APRUEBA TUS EXÁMENES

4 ESO

M.ª Belén Rodríguez Rodríguez

Opción A

Matemáticas

SOLUCIONARIO

Oxford
EDUCACIÓN

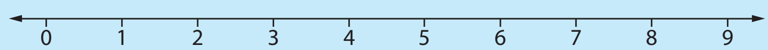
Índice

1 Los números enteros

1.1. Ordenación y representación

Los números empleados para contar son 0, 1, 2, 3, ... se llaman **números naturales** y el conjunto formado por ellos se denota por $\mathbb{N}$. Hay infinitos números naturales, pues no existe el mayor número natural, ya que dado un número natural su siguiente es otro número natural mayor que él.

Estos números se representan a lo largo de una recta, con la misma distancia entre números consecutivos. Se ordenan de acuerdo a su posición sobre la recta: se dice que m es menor que n, y se escribe $m < n$ si n está a la derecha de m.



1 **Calcula tres números impares consecutivos cuya suma sea 45.**

Los números 13, 15 y 17 son impares consecutivos y su suma es igual a 45.

2 **Observa la siguiente lista: 3, 6, 9, 12, 15, ... ¿qué número ocupará el quincuagésimo lugar?**

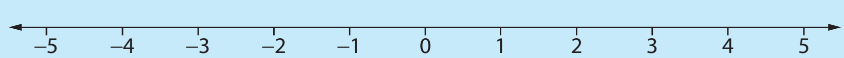
El quincuagésismo lugar estará ocupado por el número: $3 \cdot 50 = 150$

3 **Se plantan árboles en fila. Sabiendo que la distancia entre dos consecutivos es 2 m y que la distancia entre el primero y el último es 168 m, ¿cuántos árboles se han plantado?**

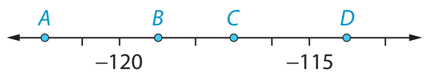
El cociente $\frac{168}{2} = 84$ *nos indica el número de huecos entre los árboles plantados.*

Como hay un árbol más que huecos, se han plantado 85 árboles.

Para **representar pérdidas** y, en general, para **contar hacia atrás,** se necesitan nuevos números, que expresen que no tienes, sino que debes. Junto con los naturales se les llama **números enteros** y se representan a la izquierda del 0 en la misma recta que los naturales. Se denotan –1, –2, –3, ... Estos números añadidos se llaman **enteros negativos** y los naturales distintos del cero son los **enteros positivos,** que son mayores que cualquier entero negativo y que el 0. El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$.



4 Indica qué números están representados por los puntos *A, B, C* y *D*.



$A = -122, \quad B = -119, \quad C = -117, \quad D = -114$

El **valor absoluto** de un número entero n se denota $|n|$, y se define así:

$$|n| = \begin{cases} n & si \quad n \geq 0 \\ -n & si \quad n < 0 \end{cases}$$

- El valor absoluto de un número entero es un número natural.
- Además, $|n|$ es el mayor entre n y $-n$.
- El único entero cuyo valor absoluto es 0 es el número 0.
- El opuesto de un número entero n, es otro número entero con el mismo valor absoluto que n pero con distinto signo.

Ejemplos:

El valor absoluto de –3 es su opuesto, que es 3.

El opuesto de 7 es –7.

5 ¿Cuáles son los números cuyo valor absoluto es 5?

Los únicos números cuyo valor absoluto es 5 son 5 y –5.

- Dados dos enteros negativos m y n se dice que ***m* es menor que *n*** y se escribe $\boldsymbol{m < n}$, si:

$$|n| < |m|$$

- Si los números enteros m, n y p cumplen $m < n$ y $n < p$, entonces $m < p$ y se abrevia:

$$m < n < p$$

6 Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros: –13, –351, 0, –19

Estos números se ordenan así:

$$-351 < -19 < -13 < 0,$$

pues sus valores absolutos cumplen:

$$|0| = 0 < 13 = |-13| < 19 = |-19| < 351 = |-351|$$

7 ¿Cuáles son los números cuya distancia a 5 es 17?

Buscamos los números enteros n que cumplen $|n-5|=17$.

El número n satisface la igualdad anterior si:

- O bien $n-5=17 \Rightarrow n=22$
- O bien $n-5=-17 \Rightarrow n=-12$

Por tanto, los números que distan 17 de 5 son 22 y -12.

8 Dos números enteros opuestos distan 10 unidades. ¿Qué números son?

Buscamos los números enteros n que cumplen: $|n-(-n)|=10$.

Es decir: $|2n|=10 \Leftrightarrow n=5$ o $n=-5$

Los números buscados son -5 y 5.

9 Ana mantiene su casa a una temperatura ambiente de 20°C. Su congelador está programado para mantener una temperatura de –15°C. Representa estos números en la recta e indica cuál es la diferencia de temperatura entre la casa y el congelador.

La diferencia de temperatura es de 35°C.

10 ¿Es cierto que si los números enteros m y n cumplen que $m<n$, entonces $|m|<|n|$?

En general es falso.

Por ejemplo, $-2<-1$ pero: $|-2|=2>1=|-1|$

11 ¿Qué números enteros distan 8 de su triple?

El número entero n dista 8 de su triple si: $|3n-n|=8$

$$\text{Es decir: } |2n|=8 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{O bien: } 2n=8 \Rightarrow n=4 \\ \text{O bien: } 2n=-8 \Rightarrow n=-4 \end{cases}$$

Por tanto, 4 y -4 son los únicos números enteros que distan 8 de su triple.

1.2. Operaciones con números enteros

La **suma y resta de números enteros** es la misma que la de números naturales, sin la restricción de que en la resta el minuendo ha de ser mayor que el sustraendo.

- Para **sumar** dos números enteros con el **mismo signo,** se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo común.

  Ejemplos:

  $(+13) + (+22) = +35$

  $(-34) + (-26) = -60$

- Para sumar dos números enteros con distinto signo, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

  Ejemplos:

  $(-1\,203) + 1\,024 = -(1\,203 - 1\,024) = -179$

  $657 - 824 = -(824 - 657) = -167$

- Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

  Ejemplos:

  $(+10) - (+22) = (+10) + (-22) = -(22 - 10) = -12$

  $(-24) - (-26) = (-24) + (+26) = 26 - 24 = 2$

12 **Efectúa las siguientes operaciones:**

a) $(-4) - (-7) = -4 + 7 = +3$

b) $(-7) + (-4) = -7 - 4 = -11$

c) $(+4) + (-7) = 4 - 7 = -3$

d) $(+4) - (+7) = 4 - 7 = -3$

e) $(-31) - 18 = -31 - 18 = -49$

f) $(-31) - (-18) = -31 + 18 = -13$

g) $18 - 31 = -13$

h) $-18 - (-31) = -18 + 31 = +13$

13 **Calcula como en el ejemplo:**

$$(+6) - (-1) - (+2) - (-10) + (-12) = 6 + 1 - 2 + 10 - 12 = (6 + 1 + 10) - (2 + 12) = 17 - 14 = 3$$

a) $(-7) - (-4) + (-5) - (-22) - (-9) = -7 + 4 - 5 + 22 + 9 = (4 + 22 + 9) - (7 + 5) = 35 - 12 = 23$

b) $-(-3) - (+8) - (-2) + (-10) - (+1) = 3 - 8 + 2 - 10 - 1 = (3 + 2) - (8 + 10 + 1) = 5 - 19 = -14$

14 **En un observatorio meteorológico se ha medido la temperatura 5 veces. En la primera se pudo leer +2°C. Luego bajó 5°C. Después bajó otros 4°C. Luego subió 10°C, y por último bajó 4°C. ¿Cuál fue la temperatura la última vez que se midió?**

La temperatura final fue de:

$$+2-5-4+10-4=12-13=-1\,°C$$

15 **Calcula el valor absoluto de los siguientes números: –3 – 7; 3 – 7**

- $|-3-7|=|-10|=10$
- $|3-7|=|-4|=4$

16 **¿Es cierto que $|m+n|=|m|+|n|$ para cada par de números naturales m y n?**

En general es falso.

Por ejemplo, si $m=1$ y $n=-2$ entonces $m+n=-1$, luego $|m+n|=1$ mientras que:

$$|m|+|n|=1+2=3$$

17 **Calcula los siguientes enteros:**

a) $|5-|3-7|+6-12|=|5-|-4|+6-12|=|5-4+6-12|=|-5|=5$

b) $|5+3\cdot4-|6-7||=|5+12-|-1||=|5+12-1|=|16|=16$

- El **producto de números enteros** se efectúa como el de los números naturales, pero atendiendo a la **regla de los signos:**

+ · + = +	– · – = +	+ · – = –	– · + = –
7 · 15 = 105	(–7) · (–15) = 105	7 · (–15) = –105	(–7) · 15 = –105

18 **Efectúa las siguientes operaciones:**

a) $[-108+(-9)\cdot(154-236)-(213-357)]\cdot(6-16)=$

$=[-108+(-9)\cdot(-82)+144]\cdot(-10)=(-108+9\cdot82+144)\cdot(-10)=$

$=(-108+738+144)\cdot(-10)=(882-108)\cdot(-10)=774\cdot(-10)=-7\,740$

b) $[4\cdot(15-231)+6\cdot(21-35)]\cdot(132-147)=$

$=[4\cdot(-216)+6\cdot(-14)]\cdot(-15)=(-864-84)\cdot(-15)=(-948)\cdot(-15)=$

$=948\cdot15=14\,220$

- La **división de números enteros** se efectúa como la de números naturales, pero atendiendo a la **regla de los signos:**

+ : + = + **– : – = +** **+ : – = –** **– : + = –**

- La suma, la diferencia y el producto de dos números enteros tienen como resultado otro número entero. Por eso se dice que las anteriores son operaciones internas en $\mathbb{Z}$. No podemos decir lo mismo de la división de números enteros, aunque podemos enunciar el siguiente **teorema de la división:**

Dados dos números enteros a y b con $b \neq 0$, existen enteros q y r tales que:

$$a = q \cdot b + r, \text{ con } 0 \leq r < |b|$$

Tanto q como r son únicos. Se dice que $\boldsymbol{q}$ es el **cociente** y $\boldsymbol{r}$ el **resto** de la división de a entre b.

19 **Rellena las casillas en blanco de modo que las igualdades que resultan sean ciertas:**

a) $(-25) \cdot \boxed{(-4)} = 100$

b) $(-12) \cdot \boxed{3} = -36$

c) $(-81) : \boxed{(-27)} = 3$

d) $34 : \boxed{(-17)} = -2$

20 **Calcula respetando la jerarquía de las operaciones:**

a) $-6 + 18 : 3 - 3 \cdot 4 - 5 : 5 + 1 = -6 + 6 - 12 - 1 + 1 = 7 - 19 = -12$

b) $3 - 2 \cdot (-5) - 12 : (+4) - 15 : 5 = 3 + 10 - 3 - 3 = 13 - 6 = 7$

21 **Si hoy es domingo, ¿que día de la semana será dentro de 257 días?**

Como la semana tiene 7 días, dividimos 257 días entre 7.

Obtenemos de este modo, $257 = 7 \cdot 36 + 5$, esto es, transcurren 36 semanas y 5 días más, luego será viernes.

22 **Calcula el valor de las siguientes expresiones:**

a) $72 : (-6) - 5 \cdot [5 \cdot (-2) - 5] + (-5) \cdot 4 =$

$= -12 - 5 \cdot [-15] - 20 = -12 + 75 - 20 = 43$

b) $(-35) : (-5) - 3 \cdot (5 - 7) =$

$= 7 - 3 \cdot (-2) = 7 + 6 = 13$

c) $[(-100) : (-15 - 10) + 6 \cdot (12 - 30)] \cdot [4 - 34 : (-17)] =$

$= [(-100) : (-25) + 6 \cdot (-18)] \cdot (4 + 2) = [4 - 108] \cdot 6 = (-104) \cdot 6 = -624$

1.3. Potencias de números enteros. Propiedades

- **Elevar al cuadrado** un número entero no nulo a es multiplicarlo por sí mismo y se denota: $a^2 = a \cdot a$
- **Elevarlo al cubo** es multiplicar su cuadrado por a, o sea: $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a^2$
- En general, para cada número natural n, **la potencia n-ésima de a** es el producto de a por sí mismo n veces, es decir: $a^n = a \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot a$
- En particular: $1^n = 1$
- Por convenio se pone: $a^0 = 1$; $a^1 = a$

Ejemplos:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243; \quad 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125; \quad (-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$$

- Observa la diferencia:

$$(\mathbf{-2})^{\mathbf{4}} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{16} \qquad \mathbf{-2^4} = (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{-16}$$

23 **Calcular el valor de las siguientes potencias:**

a) $(-3)^3 = -27$

b) $(-1)^{20} = 1$

c) $-10^5 = -100\,000$

d) $(-2)^6 = 64$

e) $-2^8 = -256$

f) $(-1)^{13} = -1$

Propiedades fundamentales de la potenciación

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$ si $m < n$

Ejemplos:

$$(-3)^3 \cdot (-3)^7 = (-3)^{10} = 59\,049 \quad ; \quad \left((-2)^3\right)^3 = (-2)^9 = -512$$

$$2^6 \cdot 5^6 = 10^6 = 1\,000\,000 \quad ; \quad \frac{11^5}{11^2} = 11^3 = 1\,331$$

24 **Calcular el valor de las siguientes expresiones:**

a) $-2^4 : -2^2 + 18 : (-3)^2 - 5^2 \cdot 2 =$

$= -2^2 + (18 : 9) - 50 = -4 + 2 - 50 = -52$

b) $4 - (-12)^4 : (-8)^2 + 45 : (-3) - 72 : (-6) =$

$= 4 - (3^4 \cdot 4^4 : 8^2) - 15 + 12 = 4 - 3^4 \cdot (2^8 : 2^6) - 3 = 4 - 3^4 \cdot 2^2 - 3 =$

$= 4 - 81 \cdot 4 - 3 = 4 - 324 - 3 = -323$

25 Disponemos en fila 17 bolos de manera que cada par de bolos consecutivos distan lo mismo y la distancia del primero al último es 48 m. ¿Cuál es la distancia entre el primer y el décimo bolo?

El número de huecos entre bolos consecutivos es $17 - 1 = 16$, luego la distancia entre bolos consecutivos es $\frac{48}{16} = 3$ m, así que la distancia entre los bolos primero y décimo es:

$$9 \cdot 3 = 27 \text{ m}$$

26 ¿Cuántos números enteros n cumplen que su distancia al número -3 es menor que 2013?

Los números situados a la derecha de -3 que distan menos que 2013 son:

$$-3+1, -3+2, -3+3, \dots, -3+2011, -3+2012$$

Y el número de ellos es 2012. Otros tantos están situados a la izquierda de -3, y a ellos hay que añadir el propio -3, cuya distancia a -3 es 0. En total hay $1 + 2 \cdot 2012 = 4025$ números enteros cuya distancia a -3 es menor que 2013.

27 Si ahora son las 12 y cuarto del mediodía, ¿qué hora será cuando hayan transcurrido 25 305 min?

Como cada hora tiene 60 min y un día tiene $24 \cdot 60 = 1\,440$ min. Al dividir:

$$25\,305 = 17 \cdot 1\,440 + 825$$

Luego han trascurrido 17 días y 825 min.

Dividiendo de nuevo, $825 = 13 \cdot 60 + 45$ por lo que la hora buscada se obtiene añadiendo a las 12 horas y 15 min del mediodía, 13 horas y 45 min. Por tanto, son las 2 de la madrugada.

28 ¿En qué año nació una persona que vivió 37 años y murió en el 107 a. C?

Nació en el año $37 + 107 = 144$ a. C.

29 Dos números enteros no nulos m y n cumplen que $|m + n| = |m| + |n|$. ¿Cuál es el signo del producto $m \cdot n$, positivo o negativo?

Para que se cumpla la igualdad $|m + n| = |m| + |n|$ los números m y n han de tener el mismo signo, y, por tanto, $m \cdot n > 0$.

1 Problemas

30 ¿De qué número son múltiplos todos los números capicúas de cuatro dígitos?

Todo número capicúa de cuatro dígitos se escribe: $abba$, donde a y b son dos dígitos. Dicho número es:

$$abba = a + 10b + 100b + 1000a = 1001a + 110b = 91 \cdot 11 \cdot a + 10 \cdot 11 \cdot b =$$
$$= 11(91a + 10b)$$

Luego es múltiplo de 11.

31 Tengo un hilo de menos de 100 m, y si lo mido de cuatro en cuatro metros me sobran 3, si lo mido de cinco en cinco metros me sobran 4 y si lo mido de seis en seis metros me sobran 5. ¿Cuánto mide el hilo?

Los datos dicen que la longitud x del hilo cumple que existen números enteros q_1, q_2 y q_3, tales que, $x = 4q_1 + 3$, $x = 5q_2 + 4$, $x = 6q_3 + 5$.

Sumando 1 a los dos miembros de estas igualdades resulta:

$$x + 1 = 4(q_1 + 1),\ \ x + 1 = 5(q_2 + 1),\ \ x + 1 = 6(q_3 + 1)$$

Por tanto, $x + 1$ es múltiplo de 4, de 5 y de 6, luego es múltiplo del mínimo común múltiplo de estos tres números, que es 60.

Como $x + 1 \leq 100$ deducimos que $x + 1 = 60$, así que el hilo mide $x = 59$ m.

32 ¿Cuántos pisos subió un ascensor que estaba en la planta sótano –5 y paró en el piso 7?

El ascensor subió: $|-5| + 7 = 5 + 7 = 12$ pisos

33 Un profesor de tenis reparte 5 pelotas a cada uno de sus alumnos en un entrenamiento, y le sobran cuatro. Al día siguiente lleva 14 pelotas más, lo que le permite regalar 8 pelotas a cada uno de sus alumnos, y solo le sobran tres. ¿Cuántos alumnos tiene este profesor?

Si el número de alumnos es n, el profesor llevó el primer día $5n + 4$ pelotas, luego, al día siguiente llevó $5n + 4 + 14 = 5n + 18$ pelotas. Eliminando las tres que le sobraron quedan $5n + 15$, y este número coincide con $8n$, así que $5n + 15 = 8n$ o lo que es lo mismo, el número de alumnos es: $n = 5$

34 Se colocan 21 macetas en fila de manera que la distancia entre dos consecutivas es 50 cm. ¿Cuál es la distancia entre la primera y la última?

Entre las 21 macetas crean 20 huecos, y cada uno de ellos mide 50 cm, luego la distancia entre la primera y la última maceta es, $20 \cdot 50 = 1\,000$ cm, es decir, 10 m.

35 Un padre repartió un rebaño de ovejas entre sus hijos. Al mayor le dio una oveja más $\frac{1}{7}$, de las restantes, al segundo le dio dos ovejas más $\frac{1}{7}$ de las restantes, el tercero recibió tres ovejas más $\frac{1}{7}$ de las restantes, y así sucesivamente. De este modo todos los hijos recibieron el mismo número de ovejas y no sobró ninguna.

a) ¿Cuántas ovejas había en el rebaño?

El número de ovejas del rebaño es de la forma $1 + 7n$ para cierto entero positivo n.

El hijo mayor recibe $1 + n$ ovejas, y después de esto quedan en el rebaño $6n$ ovejas.

El segundo hijo se lleva 2 ovejas más la séptima parte de las que quedan, que son:

$$6n - 2$$

Como ambos hermanos reciben el mismo número de ovejas se debe cumplir que:

$$1+n=2+\frac{6n-2}{7} \Leftrightarrow n=1+\frac{6n-2}{7} \Leftrightarrow 7n=7+6n-2 \Leftrightarrow n=5$$

Luego el rebaño tenía $1 + 7n = 36$ ovejas.

b) ¿Cuántos hermanos eran?

El hermano mayor se llevó $1 + n = 6$ ovejas.

Como todos los hermanos recibieron el mismo número de ovejas, todos recibieron 6 ovejas, así que eran:

$$\frac{36}{6} = 6 \text{ hermanos}$$

36 ¿A qué número debemos elevar 4^4 para obtener 8^8?

Como $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$ y $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$, debemos elevar 4^4 al cubo para obtener 8^8, ya que:

$$(4^4)^3 = (2^8)^3 = 2^{24} = 8^8$$

37 El volumen de un cubo es 729 m^3. ¿Cuánto mide la arista del mismo?

Denotamos a la longitud, expresada en metros, de la arista del cubo, y V su volumen, expresado en m^3. Entonces:

$$9^3 = 729 = V = a^3 \Rightarrow a = 9 \text{ m}$$

38 Halla el volumen de un cubo cuya área es 726 m^2.

Si denotamos por a la longitud, expresada en metros, de la arista del cubo, su área es $6a^2$ m^2, por lo que: $726 = 6a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{726}{6} = 121 \Rightarrow a = \sqrt{121} = 11 \text{ m}$

Entonces:

$$V = a^3 \Rightarrow V = 11^3 = 1331 \text{ m}^3$$

Evaluación

1 **Halla el número que debe ocupar el recuadro en cada una de las siguientes igualdades para que estas sean ciertas:**

a) $(+2) - \boxed{16} = -14$

b) $(-15) + \boxed{25} = 10$

c) $(-1) - \boxed{1} = (-2)$

d) $(-5) - \boxed{(-20)} = 15$

2 **Completa las casillas que hemos dejado en blanco:**

a) $(-2) + 6 \cdot \boxed{5} = 28$

b) $16 + (-15) + \boxed{(-1)} = 0$

c) $(-10) + 7 \cdot \boxed{(-3)} = -31$

d) $-3 - 8 \cdot \boxed{(-6)} = 45$

3 **Efectúa las siguientes operaciones:**

a) $[(17 + 84) \cdot (-11) - (130 - 121) \cdot (-9) - 2] \cdot (13 - 9) =$

$= [101 \cdot (-11) - 9 \cdot (-9) - 2] \cdot 4 = (-1\,111 + 81 - 2) \cdot 4 = (-1\,032) \cdot 4 = -4\,128$

b) $[(-6) \cdot (14 - 21) + 7 \cdot (4 - 5)] \cdot (98 - 14) =$

$= [(-6) \cdot (-7) + 7 \cdot (-1)] \cdot 84 = (42 - 7) \cdot 84 = 35 \cdot 84 = 2\,940$

c) $[77 - (-9) \cdot (13 - 121) - (86 - 57)] \cdot (3 - 12) =$

$= [77 + 9 \cdot (-108) - 29] \cdot (-9) = (77 - 972 - 29) \cdot (-9) = (-924) \cdot (-9) =$

$= 924 \cdot 9 = 8\,316$

4 **Calcula:**

a) $|-2^6 + 4 - 12 : (-3)| = |-64 + 4 + 4| = |-56| = 56$

b) $\left|[22 : (-2)]^2 + 11 \cdot (-20)\right| = |(-11)^2 + 11 \cdot (-20)| = |121 - 220| = |-99| = 99$

5 **La cifra de las decenas de un entero positivo de dos dígitos excede en 5 a la de las unidades. ¿Cuánto vale la resta entre el número dado y el que resulta de invertir el orden de sus cifras?**

Sean n el número dado, a la cifra de sus unidades y b la de las decenas.

Entonces: $n = a + 10b$

Y el número que resulta al invertir sus cifras es: $m = b + 10a$

Por tanto, al restar tenemos:

$$n - m = (a + 10b) - (b + 10a) = 9(b - a) = 9 \cdot 5 = 45$$

6 **Empleando las reglas de la potenciación, efectúa las siguientes operaciones:**

a) $(-5+2)^3+(8-10)^2\cdot(-1)^5-(-7+3)^3\cdot(-1)^6=$

$=(-3)^3-(-2)^2-(-4)^3=-27-4+64=33$

b) $(2-3)^5\cdot\left(2^3-(8-1)^3+2^2\right)+(3-5)^7=$

$=(-1)^5\cdot(8-7^3+4)+(-2)^7=-(12-343)-128=331-128=203$

c) $(-1+4)^5+(8-6)^2\cdot(-1)^6+(-7+2)^3=$

$=3^5+2^2-5^3=243+4-125=122$

d) $(1-4)^3\cdot\left(3^2-(6-1)^2+4^2\right)+(1-4)^5=$

$=(-27)\cdot(9-25+16)-3^5=-3^5=-243$

7 **¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?**

a) Existen dos números enteros consecutivos cuya suma es par.

Esta afirmación es falsa, pues dados dos enteros consecutivos, n y $n+1$, su suma, $n+(n+1)=2n+1$ es impar, por ser el siguiente a $2n$, que es par.

b) El producto de dos números enteros consecutivos es par.

Dados dos enteros consecutivos, uno de ellos es par y el otro impar.

El que es par, se escribe como $2n$ para cierto entero n, y al otro lo llamamos m.

Por tanto, el producto es, $2n\cdot m$, que es par, así que la afirmación es cierta.

c) La suma de tres números enteros consecutivos es múltiplo de 3.

También esta afirmación es cierta porque los enteros consecutivos se escribirán n, $n+1$ y $n+2$, cuya suma es:

$$s=n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$$

Luego es múltiplo de 3.

8 **Calcula $\left|n^2-|n^2-1|\right|$, donde n es un entero.**

- Si $n=0$ se tiene:

$$\left|n^2-|n^2-1|\right|=\left|0-|-1|\right|=|-1|=1$$

- Si $n\neq 0$ su cuadrado es mayor o igual que 1, es decir:

$$n^2-1\geq 0\Rightarrow\left|n^2-|n^2-1|\right|=\left|n^2-(n^2-1)\right|=|1|=1$$

Por tanto, se tiene que en cualquier caso:

$$\left|n^2-|n^2-1|\right|=1$$

2 Los números racionales

2.1. Fracciones equivalentes

- Una **fracción** es un cociente entre dos números enteros, $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$.
- Dos **fracciones**, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ si $a \cdot d = b \cdot c$.
- El conjunto formado por una fracción y todas sus equivalentes recibe el nombre de **número racional.**
- Cada número racional q es representable por una **fracción irreducible,** esto es, existen enteros m y n primos entre sí tales que $q = \frac{m}{n}$.
- Si escribimos $q = \frac{a}{b}$ y denotamos $d = \text{M.C.D.}\ (a, b)$, para encontrar la fracción irreducible equivalente a la fracción $q = \frac{a}{b}$ basta con dividir el numerador y el denominador por d.

1 ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{207}{299}$ y $\frac{9}{13}$?

Las fracciones dadas son equivalentes pues: $207 \cdot 13 = 2\,691 = 299 \cdot 9$

2 Calcula el número entero n sabiendo que las fracciones $\frac{-1}{5}$ y $\frac{n}{120}$ son equivalentes.

Se debe cumplir que: $(-1) \cdot 120 = 5n \Rightarrow n = \frac{-120}{5} = -24$

3 Encuentra las fracciones irreducibles de los siguientes números racionales:

$$q_1 = \frac{91}{63};\ q_2 = \frac{56}{52};\ q_3 = \frac{85}{100}$$

$$q_1 = \frac{91}{63} \overset{:7}{=} \frac{13}{9};\quad q_2 = \frac{56}{52} \overset{:4}{=} \frac{14}{13};\quad q_3 = \frac{85}{100} \overset{:5}{=} \frac{17}{20}$$

4 Completa en cada caso el numerador o el denominador que faltan para que las siguientes fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{2}{5} = \frac{\boxed{6}}{15}$ **b)** $-\frac{6}{11} = \frac{18}{\boxed{-33}}$ **c)** $\frac{\boxed{4}}{13} = \frac{8}{26}$ **d)** $\frac{17}{\boxed{25}} = \frac{34}{50}$

5 ¿Para qué valores de x las fracciones $\frac{24}{x}$ y $\frac{x}{6}$ son equivalentes?

Las fracciones $\frac{24}{x}$ y $\frac{x}{6}$ son equivalentes si y solo si:

$$24 \cdot 6 = x^2 \Leftrightarrow 144 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow x = \pm 12$$

2.2. Ordenación y representación

- Para **comparar fracciones** las expresaremos con el mismo denominador. Una vez hecho esto se ordenan según sus numeradores, es decir, es menor la que tiene menor numerador.
- Para expresar dos fracciones con un **denominador común,** elegimos como tal el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones iniciales.

Ejemplo:

Comparar las fracciones: $\frac{13}{18}, \frac{1}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}$

Expresamos las fracciones anteriores con común denominador. Para ello calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, esto es, m.c.m. (18, 4, 9, 12) = 36. Así:

$$\frac{13}{18} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{26}{36} \qquad \frac{1}{4} \underset{\times 9}{\overset{\times 9}{=}} \frac{9}{36} \qquad \frac{7}{9} \underset{\times 4}{\overset{\times 4}{=}} \frac{28}{36} \qquad \frac{5}{12} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{15}{36}$$

Como 9 < 15 < 26 < 28, se tiene:

$$\frac{9}{36} < \frac{15}{36} < \frac{26}{36} < \frac{28}{36} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{5}{12} < \frac{13}{18} < \frac{7}{9}$$

6 Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$q_1 = \frac{2}{3};\ q_2 = \frac{9}{10};\ q_3 = \frac{3}{4}$$

Expresamos las fracciones dadas con denominador común. Para ello calculamos el m.c.m $(3, 4, 10) = 60$, y así, $q_1 = \frac{2}{3} = \frac{40}{60}$, $q_2 = \frac{9}{10} = \frac{54}{60}$ y $q_3 = \frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, luego:

$$\frac{40}{60} < \frac{45}{60} < \frac{54}{60} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{9}{10}$$

7 Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales:

$$q_1 = \frac{-4}{5};\ q_2 = \frac{-13}{15};\ q_3 = \frac{-5}{6}$$

El común denominador de las fracciones es m.c.m $(5, 6, 15) = 30$. En consecuencia, $q_1 = \frac{-4}{5} = \frac{-24}{30}$, $q_2 = \frac{-13}{15} = \frac{-26}{30}$ y $q_3 = \frac{-5}{6} = \frac{-25}{30}$, y por tanto:

$$\frac{-26}{30} < \frac{-25}{30} < \frac{-24}{30} \Rightarrow \frac{-13}{15} < \frac{-5}{6} < \frac{-4}{5}$$

2

En ocasiones, para **comparar dos números racionales** positivos q_1 y q_2 resulta muy útil calcular su cociente, de modo que:

- Si $\frac{q_1}{q_2} < 1 \Rightarrow q_1 < q_2$
- Si $\frac{q_1}{q_2} > 1 \Rightarrow q_1 > q_2$

8 **Las $\frac{3}{7}$ partes de los alumnos de una clase han ido a un concierto y otros $\frac{2}{5}$ han ido al teatro.**

a) ¿Qué actividad ha reunido más gente?

Al dividir ambas fracciones se tiene:

$$\frac{3/7}{2/5} = \frac{15}{14} > 1 \Rightarrow \frac{3}{7} > \frac{2}{5}$$

Así que al concierto ha ido más gente que al teatro.

b) Si solo 6 alumnos no han hecho ninguna de estas dos cosas y ninguno ha hecho las dos, ¿cuántos alumnos hay en clase?

Los alumnos que no han ido ni al concierto ni al teatro, que son 6, representan:

$$1 - \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{35 - 15 - 14}{35} = \frac{6}{35} \text{ de los alumnos de clase}$$

Luego en la clase hay 35 alumnos.

9 **Escribe tres números racionales que sean mayores que $\frac{3}{5}$ y menores que $\frac{4}{5}$.**

Expresamos los números dados con común denominador mayor que 5.

Para ello multiplicamos numerador y denominador de ambas fracciones por 4, o sea, una unidad más que el número de números que hemos de intercalar entre los dados.

Así, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, mientras que, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$.

Como $12 < 13 < 14 < 15 < 16$, entonces:

$$\frac{3}{5} < \frac{13}{20} < \frac{14}{20} < \frac{15}{20} < \frac{4}{5}$$

10 **Sean n un entero positivo. Comparar las fracciones $q_1 = \frac{n}{n+1}$ y $q_2 = \frac{n+1}{n+2}$.**

Para comparar ambas fracciones positivas calculamos su cociente:

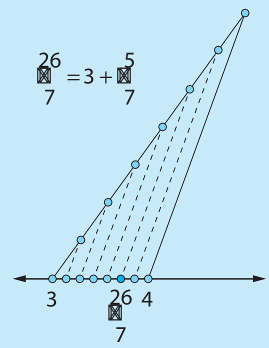
$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{n}{n+1} : \frac{n+1}{n+2} = \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < 1$$

Por lo tanto: $q_1 < q_2$

Representación de los números racionales

Los números racionales se representan sobre una recta en la que previamente se han representado los números enteros. Para representar un número racional q en la recta real nos apoyamos en el **teorema de Tales:**

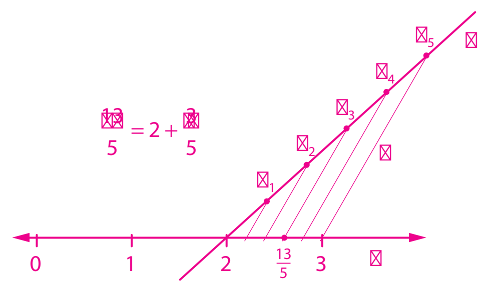
- En primer lugar escribimos q en forma de número mixto, y así localizamos entre qué dos enteros consecutivos se encuentra q.
- Después, dividimos el segmento unidad en tantas partes como indique el denominador de la fracción que aparece en el número mixto, y tomamos tantas como marque el numerador.



11 Representa sobre una recta la fracción $\frac{13}{5}$.

Se representan en primer lugar sobre una recta r los enteros más próximos a $\frac{13}{5}$, que son 2 y 3, y observamos que: $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$

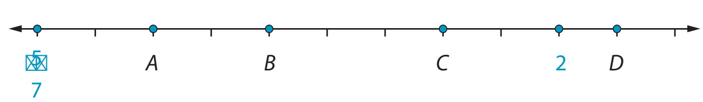
Por tanto se trata de dividir el segmento de extremos 2 y 3 en 5 partes iguales y tomar 3. Para ello, trazamos una semirrecta auxiliar s que corta a r en el punto 2, y llevamos sobre s, desde este punto de corte, cinco segmentos de igual longitud. Sean $P_1, \dots, P_5$ los extremos de dichos segmentos y t la recta que une P_5 con 3. Por el teorema de Tales, el punto en que se cortan r y la paralela a t que pasa por P_3 es $\frac{13}{5}$.



12 ¿Qué números están representados en la siguiente recta por los puntos *A, B, C* y *D*?

$A = 1$; $B = \frac{9}{7}$;

$C = \frac{12}{7}$; $D = \frac{15}{7}$

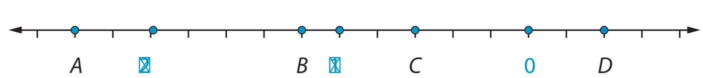


13 ¿Qué números están representados en la siguiente recta por los puntos *A, B, C* y *D*?

$A = -2 - \frac{2}{5} = \frac{-12}{5}$;

$B = -1 - \frac{1}{5} = \frac{-6}{5}$;

$C = \frac{-3}{5}$; $D = \frac{2}{5}$



2.3. Operaciones con fracciones

- Los números racionales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo que el denominador sea nulo), y el resultado es un número racional.
- Para **sumar o restar fracciones** las expresamos con el mismo denominador y luego sumamos o restamos sus numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{20}-\frac{13}{15}=\frac{36}{60}+\frac{21}{60}-\frac{52}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

- El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador, es el producto de los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{7}{13}\cdot\frac{9}{10}=\frac{63}{130} \quad ; \quad \frac{211}{5}\cdot\frac{7}{422}=\frac{\cancel{211}\cdot 7}{5\cdot \underset{2}{\cancel{422}}}=\frac{7}{10}$$

- Para **dividir una fracción entre otra no nula**, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplos:

$$\frac{4}{7}:\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{20}{21} \quad ; \quad \frac{3}{15}:\frac{7}{10}=\frac{3}{\underset{3}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{7}=\frac{2}{7}$$

14 **Efectúa las siguientes operaciones:**

a) $\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}-\left(\frac{-5}{56}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}+\frac{1}{56}=\frac{229}{280}$

b) $\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\left(6-\frac{3}{5}\right)+1\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{27}{5}+1\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{32}{5}=\frac{16}{15}$

15 **Calcula, simplificando en cada paso:** $8\cdot\frac{3}{2}+\left[1-(-5)\cdot\frac{2}{5}\right]-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)$

$8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left[1-(-5)\cdot\frac{2}{5}\right]-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)=4\cdot 3+(1+2)-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{6}{4}-\frac{5}{4}\right)=12+3-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)=$

$=15+\frac{33}{20}=\frac{333}{20}$

16 **En la preparación de una tarta se emplean medio kilogramo de nata, tres cuartos de kilogramos de mantequilla y dos kilogramos y cuarto de chocolate. ¿Cuánto pesa la tarta? Expresa el resultado como fracción irreducible.**

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}\text{ kg}$$

La tarta pesa tres kilogramos y medio.

2.4. Potencias de los números racionales. Propiedades

- Si q es un número racional y n es un número natural, la **potencia n-ésima de q** se denota q^n, y es el producto de q por sí mismo n veces, esto es: $q^n = q \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot q$
- Por convenio: $q^0 = 1$
- Obsérvese que: si $q = \dfrac{a}{b} \Rightarrow q^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

  También tenemos que: $q^{n-1} \cdot q = q^n = q \cdot q^{n-1}$

  Ejemplos:

  $$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243} \quad ; \quad \left(\frac{-1}{7}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{7^3} = \frac{-1}{343}$$

- Si n es un entero negativo entonces $-n$ es un entero positivo, y se define: $q^n = \dfrac{1}{q^{-n}}$

  Ejemplos:

  $$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{1}{\frac{32}{243}} = \frac{243}{32} \quad ; \quad \left(\frac{-1}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{-1}{7}\right)^3} = \frac{1}{\frac{-1}{343}} = -343$$

17 **Calcula el valor de las siguientes potencias:**

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

c) $-5^{-3} = -\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{-1}{125}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$

Propiedades fundamentales de la potenciación

Si q_1 y q_2 son números racionales no nulos y m y n son números enteros, se tiene:

- $q_1^m \cdot q_1^n = q_1^{m+n}$
- $(q_1 \cdot q_2)^n = q_1^n \cdot q_2^n$
- $(q_1^m)^n = q_1^{m \cdot n}$
- $q_1^{n-m} = \dfrac{q_1^n}{q_1^m}$

18 **Calcula el valor de las siguientes potencias:**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

b) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] : \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}$

19 **Calcula y simplifica:** $\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{12}\right) + \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{4} - 2\right)^{-1}$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 2\right)^{-1} = \left(\frac{-4}{12}\right) + \left(\frac{-5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-7}{4}\right)^{-1} = \frac{-1}{3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

2.5. Expresión decimal de los números racionales

Expresión decimal de un número racional. Los números racionales admiten otra expresión, llamada **decimal,** que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. En este proceso podemos obtener tres tipos de expresiones decimales: decimal **exacto,** decimal **periódico puro** y decimal **periódico mixto.**

Ejemplos:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ decimal exacto $\longrightarrow$ $\begin{array}{r|l} 3 & \underline{4\quad} \\ 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$

$\frac{47}{33} = 1{,}\overset{\frown}{42}$ decimal periódico puro $\longrightarrow$ $\begin{array}{r|l} 47 & \underline{33\quad} \\ 140 & 1{,}42 \\ 80 & \\ 14 & \end{array}$

$\frac{1}{6} = 0{,}1\hat{6}$ decimal periódico mixto $\longrightarrow$ $\begin{array}{r|l} 1 & \underline{6\quad} \\ 40 & 0{,}16 \\ 4 & \end{array}$

donde el símbolo $\hat{x}$ significa que la cantidad x se repite indefinidamente.

20 **Encuentra la expresión decimal de los siguientes números racionales e indica de qué tipo son:**

a) $q_1 = \frac{11}{9}$

$q_1 = 1{,}\hat{2}$ (decimal periódico puro)

b) $q_2 = \frac{5}{6}$

$q_2 = 0{,}8\hat{3}$ (decimal periódico mixto)

c) $q_3 = \frac{17}{100}$

$q_3 = 0{,}17$ (decimal exacto)

d) $q_4 = \frac{71}{18}$

$q_4 = 3{,}9\hat{4}$ (decimal periódico mixto)

Todo número decimal exacto, periódico puro y periódico mixto puede ser expresado en forma de **fracción irreducible.**

Ejemplos:

Decimal exacto: $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3 \cdot 5^2}{4 \cdot 5^2} = \frac{3}{4}$

Decimal periódico puro: $q_2 = 1{,}\overset{\frown}{42} \Rightarrow$

$$\begin{array}{rr} & 100q_2 = 142{,}\overset{\frown}{42} \\ - & q_2 = \quad 1{,}\overset{\frown}{42} \\ \hline & 99q_2 = 141 \end{array} \Rightarrow \quad q_2 = \frac{141}{99} = \frac{47}{33}$$

Decimal periódico mixto: $q_3 = 0{,}1\hat{6} \Rightarrow$

$$\begin{array}{rr} & 100q_3 = 16{,}\hat{6} \\ - & 10q_3 = \quad 1{,}\hat{6} \\ \hline & 90q_3 = 15 \end{array} \Rightarrow \quad q_3 = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

21 Encuentra las fracciones irreducibles de los siguientes números racionales:

$$q_1 = 3,62;\ q_2 = 0,\widehat{63};\ q_3 = 1,12\hat{7}$$

$$q_1 = \frac{362}{100} = \frac{181}{50};\ q_2 = \frac{63}{99} = \frac{7 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{7}{11};\ q_3 = \frac{1\,015}{900} = \frac{203}{180}$$

Dado un número racional q podemos conocer si su expresión decimal es exacta, periódica pura o periódica mixta sin necesidad de realizar la división. Para ello buscamos la expresión en forma de fracción irreducible de q, y se cumple que:

- Si los **únicos divisores primos del denominador son 2 o 5** entonces, la expresión decimal de q es exacta.
- Si **los números 2 y 5 no son divisores del denominador** entonces, la expresión decimal de q es periódica pura.
- Si **el denominador se puede dividir entre 2 o entre 5** y además, tiene **algún otro divisor primo** entonces, la expresión decimal de q es periódica mixta.

