calculadora tenemos:

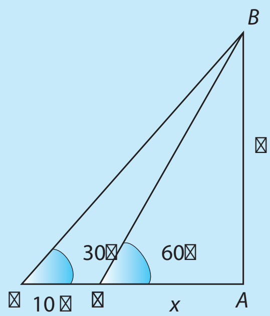
$$\text{sen}\,\beta = \frac{21}{29} \Rightarrow \beta = 46^\circ 23' 50''$$



y el otro ángulo agudo $\gamma = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 45^\circ 23' 50'' = 43^\circ 36' 10''$

En ocasiones es necesario realizar más de una observación y combinar la información de varios triángulos para averiguar la longitud desconocida de algún lado. Este procedimiento recibe el nombre de **doble observación.**

Ejemplo: Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 10 m hacia el pie de la torre, este ángulo se hace de 60°. Halla la altura de la torre.



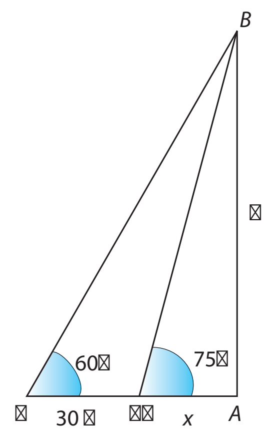
Con las notaciones de la figura se trata de calcular el cateto común *AB* de los triángulos *ABC* y *ABC'*. Se tiene

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg } 30° = \frac{h}{10 + x} \Rightarrow x\sqrt{3} = 3h - 10\sqrt{3} \quad \text{y}$$

$$\sqrt{3} = \text{tg } 60° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3}$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $h = 3h - 10\sqrt{3} \Rightarrow 2h = 10\sqrt{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$ m

28 **El ángulo de elevación del extremo de un mástil de una bandera medido desde un punto del suelo es 60°. Caminando 30 metros hacia la bandera el ángulo de elevación crece hasta alcanzar 75°. Sabiendo que tg 75° = 2 + $\sqrt{3}$, halla la altura del extremo del mástil.**



Con las notaciones de la figura se trata de calcular la longitud h del cateto común AB de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$. Se tiene:

$$\sqrt{3} = \text{tg } 60° = \frac{h}{30 + x} \quad \text{y} \quad 2 + \sqrt{3} = \text{tg } 75° = \frac{h}{x}$$

Invirtiendo ambas expresiones resulta:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30 + x}{h} = \frac{30}{h} + \frac{x}{h} \quad \text{y} \quad \frac{x}{h} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

Sustituyendo:

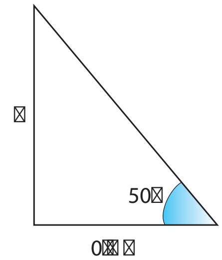
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{30}{h} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{30}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{90\left(2 + \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} = 15\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \simeq 96{,}96 \text{ m}$$

29 Expresa en radianes el Ængulo que gira la manecilla minutera de un reloj en un minuto.

La manecilla de los minutos da una vuelta completa, que mide 2π rad, en una hora, esto es en 60 minutos, por tanto en un minuto girará $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ *rad.*

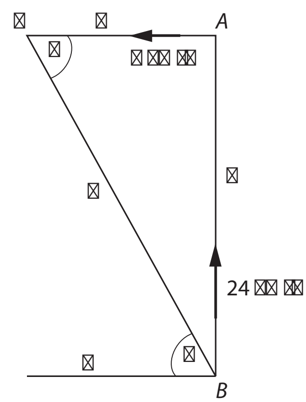
30 Blanca forma con su sombra un Ængulo recto. La sombra mide 0,8⊠m y el Ængulo con el que se ve la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide 50⊠. Calcula la altura de Blanca.



Se trata de calcular la longitud h del cateto que se muestra en la figura. Ahora bien, como $\operatorname{tg} 50° = \frac{h}{0{,}8} \Rightarrow h = 0{,}8 \cdot \operatorname{tg} 50° \simeq 0{,}95$ m.

Por tanto, Blanca mide aproximadamente 0,95 m.

31 Un barco navega a 24 km/h y trata de atravesar un r⊠o en sentido perpendicular a la corriente, cuya velocidad es 8 km/h. Calcula la velocidad efectiva del barco y quØ Ængulo forma su trayectoria con la orilla.



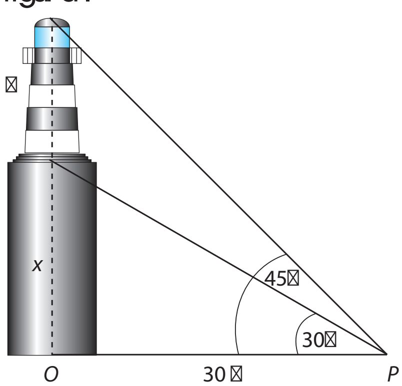
La recta r de la figura representa la orilla desde la que parte el barco B, y el cateto c = 24 mide la velocidad con la que parte el barco. La corriente del río, que empuja de derecha a izquierda, mide b = 8, luego la velocidad real del barco es el valor de la hipotenusa,

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10} \text{ km/h}$$

El ángulo formado por la orilla con la trayectoria que sigue el barco se denota ⊠ en la figura, y su tangente es

$$\operatorname{tg} ⊠ = \frac{c}{b} = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow ⊠ = 71⊠33⊠54⊠⊠$$

32 Calcula la altura *h* del faro y la altura *x* del acantilado que se muestran en la figura.



$$\operatorname{tg} 30° = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 10\sqrt{3} \simeq 17{,}32 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{x+h}{30} \Rightarrow 1 = \frac{x+h}{30} \Rightarrow 30 = x + h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 30 - x = 30 - 10\sqrt{3} \simeq 12{,}68 \text{ m}$$

Evaluación

1 **¿Qué ángulo es mayor, el que mide 84° o el que mide 1,6 radianes?**

El ángulo de 84° tiene: $84^\circ = 84 \cdot \left(\dfrac{2\pi}{360}\right) = \dfrac{7\pi}{15} < 1{,}6$ radianes,

luego el primer ángulo es menor que el segundo.

2 **Calcula las razones trigonométricas del ángulo α opuesto al lado de longitud 5 cm de un triángulo cuyos otros dos lados miden 12 y 13 cm.**

El triángulo es rectángulo, porque $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Por tanto,

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{5}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{5}{12}$, $\sec\alpha = \dfrac{13}{12}$, $\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{13}{5}$, $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{12}{5}$

3 **La tangente del ángulo α de un triángulo rectángulo vale 2. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α.**

Empleando las igualdades fundamentales,

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{1}{2},\ \sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \sqrt{5},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ \text{ y }\ \text{cosec}\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

4 **Calcula el seno y el coseno de los siguientes ángulos:**

a) 1 470°

Como $1\,470 = 360 \cdot 4 + 30$ las razones trigonomØtricas del ángulo 1 470° coinciden con las del de 30° y, por ello, $\text{sen}\ 1470^\circ = \dfrac{1}{2}$ y $\cos 1470^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) 2 025°

Como $2\,025 = 360 \cdot 5 + 225$, las razones trigonomØtricas de 2 025° coinciden con las del ángulo de 225°. Este último difiere en 180° del ángulo de 45°, y por tanto:

$$\text{sen}\ 2\,025^\circ = \text{sen}\ 225^\circ = -\text{sen}\ 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ y }\ \cos 2\,025^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) –3 660°

Por su parte, $3\,660 = 360 \cdot 10 + 60$, por lo que las razones del ángulo $-3\,660°$ son las del ángulo de $-60°$. En consecuencia,

$$\text{sen}(-3\,660^\circ) = \text{sen}(-60^\circ) = -\text{sen}\ 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-3\,660^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

5 La tangente de un ángulo α comprendido entre π y $\frac{3\pi}{2}$ rad vale $\frac{3}{5}$. Calcula el valor del resto de razones trigonométricas de α.

La tangente y la cotangente $\text{cotg}\,\alpha = \frac{5}{3}$ son las únicas razones positivas del ángulo α. Para calcular las demás procedemos como sigue:

$$\sec\alpha = -\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = -\frac{\sqrt{34}}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = -\frac{5}{\sqrt{34}} = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

Ya solo falta calcular el seno y la cosecante:

$$\text{sen}\,\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{25}{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}} = -\frac{3\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = -\frac{\sqrt{34}}{3}$$

6 La secante de un ángulo α comprendido $\frac{\pi}{2}$ y π radianes vale $-\frac{5}{3}$. Calcula el valor del resto de razones trigonométricas de α.

Desde luego $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ TambiØn la tangente es negativa, por lo que,

$$\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = -\sqrt{\frac{25}{9}-1} = -\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = -\frac{3}{4}$$

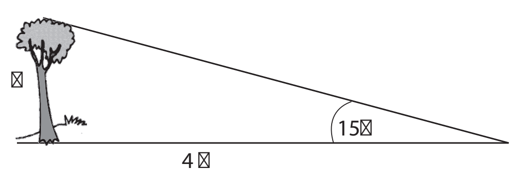
Por último, $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{5}{4}$

7 Demuestra que si $x = \frac{2}{\cos\alpha}$ e $y = 3\text{tg}\,\alpha$ se cumple que $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Sin más que operar se tiene: $9x^2 - 4y^2 = \frac{9\cdot 4}{\cos^2\alpha} - 4\cdot 9\text{tg}^2\alpha = 36\left(\sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha\right) = 36$

8 El ángulo de elevación de la copa de un árbol, observado desde un punto del suelo situado a 4 m del pie del mismo es de 15°. Halla la altura del árbol sabiendo que $\text{tg}\ 75° = 2 + \sqrt{3}$.

Se trata de calcular la longitud del cateto h del triángulo rectángulo la figura. Como los ángulos de 15° y 75° son complementarios, es decir, 15° + 75° = 90° se tiene:



$$\text{tg}\ 15° = \frac{1}{\text{tg}\ 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 4\cdot\text{tg}\ 15° = 4\left(2-\sqrt{3}\right) \simeq 1{,}07\ \text{m}$$

8 Geometría analítica

8.1. Vectores. Operaciones con vectores

- Un **vector fijo** queda determinado por un par ordenado (M, N) de puntos del plano, y se escribe $\overrightarrow{MN}$.

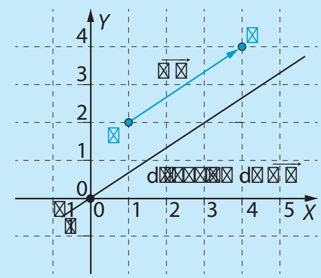
  Si $M \neq N$ el vector $\overrightarrow{MN}$ se representa mediante un segmento orientado con **origen** en el punto M y **extremo** en N.

  Un vector fijo es **nulo** si su origen coincide con su extremo; por ejemplo $\overrightarrow{PP}$. En este caso su representación gráfica es un único punto P.

- El **módulo** del vector $\overrightarrow{MN}$ se denota $|\overrightarrow{MN}|$ y es la distancia entre M y N.

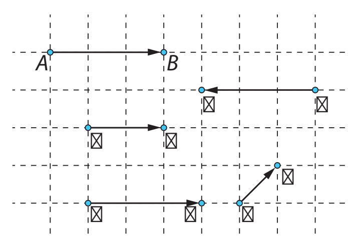
- Se llama **dirección** del vector fijo no nulo $\overrightarrow{MN}$ a la recta que pasa por O y es paralela a la que une M con N.

- Si M y N son puntos de una recta esta admite **dos sentidos de recorrido:** el que corresponde a «ir de M a N», al que llamamos sentido del vector $\overrightarrow{MN}$ y el que corresponde a «ir de N a M», al que llamamos sentido del vector $\overrightarrow{NM}$.



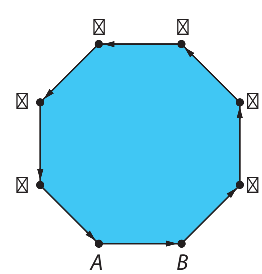
- Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$ son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

1 **¿Indica qué pares de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{IJ}$ representados en la ilustración son equipolentes?**



Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ son equipolentes, y los restantes pares de vectores no lo son.

2 **Sean A, B, C, D, E, F, G y H los vértices del octógono regular representado en la ilustración. ¿Existen dos vectores entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{HA}$ con igual módulo? ¿Y con la misma dirección? ¿Y con el mismo sentido? ¿Hay algún par de vectores equipolentes?**



Todos los vectores tienen el mismo módulo pues los ocho lados de un octógono regular tienen la misma longitud.

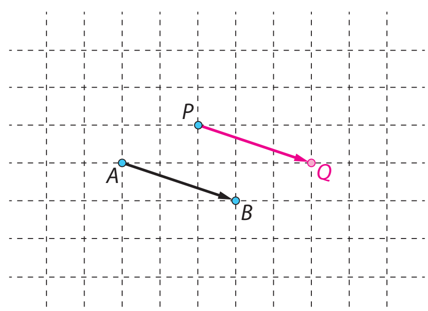
Los vectores que tienen la misma dirección son los que están situados en rectas paralelas, es decir:

$$\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{EF};\ \overrightarrow{BC} \text{ y } \overrightarrow{FG};\ \overrightarrow{CD} \text{ y } \overrightarrow{GH};\ \overrightarrow{DE} \text{ y } \overrightarrow{HA}$$

Cada una de estas parejas está constituida por dos vectores con la misma dirección pero distinto sentido, luego no hay ningún par de vectores equipolentes.

- La colección de vectores fijos equipolentes a uno dado $\overrightarrow{AB}$ recibe el nombre de **vector libre** que tiene a $\overrightarrow{AB}$ por uno de sus representantes. Los vectores libres se suelen representar con letras minúsculas $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$… Emplearemos el símbolo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ para denotar que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un **representante** del vector libre $\vec{u}$.
- Se llama **vector libre nulo,** y se denota $\vec{0}$, al representado por cualquier vector fijo nulo $\overrightarrow{PP}$.
- Si el vector libre $\vec{u}$ está representado por el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ denotamos $-\vec{u}$ al vector libre representado por el vector fijo $\overrightarrow{BA}$. Se dice que $-\vec{u}$ es el **opuesto** de $\vec{u}$.
- Se llaman módulo, dirección y sentido del vector libre $\vec{u}$ al módulo, dirección y sentido de cada uno de sus representantes. Los vectores de módulo 1 se llaman **unitarios.**
- Para representar gráficamente un vector libre dibujamos uno cualquiera de sus representantes.

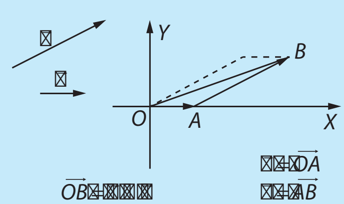
3 **Representa el vector libre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ mediante un vector fijo con origen en el punto *P*.**



Debemos representar un vector equipolente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en el punto P.

Suma de vectores libres

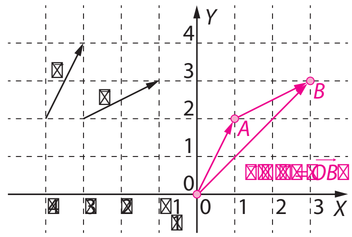
La suma de dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector libre que denotamos $\vec{u} + \vec{v}$ representado por la suma de dos representantes de los sumandos de modo que el extremo del primero es el origen del segundo.



En consecuencia, para calcular un representante de $\vec{u} + \vec{v}$ podemos elegir dos puntos *A* y *B* tales que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$ sean representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente, y $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector libre representado por $\overrightarrow{OB}$. Este modo de sumar vectores se denomina **regla del paralelogramo.**

- La *resta* $\vec{u} - \vec{v}$ de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es la suma $\vec{u} + (-\vec{v})$, es decir, de $\vec{u}$ con el opuesto de $\vec{v}$.

4 **Dibuja un representante con origen en O del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la ilustración.**



Tomamos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$, como representantes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y así $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

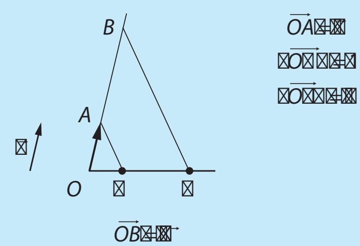
Producto de un número real por un vector libre

El producto de un número r por un vector libre $\vec{u}$, es otro vector libre $r\vec{u}$, que tiene la misma dirección que $\vec{u}$, cuyo módulo es el producto del valor absoluto de r por el módulo de $\vec{u}$ y cuyo sentido es el mismo que el de $\vec{u}$ si $r > 0$, y contrario si $r < 0$.

Para representar $r\vec{u}$ con $r > 0$, empleamos el **teorema de Tales** como sigue:

- Elegimos un vector fijo $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ y sobre una recta auxiliar que pase por O pero no por A elegimos dos puntos M y N de modo que los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ tengan el mismo sentido, $|\overrightarrow{OM}| = 1$ y $|\overrightarrow{ON}| = r$, como en la figura.
- Sea B el punto en que la recta que une O con A corta a la paralela que une A y M que pasa por N. Entonces:

$$r\vec{u} = \overrightarrow{OB}$$



Para multiplicar un vector libre $\vec{u}$ por un número negativo, basta con multiplicar por el valor absoluto del número al vector $-\vec{u}$, opuesto de $\vec{u}$.

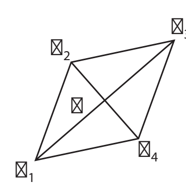
Se dice que los vectores libres no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **proporcionales** si existe un número real no nulo r tal que:

$$\vec{v} = r\vec{u}$$

Se dice que un vector $\vec{v}$ es **combinación** de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ si existen dos números reales α y β tales que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$$

5 **Sean V_1, V_2, V_3 y V_4 los vértices de un rombo, y sea M el punto de corte de sus diagonales. Dados los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{V_1V_2}$, $\vec{v} = \overrightarrow{V_1V_4}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{V_1M}$, expresa $\vec{w}$ como combinación de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

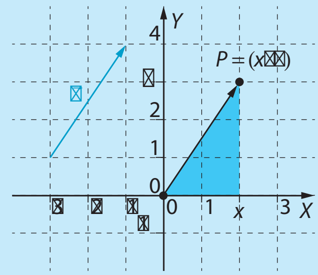


Observamos que $\vec{v}=\overrightarrow{V_1V_4}$ y también $\vec{v}=\overrightarrow{V_2V_3}$. Por la ley del paralelogramo, $\overrightarrow{V_1V_2}+\overrightarrow{V_2V_3}=\overrightarrow{V_1V_3}$, por lo que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{V_1V_3}$. Entonces:

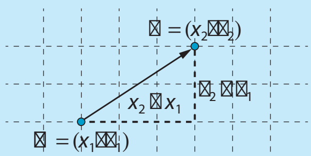
$$\overrightarrow{V_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{V_1V_3} \Rightarrow \vec{w}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$$

8.2. Coordenadas de puntos y vectores

Dado un punto $A = (a_1, a_2)$ del plano se denomina **vector de posición** de A al vector que une el origen de coordenadas O con el punto A, es decir, al vector $\overrightarrow{OA}$. Se dice también que (a_1, a_2) son las **coordenadas** de dicho vector.



Dado un vector libre $\vec{u}$ sea $P = (x, y)$ el punto del plano tal que el vector de posición de P es un representante suyo, esto es, $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$. En tal caso se dice que el par (x, y) son las coordenadas cartesianas del vector libre $\vec{u}$. Por el teorema de Pitágoras el **módulo** de $\vec{u}$ es el número real $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Dados los puntos del plano $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$, las **coordenadas del vector libre** representado por $\overrightarrow{MN}$ son:

$$(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

6 **Dados los puntos $A = (3, 4)$, $B = (-2, 0)$ y $C = (-3, 5)$, halla las coordenadas cartesianas y los módulos de los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2-3, 0-4) = (-5, -4) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (-3-(-2), 5-0) = (-1, 5) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

- La **suma** de dos o más vectores libres es otro vector libre cuyas coordenadas son la suma de las respectivas coordenadas de los sumandos.
- El **producto** de un escalar por un vector libre es otro vector libre cuyas coordenadas son el producto de las coordenadas del vector inicial por el escalar.

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3)$, $\vec{v} = (6, -5)$ y $\vec{w} = (0, 2)$, entonces:

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2 \cdot (1, -3) - 3 \cdot (6, -5) + (0, 2) = (2, -6) + (-18, 15) + (0, 2) = (-16, 11)$$

7 **Dados los vectores $\vec{u} = (0, 3)$, $\vec{v} = (1, -2)$ y $\vec{w} = (3, 4)$, calcula:**

a) $4\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w} = 4 \cdot (0,3) - (1,-2) + 3 \cdot (3,4) = (0,12) + (-1,2) + (9,12) = (8,26)$

b) $2(\vec{u} - \vec{v}) + 3(2\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}) = 2\vec{u} - 2\vec{v} + 6\vec{u} + 3\vec{v} + 12\vec{w} = 8\vec{u} + \vec{v} + 12\vec{w}$

$= 8 \cdot (0,3) + (1,-2) + 12 \cdot (3,4) = (0,24) + (1,-2) + (36,48) = (37,70)$

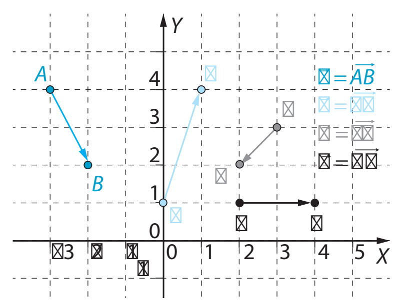
8 Calca los módulos de los vectores $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (20, 21)$ y $\vec{v} - \vec{u}$.

- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|\vec{v}| = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$
- $\vec{v} - \vec{u} = (20, 21) - (3, 4) = (17, 17) = 17 \cdot (1, 1) \Rightarrow |\vec{v} - \vec{u}| = 17\sqrt{2}$

9 Calcula los valores de x e y para los que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas cartesianas son $\vec{u} = (x + 2,\ y - 1)$ y $\vec{v} = (y - 1,\ 2 - x)$ coincidan.

La condición del enunciado equivale a: $\begin{cases} x+2=y-1 \\ y-1=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2-x \\ y-1=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

10 Calcula las coordenadas cartesianas de los vectores libres $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tienen por representantes a los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GH}$, respectivamente.



Sin más que restar las coordenadas de los extremos de cada vector resulta:

$\vec{r} = (1, -2);\ \vec{s} = (1, 3);\ \vec{u} = (-1, -1);\ \vec{v} = (2, 0)$

- Calcula las coordenadas del vector libre $5\vec{r} - 4\vec{s} + 3\vec{u} - 2\vec{v}$.

$$5\vec{r} - 4\vec{s} + 3\vec{u} - 2\vec{v} = 5 \cdot (1, -2) - 4 \cdot (1, 3) + 3 \cdot (-1, -1) - 2 \cdot (2, 0) =$$
$$= (5 - 4 - 3 - 4, -10 - 12 - 3 - 0) = (-6, -25)$$

Criterio de proporcionalidad de vectores libres. Dos vectores no nulos, de coordenadas cartesianas $\vec{u} = (x_1, x_2)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2)$, son proporcionales si y solo si:

$$x_1 y_2 = x_2 y_1$$

11 Indica cuáles de los siguientes vectores son proporcionales:

$$\vec{u}_1 = (-2, 3);\ \vec{u}_2 = (3, -2);\ \vec{u}_3 = \left(3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right);\ \vec{u}_4 = (-3, -2);\ \vec{u}_5 = (-3, 2);\ \vec{u}_6 = (0, 3)$$

Los vectores $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ y $\vec{u}_5$ son proporcionales y los demás no lo son.

12 Calcula el valor del número real x para que los vectores de coordenadas cartesianas $\vec{u} = (4, -15)$ y $\vec{v} = (x, 5)$ sean proporcionales.

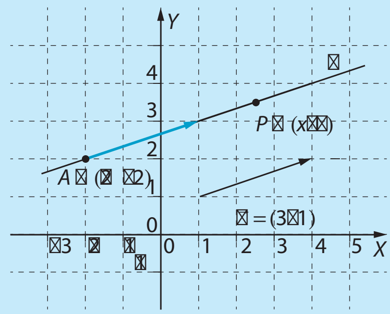
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales si y sólo si $4 \cdot 5 = -15x$, o sea: $x = \dfrac{-4}{3}$

8.3. Diversas formas de la ecuación de una recta

Ecuaciones paramétricas de la recta

Unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A = (a_1, a_2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son:

$$r \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = a_1 + tu_1} \\ \boldsymbol{y = a_2 + tu_2} \end{cases} \quad \textbf{donde el parámetro } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$$



Dando valores al parámetro t obtenemos todos los puntos de r.

Ejemplo: Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $A = (-2, 2)$ y tiene a $\vec{u} = (3, 1)$ como **vector director** son: $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$

- Conviene observar que un punto $P = (x, y)$ pertenece a dicha recta si y solo si los vectores $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ y $\vec{u} = (3,1)$ son proporcionales. Como $\vec{v} = (x + 2, y - 2)$, lo anterior se traduce en que exista un número real t tal que $\vec{v} = t\vec{u}$, esto es: $(x + 2, y - 2) = t(3, 1)$

  Igualando las coordenadas de ambos vectores obtenemos las ecuaciones paramétricas anteriores.

13 **Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por el punto *A* = (1, 2) y tiene por vector director a $\vec{u}$ = (3, –1). Encuentra dos puntos de *r* distintos de *A*.**

Unas ecuaciones paramØtricas de la recta r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Para $t = -1$ y $t = 1$ se obtienen los puntos $P = (-2, 3)$ y $Q = (4, 1)$ de r.

¿Cómo obtener unas **ecuaciones paramétricas de una recta *r* a partir de las coordenadas de dos puntos** suyos, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$? Un vector director de la recta r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, es decir, $\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, luego unas ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}$$

14 **Halla un vector director y ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *M* = (–1, 2) y *N* = (2, 4).**

Un vector director de la recta r que pasa por M y N es $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, o sea: $\vec{u} = (3, 2)$

Así, unas ecuaciones paramØtricas de esta recta son: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

15 **Halla un punto y un vector director de la recta que tiene por ecuaciones paramétricas:** $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$

Para $t = 0$ se tiene el punto $P = (3, 4)$ de r, y un vector director es $\vec{u} = (-2, 1)$.

Ecuación general o implícita de la recta

Sea r la recta que tiene a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ por vector director y pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$. Un punto $Q = (x, y)$ pertenece a r si y solo si el vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ es proporcional a $\vec{u}$. Como $\vec{v} = (x - p_1,\ y - p_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ esto equivale a que:

$$u_2(x - p_1) = u_1(y - p_2) \iff u_2x - u_1y + p_2u_1 - p_1u_2 = 0$$

Llamando $A = u_2$, $B = -u_1$ y $C = p_2u_1 - p_1u_2$, la ecuación anterior se lee $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, y se llama **ecuación general** o **implícita de *r*.**

Nótese que un vector director de esta recta es $\vec{u} = (-B, A)$.

$$\cdot(-1)$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{u} = (-B, A)$$

Ejemplo: Calculemos una ecuación general de la recta r que pasa por el punto $M = (3, -1)$ y tiene por vector director a $\vec{u} = (-2, 5)$. Un punto $P = (x, y)$ está en r si y solo si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{MP}$ son proporcionales. Como $\vec{v} = (x - 3,\ y + 1)$ resulta:

$$5 \cdot (x - 3) = (-2) \cdot (y + 1) \iff 5x + 2y - 13 = 0$$

16 **Calcula una ecuación general de la recta *r* que pasa por el punto $M = (1, 2)$ y tiene por vector director a $\vec{u} = (-1, 1)$.**

Un punto $P = (-1, 1)$ está en r si y solo si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{MP}$ son proporcionales. Como $\vec{v} = (x - 1, y - 2)$ ha de ser:

$$x - 1 = -(y - 2) \iff x + y - 3 = 0$$

17 **Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv 3x + 2y - 5 = 0$.**

Un vector director de r es $\vec{u} = (-2, 3)$. Para hallar un punto en r basta dar un valor cualquiera a x, por ejemplo $x = 1$, y despejar: $y = \dfrac{5 - 3}{2} = 1$

Así el punto $M = (1, 1)$ pertenece a r, por lo que unas ecuaciones paramØtricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

No cabe hablar de **la** ecuación general de una recta r, sino de **una** ecuación general.

De hecho, $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ son ecuaciones de la misma recta si y solo si existe un número real s tal que: $A = sA_1$; $B = sB_1$; $C = sC_1$

18 **Indica cuáles de las siguientes ecuaciones lo son de la misma recta:**

a) $7x - 3y - 4 = 0$

b) $7x + 3y - 4 = 0$

c) $-21x + 9y + 12 = 0$

d) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$

Las ecuaciones de los apartados a), c) y d) lo son de la recta que pasa por el punto (1, 1) y tiene a (3, 7) por vector director, mientras que la segunda ecuación no es satisfecha por (1, 1), luego la recta definida por la segunda ecuación es distinta de la que definen las demás.

Ecuación continua

Sabemos que si la recta r pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director suyo es $\vec{u} = (u_1, u_2)$, un punto $Q = (x, y)$ del plano pertenece a r si y solo si:

$$u_2(x - p_1) = u_1(y - p_2)$$

Si las dos coordenadas u_1 y u_2 de $\vec{u}$ son no nulas podemos escribir la igualdad anterior como:

$$r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2}$$

Esta se denomina una **ecuación continua** de r.

19 **Halla una ecuación continua y una ecuación general de la recta r que pasa por el punto $P = (2, 1)$ y tiene por vector director a $\vec{u} = (-3, 2)$.**

Una ecuación continua de r es: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2}$

Para obtener una ecuación general basta quitar denominadores y pasar de miembro:

$$2 \cdot (x-2) = (-3) \cdot (y-1) \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$$

20 **Encuentra un punto y un vector director de la recta $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{5}$.**

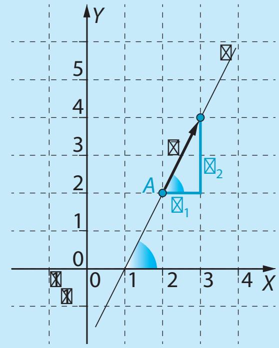
Un punto de esta recta es $P = (-2, 1)$, y un vector director suyo es $\vec{u} = (2, 5)$.

Pendiente de una recta

Sea r una recta no vertical. Se denomina **pendiente** de r, y se denota por $\boldsymbol{m}$, a la tangente del ángulo que forma dicha recta con el semieje positivo de abscisas.

Todo vector director de r es de la forma $\vec{u} = (u_1, u_2)$, con $u_1 \neq 0$.

El cociente $\dfrac{u_2}{u_1}$ no depende del vector director elegido, sino solo de la recta, ya que cualquier otro vector director es proporcional a $\vec{u}$, y $m = \dfrac{u_2}{u_1}$ es la pendiente de r.



Si $A = (a_1, a_2)$ es un punto de r, entonces $P = (x, y)$ pertenece r si y solo si $u_2(x - a_1) = u_1(y - a_2)$, y dividiendo entre u_1 queda:

$$\boldsymbol{r \equiv y - a_2 = m \cdot (x - a_1)}$$

La anterior se denomina **ecuación de $\boldsymbol{r}$ en la forma punto-pendiente**.

La **recta vertical** que pasa por el punto $A = (a_1, 0)$ tiene una ecuación de la forma:

$$r \equiv x = a_1$$

21 **Halla la ecuación en forma punto-pendiente de la recta $\boldsymbol{r}$ cuya ecuación continua es: $\boldsymbol{r \equiv \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y+1}{2}}$**

Un vector director de r es $\vec{u} = (-5, 2)$, luego su pendiente es: $m = \dfrac{-2}{5}$

Como r pasa por $P = (3, -1)$, una ecuación de r en la forma punto-pendiente es:

$$y + 1 = \frac{-2}{5}(x - 3)$$

Ecuación explícita

Sea r la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $A = (a_1, a_2)$. Una ecuación de r en la forma punto–pendiente es r:

$$y - a_2 = m \cdot (x - a_1)$$

Despejando se obtiene la ecuación r: $y = mx + a_2 - ma_1$, y la podemos reescribir como $\boldsymbol{y = mx + n}$, donde $n = a_2 - ma_1$. Así escrita se denomina ecuación en forma explícita.

El **término independiente $\boldsymbol{n}$** de la ecuación explícita de r es la ordenada del punto de corte de la recta r con el eje de ordenadas, y recibe el nombre de **ordenada en el origen.**

22 **¿Cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $\boldsymbol{r}$ de ecuación $\boldsymbol{y = -3x + 2}$? ¿Pertenece el punto $\boldsymbol{P = (2, 3)}$ a dicha recta?**

La pendiente de r es $m = -3$ y la ordenada en el origen es $n = 2$. El punto P no pertenece a r pues sus coordenadas no satisfacen su ecuación ya que: $-3 \cdot 2 + 2 = -4 \neq 3$

Posición relativa de dos rectas

Dos rectas en el plano pueden ser secantes, coincidentes o paralelas. Dos rectas son:

- **Secantes** si se cortan en un único punto, y esto equivale a que tengan distinta pendiente: $m \neq m'$
- **Paralelas** si no comparten ningún punto. En tal caso ambas tienen la misma pendiente: $m = m'$
- Son **la misma** (**coincidentes**) si comparten dos o más puntos. Esto equivale a que compartan un punto y la pendiente ($m = m'$) o, lo que es igual, a que compartan un punto y admitan vectores directores proporcionales.

En términos de los coeficientes de la ecuación general o implícita, dos rectas son:

- **Secantes** si: $\dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{A}{A'}$
- **Paralelas** si: $\dfrac{B}{B'} = \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{C}{C'}$
- **Coincidentes** si: $\dfrac{B}{B'} = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{C}{C'}$

23 **Estudia la posición relativa de las siguientes rectas: $r_1 \equiv \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-1}{2}$; $r_2 \equiv y = -2x + 1$**

Ambas rectas tienen la misma pendiente $m = -2$, luego r_1 y r_2 son paralelas o coincidentes.

Observamos que $P = (-3, 1)$ es un punto de r_1 que, sin embargo, no pertenece a r_2, pues sus coordenadas no satisfacen la ecuación $y = -2x + 1$ de r_2, ya que:

$$-2 \cdot (-3) + 1 = 7 \neq 1$$

Por tanto, r_1 y r_2 son paralelas.

24 **Decide cuál es la posición relativa de las siguientes rectas: $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + t \end{cases}$; $r_2 \equiv y = 3 - 2x$. Halla el punto común en el caso de que sean secantes.**

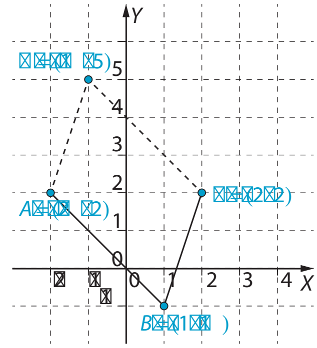
Las rectas r_1 y r_2 son secantes, por tener pendientes distintas, ya que la pendiente de la primera es $\dfrac{1}{4}$ y la de la segunda es -2. Para hallar el punto común de r_1 y r_2 sustituimos las ecuaciones paramØtricas de la primera recta en la ecuación explícita de la segunda, esto es:

$$(-1 + t) = 3 - 2 \cdot (1 + 4t) \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{9}$$

Haciendo $t = \dfrac{2}{9}$ en las ecuaciones paramØtricas de r_1 deducimos que, $P = \left(\dfrac{17}{9}, \dfrac{-7}{9}\right)$ es el punto común de r_1 y r_2.

Problemas

25 Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A = (-2, 2)$, $B = (1, -1)$ y $C = (2, 2)$.



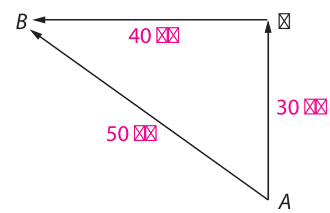
Sea $D = (x, y)$. Por ser lados paralelos de un paralelogramo los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son equipolentes, esto es:

$$(x+2, y-2) = (1, 3)$$

O sea: $\begin{cases} x+2=1 \\ y-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow D=(-1,5)$

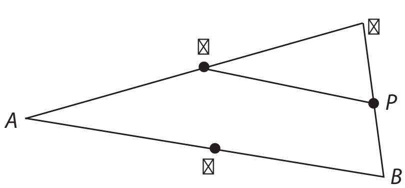
26 Un coche sale de un punto A y avanza en dirección norte durante 15 min a velocidad constante. A continuación, gira hacia el oeste y, manteniendo la velocidad, avanza durante 20 min, hasta llegar a un punto B. ¿Qué distancia hay entre los puntos A y B si la velocidad empleada es de 120 km/h?

En el primer cuarto de hora el coche recorre $\dfrac{120}{4} = 30$ km, que es el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$ de la figura. Como 20 min es la tercera parte de una hora, el coche recorre $\dfrac{120}{3} = 40$ km en su recorrido hacia el oeste. Finalmente, en virtud del teorema de Pitágoras, la distancia entre A y B es:



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2} = 50 \text{ km}$$

27 Sean M, N y P los puntos medios de los lados AB, AC y BC del triángulo ABC, y consideremos los vectores libres $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{NP}$. Prueba que $\vec{u} = 2\vec{v}$.



Los triángulos ABC y NPC son semejantes, pues comparten el ángulo en el vértice C y $\dfrac{AC}{NC} = \dfrac{BC}{PC} = 2$. Por tanto, los lados AB y NP son paralelos y el primero mide el doble que el segundo, luego $\vec{u} = 2\vec{v}$.

28 Halla la longitud del segmento que determina la recta $r: 2x - 3y = 6$ con los ejes coordenados.

Comenzamos calculando los puntos P y Q en los que la recta r corta a los ejes X e Y, respectivamente:

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P=(3,0); \qquad \begin{cases} 2x-3y=6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y=6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow Q=(0,-2)$$

Por tanto, la longitud del segmento PQ es: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

29 Obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 2)$ y es paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$.

Por ser r y s paralelas comparten vector director, luego $\vec{u} = (1, -1)$ es un vector director de r. Así, unas ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$

30 ¿Están alineados los puntos $N = (3, -1)$, $P = (2, 1)$ y $Q = (1, 3)$?

Los puntos N, P y Q están alineados si y solo si los vectores $(-1, 2) = \vec{u} = \overrightarrow{NP}$ y $(-2, 4) = \vec{v} = \overrightarrow{NQ}$ son proporcionales. Esto es cierto pues $\vec{u} = 2\vec{v}$.

Por tanto, los puntos N, P y Q están alineados.

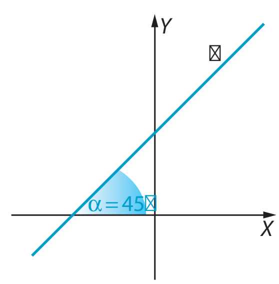
31 Encuentra la ordenada del punto de abscisa 3 alineado con $P = (2, -3)$ y $Q = (5, 8)$.

Se trata de hallar para qué valor de y los puntos P, Q y $N = (3, y)$ están alineados. Esta condición equivale a que los vectores $(3, 11) = \vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $(1, y + 3) = \vec{v} = \overrightarrow{PN}$ sean proporcionales, es decir, $3(y + 3) = 11$. Por tanto, $y = \frac{2}{3}$ es la ordenada buscada.

32 ¿Existe algún valor de a para el que las ecuaciones $2x - 7y = 1$ y $4x + ay = 1$ sean la misma recta?

El punto $P = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ está en la segunda recta pero no en la primera, luego no coinciden. Así, para todo valor de a, las ecuaciones anteriores corresponden a rectas distintas.

33 Calcula el valor de n para que la recta $r \equiv nx + 2y - 5 = 0$ forme un ángulo de 45° con el semieje positivo del eje de abscisas.



La pendiente de la recta r, que vale $\frac{-n}{2}$, es tg 45° = 1, luego:

$$\frac{-n}{2} = \text{tg } 45° = 1 \iff n = -2$$

34 Encuentra una ecuación general de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (4, -1)$.

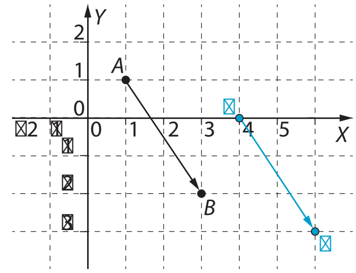
Un punto $M = (x, y)$ pertenece a la mediatriz del segmento PQ si y solo si M equidista de P y Q.

Esto equivale a que $\left|\overrightarrow{PM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{QM}\right|^2$, o lo que es igual:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2 \iff -4x - 2y + 5 = -8x + 2y + 17 \iff$$
$$\iff 4x - 4y - 12 = 0 \iff x - y - 3 = 0$$

Evaluación

1 Dados los puntos $A=(1,\ 1)$, $B=(3,\ -2)$ y $C=(4,\ 0)$, determina el punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ compartan el módulo, la dirección y el sentido.



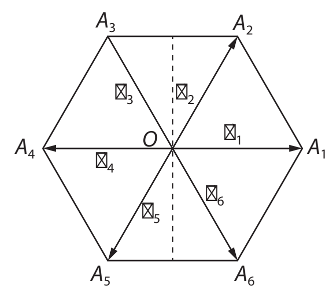
Denotamos por $\vec{u}$ el vector libre $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, cuyas coordenadas son $\vec{u}=(2,-3)$, y sea $D=(x,y)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes si $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$, esto es, $(2,-3)=(x-4,y)$. Igualando coordenadas, $x=6$ e $y=-3$, es decir, $D=(6,-3)$.

2 Dados los vectores $\vec{u}=(-1,\ 3)$, $\vec{v}=(-4,\ 8)$ y $\vec{w}=(3,\ 1)$, halla las coordenadas de $\vec{\omega}=5\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$ y $\vec{\zeta}=-3\vec{u}+6\vec{v}-\vec{w}$.

$$\vec{\omega}=5\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}=5\cdot(-1,3)-2\cdot(-4,8)+(3,1)=(-5+8+3,15-16+1)=(6,0)$$

$$\vec{\zeta}=-3\vec{u}+6\vec{v}-\vec{w}=(-3)\cdot(-1,3)+6\cdot(-4,8)-(3,1)=(3-24-3,-9+48-1)=(-24,38)$$

3 Sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas. Dados los vectores $\vec{u}_1=\vec{v}_1$, $\vec{u}_2=2\vec{v}_2$, $\vec{u}_3=3\vec{v}_3$, $\vec{u}_4=4\vec{v}_4$, $\vec{u}_5=5\vec{v}_5$ y $\vec{u}_6=6\vec{v}_6$ donde $\vec{v}_i=\overrightarrow{OA_i}$ para cada $i\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 6\}$. Prueba que $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\vec{u}_4+\vec{u}_5+\vec{u}_6$ es proporcional al vector $\vec{v}_5$.



$$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\vec{u}_4+\vec{u}_5+\vec{u}_6=\vec{v}_1+2\vec{v}_2+3\vec{v}_3+4\vec{v}_4+5\vec{v}_5+6\vec{v}_6$$

Pero $\vec{v}_4=-\vec{v}_1, \vec{v}_5=-\vec{v}_2, \vec{v}_6=-\vec{v}_3$, por lo que:

$$\vec{u}=(\vec{v}_1+4\vec{v}_4)+(2\vec{v}_2+5\vec{v}_5)+(3\vec{v}_3+6\vec{v}_6)=3(\vec{v}_4+\vec{v}_5+\vec{v}_6)$$

Por la ley del paralelogramo, $\vec{v}_4+\vec{v}_6=\vec{v}_5$, y al sustituir concluimos que: $\vec{u}=6\vec{v}_5$

4 Encuentra el número real x tal que los vectores de coordenadas cartesianas $\vec{u}=(x-2,\ 1)$ y $\vec{v}=(-1,\ x)$ sean proporcionales.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales si y solo si:

$$x(x-2)=-1 \iff x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$$

5 ¿Para qué valor de a la recta $r\equiv\begin{cases}x=a+3t\\ y=2-t\end{cases}$ pasa por el punto $P=(-2,\ 3)$?

La recta r pasa por P si y solo si $2-t=3$ y $a+3t=-2$ para cierto número real t.

Por la primera igualdad, $t=-1$, lo que sustituido en la segunda nos da: $a=1$

6 **Halla una ecuación general de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1)$ y tiene por vector director a $\vec{u} = (-2, -1)$.**

Una ecuación general de r es de la forma $Ax + By + C = 0$, donde $\vec{u} = (-B, A)$ es un vector director de r, luego una ecuación general de r es de la forma: $-x + 2y + C = 0$.
Las coordenadas del punto P han de cumplir la ecuación, es decir, $-1 + 2 + C = 0$.
Por tanto, $C = -1$, por lo que una ecuación general de r es:

$$r: -x + 2y - 1 = 0$$

7 **Halla un punto y un vector director de la recta r de ecuación $2x + 5y - 13 = 0$.**

Si $Ax + By + C = 0$ es una ecuación general de r, un vector director suyo es $\vec{u} = (-B, A)$.
En este caso, $\vec{u} = (-5, 2)$ es vector director de r. Para hallar un punto en r damos un valor a x, por ejemplo $x = -1$, y despejamos $y = 3$, luego un punto en r es $P = (-1, 3)$.

8 **Halla una ecuación continua de la recta r que pasa por $P = (2, 1)$ y $Q = (1, 2)$. Halla ecuaciones paramétricas y una ecuación general de r. ¿Pasa r por $C = (0, 3)$?**

Un vector director de r es $u = \overrightarrow{PQ}$, es decir, $\vec{u} = (-1, 1)$. Así, unas ecuaciones paramétricas suyas son $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}$ y una ecuación continua es $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{1}$.

Operando se obtiene una ecuación general: $r: x + y = 3$

La recta r contiene a C pues las coordenadas $x = 0$ e $y = 3$ de este cumplen la ecuación general de r.

9 **Calcula las ecuaciones, en todas las formas posibles, de la recta r que pasa por los puntos de coordenadas $P = (1, 1)$ y $Q = (-5, 2)$.**

Un vector director de la recta r que une P y Q es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, o sea, $\vec{u} = (-6, 1)$.
Por tanto, $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 + t \end{cases}$ y $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-1}{1}$ son unas ecuaciones paramétricas y una ecuación continua de r, de donde resulta su ecuación general, $x + 6y = 7$. De las ecuaciones paramétricas se deducen las ecuaciones de r en la forma punto-pendiente y explícita:

$$y - 1 = \frac{-1}{6}(x - 1);\quad y = \left(\frac{-1}{6}\right)x + \frac{7}{6}$$

10 **¿Existe algún ángulo α para el que sean proporcionales los vectores $\vec{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $\vec{v} = (\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$?**

Para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean proporcionales hace falta que:

$$\cos^2\alpha = -\operatorname{sen}^2\alpha \iff \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \iff 1 = 0$$

Y esto es imposible. Así, para cualquier valor de α los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales.

9 Funciones

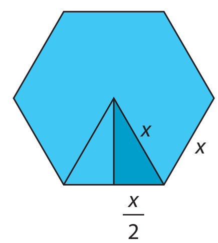
9.1. Concepto de función. Dominio y recorrido

Una **función** entre dos conjuntos X e Y es una correspondencia, que escribimos $f : X \to Y$, que asocia a cada elemento x de X un elemento y de Y, al que se suele denotar $y = f(x)$. En tal caso se dice que y es la *imagen* por f de x. A cada x de X se le llama la **variable independiente** mientras que $y = f(x)$ es la **variable dependiente** (porque depende de x).

1 **Calcula la imagen por $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ de $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.**

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1} = 1,\ f(0) = \sqrt{0^2 + 0 + 1} = 1 \text{ y } f(1) = \sqrt{1^2 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

2 **Escribe la función que relaciona el área de un hexágono regular con la longitud de sus lados.**



Si x denota la longitud del lado del exágono, entonces la longitud de la apotema del mismo es $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ y por tanto, el valor del área es $\text{Área} = \frac{1}{2}\left(6x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$. Por ello $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

El **dominio** de la función f se denota Dom f y es el conjunto formado por aquellos elementos x de X para los cuales existe $f(x)$. El conjunto formado por aquellos elementos y de Y tales que existe algún x en X que cumple que $y = f(x)$ se llama **recorrido** o imagen de f y se denota Rec f.

Ejemplo: La función f que a cada número real x le hace corresponder su inverso $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene por dominio y por recorrido el conjunto Dom $f = \mathbb{R} - \{0\} =$ Rec f.

3 **Determina el dominio de las funciones $f_1(x) = \sqrt{2x - 6}$ y $f_2(x) = \dfrac{4}{x^2 - 6x + 8}$.**

$$\text{Dom } f_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 6 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = [3, \infty)$$

$$\text{Dom } f_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 8 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$

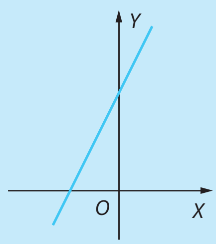
4 **Calcula el dominio de la función real de variable real $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.**

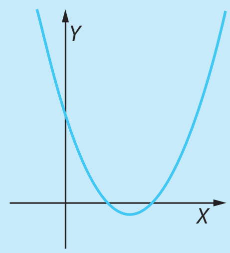
La fórmula de f tiene sentido para todos los números reales x salvo para $x = -1$ y $x = 1$, pues para estos dos valores se anula el denominador y no existe el cociente. Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

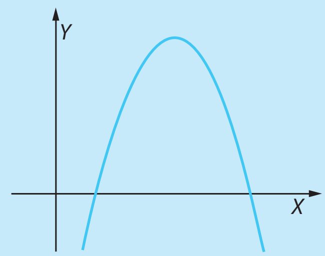
Una función puede representarse mediante su **gráfica**, que nos permite analizar sus características.