22 Completa la siguiente tabla:

q	Fracción irreducible	Descomposición del denominador	Expresión decimal
$\frac{150}{1\,200}$	$\frac{1}{8}$	2^3	Exacta
$\frac{1\,239}{99}$	$\frac{413}{33}$	$3 \cdot 11$	Periódica pura
$\frac{246}{810}$	$\frac{41}{135}$	$3^3 \cdot 5$	Periódica mixta
$\frac{756}{600}$	$\frac{63}{50}$	$2 \cdot 5^2$	Exacta

23 Sean $q_1 = 0,17\hat{6}$ y $q_2 = 0,43\hat{7}$. Expresa como fracción irreducible los números:

$$q_2 + q_1;\quad q_2 - q_1;\quad q_2 \cdot q_1;\quad \frac{q_2}{q_1}$$

Comenzamos escribiendo q_1 y q_2 como fracciones irreducibles. Esto es:

$$q_1 = \frac{159}{900} = \frac{53}{300} \quad ; \quad q_2 = \frac{394}{900} = \frac{197}{450}$$

Ahora, sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos q_1 y q_2:

- $q_2 + q_1 = \frac{53}{300} + \frac{197}{450} = \frac{159+394}{900} = \frac{553}{900}$
- $q_2 \cdot q_1 = \frac{53}{300} \cdot \frac{197}{450} = \frac{10\,441}{135\,000}$
- $q_2 - q_1 = \frac{197}{450} - \frac{53}{300} = \frac{394-159}{900} = \frac{235}{900} = \frac{47}{180}$
- $\frac{q_2}{q_1} = \frac{394}{900} : \frac{159}{900} = \frac{394}{159}$

2 Evaluación

1 ¿Qué número entero n cumple que las fracciones $\frac{-7n}{81}$ y $\frac{112}{648}$ son equivalentes?

Estas fracciones son equivalentes si y solo si, $-7n \cdot 648 = 81 \cdot 112$, esto es:

$$n = \frac{-81 \cdot 112}{7 \cdot 648} = \frac{-3^4 \cdot 2^4 \cdot 7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3^4} = -2$$

2 Un segmento de 100 cm se divide en 8 partes iguales. ¿Cuánto mide cada una? ¿Mide más o menos de 12 cm?

Cada parte mide: $\frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ cm

Como $\frac{25}{2} > \frac{24}{2} = 12$, concluimos que cada trozo mide más de 12 cm.

3 En la clase de Álvaro aprueba el $0,\widehat{6}$ de los alumnos, mientras que en la clase de Irene suspenden 7 de los 23 alumnos que la componen. ¿En cuál de las dos clases es mayor el porcentaje de suspensos?

Escribimos $q_1 = 0,\widehat{6}$ como fracción y resulta $q_1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Por otra parte, la fracción de alumnos que aprueban en la clase de Irene es $q_2 = \frac{16}{23}$, y debemos comparar q_1 y q_2. Para ello lo más eficiente es dividir:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{16}{23}} = \frac{2 \cdot 23}{3 \cdot 16} = \frac{23}{24} < 1 \Rightarrow q_1 < q_2$$

Por tanto, el porcentaje de aprobados en clase de Irene es mayor que en la de Álvaro, así que, el porcentaje de suspensos en la clase de Álvaro es mayor que en la de Irene.

4 Un agricultor vende los $\frac{3}{4}$ del número de naranjas recolectadas, y más tarde los $\frac{3}{4}$ del resto, quedando así 16 naranjas sin vender. ¿Cuántas naranjas había recogido?

Primero vende $\frac{3}{4}$ del total, y posteriormente $\frac{3}{4}$ del resto, es decir, $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$, o sea: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

Luego ha vendido, $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$ del total, lo que significa que le queda por vender $\frac{1}{16}$ del total de las naranjas recogidas. Como estas son 16, concluimos que había recogido: $16 \cdot 16 = 256$ naranjas

5 Un autobús tarda 6 horas y cuarto en recorrer $\frac{5}{8}$ partes de un recorrido de 1 000 km. ¿Cuál ha sido la velocidad media?

El autobús ha recorrido $\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 1\,000 = 625$ km en $6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ horas, luego su velocidad media ha sido: $v = \frac{625}{\frac{25}{4}} = 25 \cdot 4 = 100$ km/h

6 El paso de rosca de un tornillo es de $\frac{2}{5}$ de milímetro. ¿Cuántas vueltas habríamos de dar para que penetre 3 cm?

Hemos de dar $30 : \frac{2}{5} = 75$ vueltas.

7 En un concurso de baile se inscriben 2002 personas. Indica cuál de los siguientes resultados expresa la proporción del número de bailarines que se clasificaron para la segunda fase del concurso: $0,\widehat{3}$; $0,\widehat{7}$; $0,\widehat{27}$

Obsérvese que el número de personas que se clasificaron para la segunda fase del concurso ha de ser un número entero. Ahora bien,

- $0,\widehat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de 2 002 no es un número entero.
- $0,\widehat{7} = \frac{7}{9}$ y $\frac{7}{9}$ de 2 002 no es un número entero.
- $0,\widehat{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ y $\frac{3}{11}$ de 2 002 es 546.

El número que expresa la proporción de bailarines que se clasifican es $0,\widehat{27}$.

8 Expresa los siguientes números como potencias de base un número entero y exponente negativo:

a) $\frac{-1}{32} = \frac{-1}{2^5} = \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = (-2)^{-5}$

b) $\frac{2}{486} = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5}$

c) $-0,001 = \frac{-1}{1000} = \frac{-1}{10^3} = \left(\frac{-1}{10}\right)^3 = (-10)^{-3}$

d) $0,\widehat{037} = \frac{37}{999} = \frac{37}{27 \cdot 37} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

9 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{3}{5}\right) - 2\right) = \frac{9}{6} \cdot \left(-1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-8}{5}\right) = \frac{-12}{5}$

b) $\left(\frac{-5}{2} + 2\right)^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{-5} - \left(\frac{-1}{3} + 3\right)^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^5 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 =$

$= \frac{-1}{8} - \frac{1}{144} \cdot \frac{32}{243} - \frac{512}{27} = \frac{-1}{8} - \frac{2}{9 \cdot 243} - \frac{512}{27} = \frac{-333\,979}{17\,496}$

10 Expresa como fracción irreducible la diferencia $q = \frac{0,8}{0,\widehat{36}} - 1,\widehat{4}$.

Comenzamos expresando como fracción el sustraendo: $q_1 = 1,\widehat{4} = \frac{13}{9}$

Además, $q_2 = 0,\widehat{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$. Finalmente, puesto que $0,8 = \frac{4}{5}$ se tiene:

$$q = \frac{0,8}{0,\widehat{36}} - 1,\widehat{4} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{11}} - \frac{13}{9} = \frac{11}{5} - \frac{13}{9} = \frac{99 - 65}{45} = \frac{34}{45}$$

3 Los números reales

3.1. Números irracionales

Los números que no son racionales, esto es, que no admiten una expresión en forma de fracción, se denominan **irracionales.** Estos, son números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Hay infinitos números irracionales. Por ejemplo, si la raíz *n*-ésima $\sqrt[n]{z}$, donde *z* es un entero positivo, no es exacta, es un número irracional. Algunos casos serían: $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[5]{3}$... También el número π, que indica la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es irracional.

1 **Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:**

$$\sqrt[3]{-27};\ \sqrt{7};\ \sqrt{100};\ -2,\widehat{4};\ 1,03;\ 2,3\widehat{7};\ \sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{25}}}}$$

$\sqrt{7}$ *es el único número irracional.*

Los números: $-2,\widehat{4}$, 1,03, $2,3\widehat{7}$ tienen una expresión decimal finita o periódica, de modo que se podrán expresar como fracción, por tanto no son irracionales.

Las expresiones con raíces dan como resultado un entero: $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt{100}=10$,

$$\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{25}}}}=\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+5}}}=\sqrt{13+\sqrt{6+3}}=\sqrt{13+3}=4$$

2 **Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:**

a) La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm.

Para saber la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo usamos el teorema de Pitágoras. En este caso, $h=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$ *cm, que es irracional.*

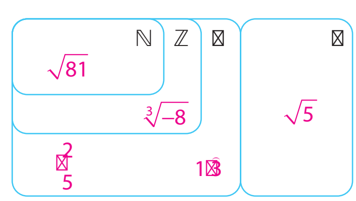
b) El perímetro de un triángulo equilátero de lado 0,2 dm.

El perímetro de un triángulo equilátero de lado 0,2 dm es $0,2\cdot 3=0,6$ *dm, que es un número racional.*

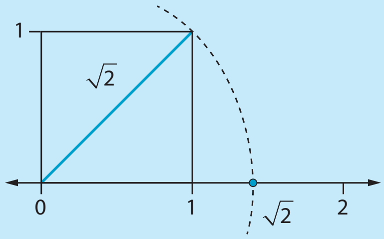
c) La longitud de una circunferencia cuyo radio mide 3 cm.

La longitud de la circunferencia dada es 6π *cm, que es un número irracional.*

3 **Sitúa los siguientes números en el diagrama adjunto:** $1,\widehat{3}$, $\dfrac{2}{5}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt[3]{-8}$ **y** $\sqrt{5}$.



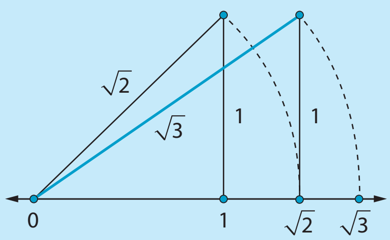
Podemos representar la longitud de los irracionales que son una raíz cuadrada usando el teorema de Pitágoras.



Ejemplo: Vamos a representar $\sqrt{2}$.

Por Pitágoras $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ entonces $\sqrt{2}$ es la longitud de la diagonal del cuadrado de lado 1. Su representación aparece en la figura de la derecha.

Ejemplo: Vamos a representar $\sqrt{3}$.

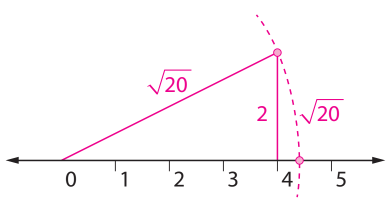


Nos apoyamos en la representación anterior de $\sqrt{2}$ y el teorema de Pitágoras, puesto que $\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$. En consecuencia, $\sqrt{3}$ es la diagonal de un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1.

Reiterando el proceso anterior, el teorema de Pitágoras permite representar $\sqrt{n}$ para cada entero positivo n. Por ejemplo, la diagonal del cuadrado de lado $\sqrt{3}$ mide $\sqrt{6}$, y la del rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ mide $\sqrt{5}$. Sin embargo, para otros irracionales nos tendremos que conformar con representar una aproximación del mismo, por defecto o por exceso, y con tantas cifras decimales como deseemos.

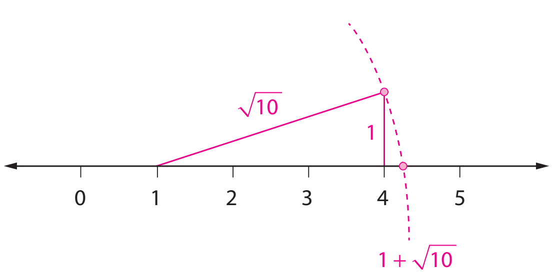
4 **Representa en la recta $\sqrt{20}$.**

Para representar $\sqrt{20}$ empleamos el teorema de Pitágoras y que $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$.



5 **Representa en la recta $1 + \sqrt{10}$.**

Se trata representar en la recta $\sqrt{10}$ a partir del 1. Para ello, empleamos el teorema de Pitágoras y que $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$.



3.2. La recta real

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los irracionales y se representa con la letra $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Para expresar conjuntos de números reales usamos los **intervalos.** Existen diferentes tipos de intervalos:

Sean a y b dos números reales tales que $a < b$.

- Se llama **intervalo abierto de extremos *a* y *b*,** y se denota (a, b), al conjunto formado por los números reales mayores que a y menores que b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

- Se llama **intervalo cerrado de extremos *a* y *b*,** y se denota $[a, b]$ al conjunto formado por los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

- Se llama **intervalo semiabierto o semicerrado** cuando uno de los extremos es abierto y el otro cerrado:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

En todos los casos anteriores se dice que la **longitud del intervalo** es $b - a$ y se llama **centro del intervalo** al número $m = \frac{a + b}{2}$.

6 **Escribe en forma de intervalo los conjuntos formados por los números reales *x* tales que:**

a) $1 \le x < 4$ — $[1, 4)$

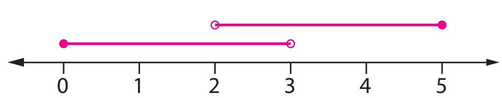
b) $3 < x < 5$ — $(3, 5)$

c) $-4 < x \le 1$ — $(-4, 1]$

d) $13 \le x < 15$ — $[13, 15)$

7 **Representa los intervalos $[0, 3)$ y $(2, 5]$ y calcula su unión e intersección.**

Vamos a representarlos en la recta para ver cuál es el resultado de estas operaciones:



Observa en la recta lo que abarca el intervalo $[0, 3)$ y el intervalo $(2, 5]$. Si unimos todo, abarcamos de 0 a 5, incluyendo los extremos. Sin embargo, la parte en la que coinciden, es decir, la intersección, va de 2 a 3 y los extremos no están incluidos. Por tanto:

$$[0, 3) \cup (2, 5] = [0, 5] \qquad [0, 3) \cap (2, 5] = (2, 3)$$

Comprobamos que el conjunto formado por los números reales x tales que $|x-a| \le r$ es un intervalo cerrado y calculamos sus extremos.

Para eliminar el **valor absoluto** de la desigualdad, distinguimos dos casos:

- Si $x-a \ge 0 \Rightarrow |x-a| = x-a$, y por tanto, $|x-a| \le r$ equivale a: $x-a \le r$
- Si $x-a < 0 \Rightarrow |x-a| = -(x-a)$, y por tanto, $|x-a| \le r$ equivale a: $-(x-a) \le r \Rightarrow x-a \ge -r$

Así, la desigualdad, $|x-a| \le r$, equivale a, $-r \le x-a \le r$, es decir, $a-r \le x \le a+r$, luego este conjunto es el intervalo cerrado $[a-r,\ a+r]$

8 **Demuestra que el conjunto formado por los números reales x tales que $|x-1| < 2$ es un intervalo abierto y determinar sus extremos. ¿Cuál es su longitud?**

La desigualdad, $|x-1| < 2$, equivale a, $-2 < x-1 < 2$, es decir, $-1 < x < 3$, luego este conjunto es el intervalo abierto $(-1, 3)$, cuya longitud es 4.

9 **Describe con una única desigualdad el intervalo $[-3, 7]$**

La longitud de este intervalo es $7-(-3) = 10$ y su centro es $\dfrac{7-3}{2} = 2$. Por tanto, el intervalo $[-3, 7]$ está formado por los números reales x tales que $|x-2| \le 5$.

- Se llaman **semirrectas abiertas de extremo a**, siendo a un número real, a los conjuntos: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
- Se llaman **semirrectas cerradas de extremo a**, siendo a un número real, a los conjuntos: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$ y $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$

10 **¿Qué longitud tiene la intersección de las semirrectas $(-\infty, 9]$ y $(6, +\infty)$?**

La intersección es el intervalo $(6, 9]$ cuya longitud es $9-6=3$.

11 **Expresa como unión de semirrectas el conjunto formado por los números reales x tales que $|x-1| > 1$.**

Eliminaremos el valor absoluto de la desigualdad distinguiendo 2 casos:

- Si $x-1 \ge 0 \Rightarrow x-1 = |x-1| > 1 \Rightarrow x > 2$
- Si $x-1 < 0 \Rightarrow -(x-1) = |x-1| > 1 \Rightarrow x-1 < -1 \Rightarrow x < 0$

Por tanto, el conjunto del enunciado es la unión de las semirrectas: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

3.3. Algunas operaciones con radicales

Los radicales son expresiones numéricas en las que aparece una raíz.

Cuando operamos con números irracionales, no necesariamente el resultado tiene que ser otro número irracional.

Ejemplo: El número, $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$ es irracional, y su resta $r_1 - r_2 = 0$ es racional. Lo mismo sucede con el producto y el cociente; con estos datos, $r_1 \cdot r_2 = 2$ y $r_1 : r_2 = 1$ son racionales.

12 **Realiza estas operaciones y simplifica. Indica si el resultado es racional o irracional.**

a) $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2-1^2-\left[(\sqrt{2})^2+1^2-2\sqrt{2}\right]=2\sqrt{2}-2\in\mathbb{I}$

b) $(3+\sqrt{2})^2-(1+3\sqrt{2})^2 = 3^2+(\sqrt{2})^2+6\sqrt{2}-\left[1^2+(3\sqrt{2})^2+6\sqrt{2}\right]=-8\in\mathbb{Q}$

13 **Emplea las igualdades $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ y $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$ para simplificar las siguientes cantidades:**

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20} = \sqrt{100}=10$

b) $\sqrt{27}:\sqrt{3} = \sqrt{9}=3$

c) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27}=3$

d) $\sqrt{125}:\sqrt{5} = \sqrt{25}=5$

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

El primer paso para multiplicar o dividir radicales debe ser expresarlos con el mismo índice.

Ejemplo: $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{60} = \sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{60^2} = \sqrt[6]{5^3\cdot 60^2} = \sqrt[6]{450\,000}$

14 **Reduce a un único radical los siguientes números:**

a) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{6^2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{72}$

b) $\sqrt[5]{16}:\sqrt{2} = \sqrt[10]{2^8}:\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{2^3}$

En ocasiones es conveniente extraer factores de los radicales para simplificar expresiones.

Ejemplo:

$$\sqrt{12}+\sqrt{3}-5\sqrt{27}+6\sqrt{75}+\sqrt{300} = \sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3^3}+6\sqrt{3\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3\cdot 5^2} =$$

$$= 2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\cdot 3\sqrt{3}+6\cdot 5\sqrt{3}+2\cdot 5\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(2+1-15+30+10) = 28\sqrt{3}$$

15 **Calcula:**

a) $3\sqrt{125}-5\sqrt{45}+21\sqrt{245} = 3\sqrt{5^3}-5\sqrt{3^2\cdot 5}+21\sqrt{5\cdot 7^2} = 3\cdot 5\sqrt{5}-5\cdot 3\sqrt{5}+$
$+21\cdot 7\sqrt{5} = \sqrt{5}(15-15+147) = 147\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{\dfrac{24}{125}} = \sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{\dfrac{2^3\cdot 3}{5^3}} = 3\sqrt[3]{3}-\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}\left(3-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{13}{5}\sqrt[3]{3}$

Racionalizar un número consiste en escribirlo como cociente de manera que el denominador sea racional.

Ejemplo: Consideramos el cociente de números irracionales $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. La clave para racionalizarlo es multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Así,

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}$$

16 **Racionaliza los cocientes $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ y $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$.**

En el primer caso, multiplicamos numerador y denominador por $2+\sqrt{2}$ obtenemos:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Para racionalizar el segundo multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{11}-\sqrt{7}$:

$$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{7})} = \frac{11+7-2\sqrt{77}}{4} = \frac{9-\sqrt{77}}{2}$$

17 **Realiza la siguiente operación: $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$ (Nota: racionaliza primero)**

$$\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{7} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2})}+\frac{3\sqrt{2}}{7} = \frac{3^2+(\sqrt{2})^2-6\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{3\sqrt{2}}{7} =$$

$$= \frac{9+2-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{7} = \frac{11-3\sqrt{2}}{7}$$

3.4. Aproximación. Error absoluto y relativo

- Un **truncamiento** de un número es el que se obtiene al eliminar todas las cifras decimales que siguen a una prefijada.
- **Redondear** un número a un determinado orden decimal consiste en sustituirlo por el truncamiento al orden decimal prefijado si la siguiente cifra decimal es menor que 5. En caso contrario a la última cifra del número truncado le añadimos una unidad.

Ejemplo:

Número exacto	Truncamiento a las centésimas	Redondeo a la centésimas
0,7645	0,76	0,76
12,4373	12,43	12,44

- Si el número a se ha obtenido al truncar o redondear un número x, se dice que a es una **aproximación por defecto** de x cuando $a < x$, y es **una aproximación por exceso** si $x < a$.

18 Completa la siguiente tabla:

Número exacto	Truncamiento a las milésimas	Redondeo a las milésimas
$3,\overset{\frown}{21}$	3,212	3,212
$8,7\overset{\frown}{63}$	8,763	8,764

- Se llama **error absoluto** cometido al aproximar un número al valor absoluto de la diferencia entre el número, x, y la aproximación, a: $|x - a|$
- Se llama **error relativo** cometido al aproximar un número real no nulo, x, al cociente del error absoluto entre el valor absoluto del número: $\dfrac{|x-a|}{|x|}$

Ejemplo: Tomemos el número $a = 0,78$ como aproximación del número $x = 0,\hat{7}$ y calculemos los errores cometidos al tomar dicha aproximación.

Error absoluto: $\left|0,\hat{7} - 0,78\right| = \left|\dfrac{7}{9} - \dfrac{78}{100}\right| = \dfrac{1}{450}$ Error relativo: $\dfrac{1/450}{7/9} = \dfrac{1}{350}$

19 Calcula el error absoluto que se comete al aproximar el número $x = 0,\overset{\frown}{41}$ por los números $a = 0,35$ y $b = 0,5$ e indica cuál de los dos es más próximo a x.

■ Aprox. por a: $|x-a| = \left|\dfrac{41}{99} - \dfrac{35}{100}\right| = \dfrac{127}{1980}$ ■ Aprox. por b: $|x-b| = \left|\dfrac{41}{99} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{170}{1980} > |x-a|$

Luego el número 0,35 es más próximo a x que 0,5.

20 **Halla el error relativo que se comete al aproximar el número $x = 0{,}4\widehat{6}$ por su redondeo a las décimas.**

El redondeo a las décimas de x es $a = 0{,}5$.

Por otro lado, $x = 0{,}4\widehat{6} = \dfrac{7}{15}$.

Error absoluto es: $|x - a| = \left|\dfrac{7}{15} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{30}$ Error relativo es: $\dfrac{|x-a|}{|x|} = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \dfrac{15}{7 \cdot 30} = \dfrac{1}{14}$

21 **Se sabe que una cota superior del error absoluto que se comete al aproximar cierto número x por 1,14 es una milésima. Halla el intervalo en el que se encuentra x según estos datos.**

Si la cota superior del error absoluto es una milésima, entonces:

$$\text{error absoluto} \leq 0{,}001$$

El error absoluto viene dado por el valor absoluto de la diferencia del número, x, menos su aproximación, 1,14, por tanto tenemos que: $|x - 1{,}14| < 0{,}001$

$|x - 1{,}14| < 0{,}001$ es equivalente a $-0{,}001 < x - 1{,}14 < 0{,}001$

Operando la desigualdad: $1{,}14 - 0{,}001 < x < 1{,}14 + 0{,}001 \Rightarrow 1{,}139 < x < 1{,}141$

Por lo tanto, $x \in (1{,}139,\ 1{,}141)$.

Imagina que el error absoluto cometido al medir la longitud de una habitación y un campo de fútbol es el mismo: 50 cm

Supón que la habitación mide 2 m y el campo de fútbol 110 m. Calculamos el error relativo cometido en cada caso:

Habitación: $e_r = \dfrac{0{,}5}{2} = 0{,}25$ m Campo de fútbol: $e_r = \dfrac{0{,}5}{110} = 0{,}0045$ m

El error relativo refleja que la aproximación de la medida de la longitud del campo de fútbol es mucho mejor que la de la habitación (su error relativo es mucho más pequeño), pues la longitud del campo de fútbol es mucho mayor.

22 **La casa de Eduardo dista 420 m del colegio mientras que la de Antonio está a 1,02 km. Sin embargo, cuando les han preguntado a qué distancia estaba el colegio de sus respectivas casas, Eduardo ha contestado que a 400 m y Antonio a 1 km. ¿Quién ha dado mejor aproximación?**

En ambos caso el error absoluto cometido es de 20 m, pero los errores relativos cometidos por Eduardo y Antonio son, respectivamente:

$$\frac{|420 - 400|}{420} = \frac{20}{420} = \frac{1}{21} \qquad \frac{|1{,}02 - 1|}{1{,}02} = \frac{0{,}02}{1{,}02} = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$$

Como $\dfrac{1}{51} < \dfrac{1}{21}$ concluimos que la aproximación proporcionada por Antonio es mejor.

3.5. Notación científica

Un número está escrito en **notación científica** si es un producto de un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10 por una potencia de base 10 y exponente entero.

$$a \cdot 10^{n} \qquad 1 \le a < 10,\ n \in Z$$

Ejemplo: La expresión en notación científica de los números 3 040 000 000 y 0,000021 es:

$$3\,040\,000\,000 = 3{,}04 \cdot 10^{9} \qquad 0{,}000021 = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$$

23 **Completa los exponentes que faltan para escribir el número en notación científica:**

a) $329{,}7 = 3{,}297 \cdot 10^{\boxed{2}}$ **b)** $0{,}045 = 4{,}5 \cdot 10^{\boxed{-2}}$ **c)** $0{,}7 \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^{\boxed{-4}}$

Para **multiplicar o dividir números en notación científica** se multiplican o dividen sus partes decimales por un lado y las potencias de 10 por otro.

Tras operar puede que el resultado no esté en notación científica, revísalo y ajusta el número decimal y la potencia de 10 para que quede correctamente expresado.

Ejemplos: $(2{,}1 \cdot 10^{15}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3}) = (2{,}4 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{15+(-3)} = 6 \cdot 10^{12}$

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{5}}{6 \cdot 10^{-2}} = \left(\frac{2{,}4}{6}\right) \cdot 10^{5-(-2)} = 0{,}4 \cdot 10^{7} = 4 \cdot 10^{6}$$

24 **Haz las operaciones y expresa en notación científica el resultado:**

a) $(3 \cdot 10^{8}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{2}) = 4{,}5 \cdot 10^{10}$

b) $(4 \cdot 10^{5}) \cdot (4{,}4 \cdot 10^{2}) = 1{,}76 \cdot 10^{8}$

c) $(2{,}8 \cdot 10^{8}) : (4 \cdot 10^{-3}) = 0{,}7 \cdot 10^{11} = 7 \cdot 10^{10}$

d) $(1{,}12 \cdot 10^{4}) : (1{,}6 \cdot 10^{-2}) = 0{,}7 \cdot 10^{6} = 7 \cdot 10^{5}$

Para **sumar o restar números en notación científica** sacaremos factor común a la potencia de 10 con menor exponente y luego sumaremos o restaremos las partes decimales resultantes.

De nuevo, recuerda que el resultado final sea un número expresado en notación científica.

Ejemplo: $(3{,}2 \cdot 10^{11}) + (5{,}5 \cdot 10^{8}) = (3\,200 + 5{,}5) \cdot 10^{8} = 3\,205{,}5 \cdot 10^{8} = 3{,}2055 \cdot 10^{11}$

25 **Haz las operaciones y expresa en notación científica el resultado:**

a) $3 \cdot 10^{6} - 1{,}2 \cdot 10^{6} = (3 - 1{,}2) \cdot 10^{6} = 1{,}8 \cdot 10^{6}$

b) $3{,}3 \cdot 10^{-3} + 1{,}21 \cdot 10^{-2} = (0{,}33 + 1{,}21) \cdot 10^{-2} = 1{,}54 \cdot 10^{-2}$

26 ¿Es un número racional la longitud de la diagonal de un campo de fútbol de 120 m de largo y 90 m de ancho? ¿Y la de un campo de 100 m de largo y 80 m de ancho?

La diagonal del primer campo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 120 y 90 m. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

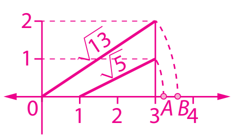
$$\sqrt{120^2+90^2}=\sqrt{14\,400+8\,100}=10\sqrt{225}=150\text{ m}$$

La diagonal del segundo campo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 100 y 80 m. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\sqrt{100^2+80^2}=\sqrt{10\,000+6\,400}=20\sqrt{41}\text{ m}$$

En el primer caso es un número racional y en el segundo caso un número irracional.

27 Representar sobre una recta los números reales $\sqrt{13}$ y $1+\sqrt{5}$. ¿Cuál es mayor?



Para dibujar $\sqrt{13}$ dibujamos la diagonal de un rectángulo de lados 2 y 3, ya que $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. En el dibujo esta longitud viene dada por el segmento OB.

Para dibujar $1+\sqrt{5}$ hacemos que el rectángulo empieze en 1 y luego necesitamos avanzar $\sqrt{5}$, que lo conseguimos al trazar la diagonal de un rectángulo de lados 2 y 1, ya que $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. En el dibujo la longitud del segmento OA es $1+\sqrt{5}$.

Como el punto A está situado a la izquierda del punto B se tiene: $1+\sqrt{5}<\sqrt{13}$

28 Las medidas del aula de los alumnos de 4.° son de 50 m de largo y 30 m de ancho. Fernando estimó que el largo de la clase sería de 51 m, mientras que Esteban afirmó que el ancho de la clase sería de 29,4 m. ¿Cuál de los dos dio una mejor aproximación?

El error absoluto cometido por Fernando es de 1 m, mientras que el cometido por Esteban es de 0,6 m. Ahora bien, el error relativo que cometió Fernando es de $e_1=\frac{1}{50}$, que coincide con el cometido por Esteban, que vale $e_2=\frac{0{,}6}{30}=\frac{6}{300}=\frac{1}{50}$. Por tanto, concluimos que ambas estimaciones son igual de precisas.

29 Expresar en notación científica la masa de los siguientes átomos:

Masa de un átomo de nitrógeno = 0,000 000 000 000 000 000 000 023 268 g.

Masa de un átomo de carbono = 0,000 000 000 000 000 000 000 019 993 33 g.

Masa de un átomo de hidrógeno = 0,000 000 000 000 000 000 000 001 673 5 g.

Nitrógeno: $2{,}3268\cdot10^{-23}$ Carbono: $1{,}99933\cdot10^{-23}$ Hidrógeno $=1{,}6735\cdot10^{-24}$

3 Evaluación

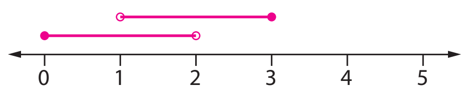
1 **Indica cuáles de los siguientes números son irracionales:**

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ -4,1\overset{\frown}{7};\ \frac{13}{9};\ \sqrt{4+\sqrt{25}};\ \pi;\ 0,8;\ \sqrt{15};\ 32,5\overset{\frown}{67}$$

Son irracionales los números $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, π y $\sqrt{15}$, y racionales los demás.

2 **Calcular la unión y la intersección de los intervalos $[0,2)$ y $(1, 3]$**

Vamos a representarlos en la recta para ver cuál es el resultado de estas operaciones:



Observamos lo que abarca el intervalo $[0, 2)$ y el intervalo $(1, 3]$. Si unimos todo, abarcamos de 0 a 3, incluyendo los extremos. Sin embargo, la parte en la que coinciden, es decir, la intersección, tenemos que va de 1 a 2 y los extremos no están incluidos. Por tanto:

$$[0, 2) \cup (1, 3] = [0, 3] \text{ y } [0, 2) \cap (1, 3] = (1, 2)$$

3 **Escribe como unión de dos semirrectas abiertas el conjunto formado por todos los números reales x tales que $|x + 2| > 8$.**

Eliminamos el valor absoluto de la desigualdad distinguiendo 2 casos:

- *Si un número real x es mayor o igual que -2 entonces $x+2 \geq 0$, por lo que $|x+2| = x+2$, para estos valores, la desigualdad $|x+2| > 8$ equivale a $x+2>8 \Rightarrow x>6$.*
- *Si $x<-2$ entonces $x+2<0$, luego $|x+2| = -(x+2)$ y la desigualdad $|x+2|>8$ equivale a $-(x+2)>8$, esto es, $x<-10$.*

Por tanto, el conjunto del enunciado es la unión de las semirrectas:

$$(-\infty, -10) \text{ y } (6, +\infty).$$

4 **Expresa mediante un único radical los números:**

a) $5\sqrt{72} - \sqrt{8} + 3\sqrt{50} = 5\sqrt{2\cdot 36} - \sqrt{2\cdot 4} + 3\sqrt{2\cdot 25} = 5\cdot 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\cdot 5\sqrt{2} =$

$$= \sqrt{2}(30-2+15) = 43\sqrt{2}$$

b) $2\sqrt{500} - \sqrt{605} + 7\sqrt{845} = 2\sqrt{5^3\cdot 2^2} - \sqrt{5\cdot 11^2} + 7\sqrt{5\cdot 13^2} = 2\cdot 10\sqrt{5} - 11\sqrt{5} +$

$$+7\cdot 13\sqrt{5} = \sqrt{5}(20-11+91) = 100\sqrt{5}$$

5 Simplifica la expresión $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[15]{a^7}}$.

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[15]{a^7}}=\frac{\sqrt[30]{a^{15}}\cdot\sqrt[30]{a^{24}}}{\sqrt[30]{a^{25}}\cdot\sqrt[30]{a^{14}}}=\frac{\sqrt[30]{a^{39}}}{\sqrt[30]{a^{39}}}=1$$

6 Racionaliza $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Mu ltiplicando numerador y denominador por $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ se tiene:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

7 La altura de Carolina es 1,66 m y tiene un muæeco que mide 0,36 m. Cuando anota las medidas en el papel, Carolina redondea a una cifra decimal y considera que como la diferencia en ambos casos es 0,04, las dos anotaciones son igual de precisas. ¿Está en lo cierto?

Cuando Carolina redondea su altura está cometiendo un error absoluto de 0,04, pero un error relativo de $\dfrac{0{,}04}{1{,}66}=0{,}02$.

Me ntras que en el caso del muñeco, el error absoluto es 0,04, y supone un error relativo de $\dfrac{0{,}04}{0{,}36}=0{,}11$.

Por tanto, es más precisa la anotación de su altura que la de la altura de su muñeco.

8 Expresa en notación científica los números $0{,}006^4$ y $20\,000^4$.

$$(0{,}006)^4=(6\cdot10^{-3})^4=6^4\cdot(10^{-3})^4=1296\cdot10^{-12}=1{,}296\cdot10^{-9}$$

$$(20000)^4=(2\cdot10^4)^4=2^4\cdot(10^4)^4=16\cdot10^{16}=1{,}6\cdot10^{17}$$

9 Opera la expresión dada y expresa el resultado en notación científica:

$$\frac{2{,}06\cdot10^6+6{,}4\cdot10^5}{4{,}6\cdot10^2-2{,}8\cdot10^2}$$

$$\frac{2{,}06\cdot10^6+6{,}4\cdot10^5}{4{,}6\cdot10^2-2{,}8\cdot10^2}=\frac{(20{,}6+6{,}4)\cdot10^5}{(4{,}6-2{,}8)\cdot10^2}=\frac{27}{1{,}8}\cdot10^3=15\cdot10^3$$

El resultado no está expresado en notación científica, puesto el que número es mayor que 10. Expresamos el resultado en notación científica y resulta ser: $1{,}5\cdot10^4$

4 Proporcionalidad numérica

4.1. Proporcionalidad directa

La siguiente tabla recoge el precio de ciertas cantidades de kilos de naranjas.

Kilos	1	3	7	10	12	15	20	25	30	45	60
Euros	5	15	35	50	60	75	100	125	150	225	300

Se aprecia que, independientemente de cuál sea el número de kilos, x, el número de euros que pagamos por ellos, y, es $y = 5x$. Se dice que los kilos de naranjas y los euros que pagamos por ellos son **directamente proporcionales.**

1 **En el comedor de un hotel se han consumido 48 barras de pan durante tres días. Si cada barra cuesta 0, 45 €, ¿qué presupuesto debe destinar el gerente del hotel para comprar el pan que se consume en una semana?**

Cada día se consumen en el hotel $\frac{48}{3} = 16$ *barras de pan.*

Cada una cuesta $0{,}45$ €*, así que al día se gastan en barras de pan:* $16 \cdot 0{,}45 = 7{,}20$ €

Por lo que para una semana el presupuesto es: $7 \cdot 7{,}20 = 50{,}40$ €

2 **Dos amigas compran cinco juegos de toallas iguales por un total de 225 €. ¿Cuánto debe aportar cada una si se quedan con tres y dos juegos, respectivamente?**

Cada juego cuesta $\frac{225}{5} = 45$ €.

Entonces, la amiga que se queda tres paga: $3 \cdot 45 = 135$ €*, y la otra:* $2 \cdot 45 = 90$ €.

3 **Tres socios han puesto 1 000, 2 000 y 3 000 €, respectivamente, para una empresa. Si el beneficio es de 4 200 €. ¿Cuánto corresponde a cada uno?**

Entre los tres socios aportaron un capital de: $1\,000 + 2\,000 + 3\,000 = 6\,000$ €

El primer socio aportó $\frac{1}{6}$*, el segundo* $\frac{2}{6}$ *y el tercero* $\frac{3}{6}$.

Al primer socio le corresponde 1/6 de los beneficios, es decir, $\frac{1}{6}$ *de* $4\,200 = 700$ €.

Al segundo: $\frac{2}{6}$ *de* $4\,200 = 1\,400$ €*. Y para el tercero la mitad de los beneficios:* $2\,100$ €.

4 **Un conductor invierte 2 h 55 min en un recorrido de 250 km. ¿Cuánto tiempo invertirá en otro recorrido de 310 km si va a la misma velocidad?**

El conductor tardó $120 + 55 = 175$ *min en recorrer 250 km, es decir, un kilómetro lo recorrió en* $\frac{175}{250}$ *min.*

Por tanto, en recorrer 310 km tardará: $\frac{175}{250} \cdot 310 = 217$ *min, es decir, 3 h 37 min.*

4.2. Proporcionalidad inversa

La siguiente tabla recoge los valores, medidos a temperatura constante, de la presión y el volumen que ocupa un gas.

Presión (milibares)	200	175	150	125	100	75	50	25	20	10
Volumen (litros)	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{8}{3}$	4	8	10	20

Se observa que, independientemente de cuál sea el número de milibares, x, el número de litros que ocupa el gas sometido a dicha presión, y, se cumple $xy = 200$. Se dice que la presión y el volumen son **inversamente proporcionales.**

5 **Un ganadero dispone de pienso para alimentar a 25 ovejas durante 30 días. Si vende 10 ovejas, ¿durante cuántos días puede alimentar a las ovejas restantes?**

Si tiene para 25 ovejas durante 30 días, para una oveja serían $25 \cdot 30 = 750$ días.

Tras vender 10 ovejas, al ganadero le quedan 15, entonces $\frac{750}{15} = 50$ días.

6 **Sabemos que dos grifos llenan cierto depósito en una hora. ¿Cuántos grifos, con el mismo caudal que los anteriores, deberíamos abrir para llenar el mismo depósito en tan solo 20 minutos?**

En 60 minutos se necesitan 2 grifos, entonces en un minuto: $60 \cdot 2 = 120$ grifos

Por tanto, en 20 minutos: $\frac{120}{20} = 6$ grifos.

7 **Un coche, a la velocidad de 100 km/h, ha recorrido la distancia entre dos ciudades en tres horas y media. ¿Cuánto tardará otro coche en recorrer esa distancia si su velocidad es de 75 km/h?**

La velocidad que lleva el coche por el tiempo que tarda en recorrer una distancia fija es constante: $e = vt$. El espacio que recorre el primer coche es: $100 \text{ km/h} \cdot 3{,}5 \text{ h} = 350 \text{ km}$

Entonces: $75 \cdot t = 350 \Rightarrow t = \frac{350}{75} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$

El segundo coche tarde 4 horas y dos tercios de hora, es decir, 4 h 40 min.

8 **Un albañil, trabajando 8 h diarias, ha tardado 5 días en colocar el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado trabajando 10 h diarias?**

El albañil tarda $8 \cdot 5 = 40$ h en instalar el suelo, así que trabajando 10 cada día necesita $\frac{40}{10} = 4$ días para efectuar su trabajo. Observa cómo es un problema de proporcionalidad inversa: $8 \cdot 5 = 40 = 10 \cdot 4$

4.3. Proporcionalidad compuesta

En algunas ocasiones tenemos varias magnitudes que dependen las unas de las otras. En estos casos tenemos una **relación de proporcionalidad compuesta.**

Hay casos en los que las diferentes relaciones son todas de proporcionalidad directa.

Ejemplo: Una clínica de ortopedia ha cobrado 200 € por alquilar 2 sillas de ruedas durante 5 días. Queremos saber cuánto ingresarían por alquilar 7 sillas durante 4 días.

Calculamos los ingresos generados por el alquiler de 1 silla durante 1 día. Tenemos la relación entre el ingreso por silla y el ingreso por días, ambas son de proporcionalidad directa. Entonces:

Por alquilar 2 sillas durante 5 días cobra 200 €.

Por alquilar 1 silla durante 5 días cobra $\frac{200}{2} = 100$ €.

Por alquilar 1 silla durante 1 día cobra $\frac{100}{5} = 20$ €.

Por alquilar 7 sillas durante 1 día cobra $20 \cdot 7 = 140$ €.

Por alquilar 7 sillas durante 4 días cobra $140 \cdot 4 = 560$ €.

9 **Cinco personas mecanografían 120 folios en 6 h. ¿Cuántos folios mecanografían ocho personas en 12 h si mantienen el mismo ritmo?**

Tenemos la relación entre los folios mecanografiados y las personas y los folios mecanografiados y las horas. Ambas son de proporcionalidad directa, entonces:

- *5 personas en 6 h mecanografían 120 folios.*
- *1 persona en 6 h mecanografía $\frac{120}{5} = 24$ folios.*
- *1 persona en 1 h mecanografía $\frac{24}{6} = 4$ folios.*
- *8 personas en 1 h mecanografían $4 \cdot 8 = 32$ folios.*
- *8 personas en 12 h mecanografían $32 \cdot 12 = 384$ folios.*

En algunas ocasiones hay tres magnitudes de modo que una de ellas depende según una relación de proporcionalidad directa de una de las otras, y según una relación de proporcionalidad inversa de la otra.