Ejemplos:

$f(x) = 2x + 3$ $\quad$ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad$ $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

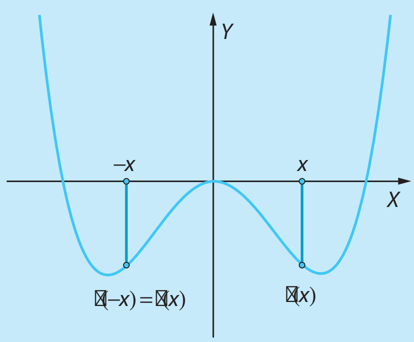




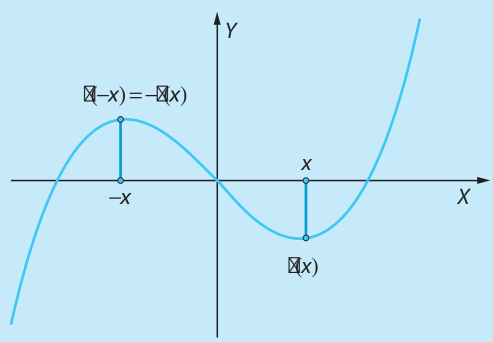


Simetrías. Sean X un intervalo centrado en 0 y $f: X \to \mathbb{R}$ una función.

- Se dice que f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in X$. En tal caso su gráfica es **simétrica respecto del eje de ordenadas.**
- Se dice que f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in X$. En tal caso su gráfica es **simétrica respecto del origen de coordenadas.**



Gráfica de una función par



Gráfica de una función impar

5 Indica cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles impares.

$$f_1(x) = \frac{3}{x^2 - 4}; \quad f_2(x) = \frac{5}{x^3 - x}; \quad f_3(x) = -4$$

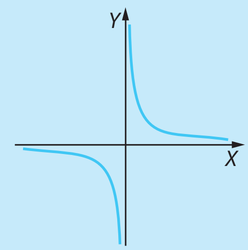
$f_1(-x) = \dfrac{3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{3}{x^2 - 4} = f_1(x)$, por lo que $f_1(x)$ es una función par.

$f_2(-x) = \dfrac{5}{(-x)^3 - (-x)} = \dfrac{5}{-x^3 + x} = -\left(\dfrac{5}{x^3 - x}\right) = -f_2(x)$, luego la función $f_2(x)$ es impar.

$f_3(x) = -4 = f_3(-x)$, lo que significa que $f_3(x)$ es una función par.

9.2. Continuidad. Funciones definidas a trozos

Una función real de variable real $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo X se dice **continua** si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si el dominio de f es unión de intervalos disjuntos la continuidad de f significa que sobre cada uno de esos intervalos la gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel. En tal caso se dice que f es una **función continua en su dominio.**



Ejemplo: El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, que no es un intervalo. Se trata de una función continua en su dominio, porque es continua sobre los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

6 **Indica cuáles de las siguientes afirmaciones sobre la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ son ciertas.**

a) f es una función continua en su dominio y Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. VERDADERO

b) La gráfica de f no presenta simetrías. FALSO

c) f es una función par y su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. VERDADERO

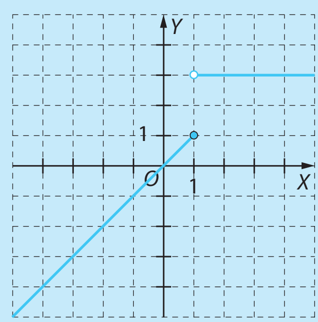
d) La gráfica de f no corta al eje de abscisas. VERDADERO

e) La gráfica de f no corta al eje de ordenadas. FALSO

Cuando una función emplea varias expresiones analíticas para expresar la relación entre sus variables, se dice que es una **función definida a trozos.**

Para construir una función definida a trozos es necesario especificar los valores de la variable independiente sobre los que se aplica cada expresión.

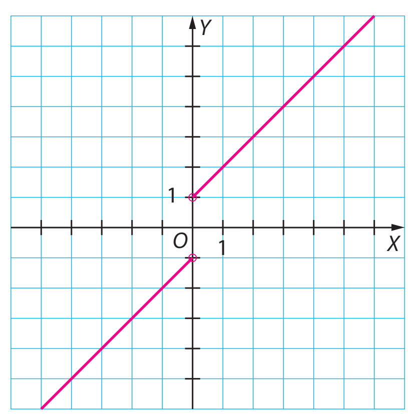
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 1 \\ 3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$



7 **Representa la siguiente función definida a trozos:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x < 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Representamos la función $f_1(x) = x - 1$ para los valores de x menores que 0 y la función $f_2(x) = x + 1$ para los valores de x mayores que 0. En el punto $x = 0$ no tiene imagen, puesto que la función $f(x)$ no está definida en ese punto.

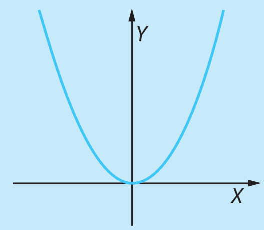


9.3. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos

Una función $f: X \to Y$ es **monótona creciente** en un subconjunto Z de X si para cada par de puntos $z_1, z_2 \in Z$ tales que $z_1 < z_2$ se cumple que $f(z_1) \leq f(z_2)$.

Se dice que f es **monótona decreciente** en Z si para cada par de puntos $z_1, z_2 \in Z$ tales que $z_1 < z_2$ se cumple que $f(z_1) \geq f(z_2)$.

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es monótona decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y monótona creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Es una función par, por lo que su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas, y además si $0 < z_1 < z_2$ entonces:



$$f(z_2) - f(z_1) = z_2^2 - z_1^2 = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) > 0 \Rightarrow f(z_1) < f(z_2)$$

8 **¿Es monótona creciente en $\mathbb{R}$ la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto 3x + 5$?**

Dados dos números reales z_1, z_2 tales que $z_1 < z_2$ se tiene

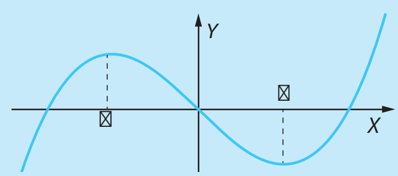
$$f(z_2) - f(z_1) = (3z_2 + 5) - (3z_1 + 5) = 3(z_2 - z_1) > 0 \Rightarrow f(z_1) < f(z_2)$$

luego f es monótona creciente.

Máximos y mínimos

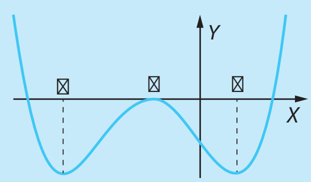
La función f tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos suficientemente próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

La función f tiene un **mínimo relativo** en un punto, cuando en él la función toma un valor menor que en los puntos suficientemente próximos. En tal caso, la función es decreciente hasta el mínimo y creciente a partir de él.

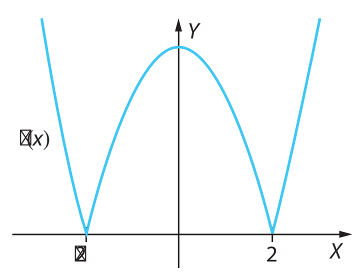


Ejemplo: La función f cuya gráfica aparece arriba a la derecha tiene un máximo relativo en a y un mínimo relativo en b.

La función cuya gráfica aparece abajo a la derecha tiene un máximo relativo en b, y tiene dos mínimos en $x = a$ y $x = c$.



9 **Indica los puntos en los que la función tiene máximos y mínimos relativos.**



La función f tiene un máximo relativo en $x = 0$, y tiene dos mínimos en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

9.4. Tasa de variación media

Se llama **tasa de variación media** de una función $f : X \to Y$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ contenido en X al cociente TVM $[a, b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplo: Calculamos la TVM de la función $f(x) = x^3 - 2x + 3$ en los intervalos $[-2, 1]$ y $[0, 1]$.

$$\text{TVM}[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2 - (-1)}{3} = 1 \text{ y } \text{TVM}[0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2 - 3 = -1$$

10 **Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalo que se indica:**

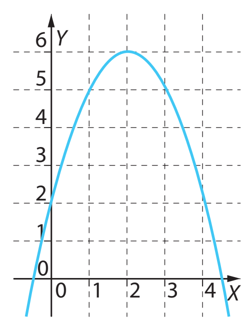
a) $f(x) = x + 2$, en $[6, 8]$: $\text{TVM}[6, 8] = \dfrac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \dfrac{10 - 8}{8 - 6} = 1$

b) $f(x) = 2x - 3$, en $[3, 6]$: $\text{TVM}[3, 6] = \dfrac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \dfrac{9 - 3}{3} = 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$, en $[0, 1]$: $\text{TVM}[0, 1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$

d) $f(x) = -x^2 + 1$, en $[-1, 0]$: $\text{TVM}[-1, 0] = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{1 - 0}{1} = 1$

11 **Halla la TVM de la función cuya gráfica se muestra al margen en los intervalos $[0, 2]$ y $[1, 4]$.**



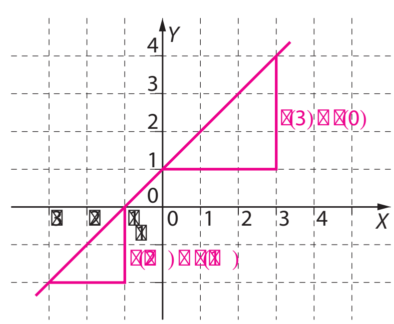
$$\text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \quad \text{y}$$

$$\text{TVM}[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 5}{3} = -1$$

12 **Representa la gráfica de la función $f(x) = x + 1$ y calcula la TVM en los intervalos $[-3, -1]$ y $[0, 3]$. Interpreta geométricamente dicho valor.**

$$\text{TVM}[-3, -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1 \quad \text{y}$$

$$\text{TVM}[0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{4 - 1}{3} = 1$$



Observamos que TVM$[-3, -1]$ y TVM$[0, 3]$ coinciden, y coinciden, además, con la pendiente de la recta que es gráfica de la función $f(x)$.

13 **Sergio ha estado patinando durante 45 minutos. La gráfica indica la distancia a la que se encuentra de su casa en cada instante.**

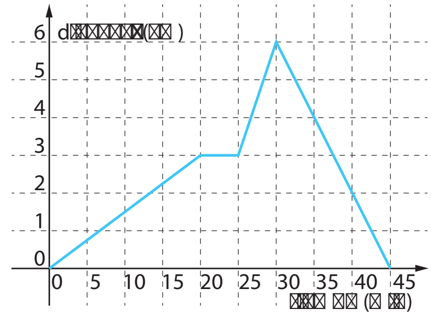
a) ¿A qué distancia máxima ha estado Sergio de su casa?

Ha estado a 6 km.

b) ¿Cuánto tiempo ha descansado?

Ha descansado 5 minutos.

c) Calcula la TVM en los intervalos [0, 20] y [25, 30]. ¿En cuál fue más deprisa?



$$\text{TVM}[0,20]=\frac{3-0}{20-0}=\frac{3}{20} \text{ y } \text{TVM}[25,30]=\frac{6-3}{30-25}=\frac{3}{5}$$

de lo que se deduce que Sergio fue más deprisa entre los minutos 25 y 30.

14 **Sea x un número real tal que $2 < x$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3$. Comprueba que la tasa de variación media de f en el intervalo $[2, x]$ es $x^2 + 2x + 4$.**

$$\text{TVM}[2,x]=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^3-2^3}{x-2}=\frac{x^3-8}{x-2}$$

Para efectuar esta división observamos que 2 es raíz del polinomio x^3-8 luego, por la regla de Ruffini, este polinomio es múltiplo de $x-2$ y el cociente vale x^2+2x+4. Así,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\text{TVM}[2,x]=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

15 **Un electricista cobra 15 € por desplazamiento y 25 € por cada hora de trabajo.**

a) Escribe una fórmula de la función que relaciona las variables anteriores.

Si x denota el tiempo empleado por el electricista e y el coste de la reparación, la función que proporciona el coste en función del tiempo es: $f(x)=15+25x$.

b) Completa la siguiente tabla que relaciona las variables tiempo y coste.

Tiempo (horas)	1	3	5	7
Coste (€)	40	90	140	190

c) ¿Cuánto tiempo ha empleado el electricista si ha cobrado 115 €?

Sabiendo que $y=115$: $115=15+25x \Leftrightarrow 100=25x \Leftrightarrow x=4$

El electricista ha empleado 4 horas.

9 Problemas

16 Luis está pensando apuntarse a una academia de inglés y ha consultado los precios en dos de ellas. En la primera le cobran 60 € por matrícula y 50 € cada mensualidad, mientras que en la segunda no le cobran matrícula pero cada mensualidad cuesta 65 €.

a) Escribe las funciones que representan el precio de cada una de las academias en función del número de meses de asistencia.

Si x denota el número de meses que Luis asiste a la academia, las funciones

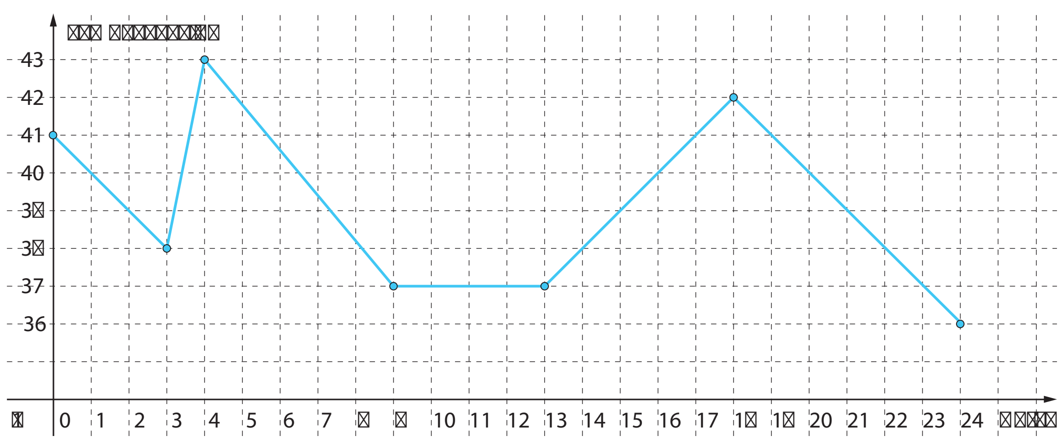
$$f_1:\mathbb{Z}^+\rightarrow\mathbb{R}: x\rightarrow f_1(x)=60+50x \ \text{ y } \ f_2:\mathbb{Z}^+\rightarrow\mathbb{R}: x\rightarrow f_2(x)=65x$$

representan el coste de las dos academias en función del número de meses.

b) Si Luis tiene pensado apuntarse los diez meses que dura el curso escolar, ¿qué academia le resulta más barata?

En la primera academia tendría que pagar $f_1(10)=60+50\cdot 10=560$ € y en la segunda $f_2(10)=65\cdot 10=650$ €, luego gasta menos en la primera academia.

17 En la siguiente gráfica se muestra la evolución de la temperatura de Juan a lo largo de todo un día en el que ha estado enfermo. Observa la gráfica y responde las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál ha sido la máxima temperatura que ha alcanzado Juan? ¿Y la mínima?

Juan alcanzó una temperatura máxima de 43 ºC y mínima de 36 ºC

b) ¿Cuántas horas ha mantenido una temperatura constante?

Ha mantenido una temperatura constante durante las 4 horas comprendidas entre las 9:00 y las 13:00.

c) ¿Qué temperatura tenía a las 16:00?

A las 16:00 horas tenía 40 ºC de temperatura.

d) ¿Cuántas veces a lo largo del día tuvo una temperatura de 40 ºC?

A lo largo del día tuvo 5 veces una temperatura de 40 ºC

18 ¿Cuánto vale en $x = 0$ una función impar?

Si f es una función impar, entonces $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, y en particular $f(-0) = -f(0)$, es decir, $2f(0) = 0$, así que $f(0) = 0$.

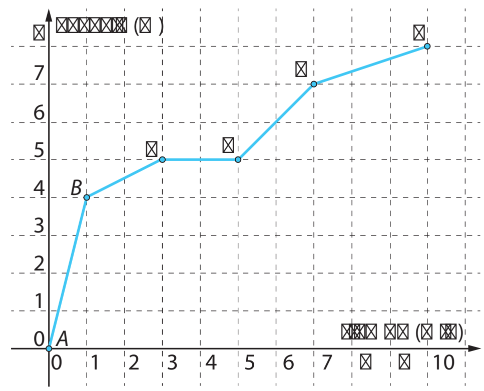
¿Es cierto que $f(0) = 0$ para cada función par?

No es cierto. Por ejemplo, la función $f(x) = 1 + x^2$ es par y, sin embargo, $f(0) = 1$.

¿Es cierto que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par o impar?

Hay funciones que no son ni pares ni impares; por ejemplo $f(x) = 1 + x$ cumple que $f(-1) = 0$ y $f(1) = 2$ por lo que $f(-1)$ no coincide ni con $f(1)$ ni con $-f(1)$, así que esta función no es par ni impar.

19 Una tortuga se mueve lentamente en busca de comida. Dicho paseo duró 10 minutos, tal y como se indica en el eje de abscisas. Contesta las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál fue la distancia recorrida por la tortuga?

La tortuga recorrió 8 m.

b) ¿Cuánto tiempo estuvo parada?

Estuvo parada los 2 minutos transcurridos entre los minutos 3 y 5.

c) Calcula la TVM en los intervalos [0, 1], [1, 3], [3, 5], [5, 7] y [7, 10].

La TVM en cada uno de estos intervalos es la pendiente de la recta que contiene al correspondiente segmento. Así TVM[0, 1] = 4, TVM[1, 3] = 1/2, TVM[3, 5] = 0, TVM[5, 7] = 1 y TVM[7, 10] = 1/3.

d) ¿En cuál de los tramos anduvo más deprisa?

Observando las TVM de los distintos tramos, observamos que fue en el primer tramo en el que se movió más rápido, recorriendo 4 m en 1 min.

e) ¿Cuántos metros recorrió entre los minutos quinto y séptimo?

Entre los minutos quinto y séptimo recorrió 2 m.

f) ¿Y cuántos metros recorrió entre los minutos quinto y décimo?

Este intervalo de tiempo abarca dos tramos distintos con distinta TVM, pero eso es independiente para calcular el número de metros que recorrió. En este caso, observamos que recorrió 3 m.

Evaluación

1 **Halla el dominio de las siguientes funciones:**

$$f_1(x) = \frac{1}{2-x},\ f_2(x) = \frac{x+5}{x^4+2} \text{ y } f_3(x) = \sqrt{10-5x}$$

El cociente que define $f_1(x)$ sólo se anula en $x = 2$, luego Dom $f_1 = \mathbb{R} - \{2\}$. Por otro lado, $x^4 + 2 \geq 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego Dom $f_2 = \mathbb{R}$. Por último,

$$\mathrm{Dom}(f_3) = \{x \in \mathbb{R} : 10 - 5x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

2 **Halla el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$.**

Para cada número real x el número $1 + x^2 > 0$, luego existe su raíz cuadrada. Por tanto, el domino de f es Dom $f = \mathbb{R}$.

- Calcula los valores de x para $y = 0$ e $y = 1$.

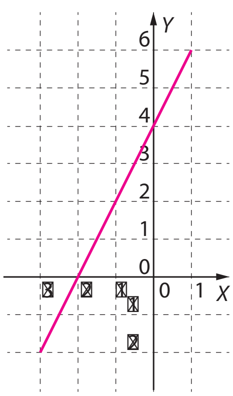
$$0 = f(x) \Leftrightarrow 0 = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 0 = 1$$

Esto significa que como a $y = 0$ no le corresponde un valor de x, $y = 0$ no pertenece al recorrido de f. En el caso de $y = 1$

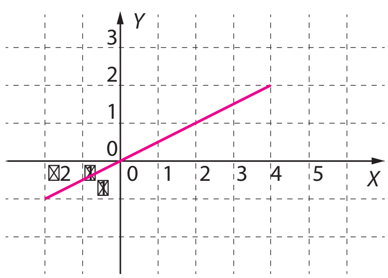
$$1 = f(x) \Leftrightarrow 1 = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow 1 + x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 1 + 2x + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3 **Representa las siguientes funciones para los valores en los que están definidas:**

a) $f(x) = 2x + 4$ si $-3 \leq x \leq 1$



b) $g(x) = \dfrac{x}{2}$ si $-2 \leq x \leq 4$



4 **Calcula los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 7x + 10$.**

La gráfica de la función dada corta al eje Y en el punto $(0, f(0)) = (0, 10)$. Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función dada con el eje X son las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$, esto es, $x = 2$ y $x = 5$. Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(2, 0)$ y $(5, 0)$.

5 Estudia si es creciente o decreciente en $\mathbb{R}$ la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x^3$.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que $z_1 < z_2$ se tiene

$$f(z_2)-f(z_1)=z_2^3-z_1^3=(z_2-z_1)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)=(z_2-z_1)\left(\left(z_1+\frac{z_2}{2}\right)^2+\frac{3z_2^2}{4}\right)>0$$

luego la función f es creciente en $\mathbb{R}$.

6 Dadas las funciones $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$, calcula cuánto valen en $x = 0$ las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$.

Como $f(0)=1$ y $g(0)=\frac{1}{2}$ resulta que

$$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=\frac{3}{2}, \qquad (f-g)(0)=f(0)-g(0)=\frac{1}{2},$$

$$(fg)(0)=f(0)g(0)=1/2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=2$$

7 Encuentra una función polinómica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de grado 3 tal que $f(-1) = -4$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ y $f(2) = 5$.

Debemos encontrar números reales a, b, c, d tales que la función buscada

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$$

cumpla lo requerido. Nótese que $d=f(0)=-1$, y las condiciones $f(-1)=-4$ y $f(1)=0$ se leen

$$\begin{cases}-a+b-c-1=-4\\ a+b+c-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+b-c=-3\\ a+b+c=1\end{cases}$$

Sumando ambas igualdades se deduce que $2b=-2$, así que $b=-1$. Por tanto, $a+c=2$, luego $f(x)=ax^3-x^2+(2-a)x-1$ y para calcular a empleamos la igualdad $f(2)=5$, esto es,

$$5=f(2)=8a-4+2(2-a)-1 \Leftrightarrow 6a=6 \Leftrightarrow a=1$$

Finalmente, la función buscada está definida por $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

8 Calcula la longitud de un intervalo $[a, b]$ sabiendo que la tasa de variación media de una función $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ es 3 y $f(b) = 15 + f(a)$.

Por la definición de tasa de variación media se tiene

$$3=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{15}{b-a}\Rightarrow b-a=\frac{15}{3}=5,$$

luego la longitud del intervalo es 5.

10 Tipos de funciones

10.1. Funciones lineales y cuadráticas

Una **función** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **lineal** si existen números reales m y n tales que $m \neq 0$ y se escribe como: $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$

Su **gráfica** es la **recta** de ecuación $y = mx + n$. Por tanto, su **dominio y recorrido** son la recta real $\mathbb{R}$ y f es creciente si la pendiente $m > 0$ y decreciente si $m < 0$. En particular f no tiene ni máximos ni mínimos.

1 **Calcula la fórmula $y = f(x)$ de la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.**

La función buscada es de la forma $f(x) = mx + n$ para ciertos números reales m y n, y cumple las igualdades $f(1) = 1$ y $f(2) = 3$ es decir:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 2;\ n = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

Una **función** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **cuadrática** si existen números reales a, b y c tales que $a \neq 0$, y se escribe de la forma: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Su **gráfica** es la **parábola** de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$ la parábola es abierta hacia arriba $(\cup)$ y se dice que se trata de una parábola **cóncava.**
- Si $a < 0$ la parábola es abierta hacia abajo $(\cap)$ y se dice que se trata de una parábola **convexa.**

La recta $x = \dfrac{-b}{2a}$ es un **eje de simetría** de la parábola y el punto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$, su **vértice.**

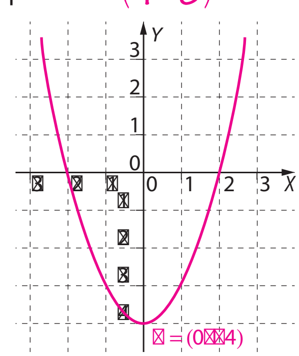
- Si la **parábola es cóncava** entonces f alcanza su único **mínimo** en la abscisa de V.
- Si la **parábola es convexa** entonces f alcanza su único **máximo** en la abscisa de V.

2 **Calcula el vértice de las gráficas de las siguientes funciones:**

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - x + 5$ $\Rightarrow V = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{59}{12}\right)$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x^2 + x + 1$ $\Rightarrow V = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{8}\right)$

3 **Calcula el eje de simetría y el vértice de la la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4$. Dibuja su gráfica.**



La gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es la recta $x = 0$ y cuyo vértice es el punto $V = (0, f(0)) = (0, -4)$. Además corta al eje de abscisas en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, pues:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2;\ x = 2$$

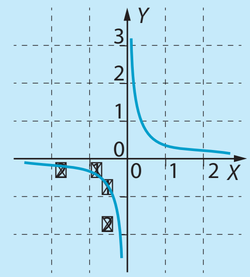
10.2. Funciones de proporcionalidad inversa

La **función de proporcionalidad inversa** típica es la definida por:

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

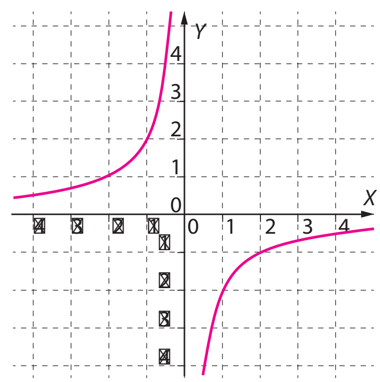
cuyo **dominio** es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y cuyo **recorrido** es Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$.

La **gráfica** de esta función se denomina **hipérbola.** Es una función continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, decreciente e impar, por lo que su gráfica es **simétrica respecto del origen.**



4 **Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$. Indica el dominio y el recorrido de la función. Estudia los intervalos de crecimiento y las simetrías, si las hay, de la gráfica de la función.**

El dominio es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es también Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$. Es una función creciente e impar, por lo que su gráfica es simétrica respecto del origen.



La **recta $y = 0$** es una **asíntota horizontal** de la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$. Esto significa que a medida que la variable x tiende a $\pm\infty$, los valores de y se aproximan a 0.

5 **Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \frac{10}{x}$.**

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$f(x) = \frac{10}{x}$	1	0,1	0,01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

La **recta $x = 0$** es una **asíntota vertical** de la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$. Esto significa que a medida que la variable x tiende a 0, los valores de y se aproximan a $\pm\infty$.

6 **Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \frac{10}{x}$.**

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$f(x) = \frac{10}{x}$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9

Características de las funciones de proporcionalidad inversa: $y = \frac{a}{x}$

- Hemos visto que las hipérbolas que corresponden a funciones del tipo $y = \frac{a}{x}$ tienen por asíntotas a los ejes coordenados.
- Son simétricas respecto del origen de coordenadas: tienen simetría impar.
- Su **dominio** es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y su **recorrido** es Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, la función es estrictamente decreciente.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$, la función es estrictamente creciente.

Transformaciones de la hipébola

El **centro de la hipérbola,** es el punto donde se cortan las asíntotas, luego en las anteriores es el origen de coordenadas.

Mediante **traslaciones** de estas hipérbolas tenemos otras:

- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{a}{x} + k}$, basta con trasladar según el vector $\vec{u} = (0, k)$ la hipérbola que representa a la función $y = \frac{a}{x}$.
- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{a}{x + b}}$, basta con trasladar según el vector $\vec{v} = (-b, 0)$ la hipérbola que representa a la función $y = \frac{a}{x}$.
- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{a}{x + b} + k}$, basta con realizar la traslación según el vector $\vec{w} = (-b, k)$ de la hipérbola que representa a la función $y = \frac{a}{x}$, o lo que es lo mismo, aplicar sucesivamente las traslaciones según los vectores $\vec{u} = (0, k)$ y $\vec{v} = (-b, 0)$ que acabamos de explicar.

7 **Indica cuáles son las asíntotas y el centro de la hipérbola de ecuación $y = \frac{5}{x} + 3$.**

Para representar la hipØrbola de ecuación $y = \frac{5}{x} + 3$ basta trasladar la hipØrbola de ecuación $y = \frac{5}{x}$ según el vector $\vec{u} = (0, 3)$.

Como las asíntotas de la segunda son los ejes coordenados, entonces las asíntotas de $y = \frac{5}{x} + 3$ son las rectas $x = 0$ e $y = 3$.

Su centro es el punto de corte de dichas rectas, esto es, el punto $(0, 3)$.

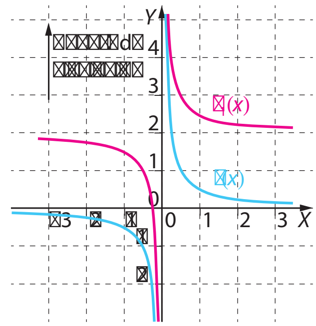
8 A partir de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ dibuja las gráficas de las siguientes funciones. Indica las asíntotas y el vector de traslación.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{2x} + 2$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Asíntota vertical: $x = 0$

Vector de traslación: $\vec{u} = (0, 2)$

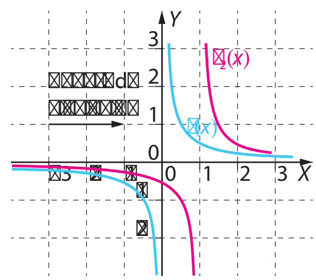


b) $f_2(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: $x = 2$

Vector de traslación: $\vec{v} = (2, 0)$

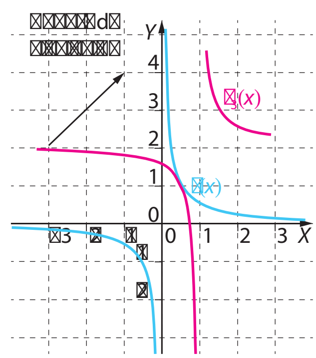


c) $f_3(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} + 2$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Asíntota vertical: $x = 2$

Vector de traslación: $\vec{w} = (2, 2)$



9 Calcula los números reales a, b y c sabiendo que la función:

$$f : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{c}{x-a} + b$$

cumple las igualdades: $f(a + c) = f(a + 1) = 2$ y $f(3) = 2$.

Al evaluar la función $f(x)$ en $x = a + c$, $x = a + 1$ y en $x = 3$ se tiene:

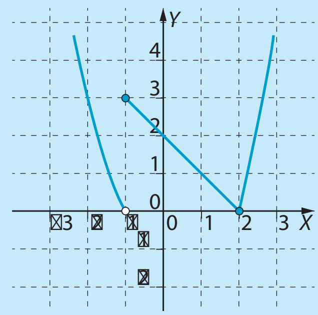
- $2 = f(a+c) = \dfrac{c}{a+c-a} + b = 1 + b \Rightarrow b = 1$
- $2 = f(a+1) = \dfrac{c}{a+1-a} + b = c + b = c + 1 \Rightarrow c = 1$
- $2 = f(3) = \dfrac{c}{3-a} + b = \dfrac{1}{3-a} + 1 \Rightarrow 3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$

10.3. Funciones definidas a trozos

Muchos fenómenos físicos, biológicos o económicos se rigen por funciones que **cambian de fórmula** conforme varía la variable independiente. Decimos que esas **funciones están definidas a trozos,** cada uno de los cuales se suele denominar una **rama** de la función, y es importante estudiar si las ramas se pegan adecuadamente, esto es, sin saltos, para que la función así construida sea continua.

Ejemplo: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

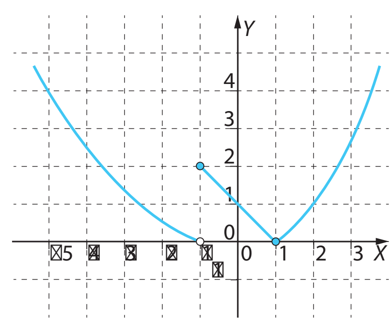


consta de tres ramas:

- La primera es un trozo de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, que está definida cuando x pertenece al intervalo $(-\infty, -1)$.
- La segunda rama, definida entre $x = -1$ y $x = 2$, es un trozo de la recta $y = -x + 2$.
- La tercera rama es un trozo de la parábola de ecuación $y = x^2 - 4$, que está definida cuando x pertenece al intervalo $(2, +\infty)$.

La función es discontinua en $x = -1$ pues su gráfica presenta un salto.

10 **¿Cuál es el valor en los puntos $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$ de la función cuya gráfica está dibujada a continuación?**



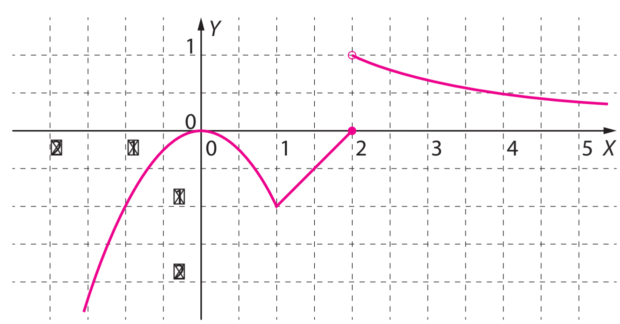
Si llamamos $f(x)$ a la función cuya gráfica nos proporcionan, se observa sin más que mirar que:

$f(-5) = 4$; $f(-1) = 2$; $f(1) = 0$; $f(2) = 1$

11 **Representa la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad.



La primera rama es un trozo de una parábola convexa cuyo vértice es el origen de coordenadas. La segunda rama es el segmento de extremos los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$, mientras que la tercera es un trozo de hipérbola.

La función es discontinua en $x = 2$.

10.4. Funciones exponenciales

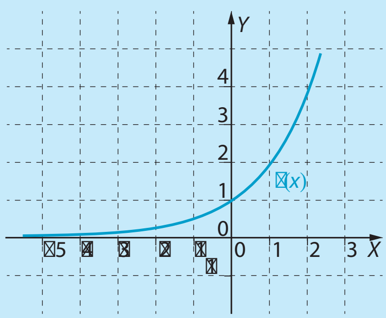
Fijado un número real positivo a se llama **función exponencial** de **base a** a la definida por:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

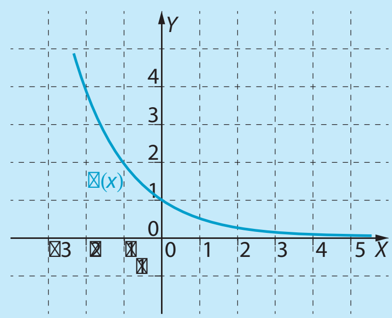
Características

- Como $a^0 = 1$ y $a^1 = a$ la gráfica de f siempre pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$. Esta función es constante de valor 1 si $a = 1$, así que supondremos siempre que $a \neq 1$.
- Su gráfica es muy distinta si $a > 1$ o $a < 1$, según se observa a continuación.

Gráfica de $f(x) = 2^x$



Gráfica de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



- La función $f(x) = a^x$ es **continua,** su **dominio** es Dom $f = \mathbb{R}$ y su **recorrido** es Rec $f = (0, +\infty)$.
- Si $a > 1$ entonces f es una función **creciente** en todo $\mathbb{R}$. Según la variable x tiende a $-\infty$, la gráfica de f se aproxima más a la semirrecta negativa del eje horizontal. Se dice entonces que $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de f cuando $x \to -\infty$.
- Si $a < 1$ entonces f es una función **decreciente** en todo $\mathbb{R}$. Según la variable x tiende a $+\infty$, la gráfica de f se aproxima más a la semirrecta positiva del eje horizontal. Se dice entonces que $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de f cuando $x \to +\infty$.
- En particular, por ser f una función monótona, creciente o decreciente, se deduce que si $a^x = a^z$ entonces $x = z$.

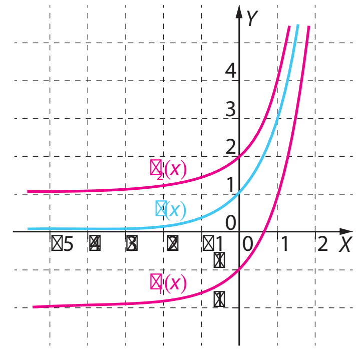
12 **Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la gráfica de la función $f(x) = 5^x$.**

Para todo número real x se cumple que $f(x) = 5^x > 0$, luego la gráfica de f no corta al eje de abscisas.

El punto de corte con el eje de ordenadas es el punto: $(0, f(0)) = (0, 5^0) = (0, 1)$

13 **A partir de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ representa las funciones: $f_1(x) = 3^x - 2$ y $f_2(x) = 3^x + 1$.**

La gráfica de la función $f_1(x) = 3^x - 2$ es el resultado de trasladar según el vector $\vec{u} = (0, -2)$ la gráfica de $f(x) = 3^x$, mientras que para representar la función $f_2(x) = 3^x + 1$ se traslada la gráfica de f según el vector $\vec{v} = (0, 1)$.



14 **Encuentra todos los números reales x que cumplen la igualdad:**

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Si llamamos $z = 3^x$ entonces $z^2 = (3^x)^2$, por lo que la ecuación se lee:

$$0 = 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = z^2 - 4z + 3$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 = 3^x = 3^1 \\ z = 1 = 3^x = 3^0 \end{cases}$$

Así que las soluciones de la ecuación dada son $x = 0$ y $x = 1$.

Una aplicación de la función exponencial: el interés compuesto

Supongamos que realizamos un depósito en un banco por valor de C_0 € con un rendimiento anual es del i %. Al acabar el primer año el capital depositado ha rentado $C_0 \cdot \frac{i}{100}$ €, luego disponemos de $C_0 + C_0\left(\frac{i}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ €. Si mantenemos el dinero en el banco, al cabo de t años el capital acumulado es $C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$ €.

En consecuencia, la función:

$$f(t) = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

rige el proceso de capitalización.

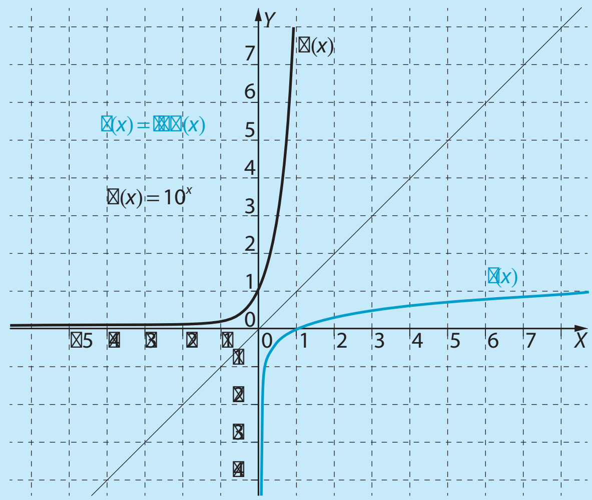
15 **¿Qué capital poseerá al cabo de 5 años una persona que efectúa un depósito de 1 000 € a un interés anual del 3 % si no retira ni el capital ni los intereses hasta el final de dicho periodo?**

La función $f(x) = 1\,000 \cdot (1{,}03)^x$ rige el proceso de capitalización, y al cabo de 5 años tendremos: $f(5) = 1\,000 \cdot (1{,}03)^5 \cong 1\,000 \cdot 1{,}159 = 1\,159$ €.

10.5. Funciones logarítmicas

Fijado un número real positivo $a \neq 1$ se llama **función logarítmica** de **base *a*** a la definida por:

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x$$



Esta función es **inversa de la función exponencial** de base a definida por:

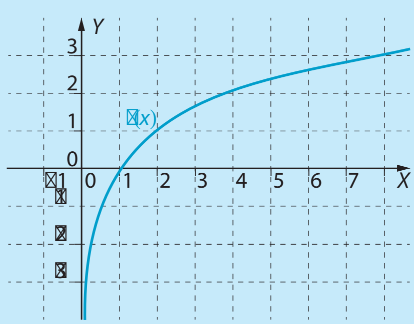
$$g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$
$$x \mapsto a^x$$

Como sucede con todo par de funciones que son mutuamente inversas, las gráficas de las funciones $g(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a x$ son **simétricas,** una de la otra, respecto de la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero, es decir, la recta $y = x$.

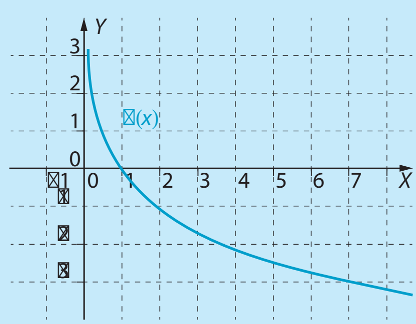
Características

- Como $f(1) = \log_a 1 = 0$ y $f(a) = \log_a a = 1$, los puntos $(1,0)$ y $(a,1)$ pertenecen a la gráfica de la función f.
- Su gráfica es muy distinta si $a > 1$ o $a < 1$, según se observa a continuación.

Gráfica de $f(x) = \log_2 x$

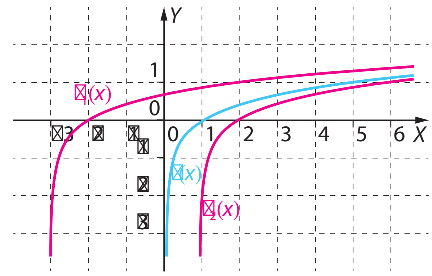


Gráfica de $g(x) = \log_{1/2} x$



- Su **dominio** es $\text{Dom } f = (0, +\infty)$ y su **recorrido** es $\text{Rec } f = \mathbb{R}$.
- Si $a > 1$ entonces f es una función **creciente** en todo su dominio. Además, la gráfica de f se aproxima más y más a la semirrecta negativa del eje vertical cuando la variable independiente se aproxima a 0, es decir, $x = 0$ es una **asíntota vertical** de f.
- Si $a < 1$, entonces f es una función **decreciente** en su dominio. La semirrecta positiva del eje vertical es **asíntota vertical** de f.
- En particular, por ser f una función monótona, creciente o decreciente, se deduce que si $\log_a x = \log_a z$, entonces, $x = z$.

16 A partir de la gráfica de la función $f(x) = \log_5 x$ representa las funciones $f_1(x) = \log_5 (x + 3)$ y $f_2(x) = \log_5 (x - 1)$.

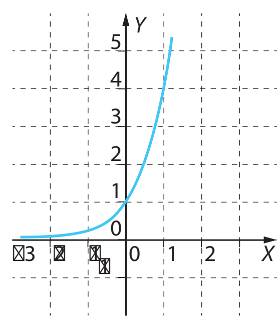


La gráfica de f es creciente. La semirrecta negativa del eje vertical es asíntota de la gráfica que pasa por los puntos (1, 0) y (5, 1). Para dibujar las gráficas de f_1 y f_2 basta trasladar la gráfica de f según los vectores (−3, 0) y (1, 0).

17 Completa la siguiente tabla de valores para la función: $f(x) = \log_{1/5} x$

x	125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$
$y = \log_{1/5} x$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

18 Escribe la expresión de la función logarítmica que es la inversa de la función exponencial cuya gráfica se muestra a continuación.



La función cuya gráfica conocemos es $f(x) = 4^x$ pues $f(1) = 4$, luego la función logarítmica inversa de f es:

$$g(x) = \log_4 x$$

19 Una persona efectúa un depósito de 10 000 € a un interés anual del 2 % y al final de cada año reinvierte el capital más los intereses obtenidos. ¿Durante cuántos años ha mantenido el depósito si al retirarlo le han dado 1 000 € más de los que depositó en su día?

La función $f(x) = 10\,000 \cdot (1{,}02)^x$ rige el proceso de capitalización.

Se trata de determinar la preimagen de $y = 11\,000$, esto es, debemos resolver la ecuación:

$$11\,000 = 10\,000 \cdot (1{,}02)^x \Leftrightarrow 1{,}1 = (1{,}02)^x$$

Tomando logaritmos resulta:

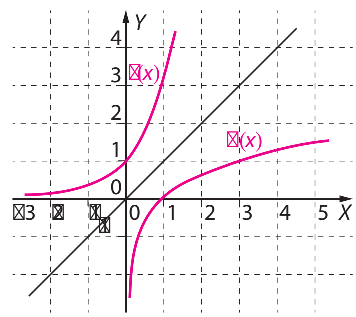
$$\log_{10} 1{,}1 = \log_{10}\left(1{,}02^x\right) \Leftrightarrow \log_{10} 1{,}1 = x \cdot \log_{10} 1{,}02 \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10} 1{,}1}{\log_{10} 1{,}02} \cong 4{,}81 \text{ años}$$

20 **Una población de conejos aumenta un 10 % al mes. ¿Cuánto tarda en duplicarse?**

Si denotamos P el número inicial de conejos, al cabo de un mes la población pasa a ser de $P+0{,}1P=1{,}1P$. Por tanto, al cabo de x meses se tendrán $P(1,1)^x$ conejos, y que la población se duplique equivale a tendrán $P(1,1)^x=2P$, esto es $(1,1)^x=2$. Tomando logaritmos en base 2 resulta:

$$1=\log_2 2=\log_2 1{,}1^x=x\log_2 1{,}1 \Rightarrow x=\frac{1}{\log_2 1{,}1}\cong 7{,}27 \text{ meses}$$

21 **Dibuja en el mismo plano las gráficas de las funciones** $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $x\mapsto f(x)=3^x$ **y** $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \log_3 x$. **Explica la relación entre las mismas.**



Se advierte que un punto $P=(x,y)$ pertenece a la gráfica de f si y solo si el punto $Q=(y,x)$ simØtrico de P respecto de la recta $y=x$ pertenece a la gráfica de g.
Por tanto, podemos dibujar una de las gráficas a partir de la otra.

22 **Un cubito de hielo se introduce en agua líquida y, cada minuto que pasa, el 10 % del volumen se transforma en agua líquida. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se derrite la mitad del cubito?**

Si el volumen inicial del cubito vale V, tras pasar un minuto su volumen es rV, donde:

$$r=\frac{9}{10}$$

Al cabo de un minuto más el volumen del cubito de hielo es $r\cdot(rV)=r^2V$, y así sucesivamente.

Por tanto, tras x minutos el volumen del cubito es r^xV, y se trata de encontrar x de modo que $r^xV=\frac{V}{2}$, es decir, $2r^x=1$, o lo que es igual:

$$2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^x=1 \Leftrightarrow 2\cdot 9^x=10^x \Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}=10^x$$

Tomando logaritmos en base 10 resulta:

$$x=\log_{10}10^x=\log_{10}\left(2\cdot 3^{2x}\right)=\log_{10}2+2x\cdot\log_{10}3 \Rightarrow x(1-2\cdot\log_{10}3)=\log_{10}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\log_{10}2}{1-2\log_{10}3}\cong 6{,}58 \text{ min}$$

23 Una parte del sueldo de un vendedor a domicilio es proporcional al cuadrado del noemero de objetos que vende. El mes pasado vendiÓ 6 objetos y fue remunerado, por este concepto, con 360 €.

a) Expresa la relación funcional entre este complemento salarial y el número de objetos vendidos.

Sea $c(x)$ el complemento, expresado en €, que el vendedor obtiene por vender x objetos. Sabemos que existe un número real a tal que $c(x) = ax^2$ y $c(6) = 360$.

Por tanto, $360 = a6^2$, luego $a = 10$.

Así que $c(x) = 10x^2$ es la relación buscada.

b) Si su salario base es de 1 000 € y este mes ha vendido un 50 % más de objetos que el pasado, ¿en qué porcentaje excede este mes su salario respecto del recibido el mes anterior?

El salario recibido el mes pasado fue 1 360 €. Este mes ha vendido 9 objetos, por los que ha recibido un complemento de $c(9) = 10(9^2) = 810$ €. Por ello, el salario de este mes ha excedido al del mes pasado en:

$$c(9) - c(6) = 810 - 360 = 450 \text{ €}$$

Por tanto, el cociente entre la diferencia salarial y el salario del mes anterior es $\frac{450}{1\,360} = \frac{45}{136}$, lo que significa un aumento del:

$$\left(\frac{45}{136}\right) \cdot 100\ \% = \left(\frac{1125}{34}\right)\ \% \cong 33{,}09\ \%$$

24 De entre todos los rectÆngulos cuyo perÍmetro es 36 m, ¿cuÆnto vale el Ærea del rectÆngulo mayor?

La suma de las longitudes de dos lados consecutivos de cualquiera de estos rectángulos es 18 m, luego miden x y $18 - x$ metros. Ambas longitudes son positivas, luego $0 < x < 18 - x$, es decir, x pertenece al intervalo $(0, 18)$. El área de este rectángulo mide $x(18 - x)$, luego se trata de calcular el valor máximo de la función:

$$f : (0, 18) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x(18 - x)$$

Para ello, basta reescribir $f(x)$ como sigue:

$$f(x) = 18x - x^2 = -(x^2 - 18x) = -((x-9)^2 - 81) = 81 - (x-9)^2$$

Su valor es máximo si el sustraendo es mínimo, esto es, si $x = 9$ y por tanto, el área máxima es $f(x) = 81$ m^2.