Ejemplo: Con 15 kg de pienso, 9 vacas comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 4 vacas en comerse 10 kg de pienso?

Con 15 kg de pienso comen 9 vacas durante 6 días.

Con 1 kg de pienso comen 9 vacas durante $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ de día.

Con 1 kg de pienso come 1 vaca durante $\frac{2}{5} \cdot 9 = \frac{18}{5}$ días.

Con 10 kg de pienso come 1 vaca durante $10 \cdot \frac{18}{5} = 36$ días.

Con 10 kg de pienso comen 4 vacas durante $\frac{36}{4} = 9$ días.

10 **Para recorrer 435 km del camino de Santiago en 15 días deberíamos andar 8 h diarias. ¿Cuántas horas diarias deberíamos caminar si quisiéramos recorrer 290 km más, y en lugar de 15 días dispusiésemos de 20?**

Los kilómetros que se recorren y las horas diarias que se camina son magnitudes directamente proporcionales. Sin embargo, los días que se emplean para hacer el camino y las horas diarias que se camina son inversamente proporcionales.

- *Para recorrer 435 km del camino en 15 días debemos andar 8 h/día.*
- *Para recorrer 1 km del camino en 15 días debemos andar* $\frac{8}{435}$ *h/día.*
- *Para recorrer 1 km del camino en 1 día debemos andar* $15 \cdot \frac{8}{435} = \frac{8}{29}$ *h/día.*
- *Para recorrer 725 km del camino en 1 día debemos andar* $725 \cdot \frac{8}{29} = 200$ *h/día.*
- *Para recorrer 725 km del camino en 20 días debemos andar* $\frac{200}{20} = 10$ *h/día.*

Resumen: Cierta magnitud es **función de proporcionalidad compuesta** de otras dos si depende de ellas según una relación de proporcionalidad directa o inversa.

En estos casos, se puede dar cualquiera de las combinaciones posibles, es decir, puede mantener una relación de proporcionalidad directa con las otras dos, o bien una relación de proporcionalidad inversa con cada una de ellas, o bien una relación de proporcionalidad directa con una de las magnitudes y de proporcionalidad inversa con la otra.

11 **Tres obreros que trabajan 8 h diarias tardan 15 días en realizar cierto trabajo. ¿Cuántos días tardarían en hacer el mismo trabajo 5 obreros si trabajasen 9 h diarias?**

El número de obreros que trabajan y los días que tardan en realizar la obra son magnitudes inversamente proporcionales. También las horas diarias que trabajan los obreros y los días que tardan en terminar la obra son magnitudes inversamente proporcionales.

- *3 obreros trabajando 8 h/día tardan 15 días en hacer el trabajo.*
- *1 obrero trabajando 8 h/día tarda* $15 \cdot 3 = 45$ *días en hacer el trabajo.*
- *1 obrero trabajando 1 h/día tarda* $45 \cdot 8 = 360$ *días en hacer el trabajo*
- *5 obreros trabajando 1 h/día tardan* $\frac{360}{5} = 72$ *días en hacer el trabajo.*
- *5 obreros trabajando 9 h/día tardan* $\frac{72}{9} = 8$ *días en hacer el trabajo.*

4.4. Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales

Las cuestiones propuestas en las secciones anteriores se han abordado por el procedimiento denominado **reducción a la unidad.** Sabiendo el valor de la unidad de cierta magnitud conocemos el valor de cualquier número de unidades.

Al usar **porcentajes** el método es similar, pero en vez de considerar las unidades, consideraremos 100 unidades. Así, por ejemplo, $\frac{2}{5}$ de una cantidad es el 40 % de la misma, ya que $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$.

Ejemplo: Un ciudadano se somete a un implante dental, por el que debe abonar 3600 €, y queremos averiguar cuánto le falta por pagar si lleva pagado el 65 %. Para hacerlo basta observar que le falta por pagar el 35 % del total, esto es, $3600 \cdot \frac{35}{100} = 1260$ €.

12 **¿Qué porcentaje del precio le falta por pagar a Irene por la compra de una moto que cuesta 2400 € si lleva pagados 720 €?**

La fracción del precio ya pagado es $\frac{720}{2400} = \frac{3}{10}$ del total, luego le faltan por pagar $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ del precio de la moto, es decir el 70 %.

13 **El 12 % de un número es 36. ¿De qué número estamos hablando?**

El 12 % es 36, entonces $\frac{12}{100} \cdot \text{número} = 36$, por tanto, $\text{número} = \frac{36 \cdot 100}{12} = 300$.

Ha y casos en los que queremos aumentar o disminuir una cantidad según un porcentaje de ella misma. Eso se conoce como **aumentos y disminuciones porcentuales.**

Calcular la cantidad final que resulta al aumentar una cantidad c un t % equivale a calcular el $(100 + t)$ % de c (si se trata de disminuir sería el $(100 - t)$ % de c).

14 **¿Cuál es el salario neto mensual de un trabajador cuyo salario bruto son 2800 € si le descuentan un 20 % en concepto de impuestos?**

Hay que disminuir el salario un 20 %, es decir, habría que calcular el $(100 - 20)$ % de 2800, lo que es lo mismo, el 80 % de $2800 = 2800 \cdot 0{,}8 = 2240$ €.

15 **Si el precio de un artículo marca 34 € sin IVA y tenemos que aplicarle un IVA del 21 % ¿cuánto habrá que pagar por el artículo?**

En este caso tenemos que realizar un aumento porcentual, al precio del artículo hay que añadirle el IVA, por tanto, tendremos que calcular $(100 + 21)$ % de 34: $34 \cdot 1{,}21 = 41{,}14$. Habrá que pagar 41,14 €.

4.5. Interés simple

Cuando se realiza un préstamo, ya sea de un banco a un cliente, o de un cliente a un banco pues deposita en él su dinero, se generan unos intereses.

El **interés** es el beneficio que origina una cantidad de dinero **(capital inicial)** durante un cierto tiempo a un porcentaje, o **rédito,** determinado. La fórmula para el **interés simple** es:

$$I = C \cdot r \cdot t$$

Donde I son los intereses, C es el capital, r es el rédito y t denota el tiempo, medido en años, que se deposita el capital.

Ejemplo: Si se acuerda con el banco efectuar un depósito de 1 000 € al 3 % durante 3 años, los intereses que recibiremos una vez transcurridos los tres años son:

$$I = 1\,000 \cdot 3\,\% \cdot 3 = 1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 3 = 90 \text{ €}$$

16 **¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 1 000 € al 5 % para poder retirar 1 250 €?**

El interés obtenido sería: $I = 1\,250 - 1\,000 = 250$ €

Sustituimos en la fórmula $I = C \cdot r \cdot t$, esto es: $250 = 1\,000 \cdot 0{,}05 \cdot t$

Despejamos y resulta: $t = 250/50 = 5$ años

17 **¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se cuadruplique un capital colocado al 2,4 %?**

Si el capital es C y queremos obtener $4C$, entonces: $I = 4C - C = 3C$

Sustituyendo en la fórmula del interés simple: $3C = C \cdot 2{,}4\,\% \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{3}{0{,}024} = 125$ años

18 **Depositamos 3 000 € en un banco al 3 % anual. Al acabar el año se retiran el dinero y los intereses obtenidos, se añaden 4 000 € y se depositan en otra entidad bancaria al 5 % anual. ¿De cuánto dinero disponemos al finalizar el segundo año?**

El interés que produce al cabo de un año la inversión inicial es: $I = 0{,}03 \cdot 3\,000 = 90$ €

Al añadir 4 000 €, el capital depositado en el segundo banco es:

$$C = 3\,000 + 90 + 4\,000 = 7\,090 \text{ €}$$

Al cabo de un año a un 5 % anual, obtenemos unos intereses de:

$$I = 7\,090 \cdot 0{,}05 = 354{,}5 \text{ €}$$

Por tanto, al acabar el segundo año tenemos:

$$3\,000 + 90 + 4\,000 + 354{,}5 = 7\,444{,}5 \text{ €}$$

4.6. Interés compuesto

Si al realizar un préstamo con unos intereses, estos no se abonan al final, sino que pasan a formar parte del capital al pasar cierto período de tiempo, tenemos lo que se conoce como **interés compuesto.**

La diferencia entre el interés simple y el compuesto radica en que en este último al finalizar cada período el interés obtenido se añade al capital del que se disponía anteriormente para generar nuevos intereses.

La fórmula para calcular el capital final aplicando un interés compuesto es:

$$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$$

Hay ocasiones en que el período en el que se realiza la suma de los intereses al capital es diferente a un año. Por ejemplo, si es mensual, por cada euro depositado el banco nos da $r/12$ € al mes. Como t años son $12t$ meses, el capital acumulado al cabo de t años tras depositar un capital inicial de C euros a interés compuesto y cuyo período de amortización es mensual es $C\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$ euros.

19 **Un inversor deposita 20 000 € en un banco al 7,2 % anual. Si los intereses son compuestos:**

a) ¿Cuánto dinero tendrá el inversor al cabo de 4 años si el período de amortización es anual?

El capital invertido es $C = 20\,000$ €, y el rédito anual es r de un 7,2 %. Por tanto, al cabo de cuatro años el capital será de:

$$C(1 + r)^4 = 20\,000 \cdot 1{,}072^4 \approx 26\,412{,}48 \text{ €}$$

b) ¿Cuánto dinero tendrá el inversor al cabo de 4 años si el período de amortización es mensual?

Al ser amortización mensual, cada mes añadiremos un doceavo del rédito anual, es decir $\frac{7{,}2\ \%}{12}$. Por otro lado, 4 años son 48 meses, de modo que calculamos el capital final al cabo de 48 meses:

$$C\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} = 20\,000 \cdot 1{,}006^{48} = 26\,652{,}20 \text{ €}$$

c) A la vista de los resultados anteriores, ¿resulta más beneficioso que el período de amortización sea anual o mensual?

Observando los resultados de los apartados anteriores, vemos que para el inversor es más beneficioso que el período de amortización sea mensual.

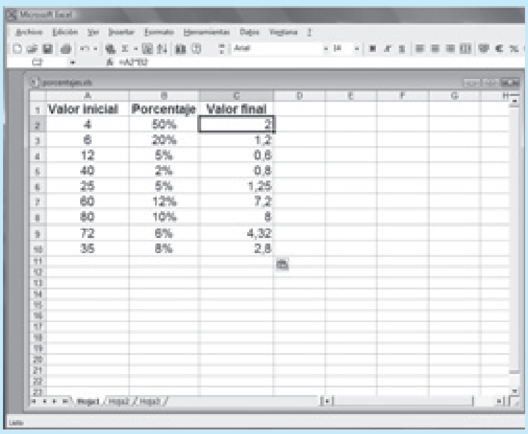
4.7. Uso de la hoja de cálculo

Una hoja de cálculo es un programa en el que se puede escribir, almacenar, manipular, calcular y organizar todo tipo de información numérica o de texto.

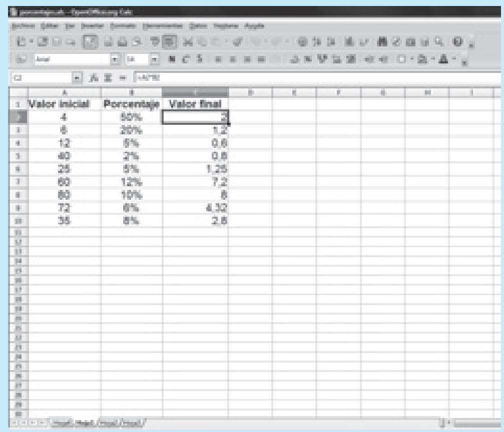
Al abrirlo aparece un libro compuesto de tres hojas (aunque se pueden insertar más). Cada una de ellas tiene una serie de **celdas** en las que podemos insertar texto, un número o una función tal que, el valor de sus variables es el contenido de otras celdas.

Este programa nos resulta útil para crear tablas en las que se realicen diferentes cálculos o haya que aplicar la misma operación a diferentes pares de valores, ya que crearemos una fórmula que realice todos esos cálculos de modo automático.

Ejemplo: Va mos a construir una hoja de cálculo en la que se calculen los porcentajes indicados de unas cantidades concretas.



Valor inicial	Porcentaje	Valor final
4	50%	2
6	20%	1,2
12	5%	0,6
40	2%	0,8
25	5%	1,25
60	12%	7,2
80	10%	8
72	6%	4,32
35	8%	2,8



Valor inicial	Porcentaje	Valor final
4	50%	2
6	20%	1,2
12	5%	0,6
40	2%	0,8
25	5%	1,25
60	12%	7,2
80	10%	8
72	6%	4,32
35	8%	2,8

1. **Cabecera:** reservamos la primera fila para los encabezados, que nos servirán para saber qué es cada lista de valores.
2. **Valores:** en las columnas A y B introducimos una serie de números y de porcentajes, respectivamente.
3. **Fórmula:** ahora vamos a introducir las fórmulas para que se realicen los cálculos que queremos. En la celda C2 escribimos la fórmula = A2 * B2 y presionamos intro, con lo que se obtiene el valor del porcentaje que buscábamos.
4. **Copiar la fórmula:** no es necesario volver a teclear la fórmula anterior en cada una de las celdas de la columna C, pues basta con seleccionarla, ir al menú Edición de la barra de herramientas y marcar la opción Copiar. Luego seleccionamos las celdas desde C3 hasta C10 arrastrando el puntero del ratón. Con estas celdas seleccionadas acudiremos de nuevo al menú Edición, y elegimos la opción Pegar, así obtenemos los valores de esta columna.

Por supuesto, podemos pensar en fórmulas mucho más complejas o elaboradas, como: una tabla para calcular el interés simple que producen ciertos capitales invertidos durante varios aœs a unos ciertos réditos. Igualmente se podría calcular el interés compuesto o incluso en una misma tabla podríamos calcular ambos y su diferencia, para apreciar cuál de los dos es más ventajoso y en que cuantía.

20 **Construir una tabla para calcular los intereses producidos mensualmente por un capital de 1 500 € invertidos a interés simple con un rédito del 1,25 % anual y el capital del que se dispone al final de cada mes.**

En las columnas primera y segunda indicaremos, respectivamente, el capital (1 500) y el rédito (1,25 %). En la tercera columna escribiremos el número de meses que tenemos invertido el capital.

Finalmente en la cuarta y en la quinta realizamos los cálculos de los intereses y el capital final, respectivamente.

	A	B	C	D	E	F
1	Capital	Rédito	Tiempo (meses)	Interés	Capital final	
2	1500	1,25%	1	1,56	1501,56	
3	1500	1,25%	2	3,13	1503,13	
4	1500	1,25%	3	4,69	1504,69	
5	1500	1,25%	4	6,25	1506,25	
6	1500	1,25%	5	7,81	1507,81	
7	1500	1,25%	6	9,38	1509,38	
8	1500	1,25%	7	10,94	1510,94	
9	1500	1,25%	8	12,5	1512,5	
10	1500	1,25%	9	14,06	1514,06	
11	1500	1,25%	10	15,63	1515,63	
12	1500	1,25%	11	17,19	1517,19	
13	1500	1,25%	12	18,75	1518,75	
14						
15						

En la celda D2 introducimos la fórmula que calcula los intereses para los datos de esa fila: = A2 * B2 * C2/12. Luego la copiamos en el resto de celdas de la misma columna.

En la celda E2 escribimos la fórmula =A2 + D2, que suma el capital inicial con los intereses que se acaban de calcular.

21 **Construir una tabla que proporcione el capital final al cabo de cada uno de los meses de un año para un capital de 1 500 € con un rédito de un 1,25 %, si el interés es compuesto.**

Las columnas A y B, en las que indicaremos el capital y el rédito al que está colocado el mismo son constantes, y valen, respectivamente, 1 500 y 1,25. En la columna C escribimos el número de meses que tenemos invertido el capital. La columna D será la que corresponda al capital final.

La fórmula que introducimos en la celda D2 y luego copiaremos en el resto de celdas de la misma columna es =A2 * (1 + B2/12) ^ C2. Obtenemos así la tabla pedida.

	A	B	C	D	E
1	Capital	Rédito	Tiempo (meses)	Capital final	
2	1500	1,25%	1	1501,56	
3	1500	1,25%	2	1503,13	
4	1500	1,25%	3	1504,69	
5	1500	1,25%	4	1506,26	
6	1500	1,25%	5	1507,83	
7	1500	1,25%	6	1509,4	
8	1500	1,25%	7	1510,97	
9	1500	1,25%	8	1512,55	
10	1500	1,25%	9	1514,12	
11	1500	1,25%	10	1515,7	
12	1500	1,25%	11	1517,28	
13	1500	1,25%	12	1518,86	
14					
15					

22 Un coche consume 7 L de diesel cada 100 km. Sabiendo que el precio del diesel es de 1,45 € por litro, ¿cuÆnto costarÆ realizar un viaje de 280 km?

En recorrer 280 km el coche gasta $7 \cdot \frac{280}{100} = 19{,}6$ *L, que cuestan* $19{,}6 \cdot 1{,}45 = 28{,}42$ €.

23 Para realizar el decorado de la obra de teatro que van a escenificar los alumnos de 4° de ESO han trabajado 10 de ellos durante 4 días, 3 h cada día. ¿CuÆntas horas diarias habrían trabajado si en lugar de 10 alumnos lo hubiesen hecho 12 y hubiesen dispuesto de un día mÆs?

- *Para que 10 alumnos realicen el decorado en 4 días han de trabajar 3 h/día.*
- *Para que 10 alumnos realicen el decorado en 1 día ha de trabajar* $4 \cdot 3 = 12$ *h/día.*
- *Para que 1 alumno realicen el decorado en 1 día ha de trabajar* $10 \cdot 12 = 120$ *h/día.*

(Observa que esto no es posible en realidad, por tanto, si te preguntasen si puede hacerlo un alumno solo en 1 día, deberías decir que no, pero aquí es un cálculo intermedio, para obtener el resultado buscado)

- *Para que 12 alumnos realicen el decorado en 1 día han de trabajar* $\frac{120}{12} = 10$ *h/día.*
- *Para que 12 alumnos realicen el decorado en 5 días han de trabajar* $\frac{10}{5} = 2$ *h/día.*

24 Para adquirir una vivienda que se vende por 240 000 € se debe abonar al ministerio de Hacienda un 8 % en concepto de IVA, a lo que hay que añadir 7 200 € por gastos de notaría. ¿CuÆnto dinero debe abonar en total el comprador de la vivienda?

Al pagar el IVA el coste sufre un aumento.

El precio de la vivienda con IVA será: $240\,000 \cdot 1{,}08 = 259\,200$ €

El coste final que debe pagar el comprador es: $7\,200 + 259\,200 = 266\,400$ €

25 Un inversor contrata un depósito en un banco que ofrece un 4 % anual, aportando un capital inicial de 8 000 €. Tras un año, contrata el mismo producto con un capital que es la cantidad inicial, los intereses acumulados durante el primer año y 7 000 € mÆs. ¿QuØ capital tiene el cliente al finalizar el segundo año?

El interés percibido al acabar el primer año es: $8\,000 \cdot 0{,}04 \cdot 1 = 320$ €

La cantidad depositada al comenzar el segundo año es:

$$8\,000 + 320 + 7\,000 = 15\,320 \text{ €}$$

El interés percibido al finalizar el segundo año es: $I = 15\,320 \cdot 0{,}04 \cdot 1 = 612{,}8$ €

El capital final tras dos años es: $15\,320 + 612{,}80 = 15\,932{,}80$ €

Evaluación

1 La capacidad de la tarjeta de la cámara de Pablo es de 2 GB. El curso pasado pudo hacer 846 fotos hasta que se le llenó la tarjeta. Este curso decide comprar una tarjeta con una capacidad de 8 GB. ¿Cuántas fotos podrá hacer antes de que se le llene?

La capacidad de la tarjeta y el número de fotos que puede hacer son directamente proporcionales. Una tarjeta de un GB tendría capacidad para $\frac{846}{2} = 423$ fotos.

Por tanto, una de 8 GB tiene una capacidad de $8 \cdot 423 = 3\,384$ fotos.

2 Un niño calcula que si gasta 1, 8 € diarios sus ahorros durarán 30 días. ¿Cuánto debería gastar diariamente para que los mismos ahorros le duren 45 días?

La relación entre las dos magnitudes es de proporcionalidad inversa, a más días menor será el gasto diario.

Los ahorros del niño son de $30 \cdot 1{,}8 = 54$ €, que repartidos en 45 días le permiten efectuar un gasto diario de $\frac{54}{45} = 1{,}2$ €/día.

3 Irene ha pagado 54 € por un par de zapatos que estaban rebajados un 10 % ¿Cuánto costaban los zapatos antes de la rebaja?

Los 54 € pagados por Irene representan el 90 % del precio inicial de los zapatos. De modo que $0{,}9 \cdot \text{precio} = 54$. Entonces, $\text{precio} = \frac{54}{0{,}9} = 60$ €.

4 ¿Qué cantidad se obtiene si se incrementa 2 450 en un 30 % y se disminuye la cantidad resultante en un 30 %?

Un aumento de un 30 % es: $\left(1 + \frac{30}{100}\right) \cdot 2\,450 = 3\,185$

Ahora hacemos la disminución de un 30 %: $\left(1 - \frac{30}{100}\right) \cdot 3\,185 = 2\,229{,}5$

5 Rellenar las casillas en blanco:

a) El 20 % de $\boxed{65}$ es 13

b) El 15 % de $\boxed{740}$ es 111

c) El 3 % de $\boxed{2\,700}$ es 81

d) El 45 % de $\boxed{20}$ es 9

6 **Un pintor ha cobrado 640 € por trabajar 4 jornadas a razón de 8 h cada día. ¿Cuánto cobrarán dos pintores de iguales características por trabajar 3 jornadas de 10 h cada una?**

Si 1 pintor trabaja 4 jornadas 8 h, entonces cobra 640 €.

Si 1 pintor trabaja 4 jornadas 1 h, entonces cobra $640/8 = 80$ €.

Si 1 pintor trabaja 1 jornada 1 h, entonces cobra $80/4 = 20$ €.

Si 1 pintor trabaja 3 jornadas 1 h, entonces cobra $20 \cdot 3 = 60$ €.

Si 1 pintor trabaja 3 jornadas 10 h, entonces cobra $60 \cdot 10 = 600$ €.

Si 2 pintores trabajan 3 jornadas 10 h, entonces cobrarán en total $600 \cdot 2 = 1\,200$ €.

7 **Álvaro percibe 750 € mensuales por su trabajo como dependiente en una tienda. El dueño decide aumentar su salario en un 10 % y él decide apuntarse al gimnasio, que le cuesta 50 € mensuales. ¿De cuántos euros más dispone Álvaro al mes? ¿Qué tanto por ciento representa este aumento respecto del sueldo que cobraba?**

La subida de salario de Álvaro es un 10 % de $750 = 0{,}1 \cdot 750 = 75$ € al mes.

Como se gasta 50 € en el gimnasio, el incremento de lo que dispone es: $75 - 50 = 25$ €.
Es decir, que tras pagar el gimnasio dispondría de $750 + 25 = 775$ €,

esto equivale a un incremento con respecto a lo que disponía antes de
$\left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot 750 = 775 \Rightarrow \frac{a}{100} = \frac{775}{750} - 1 = 0{,}033$, es decir, un porcentaje de un 3,3 %.

8 **Ana deposita durante un año al 4 % anual los 28 000 € de que dispone. Al terminar el año añade al capital los intereses obtenidos y efectúa un nuevo depósito anual en las mismas condiciones. ¿Qué cantidad percibirá al final del segundo año?**

El interés al finalizar el primer año es: $I = 0{,}04 \cdot 28\,000 = 1\,120$ €

El capital al inicio del segundo año es: $28\,000 + 1\,120 = 29\,120$ €

El interés al finalizar el segundo año es: $I = 0{,}04 \cdot 29\,120 = 1\,164{,}80$ €

La cantidad percibida al acabar el segundo año es: $29\,120 + 1\,164{,}80 = 30\,284{,}80$ €

9 **¿Qué capital poseerá al cabo de 7 años una persona que efectúa un depósito de 10 000 € a un interés compuesto anual del 4 %?**

Aplicamos la fórmula que nos da el capital final teniendo en cuenta que los intereses son compuestos: $10\,000 \cdot 1{,}04^7 \approx 13\,159$ €

5 Polinomios

5.1. Monomios. Polinomios

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^n donde a es un número, n es un entero no negativo y x es un símbolo, que se llama *variable*. Por convenio, $ax^0 = a$. Si a es no nulo, el exponente n se llama *grado* del monomio ax^n.

Un **polinomio** es una suma de monomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

de modo que $a_n \neq 0$ y n es el mayor de los exponentes, llamado *grado* del polinomio $P(x)$, que se escribe $gr(P) = n$. Los polinomios de la forma $P(x) = a_0$ se llaman *constantes*, y los números $a_0, \ldots, a_n$ se llaman *coeficientes* de $P(x)$.

Se dice que a_n es el **coeficiente director** de $P(x)$ y que a_0 es su **término independiente.** Los polinomios cuyo coeficiente director es 1 se llaman **mónicos.**

1 **Escribe los siguientes polinomios ordenando sus monomios en orden creciente respecto de su grado y determinar su grado. ¿Cuánto valen sus coeficientes directores?**

$$p_1(x) = 5x^2 + 2 + 7x^5, \quad p_2(x) = x^2 + 2x^3 + 4, \quad p_3(x) = x^4 + x^3 + 2$$

Los polinomios dados se reescriben así:

$$p_1(x) = 2 + 5x^2 + 7x^5, \quad p_2(x) = 4 + x^2 + 2x^3, \quad p_3(x) = 2 + x^3 + x^4$$

Y sus grados son 5, 3 y 4, respectivamente. Sus coeficientes directores son 7, 2 y 1.

2 **Expresa como polinomio en la variable x:**

a) El área de un rectángulo de altura x cm y cuya base es el triple de su altura.

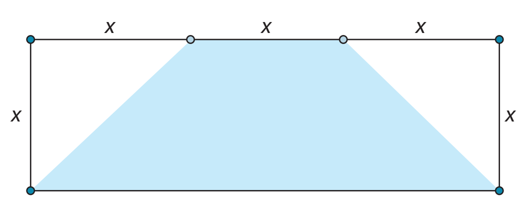
$x \cdot 3x = 3x^2$

b) El volumen de un ortoedro de altura 7 cm y de base un cuadrado de lado x cm.

$x^2 \cdot 7 = 7x^2$

3 **Calcula el grado del monomio que expresa el área azul de la figura.**

El área del rectángulo es $3x \cdot x = 3x^2$, mientras que el área de cada uno de los triángulos rectángulos de las esquinas es $\frac{x^2}{2}$. Y la suma de las áreas de ambos triángulos es x^2. El área que buscamos es la diferencia $P(x) = 3x^2 - x^2 = 2x^2$, que es de grado 2.



Evaluación de polinomios. Dado un número r, el resultado de **evaluar** el polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

en $x = r$ es el número:

$$P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n$$

También se dice que $P(r)$ es el **valor numérico** del polinomio $P(x)$ en $x = r$. En particular, $P(0) = a_0$ es el término independiente del polinomio $P(x)$.

4 Completa la tabla calculando el valor numérico de los polinomios dados en los números que se piden:

	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$x^2 - x$	6	2	0	0	2
$x^3 + x^2 - 2x$	0	2	0	0	8
$10x^2 + 5x - 1$	29	4	−1	14	49
$x^5 - x$	−30	0	0	0	30
$5x + 4$	−6	−1	4	9	14
$x^2 + 10x$	−16	−9	0	11	24

5 ¿Cuál es el término independiente de un polinomio $P(x)$ si $P(0) = 9$?

El término independiente de un polinomio coincide con su valor numérico para $x = 0$, luego en este caso el término independiente es 9.

6 Si el valor numérico del polinomio $P(x) = 2 + 5x - 3x^2 + ax^3$ en $x = -2$ es 4, ¿cuál es el valor de a?

Imponemos la condición $P(-2) = 4$, esto es:

$$4 = 2 + 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2)^3 = 2 - 10 - 12 - 8a \iff 24 = -8a \iff a = -3$$

Se dice que un número r es **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(r) = 0$.

Ejemplo: El número 3 es raíz del polinomio $P(x) = x - 3$, porque $P(3) = 0$

7 Calcula el valor de a sabiendo que $x = 1$ es raíz del polinomio $P(x) = 7 - ax^2 + x^3$.

Al evaluar en $x = 1$ se tiene

$$0 = P(1) = 7 - a \cdot 1^2 + 1^3 = -a + 8 \Rightarrow a = 8$$

5.2. Operaciones con polinomios

La suma de dos polinomios se realiza **coeficiente a coeficiente,** es decir, dados los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ y } Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

su **suma** es el polinomio $P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$.

Observa que $gr[P(x) + Q(x)] \leq gr[P(x)]$ y $gr[P(x) + Q(x)] \leq gr[Q(x)]$

Ejemplo: Sean $P(x) = 1 + x + 7x^2 + 2x^3$ y $Q(x) = 4 + 2x + 5x^2$, su polinomio suma es:

$$P(x) + Q(x) = (1 + 4) + (1 + 2)x + (7 + 5)x^2 + (2 + 0)x^3 = 5 + 3x + 12x^2 + 2x^3$$

8 **Dados los polinomios $P(x) = -3 + 2x - 5x^2 + 7x^3$ y $Q(x) = 12 + 2x^2 - 7x^3$ calcula el polinomio suma $P(x) + Q(x)$ e indicar cuál es su grado.**

$P(x) + Q(x) = (-3 + 12) + (2 + 0)x + (-5 + 2)x^2 + (7 - 7)x^3 = 9 + 2x - 3x^2$ de grado 2.

El **producto** del polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ por el número λ es el polinomio:

$$(\lambda P)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \dots + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda a_nx^n$$

cuyos coeficientes son el resultado de multiplicar por λ los coeficientes de $P(x)$.

Conviene observar que, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y números λ, μ y r, al evaluar en $x = r$ se tiene $(\lambda P + \mu Q)(r) = \lambda P(r) + \mu Q(r)$.

9 **Escribe el polinomio $(\lambda P + \mu Q)(x)$ donde $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $P(x) = 1 + 3x^2 + x^3$ y $Q(x) = 7 - 3x + 2x^5$.**

Sin más que aplicar la definición se obtiene:

$$(\lambda P + \mu Q)(x) = 2(1 + 3x^2 + x^3) + 3(7 - 3x + 2x^5) = 23 - 9x + 6x^2 + 2x^3 + 6x^5$$

10 **Completa las casillas que hemos dejado en blanco:**

$$\left(3 + \boxed{-2}\, x^2 + \boxed{6}\, x^3 - 5x^4\right) \cdot (-2) = \boxed{-6} + 4x^2 - 12x^3 + \boxed{10}\, x^4$$

$$\left(7 - 8x + \boxed{5}\, x^2 - 3x^4\right) + \left(\boxed{-2}\, x + 3x^2 + \boxed{7}\, x^3 - x^4\right) = \boxed{7} - 10x + 8x^2 + 7x^3 + \boxed{-4}\, x^4$$

$$\left(3 + \boxed{4}\, x - 2x^2 + 5x^3 - x^4\right) - \left(\boxed{1} - 2x + \boxed{7}\, x^3 + 3x^4\right) = 2 + 6x + \boxed{-2}\, x^2 - 2x^3 + \boxed{-4}\, x^4$$

La **multiplicación** o **producto** de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio, que denotamos $P(x) \cdot Q(x)$, cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y que se calcula aplicando la propiedad distributiva a los monomios. Conviene observar que dados polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y un número r, al evaluar en $x = r$ se tiene:

$$(PQ)(r) = P(r)Q(r)$$

Ejemplo: dados los polinomios $P(x) = 1 + 2x$ y $Q(x) = 7 - 3x^2 + x^3$ su producto es:

$$(PQ)(x) = (1 + 2x)(7 - 3x^2 + x^3) =$$
$$= 7 - 3x^2 + x^3 + 14x - 6x^3 + 2x^4 =$$
$$= 7 + 14x - 3x^2 - 5x^3 + 2x^4$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & -\,3x^2 & & +\,7 \\
 & & & 2x & +\,1 \\
\hline
 & x^3 & -\,3x^2 & & +\,7 \\
2x^4 & -\,6x^3 & & +\,14x & \\
\hline
2x^4 & -\,5x^3 & -\,3x^2 & +\,14x & +\,7
\end{array}$$

11 **Multiplica los polinomios $P(x) = 1 + x + x^2$ y $Q(x) = 1 - x + x^2$.**

Aplicamos directamente la definición de producto y obtenemos

$$(PQ)(x) = (1 + x + x^2)(1 - x + x^2) = 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 + x^2 - x^3 + x^4 = 1 + x^2 + x^4$$

12 **Dados los polinomios $P(x) = 3 - 2x - x^3$ y $Q(x) = -x + 4x^2 - 5x^3$ calcula el valor numérico del polinomio $P(x) \cdot Q(x)$, producto de los polinomios dados, en $x = -2$.**

Conviene observar que no es necesario efectuar el producto de los polinomios dados pues $(P \cdot Q)(-2) = P(-2) \cdot Q(-2)$. Así, como:

$$P(-2) = 3 - 2 \cdot (-2) - (-2)^3 = 3 + 4 + 8 = 15 \text{ y}$$

$$Q(-2) = -(-2) + 4(-2)^2 - 5(-2)^3 = 2 + 16 + 40 = 58$$

resulta $(P \cdot Q)(-2) = P(-2) \cdot Q(-2) = 15 \cdot 58 = 870$.

Teorema de la división de polinomios. Dados dos polinomios no nulos $D(x)$ y $d(x)$ existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$ y $gr(R) < gr(d)$

Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ se llaman **cociente** y **resto,** respectivamente, de la división de $D(x)$ entre $d(x)$.

Ejemplo: Calcularemos el cociente y el resto de la división del polinomio:

$$D(x) = 7 - 5x + x^2 \text{ entre } d(x) = x - 2.$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -\,5x & +\,7 & x - 2 \\
\cline{4-4}
-x^2 & +\,2x & & x - 3 \\
\cline{1-3}
 & -3x & +\,7 & \\
 & 3x & -\,6 & \\
\cline{2-3}
 & & 1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = x - 3$ es el cociente y $R(x) = 1$ el resto.

13 Calcula el cociente y el resto de la división del polinomio:

$$D(x) = 2 - 3x - 7x^2 + 3x^3 + 5x^4 \text{ entre } d(x) = -1 + x^2$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +\,3x^3 & -\,7x^2 & -\,3x & +\,2 & x^2 - 1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +\,5x^2 & & & 5x^2 + 3x - 2 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & -\,2x^2 & -\,3x & +\,2 & \\
 & -3x^3 & & +\,3x & & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & & +\,2 & \\
 & & 2x^2 & & -\,2 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

lo que significa que $Q(x) = 5x^2 + 3x - 2$ es el cociente y $R(x) = 0$ el resto.

Regla de Ruffini. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $d(x) = x - a$, podemos emplear la regla de Ruffini, que veremos con un ejemplo.

Ejemplo: Realizaremos la división del polinomio $P(x) = 2 + 3x^2 + x^4$ entre el polinomio $d(x) = x - 3$ aplicando la regla de Ruffini.

Se trazan dos líneas perpendiculares y se escriben los coeficientes de $P(x)$, ordenados y sin omitir términos nulos. Escribimos $a = 3$ al lado izquierdo de la línea vertical y bajo la línea inferior colocamos el primer coeficiente:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & & & & \\ \hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (1) por el que se ha colocado a la izquierda (3). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & & & \\ \hline
 & 1 & 3 & & &
\end{array}
$$

El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & 9 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & 12 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & 9 & 36 & \\ \hline
 & 1 & 3 & 12 & 36 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & 9 & 36 & 108 \\ \hline
 & 1 & 3 & 12 & 36 & 110
\end{array}
$$

El último número se corresponde con el resto de la división mientras que los demás son los coeficientes del cociente. En nuestro caso, el cociente de la división es el polinomio:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 36 \text{ y el resto } r = 110.$$

14 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $P(x) = 24 - 19x - 2x^2 + x^3$ entre $x - 1$.

Aplicamos la regla de Ruffini:

Esto implica que el cociente de la división es

$Q(x) = -20 - x + x^2$ y el resto es $r = 4$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 24 \\ 1 & & 1 & -1 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 4 \end{array}$$

b) $P(x) = 5 - x^3$ entre $x + 2$.

Aplicamos la regla de Ruffini:

Por tanto, el cociente de la división es

$Q(x) = -4 + 2x - x^2$ y el resto es $r = 13$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & & 2 & -4 & 8 \\ \hline & -1 & 2 & -4 & 13 \end{array}$$

Teorema del resto: El resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre otro $d(x) = x - a$ mónico de grado 1 es $P(a)$, es decir, es el **valor numérico** del polinomio $P(x)$ en $x = a$. En efecto, el grado del resto es menor que $gr(d) = 1$, luego es constante, digamos r. Si $Q(x)$ es el cociente se tiene $P(x) = (x - a)Q(x) + r$, y evaluando ambos miembros en $x = a$, obtenemos:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + r = r$$

Del Teorema del resto se deduce que un polinomio $P(x)$ es múltiplo del polinomio $x - a$ si y solo si a es raíz de $P(x)$.

15 Calcula el resto de la siguiente división $(-3x^{40} - 2x^{20} + x + 1) : (x + 1)$.

Aplicando el teorema del resto obtenemos que el resto de la división es el valor númerico del polinomio $P(x) = -3x^{40} - 2x^{20} + x + 1$ en $x = -1$, esto es:

$$P(-1) = -3(-1)^{40} - 2(-1)^{20} + (-1) + 1 = -5$$

16 ¿Cuál es el valor de k si el resto de la división del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + kx - 13$ entre $x - 5$ es 3?

Aplicando el teorema del resto deducimos que el resto de la división es el valor númerico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + kx - 13$ en $x = 5$, esto es:

$$3 = P(5) = 5^3 - 5^2 + 5k - 13 = 5k - 87, \text{ o sea, } 5k = 90, \text{ es decir, } k = 18.$$

17 Calcula el valor de k para que $x = 3$ sea raíz del polinomio $P(x) = -x^3 + 2x^2 - x + k$.

Debemos imponer que $P(3) = 0$, esto es:

$$0 = P(3) = -3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 + k = -27 + 18 - 3 + k = -12 + k \iff k = 12$$

5.3. Productos notables

Algunos de los productos notables más importantes son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

18 **Completa las casillas que hemos dejado en blanco.**

a) $\left(x-\boxed{5}\right)^2 = x^2 + 25 - \boxed{10}x$ **b)** $\left(\boxed{2x}+1\right)^2 = 4x^2 + \boxed{1} + 4x$ **c)** $\left(x-\boxed{8}\right)^2 = x^2 + 64 - \boxed{16}x$

Un problema difícil en general es factorizar completamente un polinomio, es decir, escribirlo como producto de otros que ya no se pueden factorizar más. Sin embargo, algunos ejemplos son muy sencillos y podemos resolverlos empleando reiteradamente la regla de Ruffini, las identidades notables, sacando factor común…

Ejemplo 1: Vamos a emplear reiteradamente la regla de Ruffini para factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 20 \\ 1 & & 1 & -1 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-1)(-20 - x + x^2)$$

De nuevo, al dividir $Q(x) = x^2 - x - 20$ entre $x + 4$, resulta:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & 20 \\ -4 & & -4 & -20 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

luego $Q(x) = (x+4)(x-5)$ y, finalmente:

$$P(x) = (x-1)(x+4)(x-5)$$

Ejemplo 2: Vamos a factorizar el polinomio $F(x) = 9x^6 - 6x^5 + x^4$. Sacando primero factor común, y empleando a continuación la segunda de las identidades notables se tiene:

$$F(x) = 9x^6 - 6x^5 + x^4 = x^4(3x-1)^2$$

19 **Factoriza los polinomios $F(x) = 9x^6 - 25x^4$ y $G(x) = 3x^5 - 48x$.**

Sacamos factor común y empleamos algunas de las identidades notables:

$$F(x) = 9x^6 - 25x^4 = x^4(9x^2 - 25) = x^4\left[(3x)^2 - 5^2\right] = x^4(3x-5)(3x+5)$$

$$G(x) = 3x^5 - 48x = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2+4)(x^2-4) = 3x(x^2+4)(x+2)(x-2)$$

20 Factoriza el polinomio $P(x) = 4 - 2x - 2x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5$.

Como $P(1) = 0$ dividimos $P(x)$ entre $x - 1$ mediante la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x) = (x-1)(x^4 - x^3 - 2x - 4)$$

Denotando $Q(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ se tiene $Q(-1) = 0$ por lo que:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & & -1 & 2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$$

Si $F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ comprobamos que $F(2) = 0$, y por ello:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2+2)$$

En definitiva:

$$P(x) = 4 - 2x - 2x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2+2)$$

21 Factoriza el polinomio $P(x) = -8 + 14x - 3x^2 - 4x^3 + x^4$.

Como $P(1) = 0$ dividimos $P(x)$ entre $x - 1$ mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -3 & 14 & -8 \\ 1 & & 1 & -3 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow P(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 6x + 8)$$

Dividimos de nuevo entre $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow P(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x - 8)$$

Por último, las raíces del polinomio $x^2 - 2x - 8$ son $x = 4$ y $x = -2$, de donde se concluye que:

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x-4)$$

1 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? La suma de dos monomios es otro monomio:

a) Siempre **b)** Nunca **c)** A veces

La suma de los monomios $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = x^2$ no es un monomio, pero al sumar $P_1(x)$ con $P_3(x) = 2x$ se obtiene $P_1(x) + P_1(x) = 3x$, que es un monomio. Por tanto, la respuesta correcta es a veces.

2 Escribe la suma y la resta de los polinomios:

$$P(x) = x + 2x^3 + x^6 \quad \text{y} \quad Q(x) = 1 + 2x^2 + x^5 + x^6$$

La suma y resta de estos polinomios son:

$$(P+Q)(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^5 + 2x^6 \quad \text{y} \quad (Q-P)(x) = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^5$$

3 Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 3 - x + 4x^2$ en $x = 0$ y en $x = 1$.

Sin más que sustituir se obtiene:

$$P(0) = 3 - 0 + 4 \cdot 0^2 = 3 \quad \text{y} \quad P(1) = 3 - 1 + 4 \cdot 1^2 = 6$$

4 Comprueba que $x = 1$ es raíz del polinomio $P(x) = 1 + x^8 - 2x^{13}$.

Al evaluar $P(x)$ en $x = 1$ se obtiene $P(1) = 1 + 1^8 - 2 \cdot 1^{13} = 1 + 1 - 2 = 0$ luego 1 es raíz de $P(x)$.

5 Asocia cada polinomio con sus raíces:

Polinomio	Raíces
$f(x) = -2 + x + 8x^2 + 5x^3$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$
$g(x) = 6 - 11x - 26x^2 + 15x^3$	$\left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$
$h(x) = 2 - 5x - 18x^2 + 45x^3$	$\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, 2\right\}$

6 Multiplica los polinomios $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ y $Q(x) = 5 - x$.

Aplicamos directamente la definición de producto y obtenemos:

$$(PQ)(x) = (1 + 2x + 3x^2)(5 - x) = 5 + 10x + 15x^2 - x - 2x^2 - 3x^3 = 5 + 9x + 13x^2 - 3x^3$$

7 Calcula el cociente y el resto de la división del polinomio $D(x) = 4 - 3x^2 + x^4$ entre $d(x) = 1 + x^2$.

El cociente es el polinomio $Q(x) = -4 + x^2$ y el resto es $R(x) = 8$, ya que:

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^4 & -\,3x^2 & +\,4 & x^2+1 \\
\cline{4-4}
-x^4 & -\,x^2 & & x^2-4 \\
\cline{1-3}
 & -\,4x^2 & +\,4 & \\
 & 4x^2 & +\,4 & \\
\cline{2-3}
 & & 8 &
\end{array}
$$

8 Factoriza el polinomio $F(x) = 9x^3 + 6x^2 - 32x - 32$.

Puesto que $F(2) = 0$ dividimos $F(x)$ entre $x - 2$ mediante la regla de Ruffini y obtenemos:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 9 & 6 & -32 & -32 \\
2 & & 18 & 48 & 32 \\
\hline
 & 9 & 24 & 16 & 0
\end{array}
$$

es decir, $F(x) = (x - 2) \cdot G(x)$, donde $G(x) = 9x^2 + 24x + 16$. Empleando una de las identidades notables se tiene:

$$G(x) = 9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 + 4^2 = (3x + 4)^2$$

y, finalmente, $F(x) = (x - 2)(3x + 4)^2$.

9 Calcula el cociente y el resto de la división del polinomio $D(x) = 2 + x + x^3 + x^4$ entre $d(x) = 1 - x + x^2$.

El cociente es $Q(x) = 1 + 2x + x^2$, y el resto es $R(x) = 1$, ya que:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 + & x^3 + & x\;+ & 2 & x^2 - x + 1 \\
\cline{5-5}
-x^4 + & x^3 - & x^2 & & x^2 + 2x + 1 \\
\cline{1-4}
 & 2x^3 - & x^2 + & x + 2 & \\
 & -2x^3 + & 2x^2 - & 2x & \\
\cline{2-4}
 & & x^2 - & x + 2 & \\
 & & -x^2 + & x - 1 & \\
\cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

6 Ecuaciones e inecuaciones

6.1. Ecuaciones de primer y segundo grado

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de grado 1 con una incógnita tiene la forma:

$$ax = b$$

donde a y b son números reales, a es no nulo y x es la incógnita. La única solución de esta ecuación es: $x = \dfrac{b}{a}$

1 **Indica cuál de los siguientes números es solución de la ecuación $3x = 6$.**

a) $x = 0$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 2$

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se deduce que $x = 2$ es su única solución.

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de grado 2 con una incógnita tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, a es no nulo y x es la incógnita.

Para calcular los números reales x que satisfacen esta ecuación **completamos cuadrados:**

$$ax^2 + bx + c = 0 \overset{\cdot(4a)}{\Leftrightarrow} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama **discriminante** del polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ al número:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta = 0$ la única solución de la ecuación es: $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ la ecuación carece de soluciones reales.
- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2 Se quieren plantar árboles a lo largo de un paseo con una distancia de 8 m entre dos consecutivos. Se ha comenzado por plantar los árboles de los extremos, y se ha comprobado que distan 168 m.
¿Cuántos árboles quedan por plantar?

El número x de árboles que faltan por plantar cumple que $8(x+1)=168$, luego $8x+8=168$, es decir, $8x=160$, y por tanto, $x=20$.

Es decir, faltan 20 árboles por plantar.

3 Calcula, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

La ecuación tiene una única solución, pues el discriminante es:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 4=0$$

Dicha solución es $x=2$.

c) $x^2 + 5x + 7 = 0$

La ecuación $x^2+5x+7=0$ carece de soluciones reales pues:

$$\Delta=5^2-4\cdot 7=-3<0$$

4 Los nietos de Carmen se envían postales durante el verano. Cada uno de ellos envía una postal a los restantes. ¿Cuántos nietos tiene Carmen si han enviado 12 postales?

Si Carmen tiene x nietos cada uno ha enviado $x-1$ postales, porque no se envía postal a sí mismo.

Por tanto, el número de postales intercambiadas es $x(x-1)$, y se trata de encontrar las soluciones de la ecuación:

$$x(x-1)=12 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 12}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}$$

Como el número de nietos de Carmen no es negativo, deducimos que tiene $x=4$ nietos.

Un número $x = x_0$ es **solución** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ si y solo si $x = x_0$ es **raíz del polinomio** $P(x) = ax^2 + bx + c$.

5 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los números $x = 7$ y $x = 11$.**

Las raíces del polinomio:

$$P(x) = (x - 7) \cdot (x - 11) = x^2 - 18x + 77$$

son $x = 7$ y $x = 11$, luego $x^2 - 18x + 77 = 0$ es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son los números dados.

6 **Encuentra el polinomio mónico de segundo grado que tenga a $x = 1$ y $x = 9$ por raíces.**

Por el Teorema del resto, el polinomio buscado ha de ser múltiplo de los polinomios $x - 1$ y $x - 9$.

Luego el polinomio pedido es:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 9) = x^2 - 10x + 9$$

Identidades notables

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

7 **Calcula:**

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

b) $(2x - 3x^2)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3x^2) + (3x^2)^2 = 4x^2 - 12x^3 + 9x^4$

c) $(x^3 + 4x) \cdot (x^3 - 4x) = (x^3)^2 - (4x)^2 = x^6 - 16x^2$

d) $(-2x - 5)^2 = (-2x)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

e) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$

f) $(3x^6 - x^2)^2 = (3x^6)^2 - 2 \cdot (3x^6) \cdot (x^2) + (x^2)^2 = 9x^{12} - 6x^8 + x^4$

6.2. Resolución de ecuaciones mediante ensayo y error

Resolver una ecuación mediante ensayo y error consiste en elegir un candidato a solución y comprobar si efectivamente lo es.

- En caso afirmativo, habremos resuelto el problema.
- En caso contrario, se repite el proceso con un segundo candidato.
- Procedemos así sucesivamente, hasta encontrar la solución o una aproximación a la misma.

Obsérvese que la elección de los candidatos a posibles soluciones no debe ser arbitraria. Conviene seguir algún algoritmo de modo que cada paso suponga una mejor aproximación a la solución.

Ejemplo:

Buscamos un número entero que satisfaga que al elevarlo al cubo y sumarle su doble obtenemos el cuádruple de su cuadrado menos tres.

Lo anterior se traduce en que debemos encontrar una solución entera de la ecuación:

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 3 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$$

O lo que es igual, una raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

Observamos que:

$$P(2) = -1 < 0 \text{ y } P(10) = 623 > 0$$

Esto nos lleva a ensayar con un valor mayor que $x_1 = 2$ y menor que $x_2 = 10$, por ejemplo con el punto medio $x_3 = 6$:

$$P(6) = 87 > 0$$

Repetimos el ensayo con el punto medio de $x_1 = 2$ y $x_3 = 6$, esto es, con $x_4 = 4$.

Así, como $P(4) = 11 > 0$, volvemos a intentarlo ahora con el punto medio de $x_1 = 2$ y $x_4 = 4$, es decir con $x_5 = 3$.

Pero $P(3) = 0$, luego hemos encontrado el número buscado.

Obsérvese que tal y como hemos visto en el tema anterior, las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ son divisores del término independiente, que es 3; luego, otro modo de emplear el método de ensayo y error es probar si alguno de los divisores enteros de 3, es decir, alguno de los números ± 1, ± 3 es solución de la ecuación.

8 **Calcula las edades de dos hermanos sabiendo que su producto es 28 aœs y la suma de sus cuadrados es 65 aœs.**

Expresamos 28 como producto de dos factores de números naturales de todas las formas posibles, es decir:

$$28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$$

Si denotamos por x la edad del menor y por y la del mayor, de lo anterior deducimos que los candidatos a solución son:

- $x = 1$; $y = 28$, pero $1^2 + 28^2 = 785 \neq 65$
- $x = 2$; $y = 14$, pero $2^2 + 14^2 = 200 \neq 65$
- $x = 4$; $y = 7$, que satisface $4^2 + 7^2 = 65$

Por tanto, las edades de los dos hermanos son 4 y 7 años.

9 **Encuentra las soluciones enteras de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 5x - 20 = 0$.**

Los candidatos a solución entera de la ecuación anterior son los divisores enteros de -20, estos son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

Denotamos $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 20$ y evaluamos:

$P(-1) = -30$	$P(1) = -18$	$P(2) = -18$	$P(-2) = -54$
$P(4) = 0$	$P(-4) = -168$	$P(5) = 30$	$P(-5) = -270$
$P(10) = 630$	$P(-10) = -1\,470$	$P(20) = 6\,480$	$P(-20) = -9\,720$

Por tanto, la única raíz entera de la ecuación es $x = 4$.

10 **Calcula, mediante ensayo y error, dos enteros positivos consecutivos cuyo producto es 306.**

Si x es el menor de los números buscados, se trata de resolver la ecuación de segundo grado $x(x + 1) = 306$.

En lugar de resolver esta ecuación razonamos de otro modo, dándonos cuenta de que como x y $(x + 1)$ no son muy distintos, deben parecerse a:

$$\sqrt{306} \approx 17{,}5$$

De hecho $x = 17$ y $x + 1 = 18$ son los enteros buscados.

6.3. Otros tipos de ecuaciones

Ecuaciones bicuadradas

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las de la forma $\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ con $a \neq 0$. Para resolverlas se denota $y = x^2$ y se sustituye en la ecuación dada, lo que proporciona $ay^2 + by + c = 0$.

- Si $b^2 < 4ac$ esta ecuación carece de soluciones reales, y lo mismo le sucede a la de partida.
- Si $b^2 \geq 4ac$ las soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que las soluciones de la ecuación inicial son:

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{y_1};\ x_{3;4} = \pm\sqrt{y_2},\ \text{siempre que } y_i \geq 0$$

11 **Resuelve la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.**

Ponemos $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

Entonces, $x_{1;2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ *y* $x_{3;4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ *son las soluciones de la ecuación del enunciado.*

Ecuaciones polinómicas resolubles por factorización

En el tema anterior aprendimos a calcular las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Combinando esto con el método de resolución de las ecuaciones de segundo grado, se obtienen en algunos casos las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado superior.

Ejemplo:

Resolvamos la ecuación $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Las posibles raíces racionales del polinomio son ± 1, pues son los divisores enteros de su término independiente. Dividiendo por $x - 1$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ son: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación de partida son 1, $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

12 Resuelve la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

Es claro que $x = 1$ es una solución de la ecuación. Dividiendo por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, pues su discriminante es $\Delta = -3 < 0$, luego la única raíz real de $x^3 - 1 = 0$ es $x = 1$.

13 Encuentra todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Si $y = x^2$ la ecuación se convierte en $y^2 - 5y - 36 = 0$

Sus soluciones son:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4\cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$$

De este modo $x_{1;2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ son los únicos números reales que cumplen la ecuación del enunciado, ya que $x_{3;4} = \pm\sqrt{-4}$ no tiene raíces cuadradas reales.

b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

Las posibles raíces enteras del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ son ± 1, ± 2, pues estos son los únicos divisores de su término independiente.

Dividiendo por $x - 1$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x-1)\cdot(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

El segundo factor tiene a $x = -1$ por raíz, y resulta:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)\cdot(x^2 - 3x + 2)$$

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ son:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación de partida son $-1, 1$ (doble) y 2.

De hecho hemos demostrado que: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

Ecuaciones con fracciones algebraicas

Para resolver estas ecuaciones, multiplicamos los dos miembros por el polinomio que es mínimo común múltiplo de los polinomios que aparecen en los denominadores. Obtenemos así una ecuación polinómica.

Es importante comprobar que las soluciones obtenidas no anulan los denominadores.

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $0 = \frac{x}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ pasamos de miembro y factorizamos los denominadores, esto es:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{(x-3)\cdot(x+1)}$$

Multiplicamos ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $(x+1)^2 \cdot (x-3)$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$x\cdot(x-3) = (x-1)\cdot(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = x^2 - 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

14 **Resuelve la ecuación:** $\frac{x-2}{x^2+8x+7} = \frac{2x-5}{x^2-49} - \frac{x-2}{x^2-6x-7}$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$\frac{x-2}{(x+1)\cdot(x+7)} = \frac{2x-5}{(x+7)\cdot(x-7)} - \frac{x-2}{(x+1)\cdot(x-7)}$$

Y multiplicando por $(x+1)\cdot(x+7)\cdot(x-7)$ resulta:

$$(x-2)\cdot(x-7) = (2x-5)\cdot(x+1) - (x-2)\cdot(x+7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 2x^2 - 3x - 5 - x^2 - 5x + 14 \Leftrightarrow x = 5$$

15 **¿Tiene alguna solución la siguiente ecuación:** $0 = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$**?**

Multiplicando por x^2-1, la ecuación se convierte en:

$$0 = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)+2x-(x+1)}{x^2-1} = \frac{2x-2}{x^2-1} \Rightarrow 0 = 2x-2 \Rightarrow x = 1$$

Pero $x = 1$ anula dos denominadores, luego la ecuación no tiene soluciones.

6.4. Inecuaciones de primer y segundo grado

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Se llaman **soluciones de una inecuación** a todos los números reales que sustituidos en la incógnita, satisfacen la desigualdad.

16 **¿A cuáles de las soluciones de las siguientes inecuaciones pertenece $x = 3$?**

a) $3x - 7 \geq 0$

b) $x^2 - x + 4 < 0$

c) $x^3 - 2x^2 \leq 3x - 1$

d) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

Inecuación	Sustituimos $x = 3$ en la inecuación	¿Pertenece $x = 3$ a la solución?
$3x - 7 \geq 0$	$3 \cdot 3 - 7 = 2 \geq 0$	Sí
$x^2 - x + 4 < 0$	$3^2 - 3 + 4 = 10 < 0$	No
$x^3 - 2x^2 \leq 3x - 1$	$3^3 - 2 \cdot 3^2 \leq 3 \cdot 3 - 1 \Leftrightarrow 9 \leq 8$	No
$2x^2 - 5x - 3 \leq 0$	$2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 0 \leq 0$	Sí

Para resolver inecuaciones, resultan útiles las siguientes **propiedades** relativas al comportamiento de las desigualdades respecto de la suma y el producto.

Sean a, b y c tres números reales. Entonces:

- Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Si $a > 0$ y $b \leq c \Rightarrow ab \leq ac$
- Si $a < 0$ y $b \leq c \Rightarrow ab \geq ac$
- Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- Si $a > 0$ y $b < c \Rightarrow ab < ac$
- Si $a < 0$ y $b < c \Rightarrow ab > ac$

De aquí se desprenden unas **reglas** útiles para resolver inecuaciones, llamadas **de los signos:**

- El producto $\boldsymbol{ab > 0}$ si y solo si a y b son no nulos y tienen el mismo signo.
- El producto $\boldsymbol{ab \geq 0}$ si y solo si bien a o b son nulos, o bien son no nulos y tienen el mismo signo.
- El producto $\boldsymbol{ab < 0}$ si y solo si a y b son no nulos y tienen distinto signo.
- El producto $\boldsymbol{ab \leq 0}$ si y solo si bien a o b son nulos, o bien son no nulos y tienen distinto signo.

17 ¿Cuál de las siguientes inecuaciones carece de soluciones?

a) $3x^2 + 2 \geq 0$ **b)** $5x^2 + 10 < 0$ **c)** $15x - 45 \leq 0$

La inecuación $5x^2 + 10 < 0$ carece de soluciones pues es $x^2 \geq 0$ para cada número real x, luego: $5x^2 \geq 0 \Rightarrow 5x^2 + 10 \geq 10 > 0$

Las otras dos tienen soluciones; cualquier número real lo es de la primera y, por ejemplo, $x = 0$ lo es de la segunda.

Dos **inecuaciones** se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

donde $a \neq 0$

Para resolverlas emplearemos las propiedades anteriores sobre las desigualdades.

Ejemplo:

Resolvamos la siguiente inecuación: $\dfrac{3x+1}{3} - \dfrac{x-1}{2} \leq \dfrac{x+5}{12}$

Multiplicamos por 12 los dos miembros de la desigualdad:

$$4(3x+1) - 6(x-1) \leq x + 5$$

Eliminamos los paréntesis y simplificamos:

$$12x + 4 - 6x + 6 \leq x + 5 \Leftrightarrow 6x + 10 \leq x + 5$$

Se resta 10 a los dos miembros de la inecuación:

$$6x + 10 - 10 \leq x + 5 - 10 \Leftrightarrow 6x \leq x - 5$$

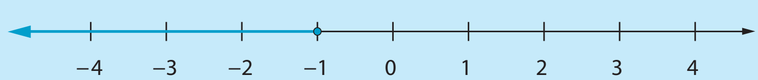
Restamos x en los dos miembros:

$$6x - x \leq x - 5 - x \Leftrightarrow 5x \leq -5$$

Multiplicamos por $\dfrac{1}{5}$ los dos miembros:

$$\left(\frac{1}{5}\right) \cdot 5x \leq \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) \Leftrightarrow x \leq -1$$

Escribimos la solución en forma de intervalo: $x \in (-\infty, -1]$



18 Escribe en forma de intervalo las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $3x + 4 \geq 0$

$3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

Por lo que las soluciones son los puntos del intervalo:

$$x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

b) $2x - 3 < 4x + 9$

$2x - 3 < 4x + 9 \Leftrightarrow 2x - 4x < 9 + 3 \Leftrightarrow -2x < 12 \Leftrightarrow x > -6$

Escribimos la solución en forma de intervalo:

$$x \in (-6, +\infty)$$

c) $4(x + 3) - 2x > 4x + 4$

$4(x + 3) - 2x > 4x + 4 \Leftrightarrow 4x + 12 - 2x > 4x + 4 \Leftrightarrow 2x + 12 > 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x > -8 \Leftrightarrow x < 4$

En forma de intervalo:

$$x \in (-\infty, 4)$$

d) $\frac{7x - 13}{2} \leq \frac{2x - 4}{5}$

$\frac{7x - 13}{2} \leq \frac{2x - 4}{5} \Leftrightarrow 5(7x - 13) \leq 2(2x - 4) \Leftrightarrow 35x - 65 \leq 4x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31x \leq 57 \Leftrightarrow x \leq \frac{57}{31}$

En forma de intervalo:

$$x \in \left(-\infty, \frac{57}{31}\right]$$

e) $\frac{x - 3}{5} + \frac{3x + 5}{2} \geq \frac{x}{4} - \frac{3x - 6}{2}$

$\frac{x - 3}{5} + \frac{3x + 5}{2} \geq \frac{x}{4} - \frac{3x - 6}{2} \Leftrightarrow 4(x - 3) + 10(3x + 5) \geq 5x - 10(3x - 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 12 + 30x + 50 \geq 5x - 30x + 60 \Leftrightarrow 34x + 38 \geq 60 - 25x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 59x \geq 22 \Leftrightarrow x \geq \frac{22}{59}$

Escribimos la solución en forma de intervalo:

$$x \in \left[\frac{22}{59}, +\infty\right)$$

Una **inecuación de segundo grado con una incógnita** es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas, donde $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c > 0;\ ax^2 + bx + c \leq 0;\ ax^2 + bx + c \geq 0$$

Para resolverlas, factorizamos sus polinomios y empleamos tablas, en las que estudiamos el signo de cada uno de los factores en los diversos intervalos en los que queda dividida la recta real por las raíces del polinomio.

Ejemplo:

Resolvamos la inecuación: $x^2 - 11x + 28 \leq 0$

Comenzamos calculando las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 11x + 28$, que son:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{cases} 7 \\ 4 \end{cases}$$

Esto implica, por el teorema del resto, que: $P(x) = (x - 4) \cdot (x - 7)$. Descomponemos la recta real en los siguientes intervalos disjuntos dos a dos: $(-\infty, 4)$, $(4, 7)$, $(7, +\infty)$

En cada uno de ellos es inmediato conocer el signo de los factores, y el de su producto $P(x)$ se calcula empleando la regla de los signos:

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, 7)$	7	$(7, +\infty)$
$(x - 4)$	–	0	+	+	+
$(x - 7)$	–	–	–	0	+
$(x - 4)(x - 7)$	+	0	–	0	+

Por tanto, la solución de la inecuación $x^2 - 11x + 28 \leq 0$ es $x \in [4, 7]$.

19 Resuelve la inecuación: $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$. Se tiene entonces la siguiente tabla de signos:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$(x - 2)$	–	0	+	+	+
$(x - 3)$	–	–	–	0	+
$(x - 2)(x - 3)$	+	0	–	0	+

Las soluciones son los puntos de la unión de dos intervalos abiertos:

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

Algunos polinomios de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ tienen **signo constante** en la recta real: son aquellos cuyo **discriminante es negativo.**

En tal caso las inecuaciones:

$$ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c > 0;\ ax^2 + bx + c \le 0;\ ax^2 + bx + c \ge 0$$

o carecen de soluciones, o bien tienen por solución el conjunto de todos los números reales.

20 Resuelve las inecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 5 \le 0$

El discriminante de $P(x) = x^2 - 4x + 5$ es $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 < 0$, luego, $P(x)$ tiene signo constante en la recta real.

Como $P(0) = 5 > 0$ entonces $P(x) > 0$ para cada número real x.

Por tanto esta inecuación carece de soluciones.

b) $x^2 - 6x + 9 \ge 0$

El discriminante del polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 9$ es $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$, luego este polinomio tiene una única raíz, que es 3.

Por tanto, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \ge 0$ para cada número real x, así que todos los números reales son solución de esta inecuación.

21 ¿Para qué valores del número real x tiene sentido la expresión $\sqrt{5x - 4 - x^2}$ como número real?

Se trata de averiguar qué valores de x cumplen $5x - 4 - x^2 \ge 0$, o sea $x^2 - 5x + 4 \le 0$.

Las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 4$ son $x = 1$ y $x = 4$ lo que implica que: $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 4)$. Analizamos su signo:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$(x - 1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 4)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x - 4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto, la expresión del enunciado tiene sentido como número real si y solo si x pertenece al intervalo cerrado $[1, 4]$

22 Un mago pide dinero a Juan; el mago triplica por arte de magia el dinero que le da, pero luego se queda con 50 € por el trabajo realizado, y le devuelve a Juan lo que queda. Juan mira el dinero recibido y observa que el mago le ha devuelto menos de 100 €. ¿Qué se puede decir de la cantidad que inicialmente Juan le dio al mago?

Si x es el número de € que Juan le dio al mago, este lo convirtió en $3x$, y le devolvió $3x - 50$ €.

Pero $3x - 50 < 100$, o sea $x < \dfrac{150}{3} = 50$.

Por tanto, Juan le dio al mago menos de 50 €.

23 El número de cerdos en una granja es mayor que el de ovejas más 2, y el de ovejas es mayor que el triple del de gallinas más 4. Sabiendo que el número total de animales de estas tres especies es menor que 76, ¿cuál es el máximo número de gallinas?

Si llamamos x al número de gallinas de la granja, el de ovejas es mayor que $3x + 4$, luego es mayor o igual que $3x + 5$ y el de cerdos es mayor que $3x + 7$, luego es mayor o igual que $3x + 8$.

Por tanto, el número total de animales de estas especies es mayor o igual que $x + (3x + 5) + (3x + 8) = 7x + 13$, pero es menor o igual que 75.

Como x es un número entero tenemos entonces:

$$7x + 13 \leq 75 \Rightarrow 7x \leq 62 \Rightarrow x \leq \frac{62}{7} \Rightarrow x \leq 8$$

Es decir, en la granja hay, a lo sumo, 8 gallinas.

24 Un niño tiene gomas, lápices y sacapuntas en su estuche. El número total de objetos es menor que 27, el número de gomas es mayor que el de sacapuntas más 2, y el de lápices es mayor que el doble del de gomas más 2. ¿Cuál es el número máximo de sacapuntas en el estuche?

Sea x el número de sacapuntas. El número de gomas es mayor que $x + 2$, luego mayor o igual que $x + 3$, y el número de lápices es mayor que $2(x + 3) + 2$, luego es mayor o igual que $2(x + 3) + 3 = 2x + 9$. Como el estuche tiene, a lo sumo, 26 objetos, tenemos:

$$x + (x + 3) + (2x + 9) \leq 26 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

Y como x es entero, se deduce que $x \leq 3$ es decir, a lo sumo hay 3 sacapuntas.

6 Evaluación

1 **El perímetro de un triángulo mide 13 cm. Calcula lo que mide cada lado sabiendo que el lado menor mide la mitad que el mayor y este mide 2 cm más que el mediano.**

Si x es la longitud en cm del lado menor, la longitud del lado mayor es $2x$, y el tercer lado mide $2x - 2$.

Por tanto: $x + (2x - 2) + 2x = 13 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$

En consecuencia, los lados de este triángulo miden 3, 4 y 6 cm.

2 **Dentro de 3 aœs mi edad será el cuadrado de la edad que tenía hace 3. ¿Cuántos aœs tengo?**

Si tengo actualmente x años hace 3 tuve $x - 3$, mientras que dentro de 3 años mi edad será $x + 3$. Por tanto:

$$x+3=(x-3)^2=x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}1\\6\end{cases}$$

La solución $x = 1$ carece de sentido, pues se desprende del enunciado que tengo al menos 3 años.

Por ello mi edad es de $x = 6$ años.

3 **Encuentra todos los números reales que cumplen la igualdad:**

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por el producto $(x + 1) \cdot (x + 4)$ de los denominadores, resulta la ecuación:

$$x(x+4)+x(x+1)=(x+1)\cdot(x+4) \Leftrightarrow x^2+4x+x^2+x=x^2+5x+4 \Leftrightarrow x^2=4$$

Luego las soluciones son $x = -2$ y $x = 2$.

4 **Encuentra las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números enteros consecutivos.**

Sean x, $x + 1$ y $x + 2$ las longitudes de los lados. Por el Teorema de Pitágoras:

$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=2x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$

Y las soluciones son: $x = 3$; $x = -1$. Como las longitudes de los lados son números positivos, la solución es $x = 3$.

Por tanto, los catetos de este triángulo miden 3u y 4u y la hipotenusa mide 5u.

5 **Calcula para qué números reales a, la ecuación $x^2 - ax + 9 = 0$ tiene una única solución.**

El discriminante $\Delta = a^2 - 4 \cdot 9$ del polinomio $P(x) = x^2 - ax + 9$ ha de ser nulo, luego $a^2 = 36$, por lo que los números buscados son $a = -6$ y $a = 6$. Entonces nos queda:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \text{ y } x^2 - 6x + 9 = (x+3)^2$$

6 **Encuentra tres números naturales impares consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los dos menores exceda en 9 al cuadrado del mayor.**

Tres números naturales impares consecutivos se escriben como $2x+1$, $2x+3$ y $2x+5$ donde x es un entero. Así la condición del enunciado se escribe:

$$(2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 9 + (2x+5)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 9 + 4x^2 + 20x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Como los números buscados han de ser positivos, la solución $x = -2$ no se tiene en cuenta, así que $x = 3$, por lo que los números buscados son 7, 9 y 11.

7 **Calcula todos los números reales que cumplen $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.**

No hace falta resolver ninguna ecuación para darse cuenta de que cada número real x cumple que $x^4 \geq 0$ y $x^2 \geq 0$, por lo que $x^4 + 7x^2 + 12 \geq 12 > 0$, así que la ecuación del enunciado no tiene ninguna solución real.

8 **Encuentra todos los números reales que cumplen la inecuación $\dfrac{x-4}{x+5} \geq 0$.**

Este cociente se anula, únicamente, para $x = 4$ y no tiene sentido para $x = -5$.

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-4)}{(x+5)}$	$+$		$-$	0	$+$

Por tanto, las soluciones de la inecuación del enunciado son: $x \in (-\infty, -5) \cup [4, +\infty)$

7 Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

7.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

$$ax + by = c$$

donde *a*, *b* y *c* son números reales, y *x* e *y* son las incógnitas. Se llaman **soluciones** de esta ecuación lineal a todos los pares de números reales (x_0, y_0) tales que:

$$ax_0 + by_0 = c$$

La representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta del plano, cuyos puntos tienen por coordenadas las soluciones de la ecuación.

Sistemas de dos ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas, que escribimos así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se llaman **soluciones** de este sistema a todos los pares de números reales que son soluciones de ambas ecuaciones lineales.

1 **Indica cuáles de los siguientes pares son solución de la ecuación:**

$$3x + 2y = 5$$

a) (1, 2) **b)** (3, –2) **c)** (1, 1)

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se observa que (1, 2) no es solución y, sin embargo, tanto (3, –2) como (1, 1) sí lo son.

2 **Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:**

a) $-3x + y = -3$

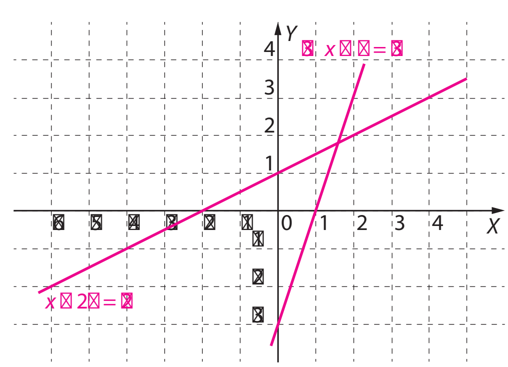
$-3x + y = -3 \Rightarrow y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	–3	0	3

b) $x - 2y = -2$

$x - 2y = -2 \Rightarrow y = \dfrac{x+2}{2}$

x	–2	0	2
y	0	1	2



3 **¿Cuáles de los pares (–11, 12), (12, 11) y (11, 12) son solución del sistema dado?**

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Sin más que sustituir estos valores en la ecuación dada se observa que (–11, 12) y (12, 11) no son solución.

Sin embargo (11, 12) sí lo es.

Tipos de sistemas

- La **solución** de un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** está formada por los puntos que comparten las rectas que representan a las ecuaciones del sistema.
- El sistema se llama **incompatible** si carece de soluciones, **compatible determinado** si tiene exactamente una solución y **compatible indeterminado** si tiene más de una.
- Se dice que dos **sistemas son equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Algunos criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones son:
  - Si multiplicamos o dividimos una de las ecuaciones del sistema por un número no nulo entonces el sistema resultante es equivalente al original.
  - Si a una de las ecuaciones del sistema le sumamos o restamos la otra multiplicada por un número no nulo entonces el sistema resultante es equivalente al original.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 5y = -44 \end{cases} \overset{\cdot(-4)}{\Rightarrow} \begin{cases} -4x - 4y = -40 \\ 4x + 5y = -44 \end{cases} \underset{2^a+1^a}{\Rightarrow} \begin{cases} -4x - 4y = -40 \\ y = -84 \end{cases} \overset{\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\Rightarrow} \begin{cases} -x - y = -10 \\ y = -84 \end{cases}$$

$$\overset{1^a+2^a}{\Rightarrow} \begin{cases} -x = -94 \\ y = -84 \end{cases} \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 94 \\ y = -84 \end{cases}$$

4 **¿Cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene más de una solución?**

Cada ecuación del sistema representa una recta del plano.

Si dos rectas del plano comparten más de un punto entonces son la misma recta, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, que son cada uno de los puntos de la recta que representa a la ecuación dada.

5 Explica cada uno de los pasos dados en la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = -4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \overset{a)}{\Rightarrow} \begin{cases} -3x + 9y = 12 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \overset{b)}{\Rightarrow} \begin{cases} 11y = 11 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \overset{c)}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \overset{d)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{d)}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ 3x = -3 \end{cases} \overset{e)}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

a) Multiplicamos la primera ecuación por −3.

b) A la primera ecuación le sumamos la segunda.

c) Multiplicamos por $\frac{1}{11}$ la primera ecuación.

d) A la segunda ecuación le sumamos la primera multiplicada por −2.

e) Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ la segunda ecuación.

Criterios de compatibilidad

El sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$:

- Es **compatible determinado** si y solo si se cumple que: $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$
- Es **compatible indeterminado** si y solo si los coeficientes son proporcionales, esto es, si y solo si existe un número real t tal que: $(a_1, b_1, c_1) = t \cdot (a_2, b_2, c_2)$
- Es **incompatible** si y solo si existe un número real t tal que: $(a_1, b_1) = t \cdot (a_2, b_2)$ pero $c_1 \neq t \cdot c_2$

Ejemplos:

El sistema $\begin{cases} 7x - y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ es compatible determinado pues: $7 \cdot 1 \neq 3 \cdot (-1)$

El sistema $\begin{cases} 12x - 21y = 33 \\ 4x - 7y = 11 \end{cases}$ es compatible indeterminado pues: $(12, -21, 33) = 3 \cdot (4, -7, 11)$

El sistema $\begin{cases} -8x + 6y = 2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$ es incompatible pues: $(-8, 6) = (-2) \cdot (4, -3)$ y $2 \neq (-2) \cdot 7$

6 Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x = 7 \\ -3x - y = 1 \end{cases}$

$2 \cdot (-1) \neq (-3) \cdot 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

b) $\begin{cases} -8x + 16y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

$(-8, 16) = (-8) \cdot (1, -2)$ y $-5 \neq (-8) \cdot 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible

c) $\begin{cases} 9x - 21y = 0 \\ 3x - 7y = 0 \end{cases}$

$(9, -21, 0) = 3 \cdot (3, -7, 0) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

7 Calcula el valor de *a* sabiendo que el sistema $\begin{cases} 6x + ay = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ es incompatible.

Para que el sistema no sea compatible determinado es necesario que:

$$6 \cdot 2 = 3a \Rightarrow a = 4$$

Como $(6, 4) = 2 \cdot (3, 2)$ y $3 \neq 2 \cdot 1$, el sistema es incompatible para $a = 4$.

8 Escribe un sistema incompatible, otro compatible determinado y otro compatible indeterminado.

Por ejemplo:

- El sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ es compatible indeterminado, pues: $(4, -2, 2) = 2 \cdot (2, -1, 1)$

  Tenemos que $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y $(x_1, y_1) = (0, -1)$ son dos soluciones distintas del mismo.

- El sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ es incompatible, pues: $(2, -1) = 1 \cdot (2, -1)$ y $1 \neq 1 \cdot 2$

- El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ es compatible determinado ya que: $1 \cdot 1 \neq 1 \cdot (-1)$

7.2. Métodos de sustitución, reducción e igualación

Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra.

Ejemplo: Resolvamos por el método de sustitución el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$, que es compatible determinado ya que: $3 \cdot 3 \neq 2 \cdot 2$.

1. Despejamos y en la primera ecuación: $y = \dfrac{1-3x}{2}$
2. Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$7 = 2x + 3 \cdot \left(\frac{1-3x}{2}\right) \Leftrightarrow 14 = 4x + 3 - 9x \Leftrightarrow 5x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-11}{5}$$

3. Sustituimos en la ecuación $y = \dfrac{1-3x}{2}$ el valor de x que hemos encontrado:

$$y = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-3\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)}{2} = \frac{5+33}{10} = \frac{19}{5}$$

4. Solución: $\left(\dfrac{-11}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$

9 **Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x + y = 13 \end{cases}$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x = 13 - y$. Sustituimos este valor en la primera:

$$2x - 3y = -14 \Leftrightarrow 2 \cdot (13 - y) - 3y = -14 \Leftrightarrow 26 - 5y = -14 \Leftrightarrow y = 8$$

Así $x = 13 - y = 13 - 8 = 5$. Por lo tanto la solución al sistema es: $(5, 8)$

b) $\begin{cases} 4x + 0{,}3y = 16{,}9 \\ 0{,}5x - 3y = -7 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 10 y la segunda por 2, de modo que tenemos:

$$\begin{cases} 4x + 0{,}3y = 16{,}9 \\ 0{,}5x - 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x + 3y = 169 \\ x - 6y = -14 \end{cases}$$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x = 6y - 14$. Sustituimos este valor en la primera:

$$40 \cdot (6y - 14) + 3y = 169 \Leftrightarrow 240y - 560 + 3y = 169 \Leftrightarrow 243y = 729 \Leftrightarrow y = 3$$

Así $x = 6y - 14 = 6 \cdot 3 - 14 = 4$. Por tanto, la solución al sistema es: $(4, 3)$

10 **La edad de un padre es hoy triple de la de su hijo. Dentro de 14 aœs será el doble de la que entonces tenga su hijo. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno?**

Denotamos por x e y los años que tienen actualmente el hijo y el padre, respectivamente.

Así: $\begin{cases} y = 3x \\ y + 14 = 2 \cdot (x + 14) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ -2x + y = 14 \end{cases}$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda: $-2x + 3x = 14 \iff x = 14$

De aquí concluimos que las edades del hijo y del padre son 14 y 42 años, respectivamente.

Mé todo de reducción

Consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por números adecuados de modo que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sean opuestos. Hecho esto se suman las ecuaciones resultantes, con lo que se obtiene una ecuación de grado 1 con una incógnita.

Ejemplo: Resolvamos por el método de reducción el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado puesto que $3 \cdot (-7) \neq 4 \cdot 8$. Multiplicamos la primera ecuación por 8 y la segunda por –3 y las sumamos:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 & \xrightarrow{\cdot 8} \\ 8x - 7y = 1 & \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{cases} \begin{cases} 24x + 32y = 56 \\ -24x + 21y = -3 \end{cases} \overset{1^a+2^a}{\Rightarrow} 53y = 53 \Rightarrow y = 1$$

Obtenido el valor $y = 1$ lo remplazamos en una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y resulta $3x + 4 \cdot 1 = 7$, así que $x = 1$.

11 **Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

Sumamos:

$9x = 18 \Rightarrow x = 2$

Sustituimos en la primera ecuación:

$2 \cdot 2 + y = 7 \Rightarrow y = 3$

b) $\begin{cases} 0{,}2x + 5y = 7 \\ 0{,}3x + 0{,}4y = 3{,}4 \end{cases}$

$\begin{cases} 0{,}2x + 5y = 7 & \xrightarrow{\cdot 30} & 6x + 150y = 210 \\ 0{,}3x + 0{,}4y = 3{,}4 & \xrightarrow{\cdot(-20)} & -6x - 8y = -68 \end{cases}$

Sumamos:

$142y = 142 \Rightarrow y = 1$

Sustituimos en la primera ecuación:

$0{,}2x + 5 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 0{,}2x = 2 \Rightarrow x = 10$

12 **En una fiesta hay 10 chicas más que chicos y, tras llegar 5 chicas más, el número de chicas es el doble del de chicos. ¿Cuántas personas había al comenzar la fiesta?**

Sean x el número de chicas al comenzar la fiesta e y el de chicos. Los datos del enunciado se traducen en el siguiente sistema: $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $y = 15$, luego, $x = y + 10 = 25$. Por tanto, al comenzar la fiesta había $x + y = 40$ personas.

Mé todo de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados obtenidos. Conseguimos así una ecuación con una incógita.

Ejemplo: Resolvamos por el método de igualación el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 7y = 10 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado pues $2 \cdot (-7) \neq 3 \cdot 3$. Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo x, en ambas ecuaciones: $x = \dfrac{-(1+3y)}{2}$, $x = \dfrac{10+7y}{3}$. Igualando ambas expresiones se tiene:

$$\frac{-(1+3y)}{2} = \frac{10+7y}{3} \Leftrightarrow -3(1+3y) = 2(10+7y) \Leftrightarrow -3-9y = 20+14y$$

Es decir, $23y = -23$, luego, $y = -1$. Para hallar el valor de x sustituimos:

$$x = \frac{10+7y}{3} = \frac{10+7\cdot(-1)}{3} = 1$$

13 **Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ -3x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5y - 8 \\ x = \dfrac{y-10}{3} \end{cases}$

Igualando ambas expresiones:

$5y - 8 = \dfrac{y-10}{3} \Leftrightarrow 15y - 24 = y - 10$

$\Leftrightarrow 14y = 14 \Leftrightarrow y = 1$

Para hallar el valor de x sustituimos:

$x = 5y - 8 = 5 \cdot 1 - 8 = -3$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9-5y}{3} \\ x = \dfrac{6-3y}{2} \end{cases}$

Igualando ambas expresiones:

$\dfrac{9-5y}{3} = \dfrac{6-3y}{2} \Leftrightarrow$

$18 - 10y = 18 - 9y \Leftrightarrow y = 0$

Para hallar el valor de x sustituimos:

$x = \dfrac{9-5y}{3} = \dfrac{9-5\cdot 0}{3} = 3$

14 **Una madre tiene 25 aœs más que su hijo, y dentro de 20 aœs la edad de la madre será doble que la del hijo. ¿Cuánto suman las edades actuales de madre e hijo?**

Si x e y son las edades actuales de la madre y del hijo medidas en años se tiene:

$$\begin{cases} x = y + 25 \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 25 \\ x = 2y + 20 \end{cases}$$

Por igualación, $y + 25 = 2y + 20 \Rightarrow y = 25 - 20 = 5$, mientras que $x = y + 25 = 30$.