Observamos que este valor máximo se alcanza para el cuadrado de lado 9 m.

25 La altura $h(t)$, medida en cm, que alcanza una pelota en el instante t segundos tras ser lanzada hacia arriba con cierta velocidad inicial es $h(t) = 196t - 9,8t^2$. Calcula la altura máxima alcanzada por la pelota y en qué instante la alcanza. ¿Cuánto tarda la pelota en volver al suelo?

Se trata de calcular, en primer lugar, el valor máximo de la función:

$$h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto 196t-9,8t^2$$

Escribimos $h(t)$ de otro modo:

$$h(t)=-9,8\cdot(t^2-20t)=-9,8\cdot((t-10)^2-100)=980-9,8\cdot(t-10)^2$$

El valor máximo de esta resta se alcanza cuando el sustraendo es mínimo, es decir, si $t=10$ y la altura máxima es $h(10)=980$ cm.

Por otro lado, la pelota vuelve al suelo cuando $h(t)=0$, o sea, $-9,8\cdot(t-20)=0$, que se alcanza en el instante inicial $t=0$ y en $t=20$ s. Por tanto, la pelota tarda 20 s en llegar al suelo.

26 La fuerza con la que una carga eléctrica positiva atrae a la carga unidad negativa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Si a una distancia x_0 le corresponde una fuerza de atracción de 6 N, ¿cuál es la fuerza de atracción si la distancia se reduce a la mitad?

La fuerza de atracción entre cargas que distan x viene dada por una función de la forma:

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$$
$$x\mapsto f(x)=\frac{\lambda}{x^2}$$

para cierto número real λ.

El dato del enunciado afirma que $6=f(x_0)=\dfrac{\lambda}{x_0^2}$, y se trata de calcular la fuerza f_1 que corresponde a la distancia $x_1=\dfrac{x_0}{2}$ entre las cargas:

$$f_1=f(x_1)=\frac{\lambda}{x_1^2}=\frac{\lambda}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}=\frac{4\lambda}{x_0^2}=24\text{ N}$$

27 Un capital colocado a interés compuesto al 2 % anual, se ha convertido en 5 años en 10 000 €. ¿Cuál era el capital inicial?

La función $f(x)=C_0\cdot(1,02)^x$ rige el proceso de capitalización. Se trata de calcular C_0 sabiendo que $f(5)=10\,000$, esto es, $10\,000=C_0\cdot(1,02)^5$, luego:

$$C_0\cong 9\,057,31\text{ €}$$

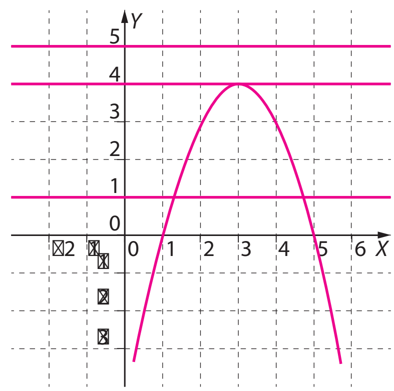
1 ¿Existe alguna función lineal cuya gráfica pase por los puntos $(2, 1)$, $(1, 0)$ y $(3, 2)$?

Hay que averiguar si existen números reales $m \neq 0$ y n tales que la función $f(x) = mx + n$ cumpla las condiciones $f(2) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(3) = 2$. Esto equivale a que:

$$\begin{cases} 2m + n = 1 \\ m + n = 0 \\ 3m + n = 2 \end{cases}$$

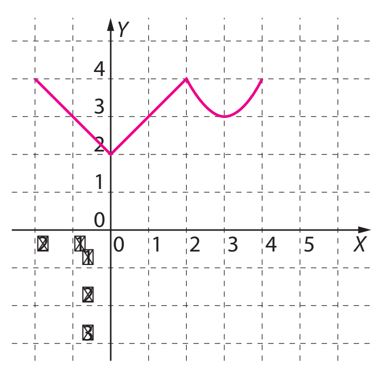
De las dos primeras ecuaciones se deduce, restando, que $m = 1$ y $n = -1$, que tambiØn satisfacen la tercera, por lo que la función lineal $f(x) = x - 1$ cumple lo requerido.

2 Encuentra las ecuaciones de tres rectas horizontales que corten en dos, uno y ningún punto, respectivamente, a la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.



La gráfica de f es una parábola de vØrtice $V = (3, 4)$. En consecuencia, f alcanza en $x = 3$ su máximo, y $f(3) = 4$. Por tanto, la recta de ecuación $y = 1$ corta a la gráfica de f en dos puntos, la recta de ecuación $y = 4$ la corta en un único punto, que es V, mientras que la recta de ecuación $y = 5$ no la corta.

3 Dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x + 2 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$ y decide si se trata de una función continua. Encuentra los mínimos relativos de esta función.



Vamos a dibujar cada una de las ramas de la gráfica de f. La primera, es el segmento que une los puntos $(-2, 4)$ y $(0, 2)$. La segunda rama es el segmento de recta que une los puntos $(0, 2)$ y $(2, 4)$. Por último, la tercera rama es un arco de parábola cóncava de vØrtice $(3, 3)$ que pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(4, 4)$.

Se aprecia que la gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, así que la función f es continua. La función f alcanza en $x = 0$ y en $x = 3$ mínimos relativos. Dichos valores son $f(0) = 2$ y $f(3) = 3$.

4 Encuentra todos los números reales x que cumplen la igualdad $2^{2x} - 2^{2+x} + 4 = 0$.

La ecuación se reescribe $(2^x)^2 - (2^2) \cdot 2^x + 4 = 0$, y llamando $z = 2^x$ resulta:

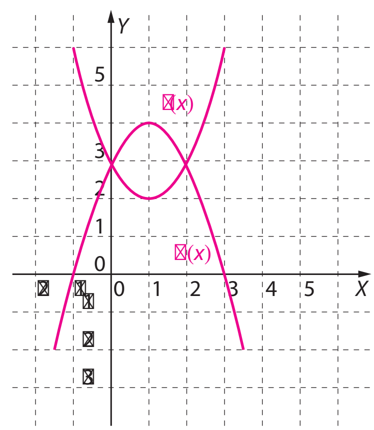
$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

La única raíz de esta ecuación de segundo grado es $z = 2$, luego $2^x = z = 2 = 2^1$, así que: $x = 1$

5 Encuentra los puntos comunes a las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Representa en un mismo sistema de ejes cartesianos las gráficas de ambas funciones.

Un punto $P = (x, y)$ pertenece a ambas gráficas si:

$$x^2 - 2x + 3 = y = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$



Como $f(0) = g(0) = 3$ y $f(2) = g(2) = 3$, los puntos comunes a ambas gráficas son $P = (0, 3)$ y $Q = (2, 3)$. La gráfica de f es una parábola cóncava cuyo vértice es el punto $V_1 = (1, 2)$, mientras que la gráfica de g es una parábola convexa cuyo vértice es el punto $V_2 = (1, 4)$.

La gráfica de f no corta al eje de abscisas pues $x_2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 > 0$ para todo número real x, mientras que la de g corta al eje de abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$, pues $-x^2 + 2x + 3 = 0$ si y solo si $x = 3$ o $x = -1$.

7 Un jugador apuesta en un casino *a doble o nada*, es decir, apuesta una cantidad inicial de C € y, si gana en la siguiente jugada, recibe esa misma cantidad, pasando a tener $2C$ €, mientras que si pierde se queda sin nada.
A continuación, vuelve a jugar, de modo que si gana pasa a tener $4C$ € y si pierde se queda sin nada. Tras ganar n veces seguidas se retira, y observa que tiene 1 183 744 €.
Sabiendo que la cantidad inicial C es un número entero impar, calcúlala y averigua cuántas partidas ganó el jugador.

Tras ganar n veces seguidas el jugador se retira con $2^n C$ €, luego:

$$2^n C = 1\,183\,744 = 2^{12} \cdot 17^2$$

Como C es un entero impar se deduce que el jugador ganó $n = 12$ partidas y comenzó a jugar con:

$$C = 17^2 = 289 \text{ €}$$

11 Estadística

11.1. Población y muestra

Población es el conjunto formado por todos los elementos (individuos, objetos) sobre los que se quiere realizar un **estudio estadístico,** es decir, observar o medir alguna característica. Una **muestra** es un subconjunto de la población. Se dice que la muestra es **representativa** si es un fiel reflejo, respecto de la característica que se desea estudiar, de la población que se quiere analizar.

Para que la muestra sea representativa, en ella se debe conservar la proporción en que están presentes en la población los distintos integrantes de la misma.

1 **En un estudio de una población formada por 1 800 personas de las que 1 200 son mujeres. ¿Cómo debe estar compuesta una muestra representativa de 60 personas?**

Llamamos h al número de hombres elegidos en la muestra y m al de mujeres. Para mantener las proporciones presentes en la población ha de cumplirse que:

$$\frac{1200}{1800} = \frac{m}{60} \Rightarrow m = 40;\ h = 60 - 40 = 20$$

Así, el número de hombres en la muestra es 20 y el de mujeres es 40.

2 **Indica si conviene realizar los siguientes estudios estadísticos tomando poblaciones o muestras:**

a) La edad a la que comienzan a leer los niños finlandeses.

b) El precio de los vehículos de alta gama vendidos en España en el último año.

c) El peso de los jugadores del equipo de fútbol más importante de tu ciudad.

En el caso c) la población está constituida por pocos miembros, por lo que es innecesario tomar muestras. Al contrario que en a) y b) en los que el tamaño de la población es muy grande, por lo que la selección de una muestra es imprescindible.

3 **Se ha tomado una muestra de los precios del mismo producto en 10 comercios, elegidos al azar, y se han encontrado los siguientes precios: 0,95 €, 1,08 €, 0,97 €, 1,12 €, 0,99 €, 1,06 €, 1,05 €, 1 €, 0,99 € y 0,98 €. ¿Cuál es la media muestral?**

La media muestral es la media de los diez precios dados, esto es:

$$\frac{0{,}95 + 1{,}08 + 0{,}97 + 1{,}12 + 0{,}99 + 1{,}07 + 1{,}05 + 1 + 0{,}99 + 0{,}98}{10} = 1{,}02\ €$$

Para construir muestras representativas se tienen que emplear **procedimientos aleatorios,** es decir, se debe cumplir que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de ser elegidos como miembros de la muestra.

Entre los **tipos de muestreo** se distinguen aquellos en los que la selección de la muestra se realiza **sin reemplazamiento** y aquellos en que se realiza **con reemplazamiento.** En los primeros, si un individuo es elegido para formar parte de la muestra es excluido del proceso de selección de nuevos miembros, y esto no sucede así en el segundo, en el que un mismo individuo puede formar parte varias veces de la muestra seleccionada.

4 **Indica si los siguientes métodos de obtención de una muestra son adecuados.**

a) Para un estudio sobre las actividades de ocio preferidas por los habitantes de una localidad, encuestamos a 100 personas al azar a la salida de un partido de fútbol.

b) Queremos estimar la estatura media de los 2000 niœos de 10 aœos de una localidad y elegimos al azar 20 colegios de la localidad y 5 niœos de cada uno.

c) En una localidad de 3000 habitantes se quiere construir un centro de ocio. Los habitantes se distribuyen por edades como sigue: 700 niœos, 750 jóvenes, 1100 adultos y 450 ancianos. Para averiguar qué tipo de actividades les gustaría que hubiera en dicho centro, se selecciona al azar una muestra de 100 personas para ser encuestadas, constituida por 20 niœos, 25 jóvenes, 26 adultos y 29 ancianos.

d) En un barrio hay 400 habitantes, distribuidos en cuatro urbanizaciones: el 12% viven en A, el 20% en B, el 36% en C y el 32% en D. Para comprobar el grado de satisfacción con los servicios de limpieza y basuras se selecciona una muestra de 50 personas del modo siguiente: 6 habitantes de A, 10 de B, 18 de C y 16 de D.

No son adecuados los mØtodos empleados en los apartados a) y c) pues en el primero solo se considera a un grupo (el que acude al partido de fútbol) dentro de la población y en el tercero la muestra no mantiene, ni siquiera aproximadamente, las proporciones de los distintos grupos de edades presentes en la población.

En el caso de los apartados b) y d) si se está escogiendo de forma correcta la muestra. Se emplean prodedimientos aleatorios y, en el caso d), la muestra mantiene las proporciones de habitantes en cada urbanización.

11.2. Gráficos Estadísticos

Dada una colección de datos se llama **frecuencia absoluta** de uno de ellos al número de veces que dicho dato se repite. Se cumple que la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores es el total de datos de nuestro estudio.

Llamamos **frecuencia relativa** al cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos de nuestro estudio. Se cumple que la suma de las frecuencias relativas de todos los valores es igual a 1.

5 **Se ha preguntado a los 25 alumnos de una clase sobre el número de piezas de fruta que comen al día. Sus respuestas han sido las siguientes:**

2, 0, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1

¿Cuáles son las frecuencias absolutas? ¿Y las relativas?

Los datos obtenidos son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, y $x_4 = 3$, las frecuencias absolutas son $f_1 = 3$, $f_2 = 8$, $f_3 = 7$ y $f_4 = 7$ por lo que las frecuencias relativas son $f_{r1} = \frac{3}{25}$, $f_{r2} = \frac{8}{25}$, $f_{r3} = \frac{7}{25}$, y $f_{r4} = \frac{7}{25}$.

Se llama **frecuencia absoluta acumulada** *i*-ésima al número: $F_i = f_1 + \ldots + f_i$

Y **frecuencia relativa acumulada** *i*-ésima al número: $F_{ri} = f_{r1} + \ldots + f_{ri}$

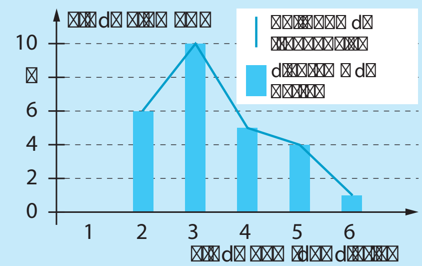
La **frecuencia porcentual** *i*-ésima es el tanto por ciento al que equivale la frecuencia relativa de un dato particular.

6 **Representa en forma de tabla los datos del Ejercicio anterior, sus frecuencias absolutas y relativas ordinarias, acumuladas y porcentuales.**

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
0	3	3	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	12%	12%
1	8	11	$\frac{8}{25}$	$\frac{11}{25}$	32%	44%
2	7	18	$\frac{7}{25}$	$\frac{18}{25}$	28%	72%
3	7	25	$\frac{7}{25}$	1	28%	100%
Total	25		1		100%	

Los **diagramas de barras, polígonos de frecuencias y diagramas sectoriales,** son gráficos que se emplean para representar las frecuencias absolutas y relativas.

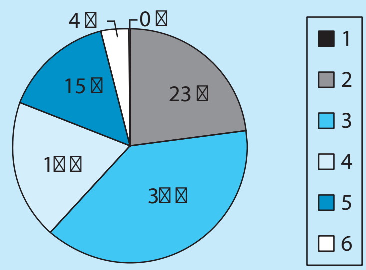
Ejemplo: El siguiente *diagrama de barras* representa una población cuyos datos son los que figuran en la siguiente tabla:



Datos	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	0	6	10	5	4	1

Para construir el **polígono de frecuencias** basta unir mediante una poligonal los extremos superiores de las barras representadas en el diagrama de barras.

Esta información se puede reflejar en un *diagrama sectorial*. Los grados de cada sector se calculan multiplicando su frecuencia relativa por 360°.



7 **Las estaturas de los 25 alumnos de una clase están agrupadas según la tabla:**

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N.° de alumnos	5	7	8	5

Expresa en forma de tabla las frecuencias de cada intervalo.

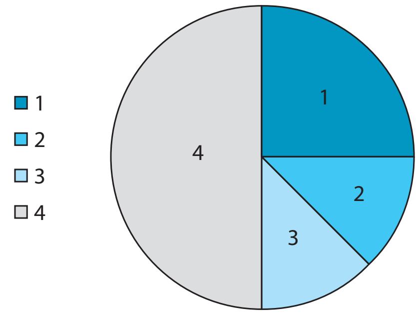
Altura	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
I_1	5	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	20 %	20 %
I_2	7	12	$\frac{7}{25}$	$\frac{12}{25}$	28 %	48 %
I_3	8	20	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{5}$	32 %	80 %
I_4	5	25	$\frac{1}{5}$	1	20 %	100 %
Total	25		1		100 %	

Denotamos los intervalos mediante

$I_1 = [155, 165)$, $I_2 = [165, 175)$, $I_3 = [175, 185)$, $I_4 = [185, 195]$

8 **Completa la siguiente tabla para que los datos reflejen lo mostrado en el sector circular.**

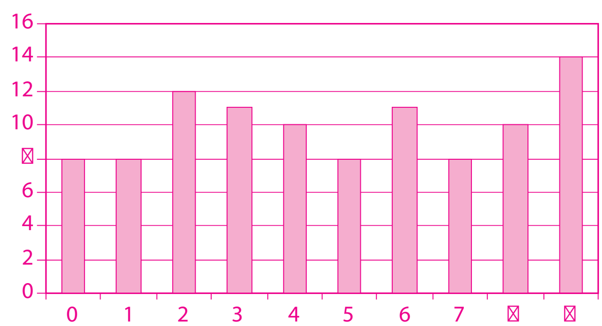
x_i	1	2	3	4
Frecuencia porcentual	25 %	12,5 %	12,5 %	50 %



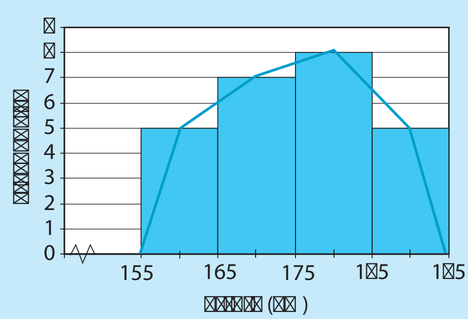
9 **Se muestran en la tabla adjunta las 100 primeras cifras decimales del número $\pi = 3,14159265358979323846...$: Representa en un diagrama de barras la frecuencia de aparición de los dígitos.**

1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9	5	0	2	6	6	4	1	9	7	1
6	9	3	9	9	3	7	5	1	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4
5	9	2	3	0	7	8	1	6	4	0	6	2	8	6	2	0	8	9	9
8	6	2	8	0	3	4	8	2	5	3	4	2	1	1	7	0	6	7	9

Dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	8	8	12	11	10	8	11	8	10	14



Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos se suele construir un **histograma.** Esto es, una representación gráfica en forma de rectángulos, cuya altura es la frecuencia del correspondiente intervalo. Cuando los intervalos no son de la misma longitud los rectángulos del histograma se construyen de modo que la superficie de cada uno es proporcional a la frecuencia del intervalo correspondiente.



Ejemplo:

Representamos a continuación el histograma y el polígono de frecuencias de los datos presentados en la siguiente tabla de frecuencias:

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N.° de alumnos	5	7	8	5

11.3. Medidas de centralización

Las **medidas de centralización** de una serie de datos son valores con los que se pretende resumir parte de la información proporcionada por todos ellos.

La **media aritmética** de una serie de datos numéricos x_1, x_2, ..., x_k cuyas frecuencias absolutas son $f_1, \dots, f_k$ es el número:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + \dots + f_k x_k}{N}$$

donde $N = f_1 + \dots + f_k$ es el número total de datos. Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos se toman las marcas de clase de los intervalos, es decir, el punto medio de cada intervalo.

10 **Encuentra la media aritmética de la altura de 25 alumnos sabiendo que:**

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
Marca de clase	160	170	180	190
N.º de alumnos	5	7	8	5

Hemos de trabajar con las marcas de clase y las frecuencias de los intervalos.

La media aritmØtica es:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4}{N} = \frac{160 \cdot 5 + 170 \cdot 7 + 180 \cdot 8 + 190 \cdot 5}{25} = 175{,}2$$

Un número M_e es **mediana** de una serie de datos si cumple que una vez ordenados los datos de menor a mayor M_e deja a su izquierda el mismo número de observaciones que a su derecha. Si el número de datos es par tomaremos como mediana la media aritmética de los dos valores centrales.

11 **La media de x, $4x - 3$, $x + 4$, -16, 9 y $x - 5$ es 4. ¿Cuánto vale la mediana de estos seis números?**

Como la media es 4 se tiene:

$$4 = \bar{x} = \frac{x + (4x - 3) + (x + 4) + (-16) + 9 + (x - 5)}{6} \Rightarrow 24 = 7x - 11 \Rightarrow x = 5$$

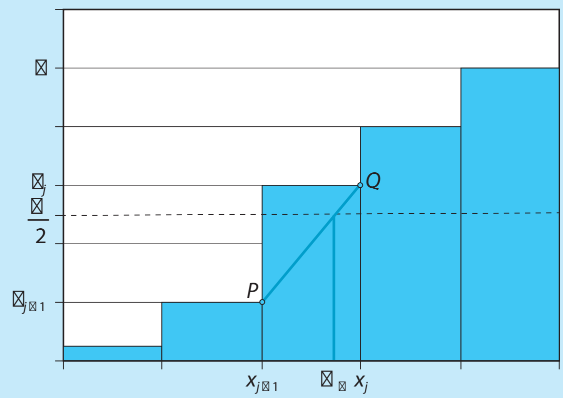
Por tanto, debemos calcular la mediana de los siguientes datos: $5, 17, 9, -16, 9$ *y* 0.

Ordenados de menor a mayor: $-16, 0, 5, 9, 9, 17 \Rightarrow M_e = \frac{5 + 9}{2} = 7$

¿A qué se llama mediana cuando no conocemos exactamente los datos ni sus frecuencias sino los intervalos a los que pertenecen? En tal caso, se considera la recta que une los puntos del plano

$$P = (x_{j-1}, F_{j-1}) \quad \text{y} \quad Q = (x_j, f_j)$$

que corresponden a los extremos del intervalo mediano y las frecuencias acumuladas de sus extremos, y se llama **mediana** a la abscisa M_e del punto de dicha recta cuya ordenada es $\frac{N}{2}$. Una ecuación de dicha recta es:



$$y - F_{j-1} = \frac{F - F_{j-1}}{x - x_{j-1}}(x - x_{j-1})$$

Buscamos la abscisa del punto de la recta anterior cuya ordenada es $\frac{N}{2}$:

$$\frac{N}{2} - F_{j-1} = \frac{F_j - F_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}(x - x_{j-1}) \Rightarrow M_e = x = x_{j-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

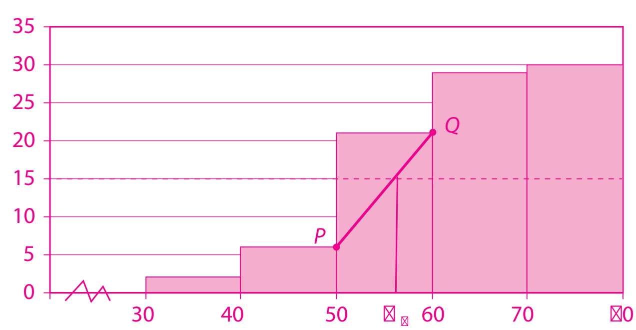
12 **En la siguiente tabla aparecen los pesos, agrupados en intervalos, de los 30 alumnos de un curso. Construye la tabla de las frecuencias acumuladas, calcula su mediana y representa los datos en un diagrama de barras.**

Peso en kg	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)
Frecuencia	2	4	15	8	1
Frecuencia acumulada	2	6	21	29	30

El intervalo mediano es $[50, 60)$ ya que $\frac{N}{2} = 15$. Por tanto,

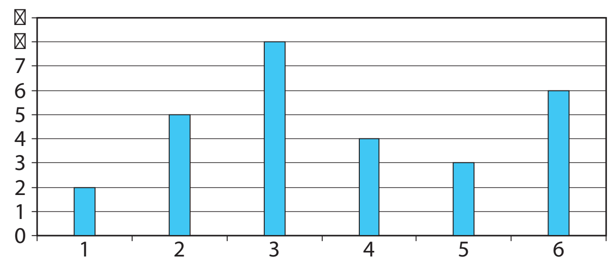
$$M_e = x_{j-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

$$\Rightarrow M_e = 50 + \frac{15-6}{21-6} \cdot 10 = 56$$



La **moda** de una colección de datos numéricos es el valor o valores cuya frecuencia absoluta es mayor.

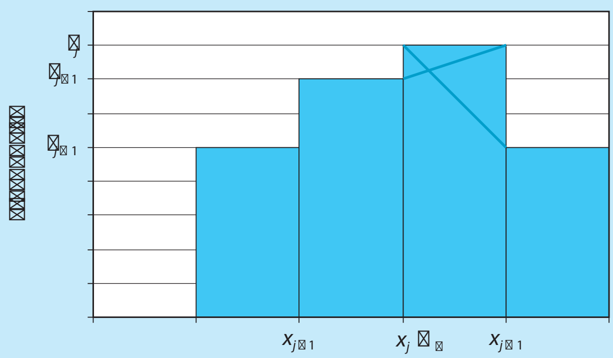
13 **¿Cuál es la moda de la colección de datos representados en el siguiente diagrama de barras?**



La frecuencia absoluta mayor es $N = 8$, luego la moda es $x_3 = 3$.

Cuando no se conoce exactamente el valor de los datos sino solo su distribución por intervalos, se llama **intervalo modal** a aquél cuya frecuencia absoluta por unidad de longitud sea máxima.

Supongamos que dicho intervalo es $[x_j, x_{j+1})$ y su frecuencia es f_j. Entonces la **moda,** *Mo* viene dada por la siguiente fórmula:



$$Mo = x_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{(f_j - f_{j-1}) + (f_j - f_{j+1})}(x_{j+1} - x_j)$$

que se obtiene al intersecar los segmentos mostrados en la figura.

Si los intervalos no tuvieran todos la misma amplitud se sustituye cada una de las frecuencias que aparecen en la fórmula anterior por la altura del correspondiente rectángulo.

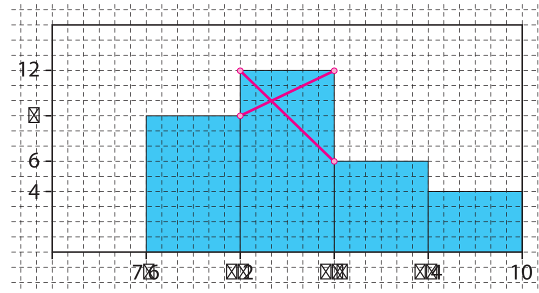
14 **¿Cuál es el intervalo modal y la moda de la colección de datos de altura de un grupo de alumnos usado en actividades anteriores?**

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N.° de alumnos	5	7	8	5

Puesto que en este caso todos los intervalos tienen la misma longitud el intervalo modal es el de mayor frecuencia absoluta, que es [175, 185).
La moda es:

$$Mo = 175 + \frac{8-7}{(8-7)+(8-5)} \cdot 10 = 177{,}5$$

15 **Calcula gráficamente la moda de los datos que aparecen representados en el siguiente histograma. Comprueba que coincide con el valor obtenido aplicando la fórmula.**



Calculamos la moda gráficamente. Para ello trazamos dos segmentos. El primero tiene por extremos los puntos (8,2, 12) y (8,8, 6) y el segundo (8,2, 9) y (8,8, 12). Así, la moda es la abscisa del punto de intersección de ambos segmentos, es decir, $Mo = 8{,}4$.

Por otro lado, si aplicamos la fórmula obtenemos el mismo resultado:

$$Mo = 8{,}2 + \frac{12-9}{(12-9)+(12-6)} \cdot 0{,}6 = 8{,}4$$

Dado un número p comprendido entre 0 y 1 se dice que un número x_p es un **cuantil de orden *p*** de un conjunto de datos si el $100p$ % de los datos es menor o igual que x_p y el $100(1-p)$ % de los datos es mayor o igual que x_p.

Es importante señalar que no cabe hablar del cuantil de orden p sino de un cuantil de orden p; normalmente buscamos un cuantil que se corresponda con uno de los datos. Algunos cuantiles se emplean con más frecuencia que otros, y por ello reciben nombres y notaciones especiales:

- Un número Q_1 es **primer cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{1}{4}$.
- Un número Q_2 es **segundo cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{1}{2}$, es decir, coincide con la mediana.
- Y un número Q_3 es **tercer cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{3}{4}$.

Los cuartiles dividen el conjunto total de datos en cuatro partes iguales. Son medidas de posición.

16 **Encuentra Q_1, Q_2 y Q_3 entre los datos dados en la siguiente tabla:**

Datos	0	1	2	4	5	6	7	8	9
Frecuencias	2	1	3	1	3	1	2	1	1

Ordenamos los datos de menor a mayor y, como hay 15 datos, los cuantiles pedidos son los señalados en la figura.

0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9

Q_1 = 2, $M_e = Q_2$ = 5, Q_3 = 7

11.4. Medidas de dispersión

Las **medidas de centralización** nos indican donde se encuentra el centro de las observaciones, pero son insuficientes para describir la población o muestra que queremos estudiar. Por ejemplo, las siguientes muestras:

$$\{0, 10, 50, 50, 90, 100\} \quad y \quad \{48, 49, 50, 50, 51, 52\}$$

Son muy distintas. Sin embargo, en los dos casos la media, la mediana y la moda valen 50.

Por ello es conveniente introducir medidas de lo que se alejan los datos de los valores centrales. Esas son las llamadas **medidas de dispersión.**

Se llama desviación absoluta media de los datos $x_1, \ldots, x_k$, cuyas frecuencias absolutas denotamos $f_1, \ldots, f_k$ y cuya media denotamos $\overline{x}$, al número

$$D_{\overline{x}} = \frac{1}{N}\left(f_1\left|x_1 - \overline{x}\right| + \cdots + f_k\left|x_k - \overline{x}\right|\right)$$

donde $N = f_1 + \ldots + f_k$.

17 **Calcula la desviación absoluta media de los datos de la siguiente variable estadística.**

Datos	0	1	2	3	4	5
Frecuencias	3	4	5	6	2	4

El número total de datos es:

$$N = f_1 + \ldots + f_6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 2 + 4 = 24$$

La media aritmética es:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + \ldots + f_6x_6}{N} = \frac{0\cdot3 + 1\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot6 + 4\cdot2 + 5\cdot4}{24} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto la desviación absoluta media es:

$$D_{\overline{x}} = \frac{1}{N}\left(f_1\left|x_1 - \overline{x}\right| + \cdots + f_6\left|x_6 - \overline{x}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(3\cdot\frac{5}{2} + 4\cdot\frac{3}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{24}\cdot32 = \frac{4}{3}$$

- El **rango,** R, también llamado **amplitud** o **recorrido,** es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de la muestra.
- Se llama **varianza** de los datos $x_1, \ldots, x_k$, cuyas frecuencias absolutas denotamos $f_1, \ldots, f_k$ y cuya media denotamos $\overline{x}$, al número:

$$\text{Var} = \sigma^2 = \frac{1}{N}\left(f_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\cdots+f_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right) = \frac{f_1x_1^2+\cdots+f_kx_k^2}{N}-\overline{x}^2$$

donde $N = f_1 + \ldots + f_k$.

- Se llama **desviación típica** de los datos $x_1, \ldots, x_k$ a la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir, $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$.

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos los parámetros anteriores se calculan del mismo modo, aunque cada x_i denota la marca de clase del intervalo correspondiente.

18 **Calcula la varianza y la desviación típica de los datos de la siguiente variable estadística:**

Datos	0	1	2	3
Frecuencias	3	8	7	7

El número total de datos es $N = f_1 + \ldots + f_k = 25$, cuya media aritmØtica es:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4}{N} = \frac{8\cdot 1+7\cdot 2+7\cdot 3}{25} = \frac{43}{25}$$

Por tanto la varianza vale

$$\text{Var} = \frac{3\cdot 0^2+8\cdot 1^2+7\cdot 2^2+7\cdot 3^2}{25}-\left(\frac{43}{25}\right)^2 = \frac{626}{625}$$

y la desviación típica es $\sigma = \dfrac{\sqrt{626}}{25}$.

Se denomina **rango intercuartílico** o **recorrido intercuartílico** de una serie de datos, y se denota R_i a la diferencia entre aquellos datos Q_3 y Q_1 que son tercer y primer cuartil, es decir, $R_i = Q_3 - Q_1$.

19 Encuentra el rango intercuartílico entre los datos cuya tabla de frecuencias es la siguiente:

Datos	0	1	2	4	5	6	7	8	9
Frecuencias	2	1	3	1	3	1	2	1	1

$$R_i = Q_3 - Q_1 = 7 - 2 = 5$$

20 Calcula el rango intercuartílico de las calificaciones obtenidas por los alumnos de 4° de ESO en la asignatura de Informática, que son las siguientes.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.° de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

El número de alumnos es $N = 40$, luego $\frac{N}{4} = 10$ y $3 \cdot \frac{N}{4} = 30$. Como las frecuencias acumuladas son:

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_k	2	4	8	13	21	30	33	37	40

Los cuartiles pedidos son $Q_1 = 4$ y $Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$. Por tanto, el rango intercuartílico es: $R_i = 6{,}5 - 4 = 2{,}5$

21 Calcula los cuartiles de la serie de datos proporcionada por la siguiente tabla:

x_i	Frecuencias	Fr. acumuladas
2	3	3
3	6	9
4	8	17
5	11	28
	Total = 28	

El total de datos es $N = 28$, por lo que

$$\frac{N}{4} = 7,\ \frac{N}{2} = 14 \text{ y } 3 \cdot \frac{N}{4} = 21.$$

luego $Q_1 = 3$, $Q_2 = 4$ y $Q_3 = 5$.

11 Problemas

22 Al tirar un dado 100 veces hemos obtenido los siguientes resultados:

Puntuación	1	2	3	4	5	6
N.° de veces	16	14	20	18	12	20

Construye una tabla con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
1	16	16	0,16	0,16
2	14	30	0,14	0,30
3	20	50	0,2	0,50
4	18	68	0,18	0,68
5	12	80	0,12	0,80
6	20	100	0,2	1
Total	100		1	

23 Se ha realizado una encuesta en 40 hogares preguntando por el número de individuos que viven en el domicilio. Las respuestas obtenidas han sido: 7, 1, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 6, 4, 4, 1, 3, 5, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 8, 3, 5, 3, 4, 7, 2, 3, 5.

a) Haz la tabla con la frecuencia absoluta y relativa, acumulada y porcentual.

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
1	5	5	0,125	0,125	12,5 %	12,5 %
2	7	12	0,175	0,3	17,5 %	30 %
3	9	21	0,225	0,525	22,5 %	52,5 %
4	6	27	0,15	0,675	15 %	67,5 %
5	6	33	0,15	0,825	15 %	82,5 %
6	4	37	0,1	0,925	10 %	92,5 %
7	2	39	0,05	0,975	5 %	97,5 %
8	1	40	0,025	1	2,5 %	100 %

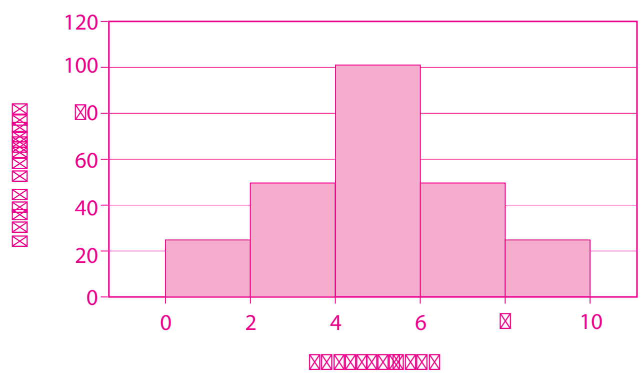
b) ¿Qué proporción de hogares está compuesto por tres o menos personas?

Leyendo la casilla de la fila tercera y la última columna deducimos que un 52,5% de hogares está compuesto por tres o menos personas.

24 Se ha realizado una encuesta entre 250 automovilistas, a los que se les ha preguntado cuántos puntos les quedan en su carnet, con estos resultados:

Puntos	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10]
N.° de automovilistas	25	50	100	50	25

a) Representa gráficamente esta distribución de frecuencias mediante un diagrama de barras.



b) ¿Qué tanto por ciento de automovilistas conservan menos de 4 puntos?

La proporción de automovilistas que conservan menos de 4 puntos es $\frac{75}{250}=\frac{3}{10}$, *o lo que es lo mismo, el 30%.*

c) Calcula la media y la desviación típica de la muestra.

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 25+3\cdot 50+5\cdot 100+7\cdot 50+9\cdot 25}{250}=\frac{1250}{250}=5$$

$$\sigma=\sqrt{Var}=\sqrt{\frac{1^2\cdot 25+3^2\cdot 50+5^2\cdot 100+7^2\cdot 50+9^2\cdot 25}{250}-5^2}=$$

$$=\sqrt{29{,}8-25}\approx 2{,}19$$

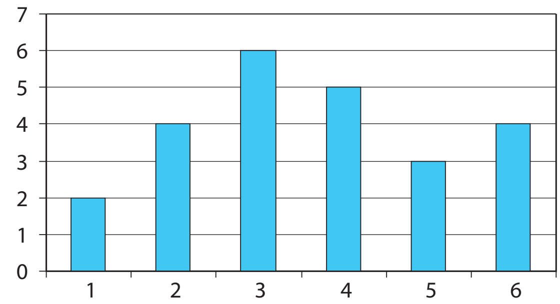
25 Lucía ha obtenido en esta evaluación, las siguientes calificaciones en los exámenes de Latín: 6, 75, 5, 8, 25, 9, 5 y 7, 5. ¿Qué nota tendrá que sacar en el único examen que le queda por realizar para obtener una nota media de 7, 75?

Llamando x a la calificación que debe obtener Lucía, se cumple que

$$\frac{6{,}75+5+8{,}25+9{,}5+7{,}5+x}{6}=7{,}75\Rightarrow 37+x=6\cdot 7{,}75=46{,}5\Rightarrow x=9{,}5$$

Por tanto, Lucía ha de obtener un 9,5 en el único examen que le queda por realizar.

1 **Calcula la media, la mediana y la moda de la serie cuyos datos están representados en este diagrama. (En el eje vertical aparecen las frecuencias absolutas de los datos).**



Recogemos los datos y sus frecuencias en una tabla:

Nota	1	2	3	4	5	6
Frecuencias absolutas	2	4	6	5	3	4
Frecuencias acumuladas	2	6	12	17	20	24

La media es:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3 + 5\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6}{24} = \frac{87}{24} = \frac{29}{8}$$

Como el número total de datos es 24, que es par, la mediana M_e es la media de los datos que, al ordenarlos de menor a mayor, ocupan los lugares 12 y 13, esto es:

$$M_e = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

Por último, la moda *Mo* es el valor con mayor frecuencia absoluta, es decir, el que corresponde a la barra de mayor altura. Por tanto, $Mo = 3$.

2 **Las calificaciones obtenidas por Pedro y Luis en Química son las siguientes:**

Pedro: 2, 3, 5, 7 y 8 **Luis:** 2, 3, 4, 8 y 8

¿Cuál de ellos posee unas calificaciones más dispersas?

Ambos tienen la misma nota media pues:

$$\bar{x} = \frac{2+3+5+7+8}{5} = 5 = \frac{2+3+4+8+8}{5}$$

Sin embargo las varianzas no coinciden, pues en el primer caso,

$$Var_1 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{9+4+0+4+9}{5} = 5{,}2$$

mientras que en el segundo,

$$Var_2 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (8-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{9+4+1+9+9}{5} = 6{,}4$$

Por tanto, las notas de Luis son más dispersas, o lo que es igual, Pedro ha obtenido unas calificaciones más homogØneas.

3 La siguiente serie de datos 2, 4, 6, a, 10, b, 14 está ordenada de menor a mayor y tanto su mediana como su media es 8. Calcula a y b.

Se trata de una serie con 7 datos y, como este es un número impar, la mediana es el que ocupa el cuarto lugar, que es a. Pero nos dicen que la mediana vale 8, así que $a = 8$. Además, tambiØn la media es $\bar{x} = 8$, luego:

$$8 = \bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+b+14}{7} \Rightarrow \frac{44+b}{7} = 8 \Rightarrow b = 12$$

4 ¿Cuáles son los cuartiles que son datos de las siguientes series de datos, en las que aparecen las frecuencias acumuladas F_i de cada uno de ellos?

x_i	F_i
2	8
4	14
5	32
7	52
10	66
13	70

x_i	F_i
2	6
4	14
5	32
7	52
10	64

En la primera serie el número total de datos es $N = 70$, por lo que:

$$\frac{N}{4} = 17{,}5;\ \frac{N}{2} = 35;\ 3 \cdot \frac{N}{4} = 52{,}5$$

Y se desprende directamente de la tabla de frecuencias absolutas que:

$$Q_1 = 5,\ Q_2 = 7,\ Q_3 = 10$$

La segunda serie tiene $N = 64$ datos, luego:

$$\frac{N}{4} = 16,\ \frac{N}{2} = 32,\ 3 \cdot \frac{N}{4} = 48$$

Y se desprende directamente de la tabla de frecuencias absolutas que:

$$Q_1 = 5,\ Q_2 = \frac{5+7}{2} = 6,\ Q_3 = 7$$

12 Combinatoria

12.1. Diversos modos de contar

Vamos a describir procedimientos para contar el número de formas de agrupar objetos según ciertos criterios. Los más sencillos son:

- **Principio de la suma:** Si un proceso de selección puede realizarse de dos formas excluyentes de modo que, la primera adminte m resultados posibles y la segunda n, entonces el número total de elecciones posibles es $m + n$.
- **Principio del producto:** Si un proceso de selección puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen m resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el número total de elecciones posibles es $m \cdot n$.

1 **Tenemos tres diferentes lugares para comer pizza; dos para hamburguesa y cuatro para pollo. ¿A cuántos lugares distintos podemos ir a cenar?**

Aplicando el principio de la suma podemos ir a cenar a $3 + 2 + 4 = 9$ lugares diferentes.

2 **En el cajón de Luisa hay 5 bufandas y 4 gorros, ¿de cuántos modos diferentes podría combinarlos?**

Aplicando el principio del producto obtenemos $5 \cdot 4 = 20$ combinaciones posibles distintas.

3 **Un árbol tiene 12 brazos, de cada brazo salen 8 ramas y en cada rama hay 50 hojas. ¿Cuántas hojas tiene el árbol en total?**

Aplicando el principio del producto, el número total de hojas es:

$$12 \cdot 8 \cdot 50 = 4\,800$$

4 **Isabel tiene 2 jerseys, 2 pantalones, un par de zapatos, un par de botas y un par de deportivas. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?**

Aplicando el principio del producto obtenemos que Isabel se puede vestir de $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ formas distintas.

5 **Los menús de un colegio constan de tres platos. Como primer plato se puede elegir legumbres o ensalada, como segundo se puede elegir entre carne, pescado y huevos, y como tercer plato podemos elegir fruta o natillas. ¿Cuántos menús distintos se ofrecen? Escribe los menús que se ofrecen en el colegio.**

Por el principio del producto el número de menús que se ofrecen es: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Los posibles menús son ternas. Sustituimos cada plato por su inicial y los menús son:

$$(E, C, F), (L, C, F), (E, P, F), (L, P, F)$$
$$(E, H, F), (L, H, F), (E, C, N), (L, C, N)$$
$$(E, P, N), (L, P, N), (E, H, N), (L, H, N)$$

6 **¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 4, 6 y 9?**

Se trata de formar cuaternas, y para la selección de cada coordenada de la cuaterna tenemos 5 posibilidades; luego, por el principio del producto, el total de números de cuatro cifras que se pueden formar con los 5 dígitos dados es: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

7 **¿Cuántos de los números anteriores son pares? ¿Cuántos son impares?**

En el primer caso la cifra de las unidades ha de ser el 4 o el 6, mientras que las restantes cifras pueden ser cualquiera de los dígitos dados.

Aplicando de nuevo el principio del producto, el número de números pares de cuatro cifras que se pueden formar con los 5 dígitos dados es: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$

Para contar el número de cifras impares restamos: $625 - 250 = 375$

8 **¿Cuántos números de cuatro cifras significativas no tienen unos ni doses?**

Tenemos que construir cuaternas. De los diez dígitos, no podemos usar en la primera coordenada el 1 ni el 2, pero tampoco podemos usar el 0, ya que si lo ponemos, el número no tendría cuatro cifras significativas. Tenemos pues 7 opciones para la primera coordenada.

En las tres restantes coordenadas podemos poner cualquier dígito excepto el 1 y el 2, es decir 8 opciones en cada caso.

El principio del producto nos da un total de $7 \cdot 8^3 = 3\,584$ números.

12.2. Variaciones. Permutaciones

Variaciones

Si k y n son enteros positivos con $k \leq n$, una **variación de orden k** de n objetos es una lista ordenada de k objetos distintos elegidos entre los n dados. También se suele llamar **variación de n elementos tomados de k en k.**

Es esencial señalar que las listas (1, 2, 3) y (2, 1, 3) son distintas, pues aunque constan de los mismos elementos estos no están colocados en el mismo orden.

9 **Escribe todas las variaciones de orden dos que se pueden formar con los elementos del conjunto $\{1, 2, A\}$.**

Las variaciones posibles son las siguientes:

$$(1, 2), (1, A), (2, 1), (2, A), (A, 1), (A, 2)$$

El **número $V_{n,k}$ de variaciones** de n elementos tomados de k en k se calcula mediante una ligera modificación del principio del producto: para confeccionar una lista de longitud k a partir de n objetos, tenemos n modos de elegir el primer elemento de la lista pero, como no está permitido repetir, solo tenemos $n - 1$ modos de elegir el segundo, $n - 2$ modos de elegir el tercero, y así sucesivamente, hasta llegar al k-ésimo, que puede ser elegido de $n - (k - 1) = n - k + 1$ formas. Así, por el principio del producto: $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

10 **Escribe en la forma $V_{n,k}$:**

a) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = V_{n,4}$

b) $(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) = V_{n+1,6}$

c) $(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = V_{n-1,3}$

d) $2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \cdot (2n-4) = V_{2n,5}$

Introducimos un nuevo símbolo, llamado **factorial del número natural n,** que escribimos **$n!$**, que vale:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Por convenio: $0! = 1$

11 Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $\dfrac{12!}{10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132$

c) $\dfrac{8! - 6!}{4!} = \dfrac{6! \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{4!} = 6 \cdot 5 \cdot (8 \cdot 7 - 1) = 30 \cdot 55 = 1650$

El **número $V_{n,k}$ de variaciones** de n elementos tomados de k en k se puede reescribir del modo siguiente:

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

12 ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 3, 4, 6 y 9?

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$$

Por tanto, se pueden formar 60 números de tres cifras distintas.

13 ¿Cuántas banderas tricolores de bandas horizontales se pueden formar con los 7 colores del arco iris? ¿Cuántas se pueden formar sin utilizar el violeta? ¿Cuántas se pueden formar de modo que en todas aparezca el amarillo y no el violeta?

Al confeccionar banderas, el orden en que aparecen los colores de las bandas proporciona banderas distintas, luego el número buscado es:

$$V_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Si no podemos emplear el violeta solo disponemos de 6 colores, luego el número de banderas en estas condiciones es:

$$V_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Para contar el número de estas en las que aparece el amarillo contamos el número de aquellas en las que no aparece, y restamos. El número de banderas tricolores que se pueden formar con 5 colores es $V_{5,3} = 60$, luego el número de banderas tricolores en las que no aparece el violeta pero sí el amarillo es: $V_{6,3} - V_{5,3} = 60$

14 **En un concurso musical participan 100 personas y se asignan tres premios, un coche, un viaje y un lote de libros, a los tres mejores. ¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse los premios?**

Se trata de elegir 3 premiados entre 100 personas. Como no es lo mismo tener de premio un coche que un lote de libros, el orden es relevante, por lo que el número buscado es:

$$V_{100,3} = \frac{100!}{97!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$$

15 **Calcula el número entero $m \geq 5$ que cumple la igualdad:**

$$\mathbf{V_{m,2} + V_{m-2,2} + V_{m-4,2} = 98}$$

$$V_{m,2} + V_{m-2,2} + V_{m-4,2} = 98 \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-2)!} + \frac{(m-2)!}{(m-4)!} + \frac{(m-4)!}{(m-6)!} = 98$$

O lo que es lo mismo: $m \cdot (m-1) + (m-2) \cdot (m-3) + (m-4) \cdot (m-5) = 98$

Efectuando estos productos, se tiene:

$$m^2 - m + m^2 - 5m + 6 + m^2 - 9m + 20 = 98 \Leftrightarrow 3m^2 - 15m - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5 \pm 11}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -3 \end{cases}$$

Como $m \geq 5$ deducimos que $m = 8$.

16 **Encuentra los números naturales n que cumplen $V_{n,2} - 2V_{n-1,2} = 0$.**

$$V_{n,2} - 2V_{n-1,2} = 0 \Rightarrow n \cdot (n-1) - 2(n-1) \cdot (n-2) = 0 \Rightarrow (n-1) \cdot (n - 2n + 4) = 0$$

Luego $n = 1$ o $n = 4$.