Así, las edades actuales del hijo y su madre son 5 y 30 años, cuya suma es 35 años.

Algunos sistemas de dos ecuaciones de grado mayor que uno y con dos incógnitas son tratables por procedimientos muy elementales.

Ejemplo: $\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$. Sustituyendo el valor $y = \dfrac{10}{x}$ en la segunda ecuación queda:

$$x^2 - \left(\frac{10}{x}\right)^2 = 21 \Rightarrow x^2 - \frac{100}{x^2} - 21 = 0 \Rightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$x^2 = \frac{21 + \sqrt{21^2 + 400}}{2} = \frac{21 + 29}{2} = 25$$

De aquí se deduce que $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, y, por tanto: $y = \dfrac{10}{x} = \dfrac{10}{(\pm 5)} = \pm 2$

15 **Calcula las edades de ` lvaro e Irene sabiendo que su producto es 28 aœs, que la suma de los cuadrados de sus edades es 65 aœs y que ` lvaro es el mayor.**

Sean x e y las edades, expresadas en años, de ` lvaro e Irene respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x \cdot y = 28 \Rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 65 + 56 = 121 \Rightarrow x + y = 11 \\ x^2 + y^2 = 65 \Rightarrow (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 65 - 56 = 9 \Rightarrow x - y = 3 \end{cases}$$

Debemos resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \overset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

Por último: $y = 11 - x = 11 - 7 = 4$

Sus edades son, por tanto, 4 y 7 años.

7.3. Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones

El **método gráfico** para la resolución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, $(S): \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, consiste en representar las rectas de ecuaciones $r_1 \equiv a_1x + b_1y = c_1$ y $r_2 \equiv a_2x + b_2y = c_2$, y estudiar qué puntos comparten.

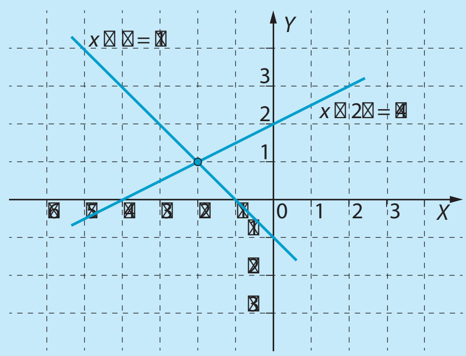
Pueden darse tres casos:

- Si las rectas r_1 y r_2 **se cortan** en un punto (x_0, y_0), **dicho punto es la solución del sistema.**
- Si las rectas r_1 y r_2 **son paralelas,** entonces el **sistema es incompatible.**
- Si las rectas r_1 y r_2 **son coincidentes,** entonces el **sistema es compatible indeterminado** y las soluciones son todos los puntos de la recta.

Ejemplos:

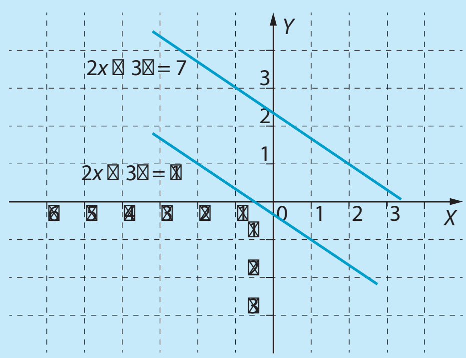
$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Al representar las dos rectas observamos que estas se cortan en el punto (–2, 1), que es, por tanto, la solución al sistema.



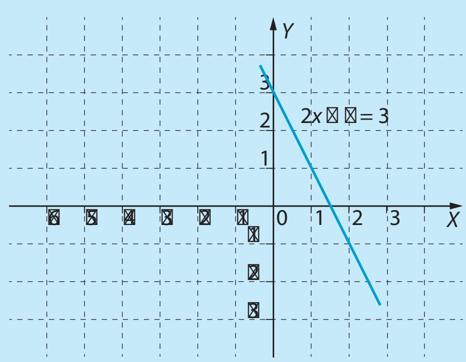
$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Las rectas dibujadas son paralelas, luego no comparten ningún punto. Por tanto, el sistema es incompatible: no tiene solución.



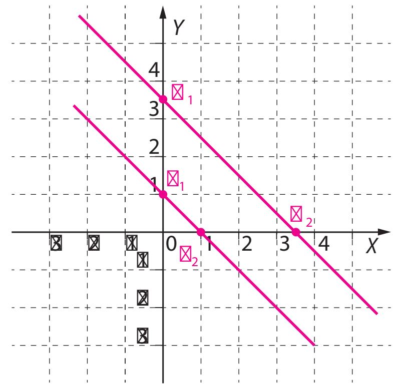
$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$

Las dos ecuaciones son equivalentes pues la segunda es el triple de la primera. Por ello al representarlas observamos que se trata de la misma recta. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, ya que cualquier punto de dicha recta es solución del sistema.



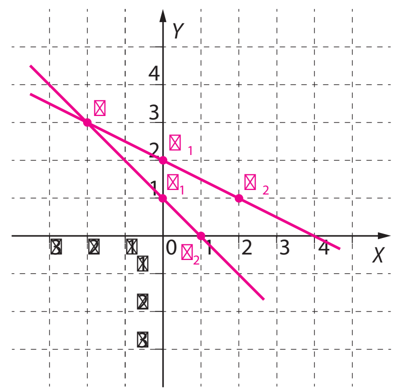
16 Decide gráficamente la naturaleza de los siguientes sistemas de ecuaciones y encuentra sus soluciones cuando las tengan:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$



La primera de estas rectas pasa por los puntos $P_1 = (0, 1)$ y $P_2 = (1, 0)$, mientras que la segunda pasa por los puntos $Q_1 = \left(0, \frac{7}{2}\right)$ y $Q_2 = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Al dibujar las rectas se observa que son paralelas, luego el sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

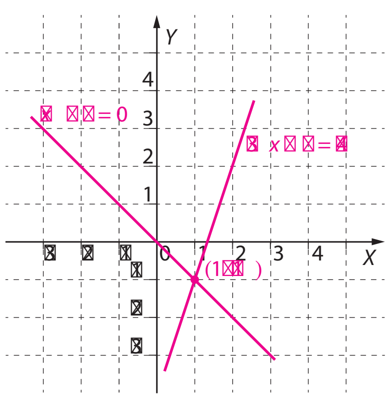


La segunda de las rectas de este sistema, que llamamos l, es la que une los puntos $M_1 = (0, 2)$ y $M_2 = (2, 1)$. Observamos que las rectas se cortan en el punto $P = (-2, 3)$, que es, por tanto, la única solución de este sistema.

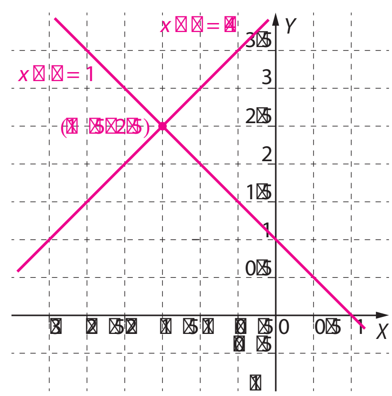
17 Resuelve los siguientes sistemas por el método gráfico:

a) $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$



Solución: $(1, -1)$

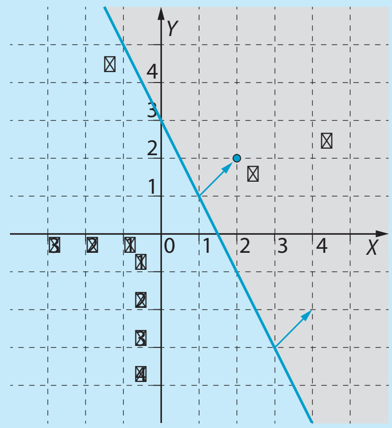


Solución: $(-1{,}5;\ 2{,}5)$

7.4. Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado

Semiplanos

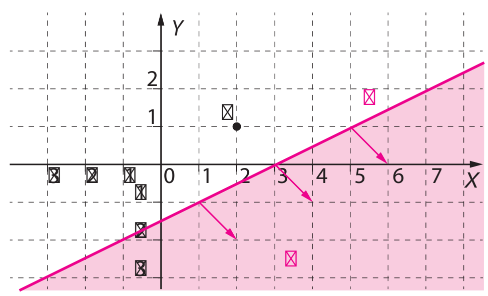
Dados los números reales *a*, *b* y *c* tales que $(a, b) \neq (0, 0)$, el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $ax + by = c$ es una recta, que llamamos *r*. Los conjuntos de puntos tales que $ax + by$ ☒ c o $ax + by \leq c$ son los **semiplanos cerrados definidos por *r*,** y los conjuntos de puntos tales que $ax + by > c$ o $ax + by < c$ son los **semiplanos abiertos definidos por *r*.** Los primeros contienen a la recta *r*, y los segundos no la cortan.



Ejemplo: En la figura ilustramos el caso en que la recta *r* es $2x + y = 3$. Para decidir cuál de los dos semiplanos en que *r* descompone al plano es ☒: $2x + y$ ☒ 3 basta tomar un punto cualquiera del plano que no pertenezca a *r*, por ejemplo el punto de coordenadas $P = (2, 2)$, y comprobar si está o no en el semiplano ☒. En este caso $2 \cdot 2 + 2 = 6$ ☒ 3, luego ☒ es el semiplano que contiene a *P*.

18 **Sombrea el semiplano cerrado ☒: $x - 2y$ ☒ 3. ¿Contiene al punto $P = (2, 1)$?**

Dibujamos la recta $r: x - 2y = 3$. Al sustituir las coordenadas del punto P en la inecuación, observamos que $2 - 2 \cdot 1 = 0 < 3$, luego el semiplano ☒ es, de los dos en que r divide al plano, el que no contiene a P.

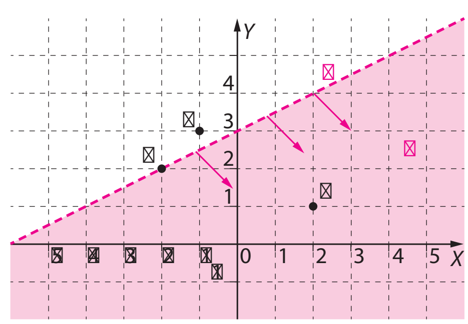


19 **Representa el semiplano ☒: $x - 2y > -6$. ¿Contiene a los puntos $P = (2, 1)$, $Q = (-2, 2)$ y $R = (-1, 3)$?**

Dibujamos la recta $r: x - 2y = -6$. Al sustituir las coordenadas del punto P en la inecuación, observamos que $2 - 2 \cdot 1 = 0 > -6$ luego, de los dos semiplanos en que r divide al plano, ☒ es el que contiene a P. Como Q ☒ r y el semiplano ☒ es abierto, entonces Q ☒ ☒.

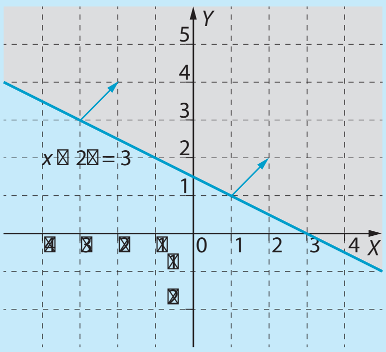
Por último, R ☒ ☒ pues:

$$(-1) - 2 \cdot 3 = -7 < -6$$

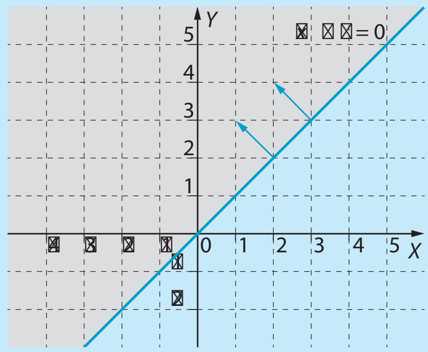


Un **sistema de inecuaciones de primer grado** es un conjunto de inecuaciones de primer grado. La **solución de un sistema de inecuaciones** está formada por los puntos de la región del plano obtenida como intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones que constituyen el sistema.

Ejemplo: Para resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ representaremos las regiones del plano que son solución de cada una de las inecuaciones que lo constituyen.

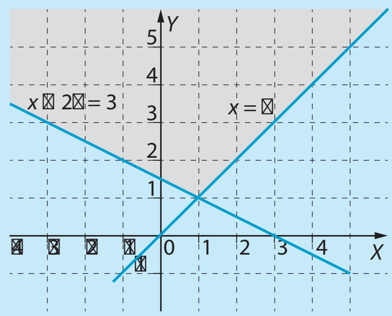


Solución de la inecuación $x + 2y \geq 3$



Solución de la inecuación $x - y \leq 0$

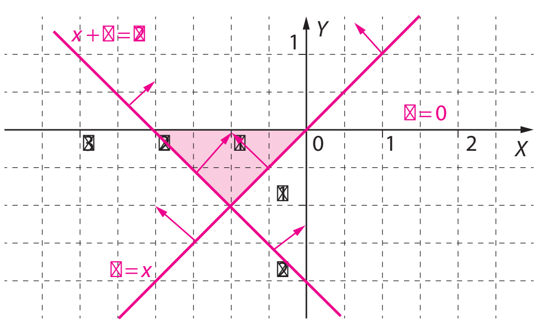
La solución al sistema es la región común a las dos anteriores.

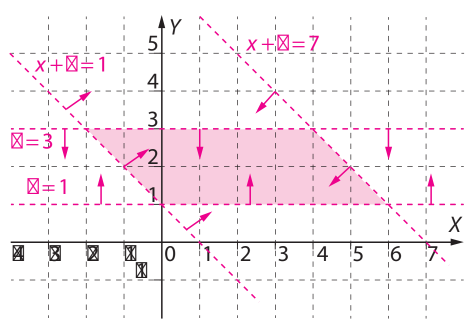


20 Representa la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y < 7 \\ x + y > 1 \\ y < 3 \\ y > 1 \end{cases}$





Problemas

21 En un número de dos cifras, el dígito de las decenas es el triple que el de las unidades. Además, si se invierte el orden de las cifras obtenemos un número 18 unidades menor. ¿Cuál es el número original?

Denotamos por x e y las cifras de las decenas y las unidades respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 10x + y = 10y + x + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 9x - 9y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de sustitución, de modo que:

$$x - y = 2 \overset{x=3y}{\Rightarrow} 3y - y = 2 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1;\ x = 3y \overset{y=1}{\Rightarrow} x = 3$$

En consecuencia, el número de partida es 31.

22 Leia y Chewbacca juegan una partida de ajedrez. El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el empleado por Chewbacca, mientras que en los restantes movimientos ambos emplearon 35 minutos.

Sabiendo que el tiempo utilizado por Chewbacca en el total de la partida es 3/4 partes del utilizado por Leia, calcula el tiempo empleado por cada jugador.

Denotamos x e y el tiempo, expresado en minutos, empleado por Leia y Chewbacca en ejecutar los primeros 14 movimientos, respectivamente.

- *El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el empleado por Chewbacca, esto es:* $x = 3y$
- *En el total de la partida Leia gasta* $x + 35$ *min, y Chewbacca* $y + 35$ *min.*
- *El tiempo utilizado por Chewbacca en el total de la partida es* $\frac{3}{4}$ *partes del utilizado por Leia, por lo que* $y + 35 = \frac{3 \cdot (x + 35)}{4}$*, es decir:* $4y + 140 = 3x + 105$

En consecuencia, x e y son solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x - 4y = 35 \end{cases} \overset{x=3y}{\Rightarrow} 3 \cdot 3y - 4y = 35 \Rightarrow 5y = 35 \Rightarrow y = 7$$

Por tanto, Chewbacca emplea: $y + 35 = 7 + 35 = 42$ *min, mientras que Leia necesita:*

$$x + 35 = 3y + 35 = 21 + 35 = 56 \text{ min}$$

23 La edad de una madre es el cuadrado de la de su hijo, y ambas suman 30 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Si el hijo tiene x años y la madre tiene y años su suma es $x+y=30$.

Además $y=x^2$ *esto es, se trata de resolver el sistema:* $\begin{cases} x+y=30 \\ y=x^2 \end{cases}$

Por sustitución:

$$x^2+x-30=0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x=\frac{-1+\sqrt{1^2+4\cdot 30}}{2}=\frac{-1+11}{2}=5$$

Por otro lado, $y=x^2=25$ *luego las edades del hijo y de la madre son 5 y 25 años, respectivamente.*

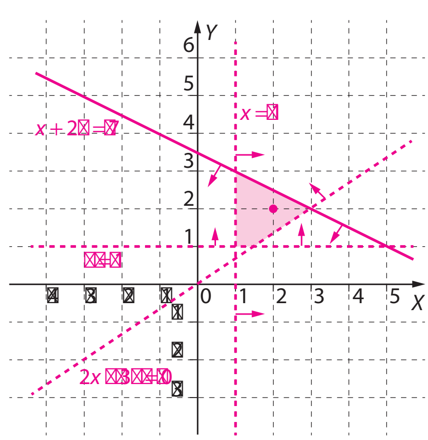
24 Pedro va a la ferretería con 7 € y quiere comprar tornillos y tuercas.
La caja de tornillos cuesta 1 € mientras que el precio de la de tuercas es de 2 €.
Pedro quiere que el triple del número de cajas de tuercas exceda al doble del número de cajas de tornillos. ¿Cuántas cajas de cada tipo comprará sabiendo que lleva más de una caja de cada tipo?

Denotamos por x e y el número de cajas de tornillos y tuercas, respectivamente, que compra Pedro. Como solo lleva 7 € ha de ser $x+2y\le 7$.

Por otro lado como el triple del número de cajas de tuercas excede al doble del número de cajas de tornillos, debe ser $2x<3y$.

Además, debe llevar más de una caja de cada tipo, esto es, $x>1$ *e* $y>1$.

Representamos la región que es solución del sistema y observamos que el único punto de coordenadas enteras de dicha región es (2, 2). $\begin{cases} x+2y\le 7 \\ 2x<3y \\ x>1 \\ y>1 \end{cases}$



Luego Pedro ha de comprar dos cajas de tornillos y dos cajas de tuercas.

Evaluación

1 Calcula los números reales a y b sabiendo que ninguno de los dos sistemas siguientes es compatible: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ bx + (a+1)y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + by = 1 \\ 3x + ay = 3 \end{cases}$

Como los sistemas no son compatibles se tiene $3 \cdot (a+1) = 2b$ y $a = 3b$, por lo que se trata de resolver el siguiente sistema en las incógnitas a y b: $\begin{cases} 3a - 2b = -3 \\ a = 3b \end{cases}$

Lo resolvemos por el método de sustitución:

$$3 \cdot (3b) - 2b = -3 \Rightarrow 7b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{7} \Rightarrow a = 3b = \frac{-9}{7}$$

2 Resuelve mediante el método de reducción el sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = -7 \end{cases} \overset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} 3y = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{3}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \overset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} 3x = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{3}$$

3 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y = 22 \\ x^2 - y^2 = 88 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación $x = 22 - y$, y sustituimos el valor obtenido en la segunda:

$$(22 - y)^2 - y^2 = 88 \Leftrightarrow 484 + y^2 - 44y - y^2 = 88 \Leftrightarrow 396 = 44y \Leftrightarrow y = 9$$

Calculamos el valor de la otra incógnita: $x = 22 - y = 22 - 9 = 13$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

En la primera ecuación ya tenemos la incógnita y despejada. Al sustituirla en la segunda se tiene una ecuación bicuadrada:

$$x^2 + (x^2)^2 = 20 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 20 = 0 \overset{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} x^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 80}}{2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

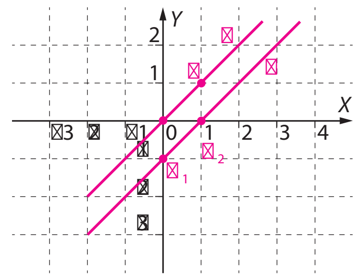
Sustituimos en la primera ecuación para hallar el valor de $y = x^2 = (\pm 2)^2 = 4$.

Las soluciones del sistema son $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.

4

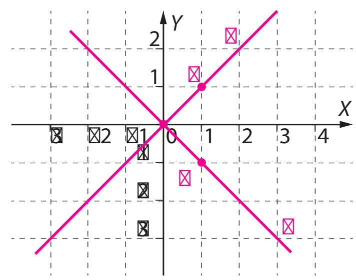
Decide gráficamente la naturaleza de los siguientes sistemas de ecuaciones y encuentra sus soluciones cuando las tengan:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$



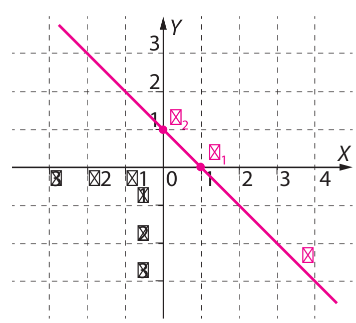
La primera de las rectas del sistema, que llamamos r, pasa por los puntos $O = (0, 0)$ y $P = (1, 1)$, y la segunda, que llamamos s, pasa por $Q_1 = (0, -1)$ y $Q_2 = (1, 0)$. Se observa que son rectas paralelas, luego este sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$



La segunda de las rectas de este sistema, que llamamos l, une O con $M = (1, -1)$ y corta a r en el origen de coordenadas. Se trata, por tanto, de un sistema compatible determinado cuya única solución es $x = 0$, $y = 0$.

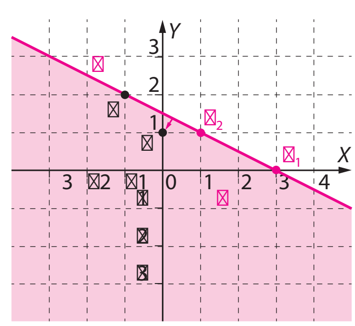
c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$



Ambas rectas pasa por los puntos $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (0, 1)$, luego el tercer sistema es compatible indeterminado.

5

Sombrea el semiplano ⊠: $x + 2y \leq 3$ y decide si contiene al punto $P = (0, 1)$. ¿Contiene ⊠ al punto $Q = (-1, 2)$?



La recta r: $x + 2y = 3$ pasa por los puntos $P_1 = (3, 0)$ y $P_2 = (1, 1)$. Al sustituir las coordenadas de P en la ecuación de r se tiene r: $0 + 2 \cdot 1 = 2 < 3$, luego el punto P pertenece al semiplano ⊠, que, también contiene al punto Q, pues este pertenece a r.

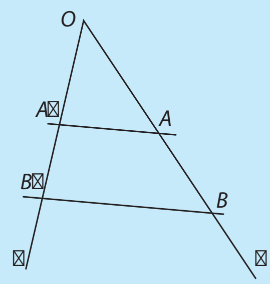
8 Semejanza

8.1. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

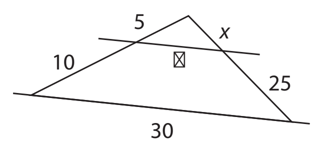
Si dos rectas paralelas cortan a dos rectas *r* y *s* que se cortan en un punto *O*, los segmentos determinados por las paralelas en *r* son proporcionales a los segmentos determinados por las paralelas en *s*:

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}$$

Además, se cumple que: $\frac{OA}{OB}=\frac{AA'}{BB'}$.



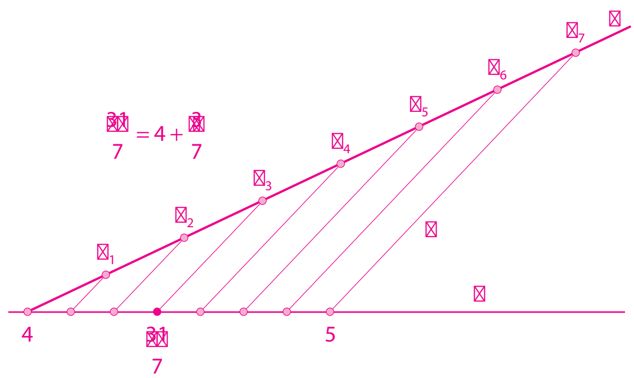
1 **Calcula el valor de las longitudes *x* e *y* de la figura.**



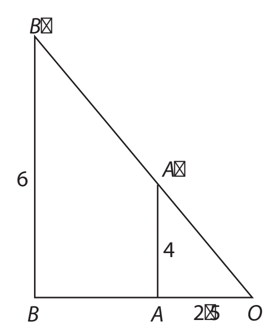
$$\frac{x}{5}=\frac{25}{10}\Rightarrow x=12{,}5;\ \frac{y}{30}=\frac{5}{10+5}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=10$$

2 **Utiliza el Teorema de Tales, una regla y un compás para determinar en la recta *r* el número $\frac{31}{7}$.**

Como $\frac{31}{7}=4+\frac{3}{7}$ se trata de dividir el segmento de extremos 4 y 5 en 7 partes iguales y tomar 3. Para ello trazamos una semirrecta auxiliar *s* que corta a *r* en el punto 4, a partir del cual llevamos con un compás sobre la semirrecta *s* siete segmentos de igual longitud. Sean $P_1, \dots, P_7$ los extremos de dichos segmentos y *t* la recta que une P_7 con 5. Por el teorema de Tales el punto en que se cortan *r* y la paralela a *t* que pasa por P_3 es $\frac{31}{7}$.



3 **Dos estacas clavadas en el suelo miden 4 y 6 m, y en cierto instante sus sombras están alineadas y sus extremos coinciden. Si la sombra de la estaca menor mide 2,5 m, ¿qué distancia hay entre las bases de las estacas?**

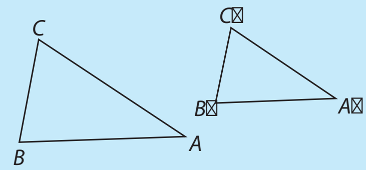


Calculamos primero la sombra *BO* de la estaca mayor:

$\frac{BO}{2{,}5}=\frac{6}{4}\Rightarrow BO=\frac{15}{4}$, por lo que la distancia *BA* entre las bases es:

$$BA=BO-AO=\frac{15}{4}-\frac{5}{2}=\frac{5}{4}=1{,}25\text{ m}$$

Triángulos semejantes. Dos triángulos de vértices $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ **en ese orden,** se dicen **semejantes** si se cumplen las igualdades:

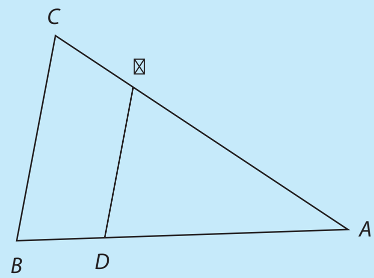


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Este cociente común se llama **razón de semejanza.**

En tal caso los ángulos de ambos triángulos son iguales dos a dos: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$

El Teorema de Tales se puede reformular diciendo que, dados un triángulo $\triangle ABC$ y dos puntos D y E situados en los lados AB y AC respectivamente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes si y sólo si los segmentos BC y ED son paralelos.



Criterios de semejanza de triángulos. Consideremos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$

- Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ y $\widehat{B} = \widehat{B'}$, entonces los triángulos son semejantes.
- Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ entonces los triángulos son semejantes.

4 **Los lados de un triángulo miden 2, 3 y 4 cm. ¿Cuánto miden los lados de un triángulo semejante al anterior sabiendo que su lado más largo mide 12 cm?**

El lado más largo del segundo triángulo es 3 veces mayor que el lado más largo del primer triángulo, por lo que lo mismo sucede con los otros dos lados.

Por tanto, basta con multiplicar por 3 los lados del triángulo original. Los lados del segundo triángulo miden 6, 9 y 12 cm.

5 **Dos ángulos de un triángulo miden 25° y 85° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 25° y 70° ¿Son semejantes ambos triángulos?**

El otro ángulo del primer triángulo mide:

$$180° - (25° + 85°) = 70°$$

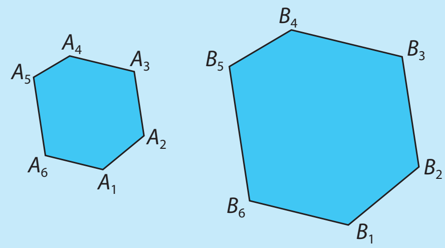
Me ntras que el otro ángulo del segundo triángulo mide:

$$180° - (25° + 70°) = 85°$$

Luego los dos triángulos tienen los mismos ángulos y, por tanto, son semejantes.

8.2. Relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes

Polígonos semejantes. Dos polígonos con n vértices, $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ son *semejantes* si sus ángulos son iguales dos a dos, o sea, $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, \ldots, \widehat{A_n} = \widehat{B_n}$ y, además, sus lados son proporcionales:



$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \cdots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = r$$

- Este cociente común, r, se llama **razón de semejanza** de ambos polígonos.
- Se dice que $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ son lados **homólogos** a los lados $B_1B_2, \ldots, B_{n-1}B_n, B_nB_1$.

En el caso del triángulo la igualdad, dos a dos, de los ángulos, es una condición que se deduce de la proporcionalidad de las longitudes de sus lados, pero esto no es cierto si $n > 3$.

6 **Los lados de un pentágono miden 4, 5, 6, 8 y 10 cm. ¿Cuánto mide el perímetro de otro pentágono semejante con razón de semejanza 5 y uno de cuyos lados mide 30 cm?**

Los lados del segundo pentágono son más largos que los del primero, pues el lado mayor de éste mide 10 cm y uno de los lados del segundo mide 30 cm. Por tanto, las longitudes de los lados del segundo pentágono miden 5 veces más que los del primero, esto es, miden 20, 25, 30, 40 y 50 cm, así que su perímetro mide:

$$p = 20 + 25 + 30 + 40 + 50 = 165 \text{ cm}$$

7 **Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:**

a) Dos cuadrados cualesquiera son semejantes.

Verdadera, pues los cuatro ángulos de un cuadrado son rectos. Si los lados del primer cuadrado miden a y los del segundo b, los cocientes de lados homólogos valen $\frac{a}{b}$.

b) Dos rombos cualesquiera son semejantes.

Falsa. Si los lados de un rombo miden a y los del segundo miden b, los cocientes de longitudes de lados homólogos valen $\frac{a}{b}$. Sin embargo, si uno de los rombos es un cuadrado y el otro no, los ángulos del primero no son iguales a los del segundo.

c) Existen cuadriláteros no semejantes que comparten sus ángulos.

Verdadera; basta considerar dos rectángulos, uno cuadrado y el otro no.

La **razón entre las áreas de dos figuras semejantes** es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La **razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes** es igual al cubo de la razón de semejanza.

Es decir, si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

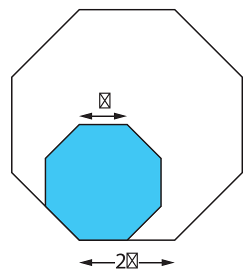
8 **¿Cuánto vale el cociente de las áreas de dos triángulos equiláteros si el perímetro del primero mide 24 cm y el del segundo mide 4 cm?**

Dos triángulos equiláteros son semejantes. La razón de semejanza de ambos triángulos es $r = \frac{24}{4} = 6$, luego el cociente de sus áreas es $r^2 = 36$.

9 **¿Cuál es la razón de semejanza de dos pentágonos cuyas áreas miden 20 cm² y 4 cm²?**

La razón de semejanza r cumple que $r^2 = \frac{20}{4} = 5$ luego $r = \sqrt{5}$.

10 **En la figura siguiente, los dos octógonos son regulares y con sus lados respectivamente paralelos. Calcula la razón entre el área del octógono menor y el mayor.**

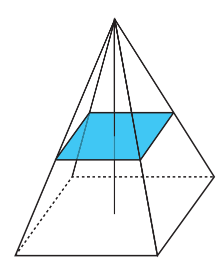


Los dos octógonos son semejantes y la razón de semejanza r cumple que $r = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, luego la razón entre sus áreas es $r^2 = \frac{1}{4}$.

11 **Partimos de un cubo cuyas aristas miden 2 cm y construimos otro semejante al primero aumentando 1 cm cada una de sus aristas ¿En cuánto aumenta su volumen?**

Por este procedimiento hemos construido un cubo semejante al primero de modo que el cociente de las longitudes de las aristas es $r = \frac{3}{2}$. Por tanto, el cociente de los volúmenes de ambos cubos es $r^3 = \frac{27}{8}$. Como el volumen inicial es $2^3 = 8$ cm³, el del segundo cubo es $\left(\frac{27}{8}\right) \cdot 8 = 27$ cm³, por lo que el volumen ha aumentado $27 - 8 = 19$ cm³.

12 **La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide. Calcula la relación que existe entre los volúmenes de la pirámide original y la pirámide semejante a la original que resulta tras el corte.**



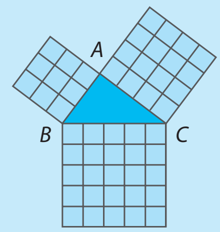
La razón de semejanza entre las aristas de ambas pirámides es 2, luego el volumen de la pirámide mayor es $8 = 2^3$ veces el de la menor.

8.3. Teorema de Pitágoras. Teorema del cateto y de la altura

Sean *A, B* y *C* los vértices de un triángulo y *a, b* y *c* las longitudes de los lados opuestos. Entonces, el triángulo *BAC*:

$$\text{es rectángulo en } A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

El lado más largo se llama **hipotenusa** y los otros dos son los **catetos.**



13 **Completa los datos de la siguiente tabla, que recoge las longitudes de los lados de ciertos triángulos rectángulos.**

a: hipotenusa	*b*: un cateto	*c*: otro cateto
17 cm	8 cm	$\sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$ cm
$\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$ cm	21 cm	20 cm
37 cm	$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35$ cm	12 cm

14 **¿Son semejantes dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas miden 17 y 34 cm respectivamente, y de los que se conocen las longitudes de uno de sus catetos: 8 cm la del primero y 30 cm la del segundo?**

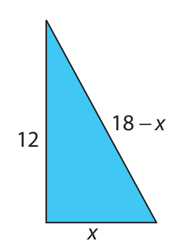
Los catetos restantes miden $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm y $\sqrt{34^2 - 30^2} = 16$ cm, luego los triángulos son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{17}{34} = \frac{15}{30} = \frac{8}{16}$.

15 **El perímetro de un triángulo rectángulo es de 30 cm y uno de los catetos mide 12 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?**

La diferencia entre el perímetro y la longitud del cateto conocido es $30 - 12 = 18$ cm luego si la longitud del otro cateto es x, la de la hipotenusa es $18 - x$. Por el teorema de Pitágoras,

$$12^2 + x^2 = (18 - x)^2 = 324 - 36x + x^2 \Rightarrow 36x = 180 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

y la hipotenusa mide $18 - 5 = 13$ cm.



Las longitudes *a, b* y *c* de los lados de un triángulo ⊠ permiten decidir si es **acutángulo,** esto es, que sus tres ángulos son agudos, u **obtusángulo,** es decir, que alguno de sus ángulos es obtuso. Si *b* y *c* son menores o iguales que *a* se tiene:

⊠ es acutángulo $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$ y ⊠ es obtusángulo $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

16 **Las longitudes de los lados de tres triángulos se indican a continuación. Indica cuál de ellos es rectángulo, cuál es acutángulo y cuál es obtusángulo.**

a) $a = 37$ cm, $b = 35$ cm, $c = 12$ cm.

Como $37^2 = 1\,369 = 1225 + 144 = 35^2 + 12^2$ ⊠ El triángulo es rectángulo.

b) $a = 14$ cm, $b = 13$ cm, $c = 12$ cm.

Como $14^2 = 196 < 169 + 144 = 13^2 + 12^2$ ⊠ El triángulo es acutángulo.

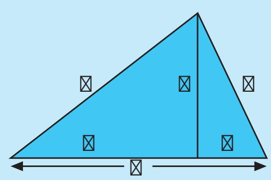
c) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm.

Como $7^2 = 49 > 16 + 16 = 4^2 + 4^2$ ⊠ El triángulo es obtusángulo.

Sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo en *A*, y sean *m* y *n* las longitudes de las proyecciones sobre la hipotenusa de ambos catetos. Entonces:

Teorema del cateto:

$c^2 = a \cdot n; \quad b^2 = a \cdot m$



Teorema de la altura:

$h^2 = n \cdot m$

17 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 124 cm y 93 cm, respectivamente. Halla la longitud de la hipotenusa, la de las proyecciones de los catetos sobre ella y la de la altura sobre dicha hipotenusa.**

Sean $b = 124$ y $c = 93$ las longitudes, en cm, de los catetos. Entonces, por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es:

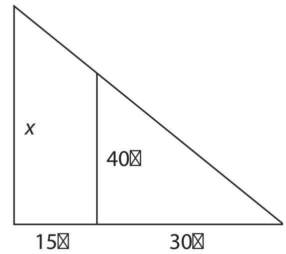
$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{124^2 + 93^2} = \sqrt{24\,025} = 155 \text{ cm}$$

Sean *m* y *n* las longitudes, en cm, de las proyecciones de ambos catetos sobre la hipotenusa y *h* la de la altura. Entonces:

$$m = \frac{b^2}{a} = \frac{124^2}{155} = \frac{496}{5} = 99{,}2 \text{ cm} \qquad n = \frac{c^2}{a} = \frac{93^2}{155} = \frac{279}{5} = 55{,}8 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{mn} = \sqrt{\frac{496}{5} \cdot \frac{279}{5}} = \frac{372}{5} = 74{,}4 \text{ cm}$$

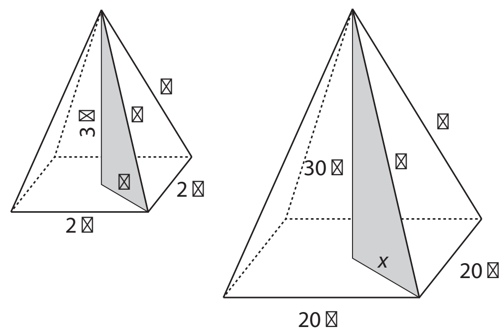
26 En cierto instante las sombras de dos edificios están alineadas y los extremos de las mismas coinciden. ¿Cuánto mide el edificio mayor si la distancia entre los pies de los edificios es 15 m y la altura del edificio menor y su sombra miden 40 y 30 m, respectivamente?



Con las notaciones de la figura, y por el teorema de Tales,

$\frac{40}{30}=\frac{x}{30+15}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 45}{3}\Rightarrow x=60$, luego $x=60$ m es la altura del edificio mayor.

27 ¿Cuánto miden las diagonales de las bases de estas pirámides? ¿Y sus aristas laterales? ¿Son semejantes las caras laterales de las pirámides? En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es el cociente de sus volúmenes?



Con las notaciones de la figura se tiene:

$$2^2+2^2=(2z)^2\Rightarrow 8=4z^2\Rightarrow z=\sqrt{2}\ \text{ y }\ 20^2+20^2=(2x)^2\Rightarrow 800=4x^2\Rightarrow x=10\sqrt{2}$$

luego las diagonales miden $d_1=2z=2\sqrt{2}$ m y $d_2=2x=20\sqrt{2}$ m.

Aplicamos de nuevo el Teorema de Pitágoras, para obtener la longitud de las aristas:

$$t=\sqrt{3^2+z^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}\text{ m e } y=\sqrt{30^2+x^2}=\sqrt{30^2+(10\sqrt{2})^2}=10\sqrt{11}\text{ m}$$

Por tanto, las caras laterales de ambas pirámides, son semejantes pues son triángulos isósceles y cumplen que $\frac{y}{t}=\frac{10\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=10=\frac{20}{2}$, y la razón de semejanza es $r=10$.

Los volúmenes de ambas pirámides y su cociente son:

$$Vol_1=20^2\cdot\frac{30}{3}=4\,000\ \text{ y }\ Vol_2=2^2\cdot\frac{3}{3}=4\Rightarrow\frac{Vol_1}{Vol_2}=1000=r^3$$

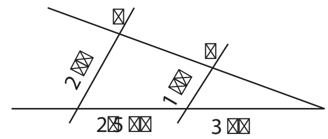
28 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, expresadas en cm, sabiendo que la hipotenusa mide 2 cm más que el cateto mayor y éste mide una unidad menos que el triple del cateto menor.

Llamamos x a la longitud del cateto menor. La del cateto mayor es $3x-1$, y la de la hipotenusa mide $3x+1$. Por el Teorema de Pitágoras:

$$(3x+1)^2=(3x-1)^2+x^2\Rightarrow x^2-12x=0\Rightarrow x(x-12)=0$$

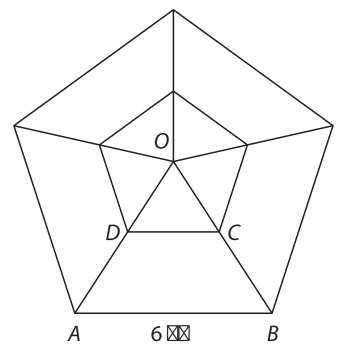
Como $x\neq 0$ se deduce que $x=12$ cm, luego el otro cateto mide 35 cm y la hipotenusa 37 cm.

29 ¿Son paralelas las rectas r y s de la figura?



Si las rectas r y s fuesen paralelas se cumpliría, por el teorema de Tales, la igualdad $\frac{2{,}5+3}{3}=\frac{2}{1}$ que es falsa, luego r y s no son paralelas.

30 En cada uno de los segmentos que unen el centro de un pentágono regular, cuyos lados miden 6 cm, con sus vértices seleccionamos el punto medio. ¿Cuánto mide el perímetro del nuevo pentágono?

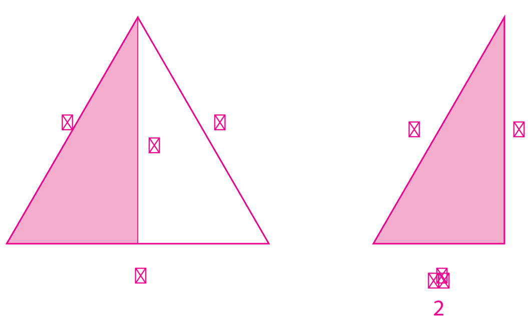


Los triángulos OAB y ODC son semejantes pues son isósceles y comparten el ángulo desigual. La razón de semejanza es $\frac{OA}{OD}=2$. Por ello, $AB=2DC \Rightarrow DC=\frac{AB}{2}=3$ cm y el perímetro del nuevo pentágono es $3\cdot 5=15$ cm.