La primera de estas soluciones no es admisible, ya que no tienen sentido las variaciones de 1 objeto tomados de 2 en 2. En consecuencia, $n = 4$ es el único número natural que satisface el enunciado.

17 **¿Es cierto que el número variaciones de 7 objetos tomados de 7 en 7 coincide con el número variaciones de 10 objetos tomados de 4 en 4?**

Por un lado, $V_{7,7} = \dfrac{7!}{(7-7)!} = 7!$, mientras que:

$$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = (5 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot 7 = 7 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7!$$

Luego ambos números valen: $7! = 5\,040$

Permutaciones

Si n es un entero positivo una **permutación de orden *n*** es una lista ordenada de n objetos distintos dados. Por tanto, una permutación orden n es una **variación de orden *n*** de n objetos, y el número de ellas es:

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

18 **¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra ELOISA sin que haya dos consonantes consecutivas?**

El número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra ELOISA es $P_6 = 6! = 720$. Pero debemos restar las palabras en las que las dos consonantes ocupan posiciones consecutivas.

El número de palabras que empiezan por LS es $P_4 = 4! = 24$. Este número coincide con el de palabras en las que las letras LS ocupan las posiciones (2, 3), (3, 4), (4, 5) y (5, 6), lo que hace un total de $5 \cdot 24 = 120$ palabras en las que L y S van seguidas y en ese orden. Pero tambiØn debemos eliminar las palabras en las que L y S van seguidas pero en el orden SL, que son otras 120.

Por tanto, el número de palabras buscado es: $720 - 2 \cdot 120 = 480$

19 **Irene ha escrito cinco cartas distintas para cinco amigos suyos. También ha escrito los respectivos sobres con los nombres y direcciones de sus cinco amigos. ¿De cuántas formas distintas puede meter Irene cada carta en un sobre si no lee los nombres y procede de modo aleatorio? ¿En cuántos de los casos anteriores su amigo Juan tendrá su carta dentro del sobre que lleva su nombre?**

Existen $5! = 120$ formas de introducir al azar 5 cartas en cinco sobres.

Para la segunda parte, una vez introducida la carta de Juan en el sobre que lleva su nombre, colocamos al azar las cuatro cartas restantes, lo que se puede hacer de $4! = 24$ formas.

20 **¿Qué entero positivo n cumple que $P_n = 2V_{5,3}$?**

$$P_n = n! = 2V_{5,3} = \frac{2 \cdot 5!}{(5-3)!} = 5!$$

Por lo que el único entero positivo que cumple la igualdad propuesta es $n = 5$.

12.3. Combinaciones. Binomio de Newton

Si k y n son enteros positivos con $k \leq n$, una **combinación de orden *k*** de n objetos es un subconjunto formado por k objetos distintos elegidos entre los n dados. También se suele llamar **combinación de *n* elementos tomados de *k* en *k*.** Obsérvese que los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 1\}$ son el mismo. Por tanto, al formar combinaciones, **el orden no importa.**

21 **Escribe todas las combinaciones de orden dos que se pueden formar con los elementos del siguiente conjunto $\{A, B, C, D, E\}$.**

Las combinaciones que se pueden formar son:

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$$

Cada combinación $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ da lugar a $k!$ variaciones distintas: los diversos modos de reordenarlos.

Luego el número $C_{n,k}$ de combinaciones de n elementos tomados de k en k es:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Este número se llama **número combinatorio** y se denota: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

22 **Calcula el valor de los siguientes números combinatorios:**

a) $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

b) $\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

c) $\binom{9}{2} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

d) $\binom{12}{7} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$

23 **¿Cuántas mezclas de tres colores pueden hacerse utilizando 10 colores diferentes?**

La mezcla resultante no depende del orden en que sean elegidos los colores empleados. Por eso el número buscado es:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

24 A una reunión asisten 18 personas.

a) ¿Cuántos grupos distintos de 5 personas se pueden formar?

El número de grupos de 5 personas que podemos formar es:

$$C_{18,5}=\binom{18}{5}=\frac{18!}{13!\cdot 5!}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=8\,568$$

b) ¿En cuántos de estos grupos participa una persona determinada?

Los grupos de los que forma parte cierta persona P son los formados por 4 personas elegidas entre las 17 restantes, a los que se aańade P. Por tanto, el número buscado es:

$$C_{17,4}=\binom{17}{4}=\frac{17!}{13!\cdot 4!}=\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2\,380$$

c) ¿En cuantos están presentes tres personas determinadas?

Los grupos de los que forman parte ciertas personas P_1, P_2 y P_3 prefijadas están formados por 2 personas elegidas entre las 15 restantes, a los que se aańaden P_1, P_2 y P_3. Este número es:

$$C_{15,2}=\binom{15}{2}=\frac{15!}{13!\cdot 2!}=\frac{15\cdot 14}{2\cdot 1}=105$$

25 Calcula el entero positivo n sabiendo que $3C_{n,4}=5C_{n,2}$.

$$3C_{n,4}=5C_{n,2}\Leftrightarrow\frac{3\cdot n!}{(n-4)!\cdot 4!}=\frac{5\cdot n!}{(n-2)!\cdot 2!}\Leftrightarrow 3\cdot 2!\cdot n!\cdot(n-2)!=5\cdot 4!\cdot n!\cdot(n-4)!\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n-2)!=20\cdot(n-4)!\Leftrightarrow 20=\frac{(n-2)!}{(n-4)!}=(n-2)(n-3)=n^2-5n+6$$

$$\Leftrightarrow n^2-5n-14=0\Leftrightarrow n=\frac{5\pm 9}{2}$$

Como n es positivo deducimos que $n=7$.

26 Un grupo de seis excursionistas dispone de dos tiendas de campańa indistinguibles, de manera que en cada una pueden meterse tres. ¿De cuántas formas podrán repartirse entre las dos tiendas?

Obsevamos que elegidos los tres excursionistas que ocupan la primera tienda, los que ocupan la segunda quedan determinados. Por otro lado el orden en que son elegidos los integrantes de la primera tienda es irrelevante, así que el número de formas de repartirse en las tiendas es:

$$C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=20$$

Propiedades de los números combinatorios

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. Elegir k objetos entre n dados es equivalente a elegir los $n - k$ restantes. Por tanto:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4. Los grupos de k objetos elegidos entre n dados se pueden clasificar en dos tipos: aquellos de los que forma parte un objeto dado X y aquellos de los que X no forma parte.

   ¿Cuántos hay de los primeros? Tantos como grupos de $k - 1$ objetos elegidos entre los $n - 1$ distintos de X, a los que luego añadiremos X.

   ¿Y de los segundos? Estos son los grupos de k objetos escogidos entre los $n - 1$ objetos distintos de X. Sumando el número de objetos de cada tipo obtenemos todos los grupos de k objetos elegidos entre n dados, y por tanto:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}; \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

27 **Comprueba la última igualdad anterior en el caso particular $n = 6$ y $k = 3$.**

Para estos valores se tiene:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Fórmula del binomio de Newton

Para calcular la **potencia de un binomio** de la forma $(a + b)^n$ con $n > 1$, donde a y b se puedan sumar y multiplicar entre sí y consigo mismos (pueden ser números reales, polinomios u otras funciones más complicadas), se utiliza la **fórmula del binomio de Newton** que cumple la siguiente igualdad:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \\ + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

28 **Desarrolla $(x+2)^6$ y $(x-3)^4$.**

- $(x+2)^6 = x^6 + \binom{6}{1}x^5 \cdot 2 + \binom{6}{2}x^4 \cdot 2^2 + \binom{6}{3}x^3 \cdot 2^3 + \binom{6}{4}x^2 \cdot 2^4 + \binom{6}{5}x \cdot 2^5 + 2^6 =$

  $= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

- $(x-3)^4 = x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot (-3) + \binom{4}{2}x^2 \cdot (-3)^2 + \binom{4}{3}x \cdot (-3)^3 + (-3)^4 =$

  $= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

29 **¿Cuál es el coeficiente de x^{11} en el polinomio $(x-1)^{25}$?**

Por la fórmula del binomio de Newton:

$$(x-1)^{25} = x^{25} - \binom{25}{1}x^{24} + \binom{25}{2}x^{23} + \ldots + \binom{25}{14}x^{11} + \ldots + \binom{25}{24}x - 1$$

Luego el coeficiente buscado es: $\binom{25}{14} = 4\,457\,400$

30 **Calcula como en el ejemplo siguiente:**

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = (1+1)^4 = 2^4 = 16$$

a) $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = (1+1)^7 = 2^7 = 128$

b) $1 + 2 \cdot \binom{4}{1} + 2^2 \cdot \binom{4}{2} + 2^3 \cdot \binom{4}{3} + 2^4 = (1+2)^4 = 3^4 = 81$

31 **Desarrolla las potencias de los siguientes binomios:**

a) $(a-b)^7 = a^7 - \binom{7}{1} \cdot a^6 \cdot b + \binom{7}{2} \cdot a^5 \cdot b^2 - \binom{7}{3} \cdot a^4 \cdot b^3 + \binom{7}{4} \cdot a^3 \cdot b^4 - \binom{7}{5} \cdot a^2 \cdot b^5 +$

$+ \binom{7}{6} \cdot a \cdot b^6 - b^7 = a^7 - 7a^6 \cdot b + 21a^5 \cdot b^2 - 35a^4 \cdot b^3 + 35a^3 \cdot b^4 -$

$- 21a^2 \cdot b^5 + 7a \cdot b^6 - b^7$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot \frac{1}{x} + \binom{5}{2}x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 =$

$= x^5 + 5x^3 + 10x + 10x^{-1} + 5x^{-3} + x^{-5}$

32 En una pequeña biblioteca hay que escoger un libro de entre tres materias: Matemáticas, Historia y Biología. Hay 6 libros de Matemáticas, 9 de Historia y 4 de Biología. ¿Cuántas opciones tenemos?

Aplicando el principio de la suma tenemos $6 + 9 + 4 = 19$ opciones.

33 Una mujer tiene tres sombreros y cuatro brazaletes. Si piensa usar sombrero y brazalete para una fiesta, ¿cuántas combinaciones diferentes puede llevar?

Por el principio del producto puede llevar $3 \cdot 4 = 12$ combinaciones diferentes de sombrero y brazalete.

34 En la prueba final de una carrera de atletismo participan ocho corredores. El vencedor obtendrá medalla de oro; el segundo, de plata, y el tercero de bronce. ¿De cuántas maneras podría resultar el reparto de medallas?

El número de distintos podios es: $V_{8,3} = \dfrac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

35 Contesta los siguientes apartados:

a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en una fila cinco chicos?

Cinco chicos se pueden ordenar de $5! = 120$ maneras.

b) Si dos de estos chicos son hermanos, ¿de cuántas maneras pueden ponerse en fila, de modo que los dos hermanos estén seguidos?

Contemos en cuántas de estas ordenaciones los hermanos X e Y ocupan posiciones consecutivas.

Contamos primero aquellas en que ocupan las dos primeras posiciones: X el primero e Y el segundo.

Hay tantas como ordenaciones de los tres restantes, que son: $3! = 6$

También nos interesan las ordenaciones en las que X e Y ocupan las posiciones $(2, 3)$, $(3, 4)$ y $(4, 5)$. De cada una de ellas hay también 6, lo que da un total de $6 \cdot 4 = 24$ maneras. En todas ellas X va delante de Y, y hay que añadir aquellas en que Y va antes que X, que son otras 24.

En total, hay $2 \cdot 24 = 48$ formas de ponerse en fila, de modo que los dos hermanos estén seguidos.

36 ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra AGRIDULCE?

Como las nueve letras de la palabra AGRIDULCE son distintas, se pueden reordenar de $9! = 362\,880$ maneras.

37 ¿Cuántos números pares de tres cifras pueden escribirse con los dígitos 1, 2, 3 y 4?

Se pueden escribir $V_{4,3} = 24$ números de tres cifras con los cuatro dígitos dados. La mitad de ellos son pares (los que acaban en 2 o 4) y la otra mitad son impares (los que acaban en 1 o 3). Por tanto, se pueden escribir 12 números pares de tres cifras con los dígitos 1, 2, 3 y 4.

38 ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra PABLO?
¿De cuántas maneras pueden ordenarse de modo que no queden juntas las dos vocales?

*Las cinco letras de la palabra PABLO se pueden ordenar de $5! = 120$ maneras.
El número de las que empiezan por AO es $3! = 6$ y este número es también el de las ordenaciones en las que las letras A y O ocupan las posiciones (2, 3), (3, 4) y (4, 5).
Hay por tanto $6 \cdot 4 = 24$ maneras de ordenar estas letras de modo que A y O vayan seguidas y en ese orden. Hay otras tantas alterando el orden, es decir, O y A, lo que nos da un total de $2 \cdot 24 = 48$ maneras en que las vocales van seguidas.
Luego el número de ordenaciones en que las vocales no están juntas es:*

$$120 - 48 = 72$$

39 ¿Cuántos números naturales hay entre 1 000 y 2 000, incluyendo ambos?
¿Y cuántos que no tengan ninguna cifra repetida?

Dados dos números naturales m y n con $m < n$, entre ambos hay $n - m + 1$ números naturales incluyendo m y n. Así hay $1\,001 = 2\,000 - 1\,000 + 1$ números naturales entre 1 000 y 2 000, incluyendo ambos.

Para contar cuántos de ellos tienen sus cuatro cifras distintas nos olvidamos de 2 000, que no las tiene y observamos que la cifra de las unidades de millar de todos los números entre 1 000 y 1 999 vale 1. Se trata por tanto de contar listas de tres cifras distintas elegidas entre los nueve dígitos que resultan de quitar el 1.

El número de ellas es: $V_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

40 Un grupo de 6 personas, que han quedado para salir juntas, se saludan todas con todas. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

Nadie se saluda a sí mismo, y cuando dos personas se saludan intercambian un único saludo. Por tanto el número de saludos coincide con el de subconjuntos de dos elementos de un conjunto con seis elementos, es decir:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Evaluación

1 Un jugador lanza tres dados, uno amarillo, otro rojo y otro azul, y anota el resultado de su jugada (por ejemplo, un 2 en el amarillo, un 5 en el rojo y un 4 en el azul). ¿Cuántos resultados distintos puede obtener?

Aplicamos el principio del producto: hay seis opciones para el dado amarillo, otras seis para el rojo y otras seis para el azul, lo que proporciona un total de $6^3 = 216$ posibles resultados.

2 En una clase de veinte escolares se va a proceder a la elección del delegado y subdelegado. ¿Cuántos son los resultados posibles?

El número de posibles resultados es: $V_{20,2} = \dfrac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$

3 Calcula el número entero $m \geq 5$ sabiendo que $V_{m,5} = 6V_{m,3}$.

$$\frac{m!}{(m-5)!} = V_{m,5} = 6V_{m,3} = \frac{6m!}{(m-3)!} \Leftrightarrow m! \cdot (m-3)! = 6m! \cdot (m-5)! \Leftrightarrow 6 = \frac{(m-3)!}{(m-5)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = (m-3)(m-4) = m^2 - 7m + 12 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm 15}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

Como $m \geq 5$ tenemos que $m = 6$.

4 ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden formarse con las letras de la palabra EUROPA que empiecen y terminen por consonante? ¿Y cuántas que empiecen y terminen por vocal?

Las ordenaciones que empiezan por R y acaban por P son tantas como permutaciones hay de las 4 vocales de esta palabra, es decir: 4!

Otras tantas empiezan por P y acaban por R, luego hay $2 \cdot 4! = 48$ que empiezan y terminan por consonante.

Fijadas dos vocales de la palabra EUROPA tambiØn hay 48 ordenaciones que empiezan y acaban por ellas dos. Como disponemos de 4 vocales podemos formar $6 = C_{4,2}$ parejas de dos vocales, por lo que el número de ordenaciones que empiezan y terminan por vocal es: $6 \cdot 48 = 288$

5 Escribe el valor de n y de k en cada caso:

a) $V_{n,k} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

$n = 9$, $k = 4$

b) $V_{n,k} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$

$n = 14$, $k = 7$

6 ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de modo que los dígitos impares ocupen posiciones impares?

Las posiciones 1, 3, 5 y 7 han de estar ocupadas por estos cuatro números, lo que se puede hacer de 4! maneras. Por otro lado, las posiciones 2, 4 y 6 están ocupadas por dichos tres números, y esto se puede hacer de 3! modos.

Por el principio del producto, se pueden formar $3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$ ordenaciones.

7 Calcula las soluciones de la ecuación: $C_{n+1,2} = 6 \cdot P_3$

$$\binom{n+1}{2} = C_{n+1,\,2} = 6 \cdot P_3 = 6 \cdot 3! = 36 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} = 36 \Leftrightarrow n(n+1) = 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 8 \\ -9 \end{cases}$$

Como las soluciones negativas carecen de sentido en este ejercicio, entonces: $n = 8$

8 ¿Cuánto vale la suma de todos los números de cuatro cifras distintas que se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4 y 5?

Imaginemos dispuestos estos 5! números en columna y comenzamos calculando la suma de la columna de las unidades. En dicha columna hay tantos unos como doses, treses, cuatros y cincos, es decir, hay $\frac{5!}{5} = 24$ de cada, cuya suma, es:

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$$

Lo mismo valen las sumas de los números de las restantes columnas, esto es, las decenas, centenas, unidades de millar y decenas de millar, por lo que la suma pedida es:

$$S = 360(1 + 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000) = 3\,999\,960$$

9 Supongamos ordenados de menor a mayor todos los números de 6 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 5, 8 y 9. ¿Qué lugar ocupa el número 598 132?

Antes que este número van $3 \cdot 5! = 360$ números que empiezan por 1, 2 o 3. De los que empiezan por 5 van delante del nuestro los $4 \cdot 4! = 96$ que no tienen al 9 por segunda cifra empezando por la izquierda. De entre los que empiezan por 59 van delante los $3 \cdot 3! = 18$ cuya tercera cifra no es 8, y de los que empiezan por 598 el anterior al nuestro es 598 123. Por tanto, el número dado tiene por delante $360 + 96 + 18 + 1 = 475$ números, por lo que Ø ocupa la posición 476.

13 Probabilidad

13.1. Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

Aquellos experimentos que no están regidos por las leyes de la física, y cuyos resultados son, por tanto, impredecibles, dependen de las llamadas leyes del azar, y se denominan **aleatorios.** Ejemplos típicos son la puntuación que se obtiene al lanzar un dado o una moneda.

1 **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios:**

a) Observar el palo de una carta que se extrae, con los ojos cerrados, de una baraja.

b) Medir la longitud del lado de un cuadrado de área 16 m^2.

c) Observar el color de los zapatos de la primera persona que me encuentre al salir de casa.

d) Observar el número premiado en el sorteo del Niño.

Son aleatorios los experimentos a), c) y d).

Regla de Laplace: En un **experimento aleatorio regular,** esto es, aquel en el que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad: sea S un suceso del experimento y m el número de resultados en los que se presenta S de los n posibles, es decir, el número de casos **favorables** al suceso S, entonces la probabilidad $P(S)$ de dicho suceso es $P(S) = \frac{m}{n}$, es decir, el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Ejemplos:

- Al lanzar un dado equilibrado la probabilidad de que salga una cara determinada es $\frac{1}{6}$. La probabilidad de que salga un número par es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Si en una urna hay 3 bolas azules y 5 bolas rojas la probabilidad de que al extraer al azar una bola de la urna salga azul es $\frac{3}{8}$, y la probabilidad de que salga roja es $\frac{5}{8}$.

2 **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de las puntuaciones de ambos sea 10?**

Al lanzar dos dados se pueden obtener $36 = 6 \cdot 6$ pares de puntuaciones. Por tanto, hay 36 casos posibles, y sólo 3 son favorables, que son (4, 6), (5, 5) y (6, 4). Así, la probabilidad del suceso

S = «la suma de las puntuaciones de ambos dados es 10» es $P(S) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 11 al colocar al azar los dígitos 1, 2, 3 y 4?

Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 se pueden formar $4! = 24$ números.

Los casos favorables son aquØlos en los que la suma de los dígitos que ocupan las unidades y las centenas coincide con la suma de los dígitos que ocupan las decenas y las unidades de millar.

Si la cifra de las unidades es 1 entonces la cifra de las centenas debe ser 4, y solo hay dos números así: 2 431 y 3 421.

De igual modo hay dos casos favorables para cada uno de los cuatro dígitos que pueden ocupar el lugar de las unidades, así que el número de casos favorables es $4 \cdot 2 = 8$, y la probabilidad buscada es:

$$P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

4 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de las puntuaciones obtenidas sea múltiplo de 3?

Al lanzar dos dados se pueden obtener $36 = 6 \cdot 6$ pares de puntuaciones, que representamos en la forma (x, y), donde x es la puntuación obtenida al lanzar el primer dado y la obtenida al lanzar el segundo dado.

Los casos favorables son:

$$(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3) \text{ y } (6, 6)$$

Así, la probabilidad buscada es $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Propiedades

- El número m de casos favorables a un suceso S es siempre menor o igual que el número de casos posibles n, por lo que $0 \leq \frac{m}{n} = P(S) \leq 1$
- Consideramos un experimento con n casos posibles y un suceso S del mismo. Denotamos $\overline{S}$ al **suceso complementario,** esto es, el suceso que consiste en que no sucede S. Es claro que si m es el número de casos favorables a S entonces $n - m$ son los casos en los que no aparece S, esto es, los casos favorables a $\overline{S}$. Entonces:

$$P(S) + P(\overline{S}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Por tanto, $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.

- **Unión e intersección de sucesos.** Sean S y T dos sucesos. Se denota $\boldsymbol{S \cup T}$ al suceso **sucede S o sucede T,** y se denota $\boldsymbol{S \cap T}$ el suceso **ocurren S y T.** Entonces:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

5 **Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 3 azules y 2 negras. Extraemos tres de ellas y observamos sus colores. Calcula la probabilidad de obtener al menos una azul.**

Sea S = «obtiene al menos una bola azul», y el complementario $\overline{S}$ = «no obtiene ninguna bola azul»: $P(S)=1-P(\overline{S})=1-\frac{C_{6,3}}{C_{9,3}}=1-\frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}}=1-\frac{\frac{6!}{3!3!}}{\frac{9!}{3!6!}}=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

6 **Consideremos el experimento que consiste en extraer una bola de una urna que contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100, y los sucesos:**

A = «se obtiene múltiplo de 10»; B = «se obtiene múltiplo de 15»

a) Escribe los sucesos A, B y $A \cap B$.

$A=\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

$B=\{15, 30, 45, 60, 75\ 90\}$; $A \cap B=\{30, 60, 90\}$

b) Calcula la probabilidad de $A \cup B$.

El número de casos posibles del experimento es 100, luego fijándonos en el apartado anterior obtenemos: $P(A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}, P(B)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}, P(A\cap B)=\frac{3}{100}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{3}{100}=\frac{13}{100}$$

7 **Consideremos el experimento que consiste en extraer una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20, y los sucesos:**

A = «obtener múltiplo de 5»; B = «obtener un número menor que 10»;

C = «obtener número par»

Escribe los sucesos A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap (B \cup C)$ y $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, y sus probabilidades.

Los sucesos pedidos son: $A=\{5, 10, 15, 20\}$; $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
$C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; $A\cap B=\{5\}$; $A\cap C=\{10, 20\}$;
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{5, 10, 20\}$, $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{\overline{A\cap B}}=A\cap B=\{5\}$; y:

$$P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5};\ P(B)=\frac{9}{20};\ P(C)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2};\ P(A\cap B)=\frac{1}{20};$$
$$P(A\cap C)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10};\ P\left(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\right)=\frac{1}{20}$$

Cuando el suceso $S \cap T$ no se produce nunca se dice que S y T son **incompatibles** o **mutuamente excluyentes.** Entonces $P(S \cap T) = 0$, por lo que en este caso:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

Esto también ocurre con uniones de más de dos sucesos, es decir, si $S_1, \dots, S_n$ son sucesos tales que cualquier par de ellos no pueden ocurrir simultáneamente, entonces:

$$P(S_1 \cup \dots \cup S_n) = P(S_1) + \dots + P(S_n)$$

¿Qué se puede decir de la probabilidad de la intersección de dos sucesos S y T? Si los sucesos son **independientes,** es decir, que suceda o no S, no influye en que suceda o no T, entonces:

$$P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$$

8 **Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio con $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}76$. ¿Son independientes A y B?**

Los sucesos A y B son independientes pues:

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 76 = 0{,}24$$

$$P(A \cap B) = \; = 0{,}24$$

9 **Sean S y T dos sucesos de los que se sabe que $P(S) = \frac{3}{10}$, $P(T) = \frac{3}{5}$ y $P(S \cap T) = \frac{1}{5}$. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: $\overline{S}, \overline{T}, S \cup T$, y $S \cap \overline{T}$.**

Los primeros cálculos son directos:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = \frac{7}{10};\; P(\overline{T}) = 1 - P(T) = \frac{2}{5};$$

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

Para el cuarto observamos que como T y $\overline{T}$ son incompatibles también $S \cap T$ y $S \cap \overline{T}$ lo son.