31 ¿Cuál es la razón de semejanza de dos cubos de volúmenes 27 000 cm³ y 1 000 cm³?

La razón de semejanza r cumple que $r^3=\frac{27\,000}{1\,000}=27$, luego $r=\sqrt[3]{27}=3$.

32 ¿Cuánto mide el área del triángulo equilátero cuyo lado mide l cm?



Por el Teorema de Pitágoras, la altura del triángulo equilátero mide:

$$a=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,l}{2}\text{ cm}$$

Y, por tanto, su área es:

$$S=\frac{l\cdot\sqrt{3}l/2}{2}=\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}\text{ cm}^2$$

33 ¿Cuántos kg de pintura debemos comprar para pintar una pirámide cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y cuya base es un cuadrado de lado 2 m, si se necesitan 3 kg de pintura por cada m² y no es necesario pintar el suelo de la misma?

Hemos visto que el área del triángulo equilátero de lado l es $S_1=\frac{\sqrt{3}l^2}{4}$, luego el área de cada cara lateral de la pirámide es $S_1=\frac{\sqrt{3}\cdot 2^2}{4}=\sqrt{3}$ m², y por tanto el área lateral de la pirámide es $S=4S_1=4\sqrt{3}$ m².
En consecuencia, necesitamos comprar $3\cdot 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}\cong 20{,}79$ kg de pintura.

Evaluación

1 **Halla las longitudes de los lados de un triángulo cuyo perímetro mide 75 cm y que es semejante a otro cuyos lados miden 7, 8 y 10 cm.**

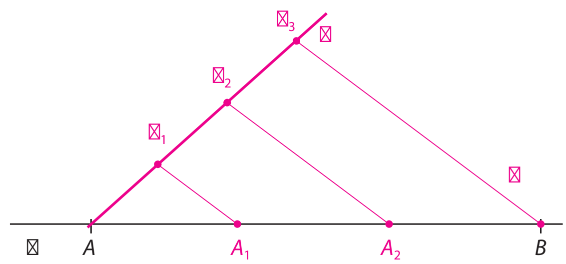
El perímetro del segundo triángulo mide $7 + 8 + 10 = 25$ cm, por lo que la razón de semejanza de ambos triángulos es $r = \dfrac{75}{25} = 3$.

Luego las longitudes de los lados del primer triángulo son $3 \cdot 7 = 21$ cm, $3 \cdot 8 = 24$ cm y $3 \cdot 10 = 30$ cm.

2 **Divide en tres partes iguales el segmento dado *AB* empleando una regla y un compás.**

Trazamos una semirrecta auxiliar *s* que corta en *A* al segmento dado. Mediante un compás llevamos desde *A* sobre *s* tres segmentos de igual longitud, cuyos extremos denotamos P_1, P_2 y P_3.

Las rectas que pasan por P_1 y P_2 y son paralelas a la que une P_3 con *B* cortan al segmento dado en dos puntos A_1 y A_2 dividiéndolo, por el teorema de Tales, en tres partes de igual longitud.



3 **Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas:**

a) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

Esta afirmación es falsa. Basta tomar un triángulo cuyos ángulos miden 20°, 20° y 140°, y otro cuyos ángulos miden 30°, 30° y 120°.

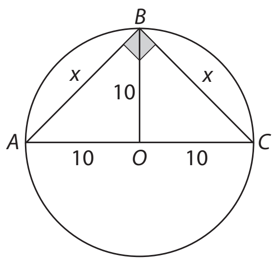
b) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Esta afirmación es cierta, ya que los ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60°.

c) Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 60° son semejantes.

También esta afirmación es cierta ya que los otros dos ángulos de cualquier triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 60° miden 90° y 30°.

4 ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio 10 cm?



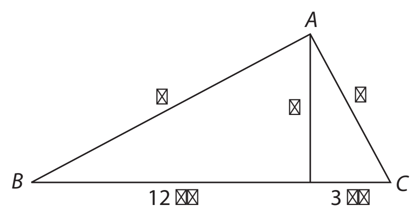
La hipotenusa es un diámetro de la circunferencia, luego mide 20 cm. Los catetos miden lo mismo, digamos x cm, pues el triángulo es isósceles y, por el Teorema de Pitágoras,

$$2x^2 = 20^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro del triángulo es:

$$p = 2x + 20 = 20\sqrt{2} + 20 = 20\left(1 + \sqrt{2}\right) \text{ cm.}$$

5 Halla las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y de su altura sobre la hipotenusa, sabiendo que ésta divide a la hipotenusa en dos segmentos que miden 3 y 12 cm.



Por el Teorema de la altura,

$$h^2 = 3 \cdot 12 = 36,$$

luego la altura sobre la hipotenusa mide $h = 6$ cm. Como la hipotenusa mide $a = 12 + 3 = 15$ cm, por el Teorema del cateto,

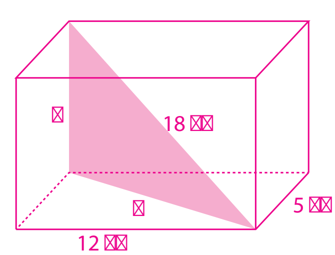
$$c^2 = 12a = 180 \text{ y } b^2 = 3a = 45, \text{ despejando, tenemos que:}$$

$$c = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$b = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

6 ¿Cuánto mide la altura de un prisma de base rectangular sabiendo que los lados de la base miden 5 y 12 cm y la diagonal del prisma mide 18 cm?

Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la diagonal del rectángulo de la base es $d = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm, por lo que la altura del prisma es $h = \sqrt{18^2 - 13^2} = \sqrt{155}$ cm.



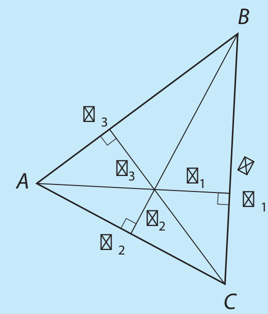
9 Longitudes, áreas y volúmenes

9.1. Perímetros y áreas de figuras planas

El triángulo

Se llama **perímetro** del triángulo a la suma de las longitudes de sus tres lados.

Se llaman **alturas** del triángulo a los segmentos de extremos un vértice y el pie de la perpendicular desde dicho vértice al lado opuesto. El **área** S del triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la altura sobre el mismo:



$$S = \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{AC \cdot h_2}{2} = \frac{AB \cdot h_3}{2}$$

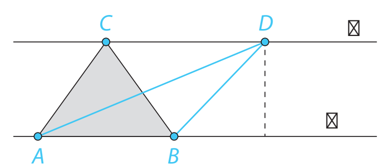
La suma de los ángulos de un triángulo siempre es 180°.

1 ¿Qué relación existe entre las alturas de un triángulo, h_1 y h_2, sobre sus lados BC y AC, respectivamente, sabiendo que $AC = 2BC$?

El área S del triángulo cumple que:

$$\frac{BC \cdot h_1}{2} = S = \frac{AC \cdot h_2}{2} \Rightarrow BC \cdot h_1 = AC \cdot h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{AC}{BC} = 2 \Rightarrow h_1 = 2h_2$$

2 Los triángulos ABC y ABD tienen sus vértices sobre dos rectas paralelas r y s, tal y como muestra la figura. Compara el valor de sus áreas.



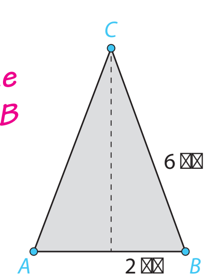
El valor del área de los dos triángulos es el mismo, pues ambos comparten el lado AB, y la altura del triángulo sobre dicho lado es, en ambos casos, la distancia entre las rectas r y s.

3 ¿Cuántos ángulos obtusos puede tener un triángulo?

Un triángulo puede tener como máximo un ángulo obtuso. Si un triángulo tuviese más de un ángulo obtuso entonces la suma de sus ángulos sería mayor que 180°.

4 Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 6 cm y cuyo lado desigual mide 4 cm.

El perímetro mide $6 + 6 + 4 = 16$ cm. Además, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura, la altura h sobre el lado AB cumple $h^2 = 6^2 - 2^2 = 32$ cm², luego el área del triángulo es:



$$S = 4 \cdot \frac{h}{2} = 2h = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

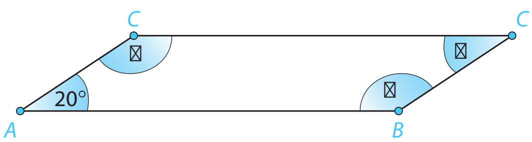
Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono de 4 lados. Su **perímetro** es la suma de las longitudes de sus cuatro lados. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

Dentro de los cuadriláteros, caben destacar los **paralelogramos,** esto es, cuadriláteros cuyos lados son paralelos dos a dos; los **rectángulos** y los **cuadrados** son paralelogramos, pero no son los únicos. El **rombo** es el paralelogramo cuyos cuatro lados miden lo mismo, pero no tiene todos sus ángulos iguales. Un **romboide** es un paralelogramo que no es ni rectángulo, ni rombo, es decir, sus lados son diferentes dos a dos, y sus ángulos también.

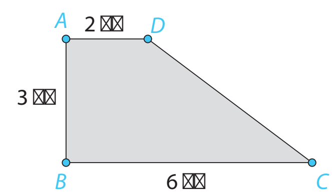
El **área** del paralelogramo de base B y altura sobre esa base h es: $S = B \cdot h$.

5 Halla el valor de cada uno de los ángulos del siguiente romboide.

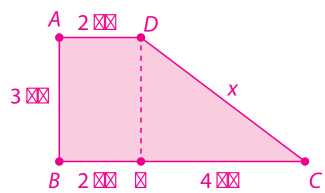


Como los lados del paralelogramo son paralelos dos a dos, ⊠ = 20°. Por otro lado la suma de los cuatro ángulos es 360°, es decir, 360° = 2⊠ + 2 · 20° luego ⊠ = 180° − 20° = 160°.

6 Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura.



Dividimos la figura en un rectángulo y un triángulo rectángulo, para lo cual consideramos el punto que divide a la base BC en dos segmentos de 2 y 4 cm, respectivamente.



Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud x del segmento DC:

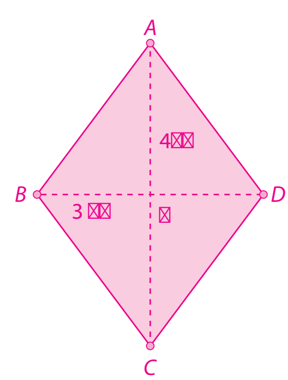
$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \text{ luego } x = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro de la figura es $2 + 3 + 6 + x = 16$ cm.

Por otro lado, el área de la figura es la suma del área del rectángulo de vértices A, B, E y D, que mide $2 \cdot 3 = 6$ cm^2 y el área del triángulo rectángulo ECD que es $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2.

Así, el área de la figura es $6 + 6 = 12$ cm^2.

7 Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden 6 y 8 cm.



Sean A, B, C y D los vértices del rombo y M el punto en que se cortan las diagonales, como en la figura. El área S del rombo es cuatro veces la del triángulo rectángulo AMB. Como AM y MB miden la mitad que las diagonales, es decir, 3 y 4 cm, resulta:

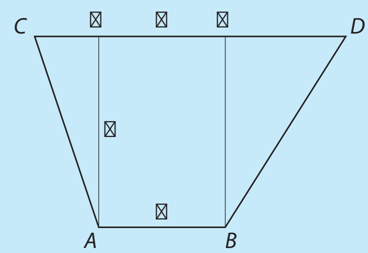
$$S = 4\left(\frac{MB \cdot AM}{2}\right) = 2BM \cdot AM = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

El trapecio

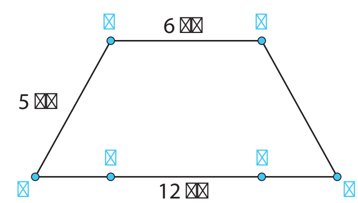
Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos. Las longitudes de los lados paralelos se llaman **bases** del trapecio, y la distancia entre los lados paralelos se llama **altura** del trapecio.

Calculemos el área del trapecio de vértices *A*, *B*, *C* y *D* de la figura, cuyas bases son *a* y *b*. El área del rectángulo de vértices *A*, *B*, *N* y *M* es $S_1 = ah$, y la suma de las áreas de los triángulos *AMC* y *BDN* es: $S_2 = CM \cdot \frac{h}{2} + ND \cdot \frac{h}{2} = h \cdot \frac{(CM + ND)}{2} = h \cdot \frac{(b - a)}{2}$, por lo que el área *S* del trapecio es:

$$S = ah + h \cdot \frac{(b-a)}{2} = h \cdot \frac{(b+a)}{2}$$



8 **Calcular el área del trapecio de la figura sabiendo que los segmentos *DE* y *FC* tienen la misma longitud.**



La longitud del segmento *DE* es $\frac{12-6}{2} = 3$cm.

La altura, *h*, del trapecio es la longitud del segmento *AE*.

Para calcularla empleamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AED.

Así $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm. Y el área del trapecio es $S = 4 \cdot \frac{(12+6)}{2} = 36 \text{ cm}^2$.

9 **Calcula el área de un trapecio de altura 6 cuyas bases miden 8 y 11 cm.**

Aplicando la fórmula del área del trapecio se tiene: $S = \frac{6(8+11)}{2} = 57 \text{ cm}^2$

Polígonos

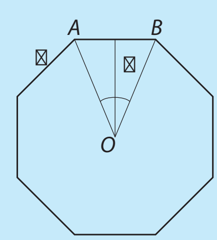
En todo polígono se cumple: la suma de los ángulos de un polígono de *n* lados es $180 \cdot (n - 2)°$. Podemos calcular su **área por triangulación,** es decir, dividiendo el polígono en triángulos y calculando cada una de las áreas de dichos triángulos.

Nos interesan especialmente los **polígonos regulares.** Un polígono se dice regular si todos sus ángulos miden lo mismo y todos sus lados tienen la misma longitud.

Si *l* es la longitud de cada lado y *n* es el número de lados, su **perímetro** mide $P = n \cdot l$.

El **baricentro** de un polígono regular es el único punto que equidista de todos los vértices. El **apotema** del polígono es la distancia *a* del baricentro al punto medio de cada lado.

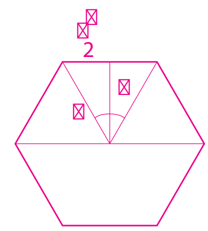
El **área** del polígono es el de la región encerrada por él. Su valor es la suma de las áreas de los *n* triángulos isósceles en que se descompone. Como el área del triángulo *AOB* de la figura es $\frac{a \cdot l}{2}$, el área del polígono es $A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$.



10 Halla la suma de los ángulos de un octógono.

El octógono tiene 8 lados, luego la suma de sus ángulos es $(8-2)180° = 1080°$.

11 Calcula el área del hexágono regular de lado *l*.

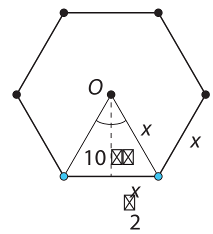


Los triángulos que unen el baricentro del hexágono regular con dos vértices consecutivos son equiláteros, pues los ángulos del hexágono regular miden $\frac{(6-2)180°}{6} = 120°$. En consecuencia, por el Teorema de Pitágoras, el apotema del hexágono mide

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2}.$$

Como el perímetro es $p = 6l$ su área mide: $A = \frac{Pa}{2} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{2}$.

12 Calcula el perímetro del hexágono regular cuya apotema mide 10 cm.



Los ángulos del hexágono regular miden $(6-2)\frac{180°}{6} = 120°$. En consecuencia el triángulo OAB de la figura es equilátero, luego la longitud x del lado del hexágono satisface, por el Teorema de Pitágoras, $x^2 = 10^2 + \frac{x^2}{2}$, así que $\frac{3x^2}{4} = 100$, es decir, $x^2 = \frac{400}{3}$. Por tanto,

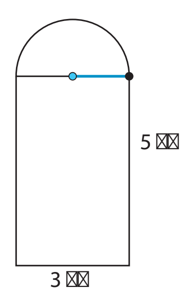
$$x = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$ y el perímetro mide $P = 6x = 6 \cdot 20\frac{\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$ cm.

Círculo y circunferencia

Fijados un número real positivo r y un punto O en un plano Π, se llama **circunferencia** de **centro** O y **radio** r al conjunto C formado por los puntos de Π que distan r de O. El **círculo** de centro O y radio r es el conjunto formado por los puntos de Π cuya distancia al centro O es menor o igual que r. Consiste en los puntos encerrados por C.

La **longitud** de C es $2\pi r$ y el **área** de este círculo es πr^2.

13 Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura.



El área del rectángulo es: $S_1 = 3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

El radio del semicírculo mide $r = \frac{3}{2}$ cm. Y su área es: $S_2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{9\pi}{8}$ cm^2.

El área total es: $S = S_1 + S_2 = 18{,}53$ cm^2.

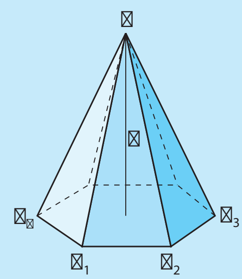
El perímetro es la suma de los lados largos y la base del rectángulo, 13 cm, y la circunferencia, $\frac{3\pi}{2}$: $P = 13 + \frac{3\pi}{2} = 17{,}71$ cm.

9.2. Poliedros. Áreas y volúmenes

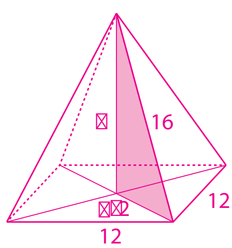
Pirámide

Pirámide de base *P* y vértice *V*.

- El **área lateral** de la pirámide es la suma de las áreas de sus caras, y su **área total** es la suma del área lateral y la del polígono *P*.
- La **altura** de la pirámide es la distancia *h* desde *V* al plano que contiene a *P*.
- Se llama **volumen** de la pirámide a la región encerrada por ella y vale $V = \dfrac{\text{Área}(P) \cdot h}{3}$.
- Un **tetraedro** es una pirámide cuya base y cuyas caras son triángulos equiláteros.



14 **Calcula el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 12 cm de lado y su arista lateral es de 16 cm.**



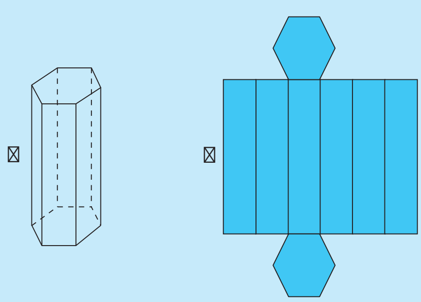
Sean d la longitud de la diagonal del cuadrado y h la de la altura de la pirámide. Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{y} \quad h = \sqrt{16^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46} \text{ cm}$$

Y, por tanto, el volumen de la pirámide es $V = \dfrac{12^2 \cdot 2\sqrt{46}}{3} = 96\sqrt{46} \text{ cm}^3$.

Prisma

Las fórmulas que nos dan el área lateral, el área total y el volumen de un prisma son:



$$A_{lateral} = P_{base} \cdot h$$

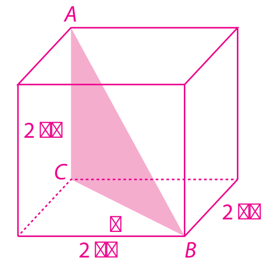
$$A_{PRISMA} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$V_{PRISMA} = A_{base} \cdot h$$

Un prisma es un **cubo** si sus bases y sus caras son cuadrados.

Un prisma es un **ortoedro** si todas sus caras son rectángulos y todo par de aristas concurrentes son perpendiculares.

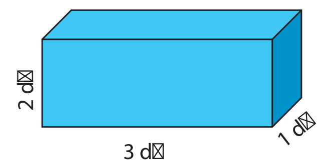
15 ¿Cuánto mide la diagonal de un cubo cuyo lado mide 2 cm?

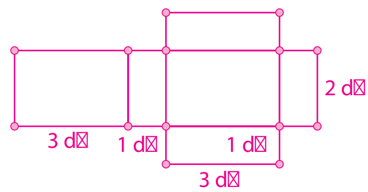


La diagonal de la base mide $d=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ cm, y como el triángulo *ACB* es rectángulo, la diagonal del cubo mide:

$$AB=\sqrt{AC^2+d^2}=\sqrt{2^2+8}=2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

16 Representa el desarrollo plano del siguiente ortoedro y calcula su área.





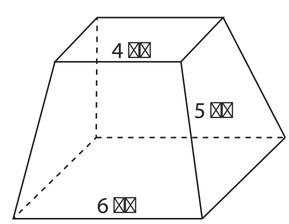
El desarrollo plano del ortoedro del enunciado consta de seis rectángulos iguales dos a dos. Dichos rectángulos tienen las siguientes dimensiones:

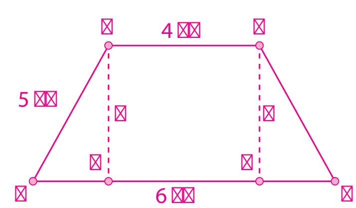
$$3\text{ dm} \times 2\text{ dm},\ 1\text{ dm} \times 2\text{ dm y } 1\text{ dm} \times 3\text{ dm}$$

Por tanto, el área del ortoedro es:

$$A=2(3\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 3)=2\cdot 11=22\text{ dm}^2$$

17 Calcula el área total del siguiente tronco de pirámide obtenido al cortar una pirámide de base cuadrangular por un plano paralelo a la base.





Las bases superior e inferior del tronco de pirámide del enunciado son cuadrados de lado 4 cm y 6 cm, respectivamente, y las caras laterales son trapecios como el que mostramos en la segunda figura.

Para conocer el área común de dichos trapecios hemos de calcular antes la altura *h* del trapecio de vértices A, B, C y D. Para ello conviene observar que la longitud de los segmentos DE y FC es de 1 cm. Así aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo AED obtenemos la altura $h=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ cm. Por tanto, las bases superior e inferior del tronco de prisma miden 4^2 y 6^2 cm^2, respectivamente, mientras que cada cara lateral mide $2\sqrt{6}\,\dfrac{(4+6)}{2}=10\sqrt{6}$ cm^2, por lo que concluimos que el área pedida es:

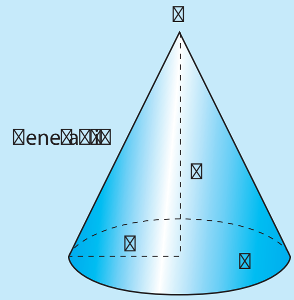
$$S=4^2+6^2+4\cdot 10\sqrt{6}=52+40\sqrt{6}\cong 149{,}6\text{ cm}^2$$

9.3. Cuerpos de revolución. ` reas y volúmenes

Se llaman **cuerpos de revolución** a los obtenidos al girar en el espacio una curva alrededor de una recta, llamada **eje** del cuerpo de revolución. La curva que gira se denomina **curva perfil.** Veremos a continuación cuánto valen el área y el volumen de los más importantes.

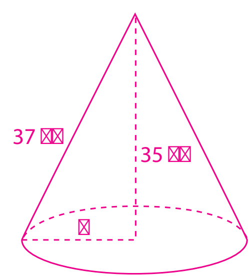
Cono

Se llama **cono** de base una circunferencia ⊠ de radio r y vértice un punto V que no está situado en el plano ⊠ que contiene a ⊠, a la superficie formada por los segmentos que unen V con los puntos de ⊠. Dichos segmentos se llaman **generatrices** del cono.



- Se llama **altura** del cono a la distancia h del vértice V al plano ⊠.
- Se llama **volumen** del cono a la región limitada por el cono y el círculo encerrado por ⊠. Su valor es $V = \frac{⊠r^2h}{3}$.
- El **área lateral** del cono mide ⊠rh. Si le sumamos el área de la base $S =$ ⊠r^2 obtenemos el **área total** del cono.
- Se dice que el cono es **recto** si la recta que pasa por V y el centro de ⊠ es perpendicular al plano ⊠ que contiene a ⊠.

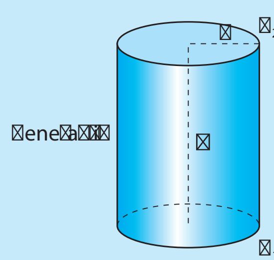
18 **¿Cuánto mide el radio de la base de un cono recto cuyas generatrices miden 37 cm y cuya altura mide 35 cm?**



El triángulo cuyos lados son la generatriz, la altura y el radio r es rectángulo, por lo que $r = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12$ cm.

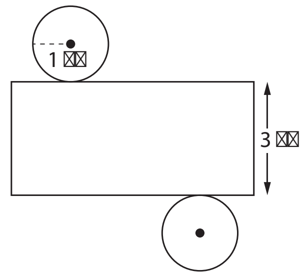
Cilindro

Un **cilindro** es la figura que se forma al girar sobre un eje un segmento denominado generatriz. Tiene dos bases iguales que son circunferencias y en él definimos los siguientes parámetros:



- Se llama **altura** del cilindro a la distancia h entre los planos que contienen a sus bases.
- Se llama **volumen** del cilindro al de la región limitada por el cilindro. Su valor es: $V = Sh$, donde $S =$ ⊠r^2.
- El **área lateral** del cilindro recto mide 2⊠rh. Si le sumamos el área $2S$ de los círculos encerrados por las bases obtenemos el **área total** del cilindro.
- Se dice que el cilindro es **recto** si sus generatrices son perpendiculares a los planos que contienen a las bases.

19 **Calcula el área y el volumen del cilindro cuyo desarrollo aparece en la figura adjunta.**



Tal y como se aprecia en el desarrollo de la figura, se trata de un cilindro cuya base es un círculo de radio de 1 cm y cuya altura es 3 cm. Por tanto, $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi \text{ cm}^3$, *y su área mide:*

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 8\pi \text{ cm}^2$$

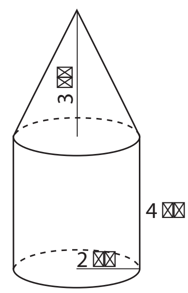
20 **Calcula la cantidad de aluminio que se necesita para hacer 100 botes de forma cilíndrica de 4 cm de radio y 10 cm de altura.**

El área total de cada uno de los botes es:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = 8\pi(10 + 4) = 112\pi \text{ cm}^2$$

Como queremos construir 100 botes necesitamos $11\,200\pi \text{ cm}^2$ *de aluminio.*

21 **¿Cuánto vale el volumen de la figura?**

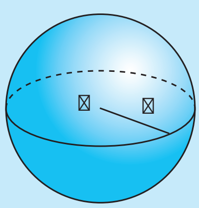


Los volúmenes del cilindro y el cono son, respectivamente:

$$V_1 = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ cm}^3 \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{2^2\pi \cdot 3}{3} = 4\pi \text{ cm}^3$$

$V = V_1 + V_2 = 20\pi \text{ cm}^3$ *es el volumen de la figura.*

Esfera



Esfera

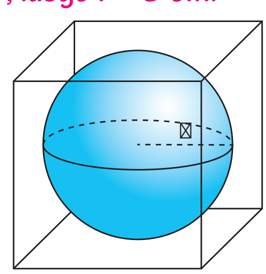
Dados un número real $r > 0$ y punto O en el espacio, se llama **esfera** de centro O y radio r al conjunto de puntos que distan r de O.

Su **área** mide $4\pi r^2$ y su **volumen** mide $\frac{4\pi r^3}{3}$.

22 **¿Cuánto vale el radio de una esfera cuya área, expresada en cm², coincide con su volumen, expresado en cm³?**

Si r es el radio de la esfera, expresado en cm, se cumple $\frac{4\pi r^3}{3} = 4\pi r^2$, *luego* $r = 3$ *cm.*

23 **Calcula el volumen de la esfera inscrita en un cubo de 12 dm de arista.**

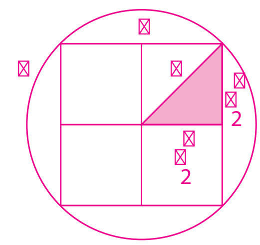


Se trata de la esfera de radio 6 dm, por lo que el valor de su volumen es $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = 288\pi \text{ dm}^3$.

9 Problemas

24 ¿CuÆl es el cociente del per⊠metro del cuadrado inscrito en una circunferencia ⊠ de radio r cm y la longitud de ⊠? ¿CuÆl es el cociente del Ærea del cuadrado anterior y la del c⊠rculo encerrado por ⊠?

Indicaci⊠n: Comienza expresando el lado del cuadrado en funci⊠n del ⊠radio de ⊠.



Si l denota la longitud del lado del cuadrado se cumple, por el Teorema de Pitágoras, $r^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$, así que $l = r\sqrt{2}$ cm.

Por tanto, $\dfrac{\text{perímetro del cuadrado}}{\text{perímetro de la circunferencia}} = \dfrac{4l}{2\pi r} = \dfrac{4r\sqrt{2}}{2\pi r} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

y el cociente de las áreas es: $\dfrac{\text{área del cuadrado}}{\text{área del círculo}} = \dfrac{l^2}{\pi r^2} = \dfrac{2r^2}{\pi r^2} = \dfrac{2}{\pi}$

25 Un pozo cil⊠ndrico de 16 metros de profundidad tiene una capacidad de 100 kilolitros. ¿CuÆl es el diÆmetro del pozo?

El pozo tiene una capacidad de 100 000 litros, lo que se traduce en que el valor de su volumen es $V = 100$ m^3. Por otro lado, el pozo tiene forma de cilindro con una altura de 16 m. Si r es el radio de su base expresado en metros, y $d = 2r$ es su diámetro, tenemos:

$$100 = V = \pi \cdot r^2 \cdot 16 \Rightarrow r^2 = \frac{100}{16 \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow d = \frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi} \cong 2{,}8 \text{ m}$$

26 El diÆmetro del rodillo de una apisonadora mide medio metro y su longitud mide el doble del diÆmetro. ¿QuØ superficie apisona en una vuelta?

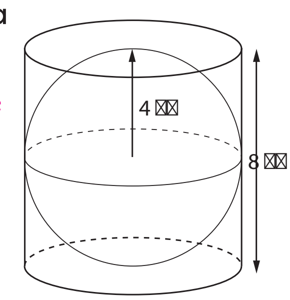
Hemos de hallar la superficie lateral del cilindro que constituye el rodillo. El radio de las bases del mide $r = 0{,}25$ m y la altura del cilindro mide $h = 1$ m. Así:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot \pi \cong 1{,}57 \text{ m}^2$$

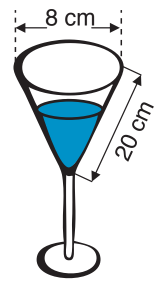
27 Calcula el volumen encerrado por una esfera que estÆ inscrita en un cilindro de 8 cm de altura.

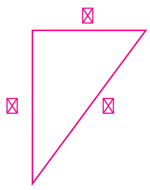
La altura del cilindro es un diámetro de la esfera, luego el radio de ésta mide 4 cm, y así su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$$



28 La copa de la figura está llena hasta las tres cuartas partes del total de su capacidad. ¿Cuántos litros contiene?





La copa es un cono cuya base es un círculo cuyo radio mide $r = 4$ cm. La altura h del cono es uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $a = 20$ cm y tiene al radio r de la base por longitud del otro cateto. Por el Teorema de Pitágoras:

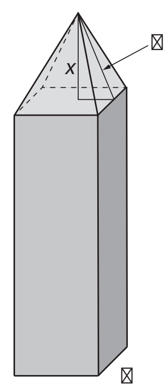
$$h = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384} = \sqrt{6 \cdot 64} = 8\sqrt{6} \text{ cm}$$

En consecuencia, el volumen de la copa es $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = 128\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$ cm^3, y sus tres cuartas partes son $V_i = \dfrac{3V}{4} = 32\sqrt{6}\pi$ cm^3, o sea, $32\dfrac{\sqrt{6}\pi}{1000} \cong 0{,}246$ litros.

29 Queremos llenar una bañera con forma de ortoedro cuyo largo, ancho y alto miden 1,5, 0,8 y 1 m, respectivamente. ¿Cuántos cubos de 5 litros debemos vaciar en la bañera para que el agua llegue a una altura de 80 cm?

Se trata de llenar $V = 1{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$ m^3 $= 0{,}96$ m^3 $= 960$ litros mediante cubos de 5 litros, luego el número de cubos que debemos emplear es $\dfrac{960}{5} = 192$ cubos.

30 Un pintor emplea 1/4 de kg de pintura en pintar cada metro cuadrado de pared, y gasta 60 kg en pintar la figura formada por un prisma de base cuadrada cuya altura mide el triple que el lado de su base, y por una pirámide cuya altura mide lo mismo que la diagonal de su base. ¿Cuánto mide el lado de la base del prisma?



Sea l la longitud, expresada en metros, del lado del cuadrado de la base (común) del prisma y la pirámide. La altura del prisma es $3l$ m, y el área lateral del prisma mide:

$$S_1 = 4l \cdot 3l = 12\,l^2 \text{ m}^2$$

Por otro lado la altura x de la pirámide coincide con la diagonal de su base, esto es, $x = \sqrt{2}l$ m luego, por el Teorema de Pitágoras, la altura de cada cara de la pirámide mide:

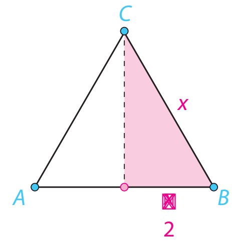
$$y = \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{2l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{3l}{2} \text{ m}$$

Hemos probado que cada cara de la pirámide es un triángulo cuya base mide l m y cuya altura sobre dicha base mide $y = \dfrac{3l}{2}$ m, así que su área mide $\dfrac{ly}{2} = \dfrac{3l^2}{4}$ m^2. Por tanto el área lateral de la pirámide mide $S_2 = 4\left(\dfrac{3l^2}{4}\right) = 3l^2$ m^2. Sumando, el área que ha de pintar el pintor es:

$$S = S_1 + S_2 = 15l^2 \text{ m}^2$$

Pero esta superficie es de 240 m^2, pues emplea 60 kg de pintura y en cada metro cuadrado gasta 1/4 de kg de pintura. En consecuencia, $15l^2 = 240$, es decir $l^2 = 16$, por lo que $l = 4$ m.

1 ¿Cuánto mide el lado de un triángulo equilátero de 12 cm de altura?



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura, se tiene que $144 = 12^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$, y por tanto:

$$x^2 = 144 \cdot \frac{4}{3} = 192 \Rightarrow x = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

2 ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyos ángulos miden 140°?

Si n es el número de lados, se tiene:

$$(n-2)180 = 140n \Rightarrow 9(n-2) = 7n \Rightarrow 2n = 18 \Rightarrow n = 9$$

3 ¿Es cierto que si el área de un rectángulo es el cuadrado de la cuarta parte de su perímetro entonces el rectángulo es un cuadrado?

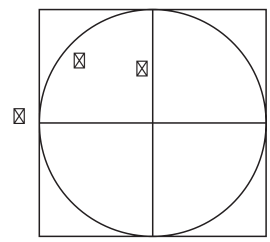
Llamamos x e y las longitudes de dos lados consecutivos del rectángulo. Entonces su perímetro es $p = 2(x+y)$, mientras que su área mide $S = xy$. La hipótesis afirma que:

$$xy = S = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 4xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0$$

luego $x = y$, y por tanto, el rectángulo es un cuadrado.

4

- Determina el cociente del perímetro de un cuadrado de lado l y la longitud de la circunferencia $\mathcal{C}$ inscrita en dicho cuadrado.

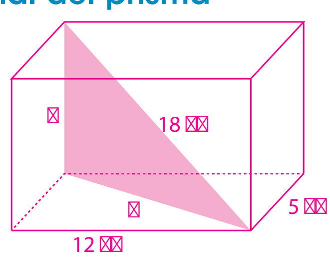


El perímetro del cuadrado es $P_1 = 4l$, y como el radio de $\mathcal{C}$ mide $r = \frac{l}{2}$, la longitud de $\mathcal{C}$ es $P_2 = 2\pi r = \pi l$, y el cociente es $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4l}{\pi l} = \frac{4}{\pi}$.

- ¿Cuál es el cociente del área del cuadrado anterior y la del círculo encerrado por $\mathcal{C}$?

Las áreas del cuadrado y del círculo miden $S_1 = l^2$ y $S_2 = \pi r^2 = \frac{\pi l^2}{4}$, respectivamente, cuyo cociente es $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4l^2}{\pi l^2} = \frac{4}{\pi}$.

5 ¿Cuánto mide la altura de un prisma de base rectangular sabiendo que los lados de la base miden 5 y 12 cm y la diagonal del prisma mide 18 cm?

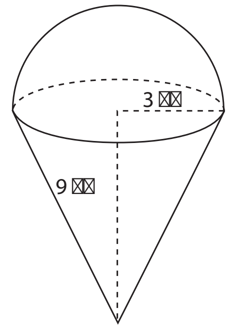


Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la diagonal del rectángulo de la base es $d = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm, por lo que la altura del prisma es $h = \sqrt{18^2 - 13^2} = \sqrt{155}$ cm.

6 ¿Cuánto mide el lado de un cubo cuyo volumen es doble del volumen del cubo de lado 1?

Sea l la longitud del lado del cubo cuyo volumen es doble que el del cubo de lado 1. Entonces, $l^3 = 2 \cdot 1^3 = 2 \Rightarrow l = \sqrt[3]{2}$.

7 ¿Cuál es el volumen del helado de la figura?



El volumen buscado es la suma $V = V_1 + V_2$ donde

$V_1 = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 9}{3} = 27\pi \text{ cm}^3$ es el volumen del cucurucho cónico

y $V_2 = \dfrac{4\pi \cdot 3^3}{2 \cdot 3} = 18\pi \text{ cm}^3$ es el volumen de la semiesfera de helado.

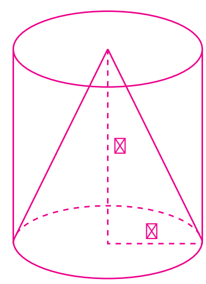
Por tanto, $V = 45\pi \text{ cm}^3$.

8 Calcula el radio de la base de un cono sabiendo que su volumen, expresado en cm^3 coincide con el área lateral expresada en cm^2.

Si r y h son, expresadas en cm, el radio y la altura deben cumplir que:

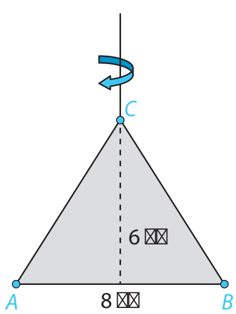
$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \pi r h \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

Calcula la altura de dicho cono, expresada en cm, sabiendo que el área lateral del cilindro que tiene su mismo radio y altura es $12\pi \text{ cm}^2$.



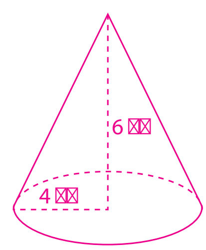
Si h es la altura común del cono y el cilindro se tiene $12\pi = 2\pi r h = 6\pi h$, luego $h = 2$ cm.

9 Un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 8 cm y su altura sobre dicho lado mide 6 cm, gira alrededor de la recta que contiene a dicha altura. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que genera?



El cuerpo que resulta al girar el triángulo alrededor del eje es un cono cuya altura $h = 6$ cm es la del triángulo y cuya base es un círculo cuyo diámetro es el lado desigual del triángulo, así que su radio mide $r = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

Por tanto, el volumen del cono es:



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 6}{3} = 32\pi \text{ cm}^3$$

10 Funciones

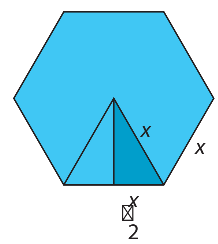
10.1. Concepto de función. Dominio y recorrido

Una **función** entre dos conjuntos X e Y es una correspondencia, que escribimos $f : X \to Y$, que asocia a cada elemento x de X un elemento y de Y, al que se suele denotar $y = f(x)$. En tal caso se dice que y es la *imagen* por f de x. A cada x de X se le llama la **variable independiente** mientras que $y = f(x)$ es la **variable dependiente** (porque depende de x).

1 **Calcula la imagen por $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ de $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.**

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1} = 1,\ f(0) = \sqrt{0^2 + 0 + 1} = 1 \text{ y } f(1) = \sqrt{1^2 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

2 **Escribe la función que relaciona el área de un hexágono regular con la longitud de sus lados.**



Si x denota la longitud del lado del hexágono, entonces la longitud de la apotema del mismo es $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ y por tanto, el valor del área es Área $= \frac{1}{2}\left(6x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$. Por ello $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

El **dominio** de la función f se denota Dom f y es el conjunto formado por aquellos elementos x de X para los cuales existe $f(x)$. El conjunto formado por aquellos elementos y de Y tales que existe algún x en X que cumple que $y = f(x)$ se llama **recorrido** o imagen de f y se denota Rec f.

Ejemplo: La función f que a cada número real x le hace corresponder su inverso $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene por dominio y por recorrido el conjunto Dom $f = \mathbb{R} - \{0\} =$ Rec f.

3 **Determina el dominio de las funciones $f_1(x) = \sqrt{2x - 6}$ y $f_2(x) = \dfrac{4}{x^2 - 6x + 8}$.**

$$\text{Dom } f_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 6 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = [3, \infty)$$

$$\text{Dom } f_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 8 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$

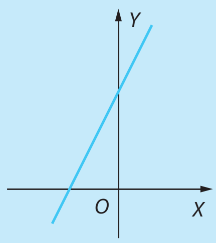
4 **Calcula el dominio de la función real de variable real $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.**

La fórmula de f tiene sentido para todos los números reales x salvo para $x = -1$ y $x = 1$, pues para estos dos valores se anula el denominador y no existe el cociente. Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

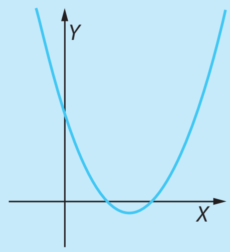
Una función puede representarse mediante su **gráfica,** que nos permite analizar sus características.

Ejemplos:

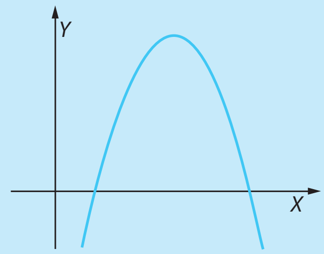
$f(x) = 2x + 3$



$f(x) = x^2 - 3x + 2$

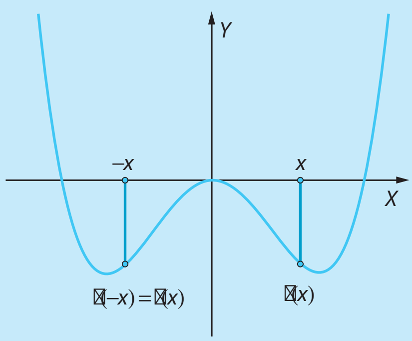


$f(x) = -x^2 + 6x - 5$

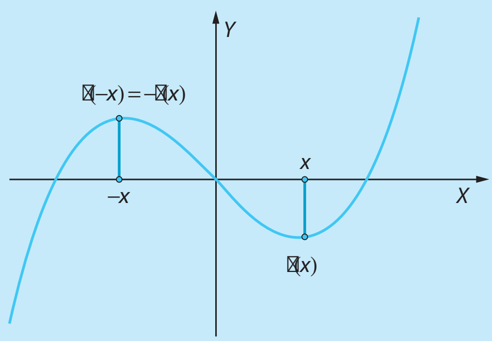


Simetrías. Sean X un intervalo centrado en 0 y $f : X \to \mathbb{R}$ una función.

- Se dice que f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in X$. En tal caso su gráfica es **simétrica respecto del eje de ordenadas.**
- Se dice que f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in X$. En tal caso su gráfica es **simétrica respecto del origen de coordenadas.**



Gráfica de una función par



Gráfica de una función impar

5 Indica cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles impares.

$$f_1(x) = \frac{3}{x^2 - 4}; \quad f_2(x) = \frac{5}{x^3 - x}; \quad f_3(x) = -4$$

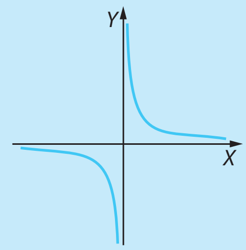
$f_1(-x) = \dfrac{3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{3}{x^2 - 4} = f_1(x)$, por lo que $f_1(x)$ es una función par.

$f_2(-x) = \dfrac{5}{(-x)^3 - (-x)} = \dfrac{5}{-x^3 + x} = -\left(\dfrac{5}{x^3 - x}\right) = -f_2(x)$, luego la función $f_2(x)$ es impar.

$f_3(x) = -4 = f_3(-x)$, lo que significa que $f_3(x)$ es una función par.

10.2. Continuidad. Funciones definidas a trozos

Una función real de variable real $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo X se dice **continua** si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si el dominio de f es unión de intervalos disjuntos la continuidad de f significa que sobre cada uno de esos intervalos la gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel. En tal caso se dice que f es una **función continua en su dominio.**



Ejemplo: El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, que no es un intervalo. Se trata de una función continua en su dominio, porque es continua sobre los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

6 **Indica cuáles de las siguientes afirmaciones sobre la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ son ciertas.**

a) f es una función continua en su dominio y Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. VERDADERO

b) La gráfica de f no presenta simetrías. FALSO

c) f es una función par y su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. VERDADERO

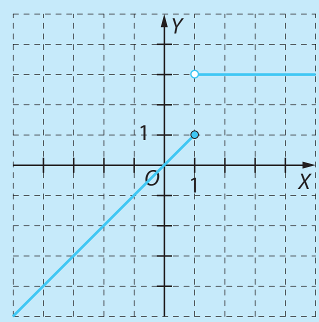
d) La gráfica de f no corta al eje de abscisas. VERDADERO

e) La gráfica de f no corta al eje de ordenadas. FALSO

Cuando una función emplea varias expresiones analíticas para expresar la relación entre sus variables, se dice que es una **función definida a trozos.**

Para construir una función definida a trozos es necesario especificar los valores de la variable independiente sobre los que se aplica cada expresión.

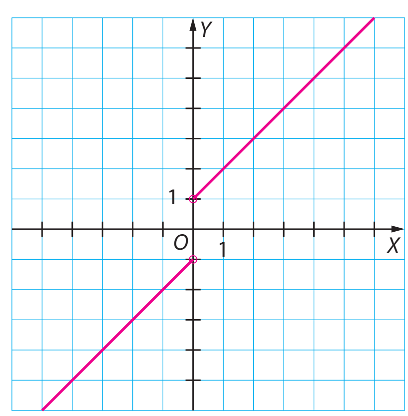
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



7 **Representa la siguiente función definida a trozos:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Representamos la función $f_1(x) = x - 1$ para los valores de x menores que 0 y la función $f_2(x) = x + 1$ para los valores de x mayores que 0. En el punto $x = 0$ no tiene imagen, puesto que la función $f(x)$ no está definida en ese punto.

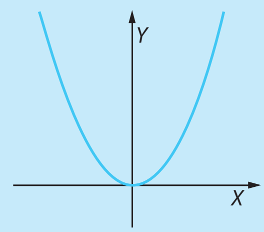


10.3. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos

Una función $f : X \to Y$ es **monótona creciente** en un subconjunto Z de X si para cada par de puntos $z_1, z_2 \in Z$ tales que $z_1 < z_2$ se cumple que $f(z_1) \leq f(z_2)$.

Se dice que f es **monótona decreciente** en Z si para cada par de puntos $z_1, z_2 \in Z$ tales que $z_1 < z_2$ se cumple que $f(z_1) \geq f(z_2)$.

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es monótona decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y monótona creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Es una función par, por lo que su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas, y además si $0 < z_1 < z_2$ entonces:



$$f(z_2) - f(z_1) = z_2^2 - z_1^2 = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) > 0 \Rightarrow f(z_1) < f(z_2)$$

8 ¿Es monótona creciente en $\mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 5$?

Dados dos números reales z_1, z_2 tales que $z_1 < z_2$ se tiene

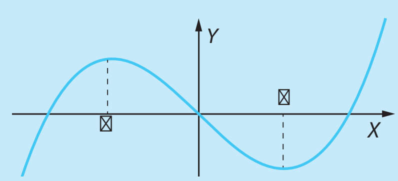
$$f(z_2) - f(z_1) = (3z_2 + 5) - (3z_1 + 5) = 3(z_2 - z_1) > 0 \Rightarrow f(z_1) < f(z_2)$$

luego f es monótona creciente.

Máximos y mínimos

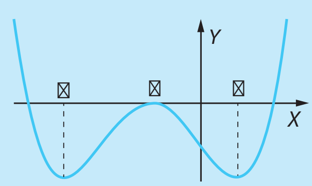
La función f tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos suficientemente próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

La función f tiene un **mínimo relativo** en un punto, cuando en él la función toma un valor menor que en los puntos suficientemente próximos. En tal caso, la función es decreciente hasta el mínimo y creciente a partir de él.

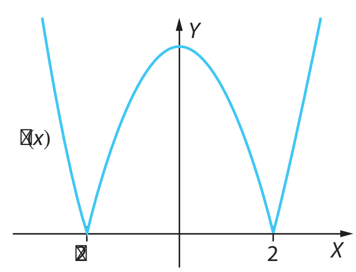


Ejemplo: La función f cuya gráfica aparece arriba a la derecha tiene un máximo relativo en a y un mínimo relativo en b.

La función cuya gráfica aparece abajo a la derecha tiene un máximo relativo en b, y tiene dos mínimos en $x = a$ y $x = c$.



9 Indica los puntos en los que la función tiene máximos y mínimos relativos.



La función f tiene un máximo relativo en $x = 0$, y tiene dos mínimos en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

10.4. Tasa de variación media

Se llama **tasa de variación media** de una función $f : X \to Y$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ contenido en X al cociente $\text{TVM}\ [a, b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplo: Calculamos la TVM de la función $f(x) = x^3 - 2x + 3$ en los intervalos $[-2, 1]$ y $[0, 1]$.

$$\text{TVM}[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2 - (-1)}{3} = 1 \text{ y } \text{TVM}[0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2 - 3 = -1$$

10 **Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalo que se indica:**

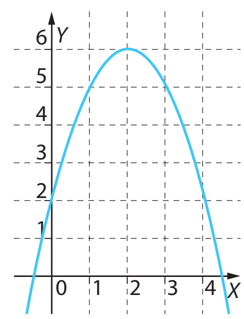
a) $f(x) = x + 2$, en $[6, 8]$ $\text{TVM}[6, 8] = \dfrac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \dfrac{10 - 8}{8 - 6} = 1$

b) $f(x) = 2x - 3$, en $[3, 6]$ $\text{TVM}[3, 6] = \dfrac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \dfrac{9 - 3}{3} = 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$, en $[0, 1]$ $\text{TVM}[0, 1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$

d) $f(x) = -x^2 + 1$, en $[-1, 0]$ $\text{TVM}[-1, 0] = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{1 - 0}{1} = 1$

11 **Halla la TVM de la función cuya gráfica se muestra al margen en los intervalos $[0, 2]$ y $[1, 4]$.**



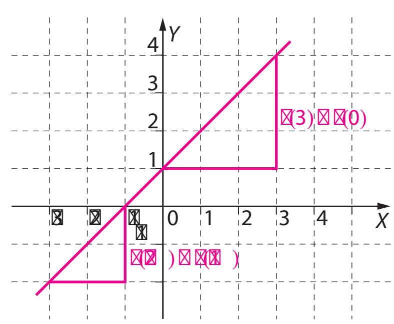
$$\text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \quad \text{y}$$

$$\text{TVM}[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 5}{3} = -1$$

12 **Representa la gráfica de la función $f(x) = x + 1$ y calcula la TVM en los intervalos $[-3, -1]$ y $[0, 3]$. Interpreta geométricamente dicho valor.**

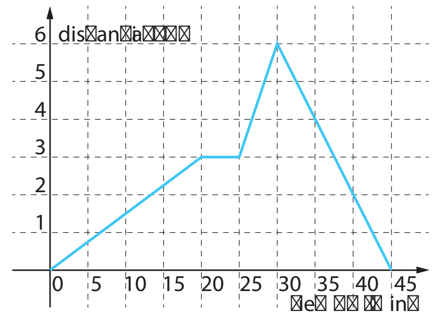
$$\text{TVM}[-3, -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1 \quad \text{y}$$

$$\text{TVM}[0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{4 - 1}{3} = 1$$



Observamos que TVM$[-3, -1]$ y TVM$[0, 3]$ coinciden, y coinciden, además, con la pendiente de la recta que es gráfica de la función $f(x)$.

13 **Sergio ha estado patinando durante 45 minutos. La gráfica indica la distancia a la que se encuentra de su casa en cada instante.**



a) ¿A qué distancia máxima ha estado Sergio de su casa?

Ha estado a 6 km.

b) ¿Cuánto tiempo ha descansado?

Ha descansado 5 minutos.

c) Calcula la TVM en los intervalos [0, 20] y [25, 30]. ¿En cuál fue más deprisa?

$$\text{TVM}[0, 20] = \frac{3-0}{20-0} = \frac{3}{20} \text{ y } \text{TVM}[25, 30] = \frac{6-3}{30-25} = \frac{3}{5}$$

de lo que se deduce que Sergio fue más deprisa entre los minutos 25 y 30.

14 **Sea x un número real tal que $2 < x$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3$. Comprueba que la tasa de variación media de f en el intervalo $[2, x]$ es $x^2 + 2x + 4$.**

$$\text{TVM}[2, x] = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^3 - 2^3}{x-2} = \frac{x^3 - 8}{x-2}$$

Para efectuar esta división observamos que 2 es raíz del polinomio $x^3 - 8$ luego, por la regla de Ruffini, este polinomio es múltiplo de $x - 2$ y el cociente vale $x^2 + 2x + 4$. Así,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \qquad \text{TVM}[2, x] = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^3 - 8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2 + 2x + 4$$

15 **Un electricista cobra 15 € por desplazamiento y 25 € por cada hora de trabajo.**

a) Escribe una fórmula de la función que relaciona las variables anteriores.

Si x denota el tiempo empleado por el electricista e y el coste de la reparación, la función que proporciona el coste en función del tiempo es: $f(x) = 15 + 25x$.

b) Completa la siguiente tabla que relaciona las variables tiempo y coste.

Tiempo (horas)	1	3	5	7
Coste (€)	*40*	*90*	*140*	*190*

c) ¿Cuánto tiempo ha empleado el electricista si ha cobrado 115 €?

Sabiendo que $y = 115$: $115 = 15 + 25x \Leftrightarrow 100 = 25x \Leftrightarrow x = 4$

El electricista ha empleado 4 horas.

16 Luis está pensando apuntarse a una academia de inglés y ha consultado los precios en dos de ellas. En la primera le cobran 60 € por matrícula y 50 € cada mensualidad, mientras que en la segunda no le cobran matrícula pero cada mensualidad cuesta 65 €.

a) Escribe las funciones que representan el precio de cada una de las academias en función del número de meses de asistencia.

Si x denota el número de meses que Luis asiste a la academia, las funciones

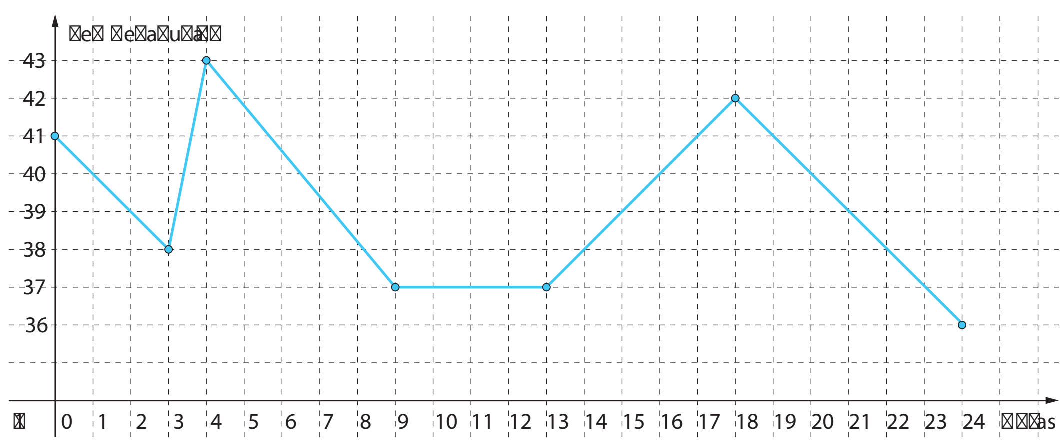
$$f_1 : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} : x \to f_1(x) = 60 + 50x \ \text{y} \ f_2 : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} : x \to f_2(x) = 65x$$

representan el coste de las dos academias en función del número de meses.

b) Si Luis tiene pensado apuntarse los diez meses que dura el curso escolar, ¿qué academia le resulta más barata?

En la primera academia tendría que pagar $f_1(10) = 60 + 50 \cdot 10 = 560$ € y en la segunda $f_2(10) = 65 \cdot 10 = 650$ €, luego gasta menos en la primera academia.

17 En la siguiente gráfica se muestra la evolución de la temperatura de Juan a lo largo de todo un día en el que ha estado enfermo. Observa la gráfica y responde las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál ha sido la máxima temperatura que ha alcanzado Juan? ¿Y la mínima?

Juan alcanzó una temperatura máxima de 43° y mínima de 36°.

b) ¿Cuántas horas ha mantenido una temperatura constante?

Ha mantenido una temperatura constante durante las 4 horas comprendidas entre las 9:00 y las 13:00.

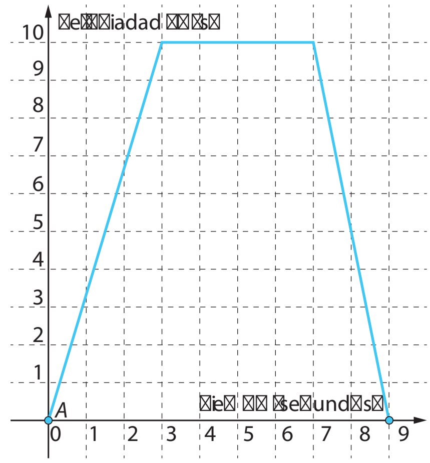
c) ¿Qué temperatura tenía a las 16:00?

A las 16:00 horas tenía 40° de temperatura.

d) ¿Cuántas veces a lo largo del día tuvo una temperatura de 40°?

A lo largo del día tuvo 5 veces una temperatura de 40°.

18 Pedro sale a pasear en bicicleta. La siguiente gráfica muestra la velocidad a la que se mueve en función del tiempo hasta que llega a un semáforo, cerca de su casa que le obliga a parar.



a) ¿Cuánto tiempo tarda desde que comienza a frenar hasta que se detiene por completo?

Pedro comienza a frenar en el séptimo segundo y se detiene en el noveno. Transcurren 2 segundos.

b) ¿Cuánto tiempo tardó Pedro en llegar al semáforo?

Pedro tardó 9 segundos en llegar al semáforo.

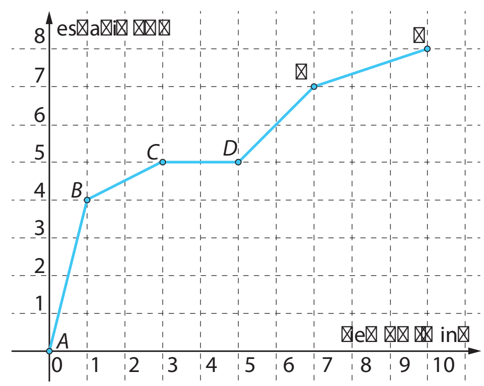
c) ¿Cuál es la máxima velocidad que alcanzó Pedro en su recorrido?

Pedro alcanzó una velocidad máxima de 10 m/s.

d) ¿Cuántos segundos se mantuvo a velocidad constante?

Pedro circuló 4 segundos a velocidad constante, los comprendidos entre el tercer y séptimo segundo.

19 Una tortuga se mueve lentamente en busca de comida. Dicho paseo duró 10 minutos, tal y como se indica en el eje de abscisas. Contesta las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál fue la distancia recorrida por la tortuga?

La tortuga recorrió 8 m.

b) ¿Cuánto tiempo estuvo parada?

Estuvo parada los 2 minutos transcurridos entre los minutos 3 y 5.

c) Calcula la TVM en los intervalos [0, 1], [1, 3], [3, 5], [5, 7] y [7, 10].

La TVM en cada uno de estos intervalos es la pendiente de la recta que contiene al correspondiente segmento. Así TVM[0, 1] = 4, TVM[1, 3] = 1/2, TVM[3, 5] = 0, TVM[5, 7] = 1 y TVM[7, 10] = 1/3.

d) ¿En cuál de los tramos anduvo más deprisa?

Observando las TVM de los distintos tramos, observamos que fue en el primer tramo en el que se movió más rápido, recorriendo 4 m en 1 min.

e) ¿Cuántos metros recorrió entre los minutos quinto y séptimo?

Entre los minutos quinto y séptimo recorrió 2 m.

f) ¿Y cuántos metros recorrió entre los minutos quinto y décimo?

Este intervalo de tiempo abarca dos tramos distintos con distinta TVM, pero eso es independiente para calcular el número de metros que recorrió. En este caso, observamos que recorrió 3 m.

10 Evaluación

1 **Halla el dominio de las siguientes funciones:**

$$f_1(x) = \frac{1}{2 - x},\ f_2(x) = \frac{x + 5}{x^4 + 2} \text{ y } f_3(x) = \sqrt{10 - 5x}$$

El cociente que define $f_1(x)$ sólo se anula en $x = 2$, luego Dom $f_1 = \mathbb{R} - \{2\}$. Por otro lado, $x^4 + 2 \geq 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego Dom $f_2 = \mathbb{R}$. Por último:

$$Dom(f_3) = \{x \in \mathbb{R} : 10 - 5x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

2 **Halla el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$.**

Para cada número real x el número $1 + x^2 > 0$, luego existe su raíz cuadrada. Por tanto, el domino de f es Dom $f = \mathbb{R}$.

- Calcula los valores de x para $y = 0$ e $y = 1$.

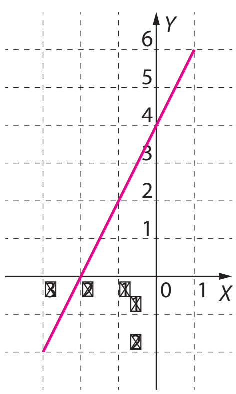
$$0 = f(x) \Leftrightarrow 0 = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 0 = 1$$

Esto significa que como a $y = 0$ no le corresponde un valor de x, $y = 0$ no pertenece al recorrido de f. En el caso de $y = 1$:

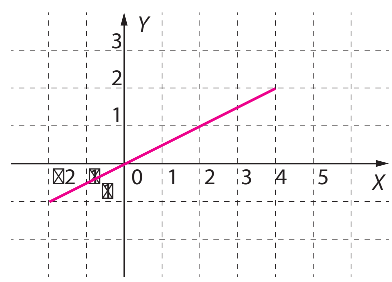
$$1 = f(x) \Leftrightarrow 1 = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow 1 + x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 1 + 2x + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3 **Representa las siguientes funciones para los valores en los que están definidas:**

a) $f(x) = 2x + 4$ si $-3 \leq x \leq 1$



b) $g(x) = \dfrac{x}{2}$ si $-2 \leq x \leq 4$



4 **Calcula los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 7x + 10$.**

La gráfica de la función dada corta al eje Y en el punto $(0, f(0)) = (0, 10)$. Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función dada con el eje X son las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$, esto es, $x = 2$ y $x = 5$. Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(2, 0)$ y $(5, 0)$.

5 **Estudia si es creciente o decreciente en $\mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.**

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que $z_1 < z_2$ se tiene:

$$f(z_2) - f(z_1) = z_2^3 - z_1^3 = (z_2 - z_1)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) = (z_2 - z_1)\left(\left(z_1 + \frac{z_2}{2}\right)^2 + \frac{3z_2^2}{4}\right) > 0$$

luego la función f es creciente en $\mathbb{R}$.

6 **Dadas las funciones $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$, calcula cuánto valen en $x = 0$ las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$.**

Como $f(0) = 1$ y $g(0) = \dfrac{1}{2}$ resulta que:

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = \frac{3}{2}, \qquad (f-g)(0) = f(0) - g(0) = \frac{1}{2},$$

$$(fg)(0) = f(0)g(0) = 1/2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 2$$

7 **Encuentra una función polinómica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado 3 tal que $f(-1) = -4$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ y $f(2) = 5$.**

Debemos encontrar números reales a, b, c, d tales que la función buscada

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

cumpla lo requerido. Nótese que $d = f(0) = -1$, y las condiciones $f(-1) = -4$ y $f(1) = 0$ se leen:

$$\begin{cases} -a + b - c - 1 = -4 \\ a + b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = -3 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades se deduce que $2b = -2$, así que $b = -1$. Por tanto, $a + c = 2$, luego $f(x) = ax^3 - x^2 + (2 - a)x - 1$ y para calcular a empleamos la igualdad $f(2) = 5$, esto es:

$$5 = f(2) = 8a - 4 + 2(2 - a) - 1 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$$

Finalmente, la función buscada está definida por $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

8 **Calcula la longitud de un intervalo $[a, b]$ sabiendo que la tasa de variación media de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es 3 y $f(b) = 15 + f(a)$.**

Por la definición de tasa de variación media se tiene:

$$3 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{15}{b - a} \Rightarrow b - a = \frac{15}{3} = 5$$

Luego la longitud del intervalo es 5.

11 Tipos de funciones

11.1. Funciones lineales y cuadráticas

Una **función** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice **lineal** si existen números reales m y n tales que $m \neq 0$ y se escribe como: $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$

Su **gráfica** es la **recta** de ecuación $y = mx + n$. Por tanto, su **dominio y recorrido** son la recta real $\mathbb{R}$ y f es creciente si la pendiente $m > 0$ y decreciente si $m < 0$. En particular f no tiene ni máximos ni mínimos.

1 **Calcula la fórmula $y = f(x)$ de la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.**

La función buscada es de la forma $f(x) = mx + n$ para ciertos números reales m y n, y cumple las igualdades $f(1) = 1$ y $f(2) = 3$ es decir:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 2;\ n = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

Una **función** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice **cuadrática** si existen números reales a, b y c tales que $a \neq 0$, y se escribe de la forma: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Su **gráfica** es la **parábola** de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$ la parábola es abierta hacia arriba $(\cup)$ y se dice que se trata de una parábola **cóncava.**
- Si $a < 0$ la parábola es abierta hacia abajo $(\cap)$ y se dice que se trata de una parábola **convexa.**

La recta $x = \dfrac{-b}{2a}$ es un **eje de simetría** de la parábola y el punto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$, su **vértice.**

- Si la **parábola es cóncava** entonces f alcanza su único **mínimo** en la abscisa de V.
- Si la **parábola es convexa** entonces f alcanza su único **máximo** en la abscisa de V.

2 **Calcula el vértice de las gráficas de las siguientes funciones:**

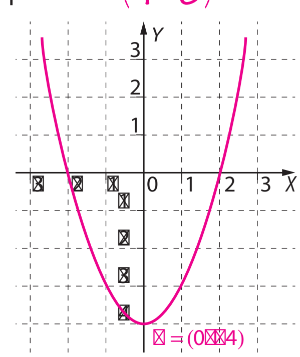
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - x + 5$ $\Rightarrow V = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{59}{12}\right)$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto -2x^2 + x + 1$ $\Rightarrow V = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{8}\right)$

3 **Calcula el eje de simetría y el vértice de la la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4$. Dibuja su gráfica.**

La gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es la recta $x = 0$ y cuyo vértice es el punto $V = (0, f(0)) = (0, -4)$. Además corta al eje de abscisas en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, pues:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2;\ x = 2$$

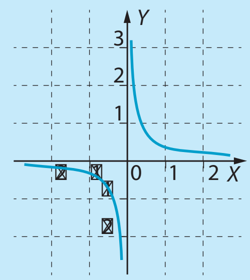


11.2. Funciones de proporcionalidad inversa

La **función de proporcionalidad inversa** típica es la definida por:

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

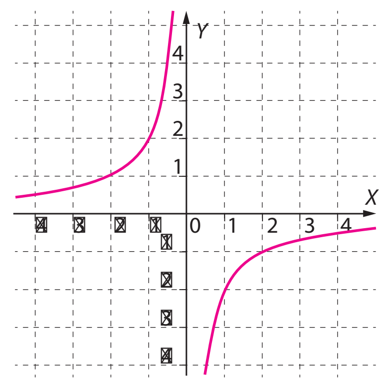
cuyo **dominio** es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y cuyo **recorrido** es Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$.



La **gráfica** de esta función se denomina **hipérbola.** Es una función continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, decreciente e impar, por lo que su gráfica es **simétrica respecto del origen.**

4 **Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$. Indica el dominio y el recorrido de la función. Estudia los intervalos de crecimiento y las simetrías, si las hay, de la gráfica de la función.**

El dominio es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es también Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$. Es una función creciente e impar, por lo que su gráfica es simétrica respecto del origen.



La **recta $y = 0$** es una **asíntota horizontal** de la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$.

Esto significa que a medida que la variable x tiende a ∞, los valores de y se aproximan a 0.

5 **Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \frac{10}{x}$.**

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$f(x) = \frac{10}{x}$	1	0,1	0,01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

La **recta $x = 0$** es una **asíntota vertical** de la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$.

Esto significa que a medida que la variable x tiende a 0, los valores de y se aproximan a ∞.

6 **Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \frac{10}{x}$.**

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$f(x) = \frac{10}{x}$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9

Características de las funciones de proporcionalidad inversa: $y = \dfrac{a}{x}$

- Hemos visto que las hipérbolas que corresponden a funciones del tipo $y = \dfrac{a}{x}$ tienen por asíntotas a los ejes coordenados.
- Son simétricas respecto del origen de coordenadas: tienen simetría impar.
- Su **dominio** es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y su **recorrido** es Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, la función es estrictamente decreciente.
- Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, la función es estrictamente creciente.

Transformaciones de la hipébola

El **centro de la hipérbola,** es el punto donde se cortan las asíntotas, luego en las anteriores es el origen de coordenadas.

Mediante **traslaciones** de estas hipérbolas tenemos otras:

- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}$, basta con trasladar según el vector $\vec{u} = (0, k)$ la hipérbola que representa a la función $y = \dfrac{a}{x}$.
- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}}$, basta con trasladar según el vector $\vec{v} = (-b, 0)$ la hipérbola que representa a la función $y = \dfrac{a}{x}$.
- Para **representar la hipérbola** que es la gráfica de la función $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}} + \boldsymbol{k}$, basta con realizar la traslación según el vector $\vec{w} = (-b, k)$ de la hipérbola que representa a la función $y = \dfrac{a}{x}$, o lo que es lo mismo, aplicar sucesivamente las traslaciones según los vectores $\vec{u} = (0, k)$ y $\vec{v} = (-b, 0)$ que acabamos de explicar.

7 **Indica cuáles son las asíntotas y el centro de la hipérbola de ecuación $\boldsymbol{y = \dfrac{5}{x} + 3}$.**

Para representar la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{5}{x} + 3$ basta trasladar la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{5}{x}$ según el vector $\vec{u} = (0, 3)$.

Como las asíntotas de la segunda son los ejes coordenados, entonces las asíntotas de $y = \dfrac{5}{x} + 3$ son las rectas $x = 0$ e $y = 3$.

Su centro es el punto de corte de dichas rectas, esto es, el punto $(0, 3)$.

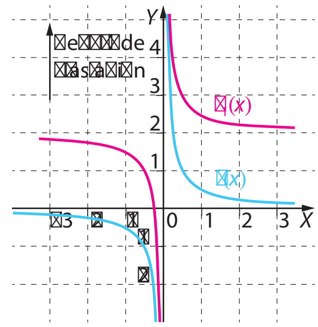
8 A partir de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{2x}$ dibuja las gráficas de las siguientes funciones. Indica las asíntotas y el vector de traslación.

a) $f_1(x)=\dfrac{1}{2x}+2$

Asíntota horizontal: $y=2$

Asíntota vertical: $x=0$

Vector de traslación: $\vec{u}=(0,2)$

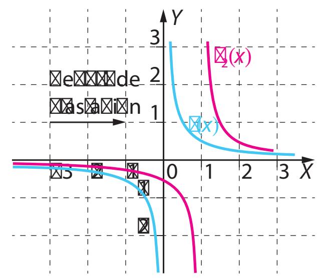


b) $f_2(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}$

Asíntota horizontal: $y=0$

Asíntota vertical: $x=2$

Vector de traslación: $\vec{v}=(2,0)$

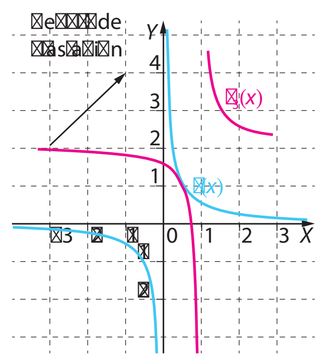


c) $f_3(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}+2$

Asíntota horizontal: $y=2$

Asíntota vertical: $x=2$

Vector de traslación: $\vec{w}=(2,2)$



9 Calcula los números reales a, b y c sabiendo que la función,

$$f:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{c}{x-a}+b$$

cumple las igualdades: $f(a+c)=f(a+1)=2$ y $f(3)=2$.

Al evaluar la función $f(x)$ en $x=a+c$, $x=a+1$ y en $x=3$ se tiene:

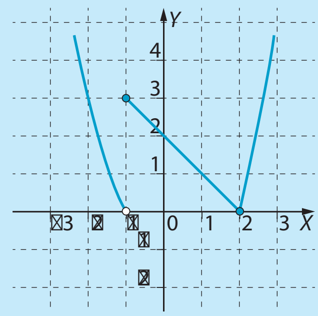
- $2=f(a+c)=\dfrac{c}{a+c-a}+b=1+b\Rightarrow b=1$
- $2=f(a+1)=\dfrac{c}{a+1-a}+b=c+b=c+1\Rightarrow c=1$
- $2=f(3)=\dfrac{c}{3-a}+b=\dfrac{1}{3-a}+1\Rightarrow 3-a=1\Rightarrow a=2$

11.3. Funciones definidas a trozos

Muchos fenómenos físicos, biológicos o económicos se rigen por funciones que **cambian de fórmula** conforme varía la variable independiente. Decimos que esas **funciones están definidas a trozos,** cada uno de los cuales se suele denominar una **rama** de la función, y es importante estudiar si las ramas se pegan adecuadamente, esto es, sin saltos, para que la función así construida sea continua.

Ejemplo: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

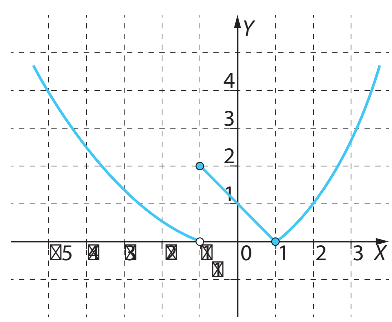


consta de tres ramas:

- La primera es un trozo de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, que está definida cuando x pertenece al intervalo $(-\infty, -1)$.
- La segunda rama, definida entre $x = -1$ y $x = 2$, es un trozo de la recta $y = -x + 2$.
- La tercera rama es un trozo de la parábola de ecuación $y = x^2 - 4$, que está definida cuando x pertenece al intervalo $(2, +\infty)$.

La función es discontinua en $x = -1$ pues su gráfica presenta un salto.

10 **¿Cuál es el valor en los puntos $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$ de la función cuya gráfica está dibujada a continuación?**



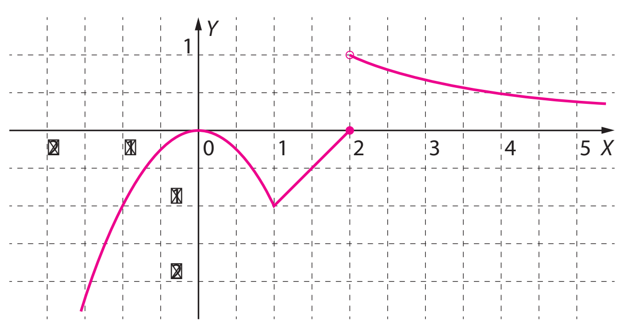
Si llamamos $f(x)$ a la función cuya gráfica nos proporcionan, se observa sin más que mirar que:

$f(-5) = 4$; $\quad f(-1) = 2$; $\quad f(1) = 0$; $\quad f(2) = 1$

11 **Representa la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad.



La primera rama es un trozo de una parábola convexa cuyo vértice es el origen de coordenadas. La segunda rama es el segmento de extremos los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$, mientras que la tercera es un trozo de hipérbola.

La función es discontinua en $x = 2$.

11.4. Funciones exponenciales

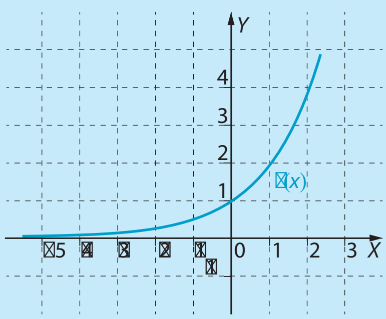
Fijado un número real positivo a se llama **función exponencial** de **base *a*** a la definida por:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

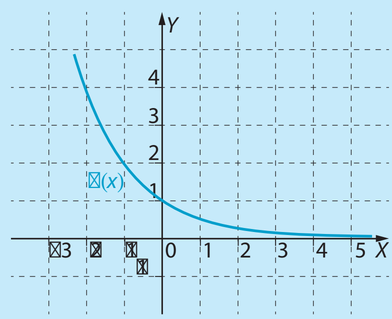
Características

- Como $a^0 = 1$ y $a^1 = a$ la gráfica de f siempre pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$. Esta función es constante de valor 1 si $a = 1$, así que supondremos siempre que $a \neq 1$.
- Su gráfica es muy distinta si $a > 1$ o $a < 1$, según se observa a continuación.

Gráfica de $f(x) = 2^x$



Gráfica de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



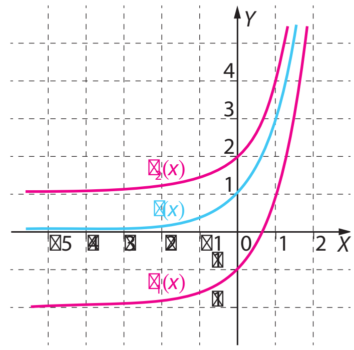
- La función $f(x) = a^x$ es **continua,** su **dominio** es Dom $f = \mathbb{R}$ y su **recorrido** es Rec $f = (0, +\infty)$.
- Si $a > 1$ entonces f es una función **creciente** en todo $\mathbb{R}$. Según la variable x tiende a $-\infty$, la gráfica de f se aproxima más a la semirrecta negativa del eje horizontal. Se dice entonces que $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de f cuando $x \to -\infty$.
- Si $a < 1$ entonces f es una función **decreciente** en todo $\mathbb{R}$. Según la variable x tiende a $+\infty$, la gráfica de f se aproxima más a la semirrecta positiva del eje horizontal. Se dice entonces que $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de f cuando $x \to +\infty$.
- En particular, por ser f una función monótona, creciente o decreciente, se deduce que si $a^x = a^z$ entonces $x = z$.

12 **Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la gráfica de la función $f(x) = 5^x$.**

Para todo número real x se cumple que $f(x) = 5^x > 0$, luego la gráfica de f no corta al eje de abscisas.

El punto de corte con el eje de ordenadas es el punto: $(0, f(0)) = (0, 5^0) = (0, 1)$

13 **A partir de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ representa las funciones: $f_1(x) = 3^x - 2$ y $f_2(x) = 3^x + 1$.**



La gráfica de la función $f_1(x) = 3^x - 2$ es el resultado de trasladar según el vector $\vec{u} = (0, -2)$ la gráfica de $f(x) = 3^x$, mientras que para representar la función $f_2(x) = 3^x + 1$ se traslada la gráfica de f según el vector $\vec{v} = (0, 1)$.

14 **Encuentra todos los números reales x que cumplen la igualdad:**

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Si llamamos $z = 3^x$ entonces $z^2 = (3^x)^2$, por lo que la ecuación se lee:

$$0 = 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = z^2 - 4z + 3$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 = 3^x = 3^1 \\ z = 1 = 3^x = 3^0 \end{cases}$$

Así que las soluciones de la ecuación dada son $x = 0$ y $x = 1$.

15 **Emplea las propiedades de las potencias para expresar las funciones exponenciales $h(x) = 3^{2x}$ y $g(x) = 3^{x^2}$ como composición de las funciones $f_1(x) = 3x$ y $f_2(x) = x^2$.**

$$h(x) = 3^{2x} = (3^x)^2 = f_2(3^x) = f_2(f_1(x)) = (f_2 \circ f_1)(x)$$

$$g(x) = 3^{x^2} = f_1(x^2) = f_1(f_2(x)) = (f_1 \circ f_2)(x)$$

16 **Un jugador apuesta en un casino *a doble o nada*, es decir, apuesta una cantidad inicial de C € y, si gana en la siguiente jugada, recibe esa misma cantidad, pasando a tener $2C$ €, mientras que si pierde se queda sin nada.**
A continuación, vuelve a jugar, de modo que si gana pasa a tener $4C$ € y si pierde se queda sin nada. Tras ganar n veces seguidas se retira, y observa que tiene 1 183 744 €.
Sabiendo que la cantidad inicial C es un número entero impar, calcúlala y averigua cuántas partidas ganó el jugador.

Tras ganar n veces seguidas el jugador se retira con $2^n C$ €, luego:

$$2^n C = 1\,183\,744 = 2^{12} \cdot 17^2$$

Como C es un entero impar se deduce que el jugador ganó $n = 12$ partidas y comenzó a jugar con:

$$C = 17^2 = 289 \text{ €}$$

17 De entre todos los rectÆngulos cuyo per□metro es 36 m, ¿cuÆnto vale el Ærea de l□ rectÆngulo mayor?

La suma de las longitudes de dos lados consecutivos de cualquiera de estos rectángulos es 18 m, luego miden x y $18 - x$ metros.

Ambas longitudes son positivas, luego $0 < x < 18 - x$, es decir, x pertenece al intervalo $(0, 18)$.

El área de este rectángulo mide $x(18 - x)$, luego se trata de calcular el valor máximo de la función:

$$f:(0,18) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x(18-x)$$

Para ello, basta reescribir $f(x)$ como sigue:

$$f(x) = 18x - x^2 = -(x^2 - 18x) = -\left((x-9)^2 - 81\right) = 81 - (x-9)^2$$

Su valor es máximo si el sustraendo es mínimo, esto es, si $x = 9$ y por tanto, el área máxima es $f(x) = 81\ \text{m}^2$.

Observamos que este valor máximo se alcanza para el cuadrado de lado 9 m.

18 La fuerza con la que una carga elØctrica positiva atrae a la carga unidad negativa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que□las separa. Si a una distancia x_0 le corresponde una fuerza de atracci□n de 6 N, ¿cuÆl es la fuerza de atracci□n si la distancia se reduce a la mitad?

La fuerza de atracción entre cargas que distan x viene dada por una función de la forma:

$$f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{\lambda}{x^2}$$

para cierto número real □.

El dato del enunciado afirma que $6 = f(x_0) = \frac{□}{x_0^2}$, y se trata de calcular la fuerza f_1 que corresponde a la distancia $x_1 = \frac{x_0}{2}$ entre las cargas:

$$f_1 = f(x_1) = \frac{\lambda}{x_1^2} = \frac{\lambda}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2} = \frac{4\lambda}{x_0^2} = 24\ \text{N}$$

11 Problemas

19 La ley de Boyle-Mariotte afirma que, a temperatura constante, la presión que ejerce un gas y el volumen que este ocupa son inversamente proporcionales. Se sabe que a 20°C cierta cantidad de gas ocupa un volumen de 3 L y ejerce una presión de 2 atm.

a) ¿Qué volumen ocupará el gas, manteniendo la temperatura en 20°C, cuando la presión ejercida sea de una atm? ¿Y de 4 atm?