Y puesto que $S = (S \cap T) \cup (S \cap \overline{T})$, resulta:

$$\frac{3}{10} = P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \overline{T}) = \frac{1}{5} + P(S \cap \overline{T}),$$

y en consecuencia $P(S \cap \overline{T}) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

13.2. Probabilidad condicionada

Ejemplo: Consideremos el experimento consistente en lanzar un dado. Sea S el suceso **obtener un número par.** Por la Regla de Laplace, $P(S) = \frac{1}{2}$.

Supongamos que el experimento **ya se ha realizado,** y sabemos que ha salido un número menor o igual que 3. Llamamos a este suceso A. Con esta información adicional la probabilidad de S ha cambiado. Denotamos $P(S/A)$, la probabilidad de que ocurra S si sabemos que ha ocurrido A, entonces $P(S/A) = \frac{1}{3}$, pues ahora los casos posibles son 1, 2 o 3, y el único favorable es 2.

Fijados dos sucesos S y A se denomina **probabilidad de *S* condicionada por *A*** a la probabilidad de que ocurra S suponiendo que ha ocurrido A. Se denota $P(S/A)$ y su valor es:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)}$$

10 **Se lanza dos veces un dado. ¿Cuál la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un cinco sabiendo que la suma de las puntuaciones de ambos lanzamientos es 8?**

Llamamos $A =$ «la suma de ambas puntuaciones es 8» y $S =$ «en el primer lanzamiento sale un 5». El suceso A es $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ luego $P(A) = \frac{5}{36}$.

Por otro lado, $S \cap A = \{(5, 3)\}$, por lo que $P(S \cap A) = \frac{1}{36}$. Así:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

11 **En una caja hay 5 bolas azules y 4 verdes. Se extraen sucesivamente 2 sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que la primera bola sea azul y la segunda verde.**

Consideremos los sucesos:

$A =$ «la primera bola extraída es azul»; $S =$ «la segunda bola extraída es verde»

No s piden calcular $P(S \cap A)$, y emplearemos la fórmula $P(S \cap A) = P(S/A) \cdot P(A)$. En nuestro caso, $P(A) = \frac{5}{9}$ y $P(S/A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, pues despuØs de extraer una bola azul en la caja quedan 4 azules y 4 verdes. En consecuencia:

$$P(S \cap A) = P(S/A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Si los sucesos S y A son **independientes** se tiene $P(S \cap A) = P(S) \cdot P(A)$, luego en este caso:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(S)}{P(A)} = P(S)$$

Esta igualdad explica el nombre dado a los sucesos independientes; lo son porque la **probabilidad de S no queda condicionada por A,** esto es, es independiente de que A haya sucedido o no.

12 **¿Son independientes dos sucesos S y A de los que se sabe que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(S) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup S) = \frac{2}{3}$?**

$$P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Por otro lado, $P(A) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, luego A y S son independientes.

Teorema de la probabilidad total. Sean $A_1, \ldots, A_n$ sucesos incompatibles dos a dos, tales que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ es el **suceso seguro.** Entonces, para cada suceso S se tiene:

$$P(S) = P(S/A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(S/A_n) \cdot P(A_n)$$

13 **Disponemos de dos bolsas con bolas rojas y negras. La primera tiene tantas bolas rojas como negras, mientras que el número de bolas rojas de la segunda duplica al de negras. Lanzamos una moneda al aire y si sale cara extraemos una bola de la primera bolsa y si sale cruz de la segunda. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.**

Sean los sucesos:

A = «obtenemos cara al lanzar la moneda»

$\bar{A}$ = «obtenemos cruz».

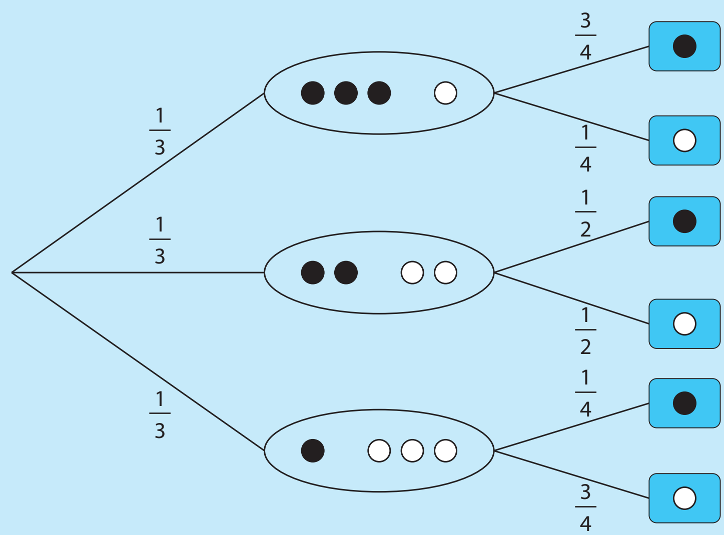
Denotamos por S el suceso que consiste en extraer una bola roja. Así:

$$P(S) = P(S/A) \cdot P(A) + P(S/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

13.3. Diagramas de árbol

El **teorema de la probabilidad total** se ilustra gráficamente mediante los llamados **diagramas en árbol.** Veamos un ejemplo. Se dispone de tres bolsas con bolas negras y blancas. En la primera bolsa hay tres bolas negras y una blanca, en la segunda hay dos de cada color y en la tercera hay una bola negra y tres blancas. Elegimos una bolsa al azar y extraemos una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola elegida sea blanca?

El siguiente diagrama de árbol esquematiza el problema:



Denotamos por A_1, A_2 y A_3 los sucesos que consisten en elegir la primera, la segunda o la tercera bolsa respectivamente. Sus probabilidades son iguales:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, es inmediato que si B = «la bola extraída es blanca», las probabilidades condicionadas son:

$$P(B/A_1) = \frac{1}{4},\ P(B/A_2) = \frac{1}{2} \text{ y } P(B/A_3) = \frac{3}{4}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Es conveniente observar que la suma de los números situados en las ramas que salen de un mismo vértice es 1 y que la probabilidad de cada uno de los sucesos que aparecen a la derecha es la **suma de los productos de los números situados en las ramas que conducen a él.**

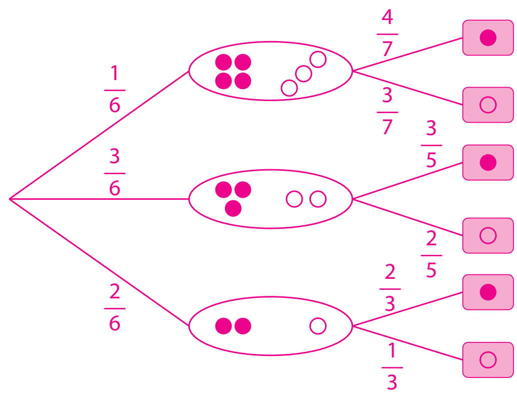
14 Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 4 negras; una segunda contiene 2 bolas blancas y 3 negras, y una tercera contiene 1 bola blanca y 2 negras. Se lanza un dado, y si sale un 1 se extrae una bola de la primera bolsa. Si sale un número primo (el 1 no es primo) se extrae de la segunda bolsa, y en otro caso se extrae una de la tercera bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

A_1 = «la bola se extrae de la primera bolsa», A_2 = «la bola se extrae de la segunda bolsa» y A_3 = «la bola se extrae de la tercera bolsa», cuyas probabilidades son:

$P(A_1)=\frac{1}{6}$, $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ y

$P(A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Así, la probabilidad del suceso S = «la bola extraída es blanca», se calcula mediante la fórmula,



$$P(B)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+P(B/A_3)\cdot P(A_3)$$

y las probabilidades condicionadas que aparecen en la fórmula anterior son:

$$P(S/A_1)=\frac{3}{7},\ P(S/A_2)=\frac{2}{5}\ \text{y}\ P(S/A_3)=\frac{1}{3}$$

Por tanto, al sustituir estos valores resulta:

$$P(S)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{241}{630}$$

15 Una bolsa contiene una bola blanca y dos negras, y una segunda bolsa contiene dos bolas blancas y una negra. Se saca al azar una bola de la primera bolsa y se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

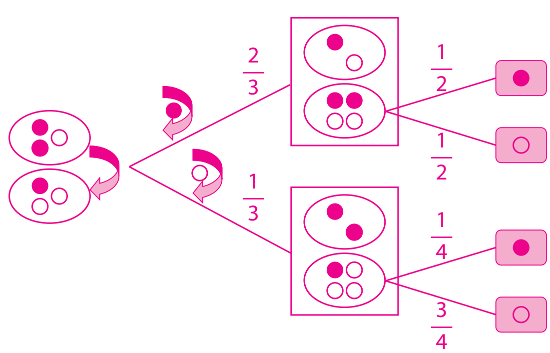
Sean los sucesos S = «la bola extraída en segundo lugar es blanca» y A = «la bola extraída de la primera bolsa es blanca». Así,

$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(S/A)=\frac{3}{4}$ y $P(S/\overline{A})=\frac{1}{2}$.

Por tanto:

$P(S)=P(S/A)\cdot P(A)+P(S/\overline{A})\cdot P(\overline{A})=$

$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$



13.4. Tablas de contingencia

Las **tablas de contingencia** son tablas de entrada múltiple en cuyas celdas se escribe el número de objetos que cumplen las características indicadas en la intersección de la fila y la columna en que se encuentra dicha celda.

Veremos a continuación cómo utilizarlas para resolver problemas en los que haya que calcular probabilidades.

Ejemplo: Supongamos que se sortea un coche entre los 140 empleados de una empresa, de los que 75 son mujeres, 90 son personas casadas y 20 son mujeres solteras.

Vamos a responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el agraciado con el coche sea un hombre soltero?

b) Sabiendo que la persona afortunada es casada, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

- En primer lugar construimos la tabla que recoge los datos del enunciado.
- Después completamos la tabla rellenando los huecos.

	Mujeres	Hombres	Totales
Solteros	**20**	30	50
Casados	55	35	**90**
Totales	**75**	65	**140**

A partir de esta tabla se pueden responder directamente las preguntas formuladas inicialmente.

a) Como hay 30 hombres solteros de un total de 140 personas la probabilidad del suceso S = «el agraciado con el coche es un hombre soltero» es:

$$P(S) = \frac{30}{140} = \frac{3}{14}$$

b) Como el total de personas casadas es 90, y de ellas 55 son mujeres, la probabilidad $P(T/A)$ del suceso T = «la persona afortunada con el coche es mujer», suponiendo que se da el suceso A = «la persona a la que le toca el coche es casada», es:

$$P(T/A) = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

16 **En una clase de 25 alumnos hay 10 que han aprobado Física, 12 que han aprobado Química y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Construye una tabla de contingencia que refleje los datos del enunciado. Elegimos al azar un alumno de esa clase:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado Física y Química?

b) Sabiendo que ha aprobado Química, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Física?

	Aprueban Química	Suspenden Química	Totales
Aprueban Física	3	7	10
Suspenden Física	9	6	15
Totales	12	13	25

Denotamos por Q y F los siguientes sucesos:

Q = «el alumno seleccionado aprueba Química»

F = «el alumno seleccionado aprueba Física».

Sin más que mirar la tabla obtenemos: $P(Q \cap F) = \frac{3}{25}$ y $P(F/Q) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

17 **Considera la siguiente tabla que contiene los resultados de un estudio que analiza la efectividad del uso de cascos de seguridad en ciclistas, para prevenir lesiones en la cabeza en caso de accidentes.**

	Usa casco	No usa casco	Totales
Con lesión en la cabeza	17	218	235
Sin lesión en la cabeza	130	428	558
Totales	147	646	793

Seleccionado uno de los accidentados al azar calcular la probabilidad de que haya sufrido lesiones en la cabeza. Si sabemos que llevaba el casco puesto, ¿cuál es la probabilidad de que haya sufrido lesiones en la cabeza?

Denotamos por L y C los siguientes sucesos:

L = «el accidentado sufrió lesiones en la cabeza»

C = «el accidentado llevaba el casco puesto»

Sin más que mirar la tabla obtenemos: $P(L) = \frac{235}{793}$; $P(L/C) = \frac{17}{147}$

18 Disponemos de 4 libros de matemáticas y 4 de biología y los colocamos al azar en un estante. ¿Cuál es la probabilidad de que los libros de cada materia queden uno a continuación del otro?

El número de resultados posibles al colocar los 8 libros es 8!. Las ordenaciones que corresponden al suceso cuya probabilidad queremos hallar son aquellas en las que primero se colocan 4 libros de matemáticas y a continuación 4 libros de biología y también aquellas en las que primero se colocan 4 libros de biología y a continuación 4 de matemáticas.

De las primeras hay $4! \cdot 4!$, que corresponden a las 4! maneras de colocar los libros de una misma materia, y otras tantas hay de las segundas.

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{2 \cdot 4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{35}$$

19 Un ordenador dispone de las letras MADNA A para formar palabras, tengan o no sentido. ¿Qué probabilidad tiene de formar la palabra MANA DA?

Que el ordenador forme la palabra MANA DA es el único caso favorable, mientras que para contar el número de casos posibles tenemos $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ formas de elegir los lugares para las A's y $3! = 6$ formas de colocar la M, N y D en los tres sitios no ocupados por la A.

De este modo, aplicando el principio del producto obtenemos $20 \cdot 6 = 120$ ordenaciones posibles de las letras dadas, y la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{120}$$

20 ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja española de cuarenta cartas las dos sean copas?

El número de casos favorables es el de conjuntos de dos elementos escogidos entre los 40 de la baraja, es decir, las combinaciones $C_{40,2}$. Por tanto, la probabilidad buscada es:

$$P = \frac{C_{10,2}}{C_{40,2}} = \frac{\frac{10!}{2! \cdot 8!}}{\frac{40!}{2! \cdot 38!}} = \frac{10 \cdot 9}{40 \cdot 39} = \frac{3}{52}$$

21 ¿Cuál es la probabilidad del suceso: no obtener dos puntuaciones iguales al lanzar dos dados?

El número de parejas de puntuaciones es $6 \cdot 6 = 36$. Nos piden calcular la probabilidad del suceso $S =$ «las puntuaciones de ambos dados no coinciden». Es más sencillo contar el número de parejas de puntuaciones coincidentes, que son (n, n) con $1 \le n \le 6$.

Por tanto, $P(\overline{S}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, luego $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = \frac{5}{6}$.

22 Sean S y T dos sucesos incompatibles tales que $P(\overline{S}) = \frac{3}{4}$ y $P(T) = \frac{1}{2}$. Calcula las probabilidades $P(S \cup T)$, $P(\overline{S} \cap T)$ y $P(\overline{S} \cap \overline{T})$.

Se tiene $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ y, puesto que los sucesos S y T son incompatibles, $P(S \cap T) = 0$. Así: $P(S \cup T) = P(S) + P(T) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Además, $\frac{1}{2} = P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = P(\overline{S} \cap T)$.

Por último, $P(\overline{S} \cap \overline{T}) = P(\overline{S \cup T}) = 1 - P(S \cup T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

23 La probabilidad de que cierto estudiante A apruebe matemáticas es $\frac{3}{5}$, mientras que la probabilidad de que las apruebe otro estudiante B es $\frac{1}{2}$. Además, la probabilidad de que apruebe A y no apruebe B es $\frac{3}{10}$.

a) Calcula la probabilidad de que aprueben A y B.

Sean los sucesos $A =$ «A aprueba» y $B =$ «B aprueba». Los datos del enunciado son:

$$P(A) = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{1}{2} \text{ y } P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow \frac{3}{5} = P(A \cap B) + \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

En consecuencia, la probabilidad de que aprueben A y B es $\frac{3}{10}$.

b) Calcula la probabilidad de que solo apruebe B.

Se trata de calcular $P(\overline{A} \cap B)$. Razonando como en el caso anterior:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{5}$$

c) Calcula la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos.

Por último: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$

1 **Calcula la probabilidad de que al lanzar tres dados la suma de las puntuaciones obtenidas sea 6.**

Representamos los resultados de los lanzamientos como ternas de números comprendidos entre 1 y 6. El número total de dichas ternas es $6^3 = 216$, mientras que aquØlas cuyos miembros suman 6 son las siguientes:

$$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Por tanto, hay, exactamente, 9 casos posibles, así que la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

2 **Consideremos el experimento que consiste en lanzar una moneda 3 veces, y los sucesos:**

A = «se obtienen al menos dos caras»; B = «se obtienen exactamente dos caras»; C = «se obtiene cara en el primer lanzamiento» y D = «se obtiene cruz en los dos primeros lanzamientos».

a) Escribe los cuatro sucesos anteriores y calcula sus probabilidades.

Escribimos cada resultado como una terna formada por símbolos c y x, que denotan, respectivamente, que se ha obtenido cara o cruz. Por ello, el número de posibles resultados es

$$2^3 = 8, \text{ y } A = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\},\ B = \{(c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\},$$
$$C = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (c, x, x)\} \text{ y } D = \{(x, x, c), (x, x, x)\}$$

En consecuencia:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{8},\ P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b) Calcula la probabilidad de los sucesos: $S_1 = B \cap C$, $S_2 = B \cup C$, $T = (A \cap C) \cup D$ y $\overline{T}$

$S_1 = B \cap C = \{(c, c, x), (c, x, c)\}$, luego $P(S_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, y, por tanto:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Por otro lado,

$$T = (A \cap C) \cup D = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, x, c), (x, x, x)\}$$

y así: $P(T) = \frac{5}{8}$, $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

3 **Dados dos sucesos independientes S y T cuyas probabilidades son $P(S) = \frac{1}{2}$ y $P(T) = \frac{3}{10}$, calcula las probabilidades de los sucesos $S \cup T$ y $\overline{S} \cup T$.**

Por ser S y T sucesos independientes, $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T) = \frac{3}{20}$, luego:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Por último, $T = (S \cap T) \cup (\overline{S} \cap T)$ y los sucesos $S \cap T$ y $\overline{S} \cap T$ son incompatibles por serlo S y $\overline{S}$, luego

$$\frac{3}{10} = P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = \frac{3}{20} + P(\overline{S} \cap T)$$

y en consecuencia:

$$P(\overline{S} \cap T) = \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{3}{20}$$

4 **De una caja que contiene 5 bolas azules y 4 verdes se extraen sucesivamente 2 sin reemplazamiento.**

a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea verde.

Consideremos los sucesos:

A = «la primera bola extraída es azul»; S = «la segunda bola extraída es verde»

Hemos de calcular $P(S)$, y sabemos que:

$$P(A) = \frac{5}{9} \text{ y } P(S/A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por otro lado $P(S/\overline{A}) = \frac{3}{8}$, pues como estamos suponiendo que la primera bola extraída es verde en la caja quedan 5 bolas azules y 3 verdes. Además, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{9}$, y por la fórmula de la probabilidad total resulta:

$$P(S) = P(S/A) \cdot P(A) + P(S/\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

b) Calcula la probabilidad de que la primera bola sea azul sabiendo que la segunda es verde.

Hay que calcular $P(A/S)$, para lo que sustituimos los valores conocidos en la igualdad:

$$P(S/A) \cdot P(A) = P(A/S) \cdot P(S)$$

Se tiene entonces:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = P(S/A) \cdot P(A) = P(A/S) \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow P(A/S) = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{8}$$

Evaluación general

1 Halla x para que se cumpla la siguiente igualdad: $\dfrac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Al efectuar la suma que aparece en el segundo miembro de la igualdad se tiene:

$$\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}},$$

y despejando:

$$x = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

2 Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 + kx - 30$ es múltiplo de $x + 2$. Halla k y descompón $p(x)$ en factores de grado 1.

Se deduce del teorema del resto que $p(-2) = 0$, luego

$$0 = p(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 2k - 30 = -22 - 2k \Rightarrow k = -11$$

Aplicando la Regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ -2 & & -2 & -4 & 30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2+2x-15)$$

Aplicando de nuevo la Regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -15 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x+2)(x^2+2x-15) = (x+2)(x-3)(x+5)$$

3 Halla las longitudes de los lados segmentos AB y CD de la figura, sabiendo que la longitud del segmento AC es 4,5 m.

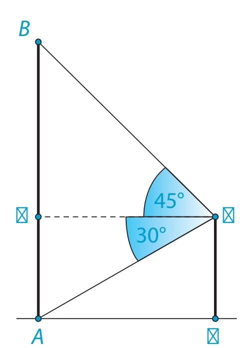
Observamos que $AC = ED = 4{,}5$ m, luego

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BE}{DE} \Rightarrow BE = DE = 4{,}5\,\text{m}$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AE}{ED} \Rightarrow AE = \frac{4{,}5}{\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{m}$$

y por último $CD = AE = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ m y $AB = AE + EB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}$ m.



Evaluación general

4 **Calcula el punto en que la recta r: $x - 4y + 14 = 0$ corta a la recta s que pasa por el punto $A = (1, 3)$ y corta al eje de ordenadas en el punto $B = (0, 2)$.**

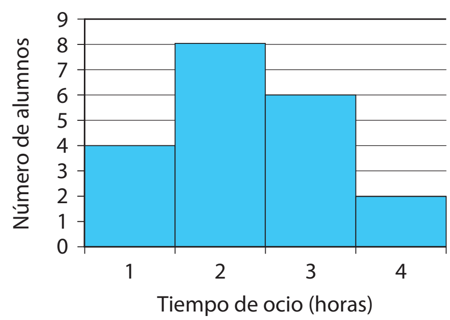
Una ecuación de la recta s es: $s: \dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow y = x+2$

así que, las coordenadas del punto son la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-4y+14=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y-14 \\ x=y-2 \end{cases} \Rightarrow 4y-14=y-2 \Rightarrow 3y=12 \Rightarrow y=4, x=2$$

Las rectas r y s se cortan en el punto $C = (2, 4)$.

5 **Se ha realizado una encuesta a los 20 alumnos del curso de 4° en la que se preguntaba el número de horas que dedican a actividades de ocio en el fin de semana. En la gráfica aparecen recogidos los resultados. Calcula el número medio de horas que dedican al ocio así como su desviación típica.**



Los valores que toma el número de horas de ocio son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$, con frecuencias absolutas $f_1 = 4$, $f_2 = 8$, $f_3 = 6$ y $f_4 = 2$, respectivamente, cuya suma es $N = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 20$. Por tanto, la media es:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4}{N} = \frac{4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{20} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2{,}3 \text{ h}$$

Es decir, 2 h y 18 min.

Para calcular la desviación típica, como σ es la raíz cuadrada de la varianza:

$$Var = \frac{f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + f_3 \cdot x_3^2 + f_4 \cdot x_4^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2}{20} - \left(\frac{23}{10}\right)^2 =$$

$$= \frac{122}{20} - \frac{529}{100} = \frac{610 - 529}{100} = \frac{81}{100} = 0{,}81$$

así que $\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

6 **¿Cuál es la probabilidad de que en el sorteo de la ONCE salga un número capicúa? Recuerda que los números son de cinco dígitos, incluido el cero.**

Como los números que se obtienen en el sorteo son de 5 cifras, la que ocupa el lugar de las centenas no desempeña ningún papel para decidir si el número obtenido es capicúa o no lo es. Por tanto se trata de contar cuantos números *abcd* de cuatro dígitos se forman con las cifras del 0 al 9, de las que hay 10^4, y quedarnos con las de la forma *abba*, de las que hay 10^2. Por tanto, la probabilidad buscada es $p = \dfrac{10^2}{10^4} = \dfrac{1}{100}$.

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford. Como parte integrante de esta institución, promueve el objetivo de excelencia en la investigación y la educación a través de sus publicaciones en todo el mundo. Oxford y Oxford Educación son marcas registradas de Oxford University Press.

Publicado en España por
Oxford University Press España S. A.
Parque Empresarial San Fernando, Edificio Atenas
28830 San Fernando de Henares (Madrid)

ISBN: 978-84-673-7706-4
Depósito legal: M-10448-2013

AUTORA
M.ª Belén Rodríguez Rodríguez

EDICIÓN
Coordinación: Mercedes Pérez Delgado
Ana Fernández Saiz
Sergio Nombela Díaz-Guerra

DISEÑO DE CUBIERTA
Pepe Freire

MAQUETACIÓN
Gráficas Blanco, S. L.

ILUSTRACIÓN
Ramón Colera Cañas
Gráficas Blanco, S. L.