Por la ley de Boyle-Mariotte el producto del volumen V que ocupa el gas por la presión p que ejerce es constante, y en este caso:

$$p \cdot V = 3 \cdot 2 = 6$$

Por tanto:

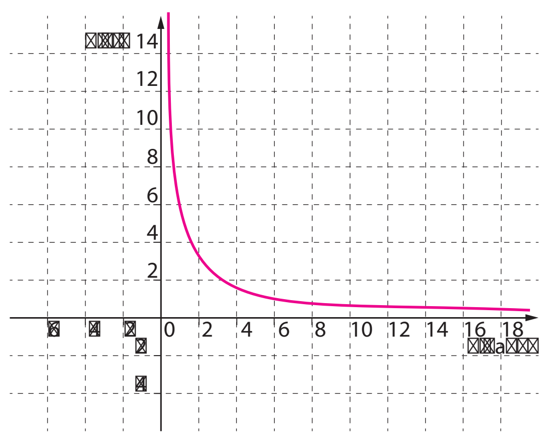
- Si $p = 1$ atm $\Rightarrow V = 6$ L
- Si $p = 4$ atm $\Rightarrow V = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ L

b) ¿Qué presión ejercerá el gas cuando el volumen sea de 2 litros?

Del mismo modo, si $V = 2$ L entonces:

$$p = \frac{6}{2} = 3 \text{ atm}$$

c) Escribe y representa la función que expresa el volumen ocupado por el gas en función de la presión ejercida si la temperatura es 20°C?



Si x denota la presión que ejerce el gas e y el volumen que ocupa, se tiene:

$$x \cdot y = 6$$

De este modo, la función que expresa el volumen ocupado por el gas en función de la presión ejercida es:

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

20 Un grifo que arroja un caudal de 10 L/min tarda un cuarto de hora en llenar cierto depósito. Escribe y representa la función que expresa el tiempo que tarda en llenarse el depósito en función del caudal del grifo. ¿Cuánto tardaría en llenarse si el caudal fuese de 12 L/min?

Las magnitudes caudal del grifo y tiempo que tarda el depósito en llenarse están relacionadas por una función de proporcionalidad inversa.

En concreto, si x denota el caudal del grifo e y el tiempo que tarda en llenarse el depósito se cumple que:

$x \cdot y = 10 \cdot 15 = 150$ L

De modo que la función que expresa el tiempo, expresado en minutos, que tarda el depósito en llenarse en función del caudal del grifo, expresado en L/min, es: $f(x) = \dfrac{150}{x}$

Si el caudal fuese de 12 L/min entonces tardaría: $f(12) = \dfrac{150}{12} = 12{,}5$ min

Esto es, 12 minutos y 30 segundos.

21 La altura $h(t)$, medida en cm, que alcanza una pelota en el instante t segundos tras ser lanzada hacia arriba con cierta velocidad inicial es $h(t) = 196t - 9,8t^2$. Calcula la altura máxima alcanzada por la pelota y en qué instante la alcanza. ¿Cuánto tarda la pelota en volver al suelo?

Se trata de calcular, en primer lugar, el valor máximo de la función:

$$h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto 196t - 9{,}8t^2$$

Escribimos $h(t)$ de otro modo:

$$h(t) = -9{,}8 \cdot (t^2 - 20t) = -9{,}8 \cdot ((t-10)^2 - 100) = 980 - 9{,}8 \cdot (t-10)^2$$

El valor máximo de esta resta se alcanza cuando el sustraendo es mínimo, es decir, si $t = 10$ y la altura máxima es $h(10) = 980$ cm.

Por otro lado, la pelota vuelve al suelo cuando $h(t) = 0$, o sea, $-9{,}8 \cdot (t - 20) = 0$, que se alcanza en el instante inicial $t = 0$ y en $t = 20$ s. Por tanto, la pelota tarda 20 s en llegar al suelo.

11 Evaluación

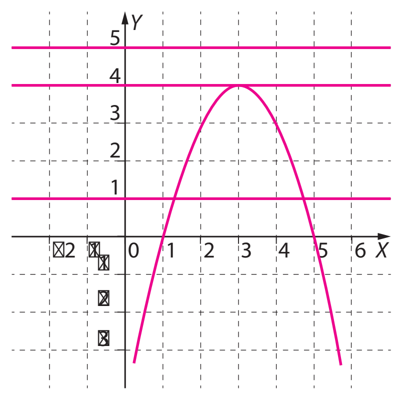
1 ¿Existe alguna función lineal cuya gráfica pase por los puntos $(2, 1)$, $(1, 0)$ y $(3, 2)$?

Hay que averiguar si existen números reales $m \neq 0$ y n tales que la función $f(x) = mx + n$ cumpla las condiciones $f(2) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(3) = 2$. Esto equivale a que:

$$\begin{cases} 2m + n = 1 \\ m + n = 0 \\ 3m + n = 2 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce, restando, que $m = 1$ y $n = -1$, que también satisfacen la tercera, por lo que la función lineal $f(x) = x - 1$ cumple lo requerido.

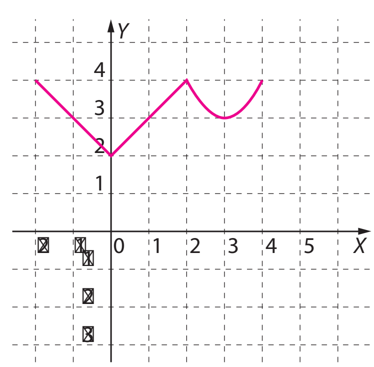
2 Encuentra las ecuaciones de tres rectas horizontales que corten en dos, uno y ningún punto, respectivamente, a la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.



La gráfica de f es una parábola de vértice $V = (3, 4)$. En consecuencia, f alcanza en $x = 3$ su máximo, y $f(3) = 4$. Por tanto, la recta de ecuación $y = 1$ corta a la gráfica de f en dos puntos, la recta de ecuación $y = 4$ la corta en un único punto, que es V, mientras que la recta de ecuación $y = 5$ no la corta.

3 Dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$ y decide si se trata de una función continua. Encuentra los mínimos relativos de esta función.

Vamos a dibujar cada una de las ramas de la gráfica de f. La primera, es el segmento que une los puntos $(-2, 4)$ y $(0, 2)$. La segunda rama es el segmento de recta que une los puntos $(0, 2)$ y $(2, 4)$. Por último, la tercera rama es un arco de parábola cóncava de vértice $(3, 3)$ que pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(4, 4)$.



Se aprecia que la gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, así que la función f es continua. La función f alcanza en $x = 0$ y en $x = 3$ mínimos relativos. Dichos valores son $f(0) = 2$ y $f(3) = 3$.

4 **Encuentra todos los números reales x que cumplen la igualdad $2^{2x} - 2^{2+x} + 4 = 0$.**

La ecuación se reescribe $(2^x)^2 - (2^2) \cdot 2^x + 4 = 0$, y llamando $z = 2^x$ resulta:

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

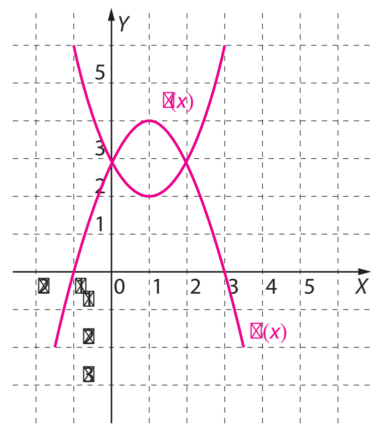
La única raíz de esta ecuación de segundo grado es $z = 2$, luego $2^x = z = 2 = 2^1$, así que: $x = 1$

5 **Encuentra los puntos comunes a las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Representa en un mismo sistema de ejes cartesianos las gráficas de ambas funciones.**

Un punto $P = (x, y)$ pertenece a ambas gráficas si:

$$x^2 - 2x + 3 = y = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

Como $f(0) = g(0) = 3$ y $f(2) = g(2) = 3$, los puntos comunes a ambas gráficas son $P = (0, 3)$ y $Q = (2, 3)$. La gráfica de f es una parábola cóncava cuyo vértice es el punto $V_1 = (1, 2)$, mientras que la gráfica de g es una parábola convexa cuyo vértice es el punto $V_2 = (1, 4)$.



La gráfica de f no corta al eje de abscisas pues $x_2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ para todo número real x, mientras que la de g corta al eje de abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$, pues $-x^2 + 2x + 3 = 0$ si y solo si $x = 3$ o $x = -1$.

6 **Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de las gráficas de las funciones siguientes: $f_1(x) = x^2 - 8x + 15$; $f_2(x) = \dfrac{5}{x}$; $f_3(x) = -8^x$**

- Las gráficas de $f_1(x)$ y $f_3(x)$ cortan al eje de ordenadas en $(0, f_1(0)) = (0, 15)$ y $(0, f_3(0)) = (0, -1)$, respectivamente.

  Me ntras que la gráfica de $f_2(x)$ no corta a dicho eje porque $x = 0$ no pertenece al dominio de $f_2(x)$.

- Para hallar los puntos de corte con el eje de abscisas de la gráfica de la función $f_1(x)$, hay que resolver la ecuación $f_1(x) = 0$, esto es, $x^2 - 8x + 15 = 0$, o sea, $x = 3$ y $x = 5$.

  Por tanto, la gráfica de $f_1(x)$ corta al eje de abscisas en los puntos $(3, 0)$ y $(5, 0)$.

  Por otro lado, $\dfrac{5}{x}$ y $8x$ son no nulos para todo número real x, luego las gráficas de las funciones $f_2(x)$ y $f_3(x)$ no cortan al eje de abscisas.

12 Estadística

12.1. Población y muestra

Población es el conjunto formado por todos los elementos (individuos, objetos) sobre los que se quiere realizar un **estudio estadístico,** es decir, observar o medir alguna característica. Una **muestra** es un subconjunto de la población. Se dice que la muestra es **representativa** si es un fiel reflejo, respecto de la característica que se desea estudiar, de la población que se quiere analizar.

Para que la muestra sea representativa, en ella se debe conservar la proporción en que están presentes en la población los distintos integrantes de la misma.

1 **En un estudio de una población formada por 1 800 personas de las que 1 200 son mujeres. ¿Cómo debe estar compuesta una muestra representativa de 60 personas?**

Llamamos h al número de hombres elegidos en la muestra y m al de mujeres. Para mantener las proporciones presentes en la población ha de cumplirse que:

$$\frac{1200}{1800} = \frac{m}{60} \Rightarrow m = 40;\ h = 60 - 40 = 20$$

Así, el número de hombres en la muestra es 20 y el de mujeres es 40.

2 **Indica si conviene realizar los siguientes estudios estadísticos tomando poblaciones o muestras:**

a) La edad a la que comienzan a leer los niœos finlandeses.

b) El precio de los vehículos de alta gama vendidos en Espaœa en el último aœo.

c) El peso de los jugadores del equipo de fútbol más importante de tu ciudad.

En el caso c) la población está constituida por pocos miembros, por lo que es innecesario tomar muestras. Al contrario que en a) y b) en los que el tamaño de la población es muy grande, por lo que la selección de una muestra es imprescindible.

3 **Se ha tomado una muestra de los precios del mismo producto en 10 comercios, elegidos al azar, y se han encontrado los siguientes precios: 0,95 €, 1,08 €, 0,97 €, 1,12 €, 0,99 €, 1,06 €, 1,05 €, 1 €, 0,99 € y 0,98 €. ¿Cuál es la media muestral?**

La media muestral es la media de los diez precios dados, esto es:

$$\frac{0{,}95 + 1{,}08 + 0{,}97 + 1{,}12 + 0{,}99 + 1{,}07 + 1{,}05 + 1 + 0{,}99 + 0{,}98}{10} = 1{,}02\text{ €}$$

Para construir muestras representativas se tienen que emplear **procedimientos aleatorios,** es decir, se debe cumplir que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de ser elegidos como miembros de la muestra.

Entre los **tipos de muestreo** se distinguen aquellos en los que la selección de la muestra se realiza **sin reemplazamiento** y aquellos en que se realiza **con reemplazamiento.** En los primeros, si un individuo es elegido para formar parte de la muestra es excluido del proceso de selección de nuevos miembros, y esto no sucede así en el segundo, en el que un mismo individuo puede formar parte varias veces de la muestra seleccionada.

4 **Indica si los siguientes métodos de obtención de una muestra son adecuados.**

a) Para un estudio sobre las actividades de ocio preferidas por los habitantes de una localidad, encuestamos a 100 personas al azar a la salida de un partido de fútbol.

b) Queremos estimar la estatura media de los 2000 niños de 10 años de una localidad y elegimos al azar 20 colegios de la localidad y 5 niños de cada uno.

c) En una localidad de 3000 habitantes se quiere construir un centro de ocio. Los habitantes se distribuyen por edades como sigue: 700 niños, 750 jóvenes, 1100 adultos y 450 ancianos. Para averiguar qué tipo de actividades les gustaría que hubiera en dicho centro, se selecciona al azar una muestra de 100 personas para ser encuestadas, constituida por 20 niños, 25 jóvenes, 26 adultos y 29 ancianos.

d) En un barrio hay 400 habitantes, distribuidos en cuatro urbanizaciones: el 12% viven en A, el 20% en B, el 36% en C y el 32% en D. Para comprobar el grado de satisfacción con los servicios de limpieza y basuras se selecciona una muestra de 50 personas del modo siguiente: 6 habitantes de A, 10 de B, 18 de C y 16 de D.

No son adecuados los métodos empleados en los apartados a) y c) pues en el primero solo se considera a un grupo (el que acude al partido de fútbol) dentro de la población y en el tercero la muestra no mantiene, ni siquiera aproximadamente, las proporciones de los distintos grupos de edades presentes en la población.

En el caso de los apartados b) y d) sí se está escogiendo de forma correcta la muestra. Se emplean prodedimientos aleatorios y, en el caso d), la muestra mantiene las proporciones de habitantes en cada urbanización.

12.2. Gráficos Estadísticos

Dada una colección de datos se llama **frecuencia absoluta** de uno de ellos al número de veces que dicho dato se repite. Se cumple que la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores es el total de datos de nuestro estudio.

Llamamos **frecuencia relativa** al cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos de nuestro estudio. Se cumple que la suma de las frecuencias relativas de todos los valores es igual a 1.

5 **Se ha preguntado a los 25 alumnos de una clase sobre el número de piezas de fruta que comen al día. Sus respuestas han sido las siguientes:**

2, 0, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1

¿Cuáles son las frecuencias absolutas? ¿Y las relativas?

Los datos obtenidos son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, y $x_4 = 3$, las frecuencias absolutas son $f_1 = 3$, $f_2 = 8$, $f_3 = 7$ y $f_4 = 7$ por lo que las frecuencias relativas son $f_{r1} = \frac{3}{25}$, $f_{r2} = \frac{8}{25}$, $f_{r3} = \frac{7}{25}$, y $f_{r4} = \frac{7}{25}$.

Se llama **frecuencia absoluta acumulada** *i*-ésima al número: $F_i = f_1 + \ldots + f_i$

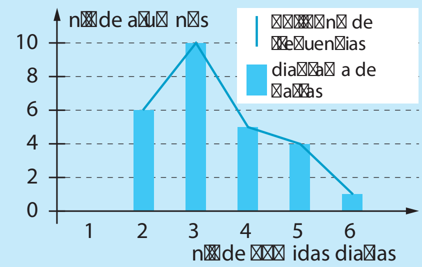
Y **frecuencia relativa acumulada** *i*-ésima al número: $F_{ri} = f_{r1} + \ldots + f_{ri}$

La **frecuencia porcentual** *i*-ésima es el tanto por ciento al que equivale la frecuencia relativa de un dato particular.

6 **Representa en forma de tabla los datos del Ejercicio anterior, sus frecuencias absolutas y relativas ordinarias, acumuladas y porcentuales.**

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
0	3	3	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	12 %	12 %
1	8	11	$\frac{8}{25}$	$\frac{11}{25}$	32 %	44 %
2	7	18	$\frac{7}{25}$	$\frac{18}{25}$	28 %	72 %
3	7	25	$\frac{7}{25}$	1	28 %	100 %
Total	25		1		100 %	

Los **diagramas de barras, polígonos de frecuencias** y **diagramas sectoriales,** son gráficos que se emplean para representar las frecuencias absolutas y relativas.

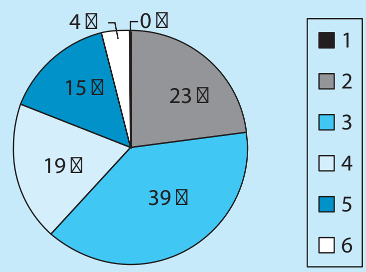


Ejemplo: El siguiente *diagrama de barras* representa una población cuyos datos son los que figuran en la siguiente tabla:

Datos	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	0	6	10	5	4	1

Para construir el *polígono de frecuencias* basta unir mediante una poligonal los extremos superiores de las barras representadas en el diagrama de barras.

Esta información se puede reflejar en un *diagrama sectorial*. Los grados de cada sector se calculan multiplicando su frecuencia relativa por 360°.



7 Las estaturas de los 25 alumnos de una clase están agrupadas según la tabla:

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N° de alumnos	5	7	8	5

Expresa en forma de tabla las frecuencias de cada intervalo.

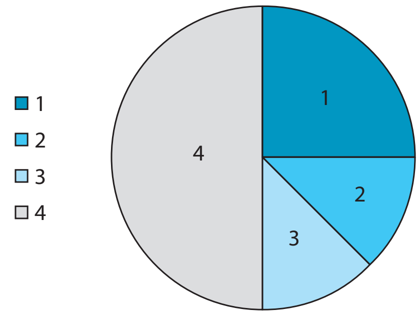
Altura	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia absoluta acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**	**Frecuencia porcentual**	**Frecuencia porcentual acumulada**
I_1	5	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	20 %	20 %
I_2	7	12	$\frac{7}{25}$	$\frac{12}{25}$	28 %	48 %
I_3	8	20	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{5}$	32 %	80 %
I_4	5	25	$\frac{1}{5}$	1	20 %	100 %
Total	25		1		100 %	

Denotamos los intervalos mediante

$I_1 = [155, 165)$, $I_2 = [165, 175)$, $I_3 = [175, 185)$, $I_4 = [185, 195]$

8 Completa la siguiente tabla para que los datos reflejen lo mostrado en el sector circular.

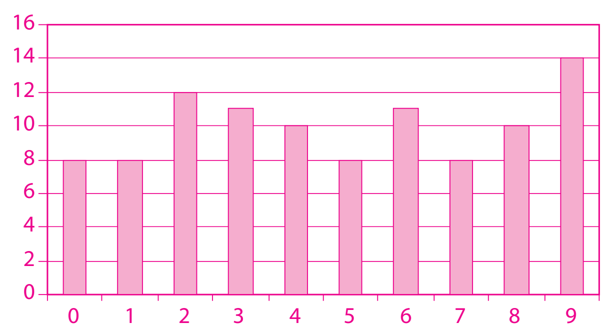
x_i	1	2	3	4
Frecuencia porcentual	25 %	12,5 %	12,5 %	50 %



9 Se muestran en la tabla adjunta las 100 primeras cifras decimales del número π = 3,14159265358979323846...: Representa en un diagrama de barras la frecuencia de aparición de los dígitos.

1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9	5	0	2	6	6	4	1	9	7	1
6	9	3	9	9	3	7	5	1	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4
5	9	2	3	0	7	8	1	6	4	0	6	2	8	6	2	0	8	9	9
8	6	2	8	0	3	4	8	2	5	3	4	2	1	1	7	0	6	7	9

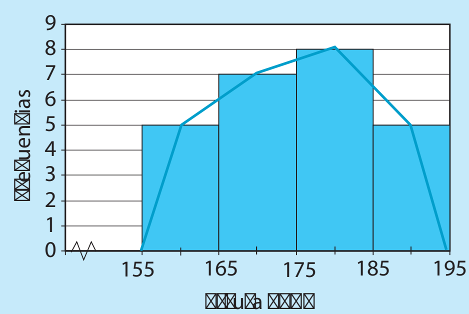
Dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	8	8	12	11	10	8	11	8	10	14



Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos se suele construir un **histograma.** Esto es, una representación gráfica en forma de rectángulos, cuya altura es la frecuencia del correspondiente intervalo. Cuando los intervalos no son de la misma longitud los rectángulos del histograma se construyen de modo que la superficie de cada uno es proporcional a la frecuencia del intervalo correspondiente.

Ejemplo:

Representamos a continuación el histograma y el polígono de frecuencias de los datos presentados en la siguiente tabla de frecuencias:



Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N° de alumnos	5	7	8	5

12.3. Medidas de centralización

Las **medidas de centralización** de una serie de datos son valores con los que se pretende resumir parte de la información proporcionada por todos ellos.

La **media aritmética** de una serie de datos numéricos x_1, x_2, ..., x_k cuyas frecuencias absolutas son f_1, … , f_k es el número:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + \dots + f_k x_k}{N}$$

donde $N = f_1 + \dots + f_k$ es el número total de datos. Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos se toman las marcas de clase de los intervalos, es decir, el punto medio de cada intervalo.

10 **Encuentra la media aritmética de la altura de 25 alumnos sabiendo que:**

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
Marca de clase	160	170	180	190
N° de alumnos	5	7	8	5

Hemos de trabajar con las marcas de clase y las frecuencias de los intervalos.

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4}{N} = \frac{160 \cdot 5 + 170 \cdot 7 + 180 \cdot 8 + 190 \cdot 5}{25} = 175{,}2$$

Un número M_e es **mediana** de una serie de datos si cumple que una vez ordenados los datos de menor a mayor M_e deja a su izquierda el mismo número de observaciones que a su derecha. Si el número de datos es par tomaremos como mediana la media aritmética de los dos valores centrales.

11 **La media de x, $4x - 3$, $x + 4$, -16, 9 y $x - 5$ es 4. ¿Cuánto vale la mediana de estos seis números?**

Como la media es 4 se tiene:

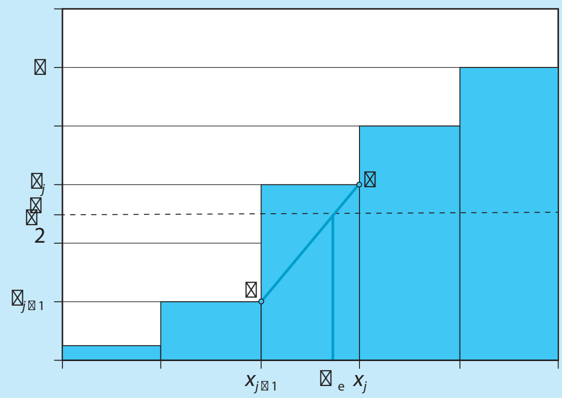
$$4 = \bar{x} = \frac{x + (4x - 3) + (x + 4) + (-16) + 9 + (x - 5)}{6} \Rightarrow 24 = 7x - 11 \Rightarrow x = 5$$

Por tanto, debemos calcular la mediana de los siguientes datos: $5, 17, 9, -16, 9$ *y* 0.

Ordenados de menor a mayor: $-16, 0, 5, 9, 9, 17 \Rightarrow M_e = \frac{5 + 9}{2} = 7$

¿A qué se llama mediana cuando no conocemos exactamente los datos ni sus frecuencias sino los intervalos a los que pertenecen? En tal caso, se considera la recta que une los puntos del plano

$$P = (x_{j-1},\ F_{j-1}) \quad \text{y} \quad Q = (x_j,\ f_j)$$



que corresponden a los extremos del intervalo mediano y las frecuencias acumuladas de sus extremos, y se llama **mediana** a la abscisa M_e del punto de dicha recta cuya ordenada es $\frac{N}{2}$. Una ecuación de dicha recta es:

$$y - F_{j-1} = \frac{F - F_{j-1}}{x - x_{j-1}}(x - x_{j-1})$$

Buscamos la abscisa del punto de la recta anterior cuya ordenada es $\frac{N}{2}$:

$$\frac{N}{2} - F_{j-1} = \frac{F_j - F_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\left(x - x_{j-1}\right) \Rightarrow M_e = x = x_{j-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}\left(x_j - x_{j-1}\right)$$

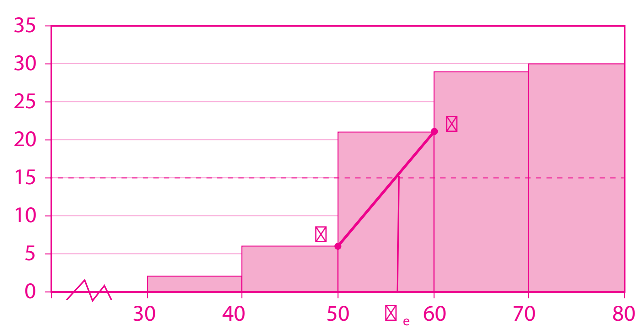
12 **En la siguiente tabla aparecen los pesos, agrupados en intervalos, de los 30 alumnos de un curso. Construye la tabla de las frecuencias acumuladas, calcula su mediana y representa los datos en un diagrama de barras.**

Peso en kg	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)
Frecuencia	2	4	15	8	1
Frecuencia acumulada	2	6	21	29	30

El intervalo mediano es [50, 60) ya que $\frac{N}{2} = 15$. Por tanto:

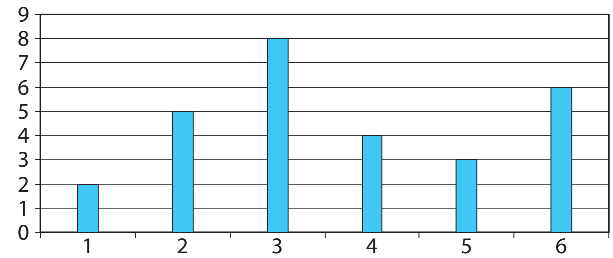
$$M_e = x_{j-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

$$\Rightarrow M_e = 50 + \frac{15-6}{21-6} \cdot 10 = 56$$



La **moda** de una colección de datos numéricos es el valor o valores cuya frecuencia absoluta es mayor.

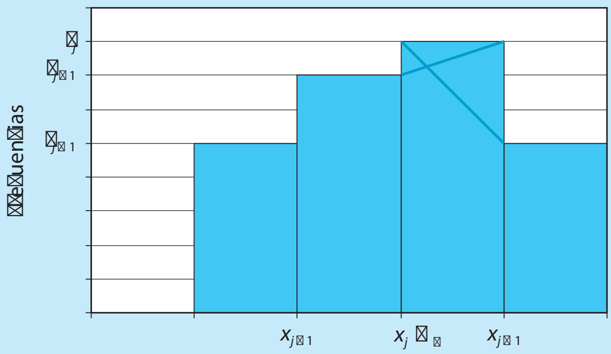
13 **¿Cuál es la moda de la colección de datos representados en el siguiente diagrama de barras?**



La frecuencia absoluta mayor es $N = 8$, luego la moda es $x_3 = 3$.

Cuando no se conoce exactamente el valor de los datos sino solo su distribución por intervalos, se llama **intervalo modal** a aquél cuya frecuencia absoluta por unidad de longitud sea máxima.

Supongamos que dicho intervalo es $[x_j, x_{j+1})$ y su frecuencia es f_j. Entonces la **moda,** *Mo* viene dada por la siguiente fórmula:



$$Mo = x_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{(f_j - f_{j-1}) + (f_j - f_{j+1})}(x_{j+1} - x_j)$$

que se obtiene al intersecar los segmentos mostrados en la figura.

Si los intervalos no tuvieran todos la misma amplitud se sustituye cada una de las frecuencias que aparecen en la fórmula anterior por la altura del correspondiente rectángulo.

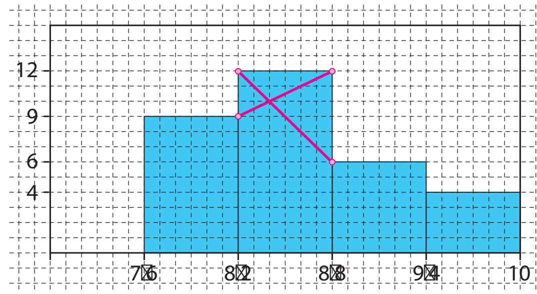
14 **¿Cuál es el intervalo modal y la moda de la colección de datos de altura de un grupo de alumnos usado en actividades anteriores?**

Altura (cm)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
N° de alumnos	5	7	8	5

Puesto que en este caso todos los intervalos tienen la misma longitud el intervalo modal es el de mayor frecuencia absoluta, que es [175, 185). La moda es:

$$Mo = 175 + \frac{8-7}{(8-7)+(8-5)} \cdot 10 = 177{,}5$$

15 **Calcula gráficamente la moda de los datos que aparecen representados en el siguiente histograma. Comprueba que coincide con el valor obtenido aplicando la fórmula.**



Calculamos la moda gráficamente. Para ello trazamos dos segmentos. El primero tiene por extremos los puntos (8,2, 12) y (8,8, 6) y el segundo (8,2, 9) y (8,8, 12). Así, la moda es la abscisa del punto de intersección de ambos segmentos, es decir, $Mo = 8{,}4$.

Por otro lado, si aplicamos la fórmula obtenemos el mismo resultado:

$$Mo = 8{,}2 + \frac{12-9}{(12-9)+(12-6)} \cdot 0{,}6 = 8{,}4$$

Dado un número p comprendido entre 0 y 1 se dice que un número x_p es un **cuantil de orden *p*** de un conjunto de datos si el 100p % de los datos es menor o igual que x_p y el 100(1 – p) % de los datos es mayor o igual que x_p.

Es importante señalar que no cabe hablar del cuantil de orden p sino de un cuantil de orden p; normalmente buscamos un cuantil que se corresponda con uno de los datos. Algunos cuantiles se emplean con más frecuencia que otros, y por ello reciben nombres y notaciones especiales:

- Un número Q_1 es **primer cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{1}{4}$.
- Un número Q_2 es **segundo cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{1}{2}$, es decir, coincide con la mediana.
- Y un número Q_3 es **tercer cuartil** si es cuantil de orden $p = \frac{3}{4}$.

Los cuartiles dividen el conjunto total de datos en cuatro partes iguales. Son medidas de posición.

16 **Encuentra Q_1, Q_2 y Q_3 entre los datos dados en la siguiente tabla:**

Datos	0	1	2	4	5	6	7	8	9
Frecuencias	2	1	3	1	3	1	2	1	1

Ordenamos los datos de menor a mayor y, como hay 15 datos, los cuantiles pedidos son los señalados en la figura.

0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9

Q_1 (2), $M_e = Q_2$ (5), Q_3 (7)

12.4. Medidas de dispersión

Las **medidas de centralización** nos indican donde se encuentra el centro de las observaciones, pero son insuficientes para describir la población o muestra que queremos estudiar. Por ejemplo, las siguientes muestras:

$$\{0, 10, 50, 50, 90, 100\} \quad \text{y} \quad \{48, 49, 50, 50, 51, 52\}$$

Son muy distintas. Sin embargo, en los dos casos la media, la mediana y la moda valen 50.

Por ello es conveniente introducir medidas de lo que se alejan los datos de los valores centrales. Esas son las llamadas **medidas de dispersión.**

Se llama desviación absoluta media de los datos $x_1, \ldots, x_k$, cuyas frecuencias absolutas denotamos $f_1, \ldots, f_k$ y cuya media denotamos $\bar{x}$, al número

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\left(f_1\left|x_1 - \bar{x}\right| + \cdots + f_k\left|x_k - \bar{x}\right|\right)$$

donde $N = f_1 + \ldots + f_k$.

17 **Calcula la desviación absoluta media de los datos de la siguiente variable estadística.**

Datos	0	1	2	3	4	5
Frecuencias	3	4	5	6	2	4

El número total de datos es:

$$N = f_1 + \ldots + f_6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 2 + 4 = 24$$

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + \ldots + f_6x_6}{N} = \frac{0\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4}{24} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto la desviación absoluta media es:

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\left(f_1\left|x_1 - \bar{x}\right| + \cdots + f_6\left|x_6 - \bar{x}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(3\cdot\frac{5}{2} + 4\cdot\frac{3}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{24}\cdot 32 = \frac{4}{3}$$

- El **rango,** R, también llamado **amplitud** o **recorrido,** es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de la muestra.
- Se llama **varianza** de los datos $x_1, \ldots, x_k$, cuyas frecuencias absolutas denotamos $f_1, \ldots, f_k$ y cuya media denotamos $\overline{x}$, al número:

$$\text{Var} = \sigma^2 = \frac{1}{N}\left(f_1(x_1-\overline{x})^2+\cdots+f_k(x_k-\overline{x})^2\right) = \frac{f_1x_1^2+\cdots+f_kx_k^2}{N}-\overline{x}^2$$

donde $N = f_1 + \ldots + f_k$.

- Se llama **desviación típica** de los datos $x_1, \ldots, x_k$ a la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir, $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$.

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos los parámetros anteriores se calculan del mismo modo, aunque cada x_i denota la marca de clase del intervalo correspondiente.

18 **Calcula la varianza y la desviación típica de los datos de la siguiente variable estadística:**

Datos	0	1	2	3
Frecuencias	3	8	7	7

El número total de datos es $N = f_1 + \ldots + f_k = 25$, cuya media aritmética es:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4}{N} = \frac{8\cdot 1+7\cdot 2+7\cdot 3}{25} = \frac{43}{25}$$

Por tanto la varianza vale:

$$\text{Var} = \frac{3\cdot 0^2+8\cdot 1^2+7\cdot 2^2+7\cdot 3^2}{25}-\left(\frac{43}{25}\right)^2 = \frac{626}{625}$$

y la desviación típica es $\sigma = \dfrac{\sqrt{626}}{25}$.

Se denomina **rango intercuartílico** o **recorrido intercuartílico** de una serie de datos, y se denota R_i a la diferencia entre aquellos datos Q_3 y Q_1 que son tercer y primer cuartil, es decir, $R_i = Q_3 - Q_1$.

19 **Encuentra el rango intercuartílico entre los datos cuya tabla de frecuencias es la siguiente:**

Datos	0	1	2	4	5	6	7	8	9
Frecuencias	2	1	3	1	3	1	2	1	1

$$R_i = Q_3 - Q_1 = 7 - 2 = 5$$

20 **Calcula el rango intercuartílico de las calificaciones obtenidas por los alumnos de 4° de ESO en la asignatura de Informática, que son las siguientes.**

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N° de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

El número de alumnos es $N = 40$, luego $\frac{N}{4} = 10$ y $3 \cdot \frac{N}{4} = 30$. Como las frecuencias acumuladas son:

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_k	2	4	8	13	21	30	33	37	40

Los cuartiles pedidos son $Q_1 = 4$ y $Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$. Por tanto, el rango intercuartílico es: $R_i = 6{,}5 - 4 = 2{,}5$

21 **Calcula los cuartiles de la serie de datos proporcionada por la siguiente tabla:**

x_i	Frecuencias	Fr. acumuladas
2	3	3
3	6	9
4	8	17
5	11	28
	Total = 28	

El total de datos es $N = 28$, por lo que:

$$\frac{N}{4} = 7,\ \frac{N}{2} = 14 \text{ y } 3 \cdot \frac{N}{4} = 21$$

Luego $Q_1 = 3$, $Q_2 = 4$ y $Q_3 = 5$.

12 Problemas

22 Al tirar un dado 100 veces hemos obtenido los siguientes resultados:

Puntuación	1	2	3	4	5	6
N° de veces	16	14	20	18	12	20

Construye una tabla con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
1	16	16	0,16	0,16
2	14	30	0,14	0,30
3	20	50	0,2	0,50
4	18	68	0,18	0,68
5	12	80	0,12	0,80
6	20	100	0,2	1
Total	100		1	

23 Se ha realizado una encuesta en 40 hogares preguntando por el número de individuos que viven en el domicilio. Las respuestas obtenidas han sido: 7, 1, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 6, 4, 4, 1, 3, 5, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 8, 3, 5, 3, 4, 7, 2, 3, 5.

a) Haz la tabla con la frecuencia absoluta y relativa, acumulada y porcentual.

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
1	5	5	0,125	0,125	12,5 %	12,5 %
2	7	12	0,175	0,3	17,5 %	30 %
3	9	21	0,225	0,525	22,5 %	52,5 %
4	6	27	0,15	0,675	15 %	67,5 %
5	6	33	0,15	0,825	15 %	82,5 %
6	4	37	0,1	0,925	10 %	92,5 %
7	2	39	0,05	0,975	5 %	97,5 %
8	1	40	0,025	1	2,5 %	100 %

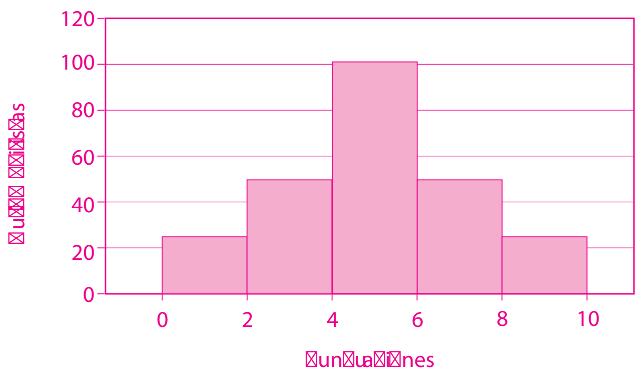
b) ¿Qué proporción de hogares está compuesto por tres o menos personas?

Leyendo la casilla de la fila tercera y la última columna deducimos que un 52,5% de hogares está compuesto por tres o menos personas.

24 Se ha realizado una encuesta entre 250 automovilistas, a los que se les ha preguntado cuántos puntos les quedan en su carnet, con estos resultados:

Puntos	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10]
N° de automovilistas	25	50	100	50	25

a) Representa gráficamente esta distribución de frecuencias mediante un diagrama de barras.



b) ¿Qué tanto por ciento de automovilistas conservan menos de 4 puntos?

La proporción de automovilistas que conservan menos de 4 puntos es $\frac{75}{250} = \frac{3}{10}$, *o lo que es lo mismo, el 30%.*

c) Calcula la media y la desviación típica de la muestra.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 25 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 50 + 9 \cdot 25}{250} = \frac{1250}{250} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 25 + 3^2 \cdot 50 + 5^2 \cdot 100 + 7^2 \cdot 50 + 9^2 \cdot 25}{250} - 5^2} =$$

$$= \sqrt{29{,}8 - 25} \approx 2{,}19$$

25 Lucía ha obtenido en esta evaluación, las siguientes calificaciones en los exámenes de Latín: 6,75, 5, 8,25, 9,5 y 7,5. ¿Qué nota tendrá que sacar en el único examen que le queda por realizar para obtener una nota media de 7,75?

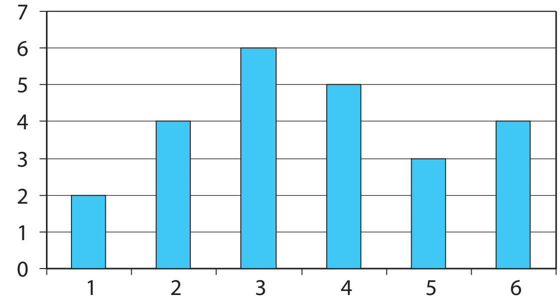
Llamando x a la calificación que debe obtener Lucía, se cumple que:

$$\frac{6{,}75 + 5 + 8{,}25 + 9{,}5 + 7{,}5 + x}{6} = 7{,}75 \Rightarrow 37 + x = 6 \cdot 7{,}75 = 46{,}5 \Rightarrow x = 9{,}5$$

Por tanto, Lucía ha de obtener un 9,5 en el único examen que le queda por realizar.

12 Evaluación

1 **Calcula la media, la mediana y la moda de la serie cuyos datos están representados en este diagrama. (En el eje vertical aparecen las frecuencias absolutas de los datos).**



Recogemos los datos y sus frecuencias en una tabla:

Nb ta	1	2	3	4	5	6
Frecuencias absolutas	2	4	6	5	3	4
Frecuencias acumuladas	2	6	12	17	20	24

La media es:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{24} = \frac{87}{24} = \frac{29}{8}$$

Como el número total de datos es 24, que es par, la mediana M_e es la media de los datos que, al ordenarlos de menor a mayor, ocupan los lugares 12 y 13, esto es:

$$M_e = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

Por último, la moda Mo es el valor con mayor frecuencia absoluta, es decir, el que corresponde a la barra de mayor altura. Por tanto, $Mo = 3$.

2 **Las calificaciones obtenidas por Pedro y Luis en Química son las siguientes:**

Pedro: 2, 3, 5, 7 y 8 **Luis:** 2, 3, 4, 8 y 8

¿Cuál de ellos posee unas calificaciones más dispersas?

Ambos tienen la misma nota media pues:

$$\bar{x} = \frac{2+3+5+7+8}{5} = 5 = \frac{2+3+4+8+8}{5}$$

Sin embargo las varianzas no coinciden, pues en el primer caso:

$$Var_1 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{9+4+0+4+9}{5} = 5{,}2$$

mientras que en el segundo:

$$Var_2 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (8-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{9+4+1+9+9}{5} = 6{,}4$$

Por tanto, las notas de Luis son más dispersas, o lo que es igual, Pedro ha obtenido unas calificaciones más homogéneas.

3 La siguiente serie de datos 2, 4, 6, a, 10, b, 14 está ordenada de menor a mayor y tanto su mediana como su media es 8. Calcula a y b.

Se trata de una serie con 7 datos y, como este es un número impar, la mediana es el que ocupa el cuarto lugar, que es a . Pero nos dicen que la mediana vale 8, así que $a = 8$. Además, también la media es $\bar{x} = 8$, luego:

$$8 = \bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+b+14}{7} \Rightarrow \frac{44+b}{7} = 8 \Rightarrow b = 12$$

4 ¿Cuáles son los cuartiles que son datos de las siguientes series de datos, en las que aparecen las frecuencias acumuladas F_i de cada uno de ellos?

x_i	F_i
2	8
4	14
5	32
7	52
10	66
13	70

x_i	F_i
2	6
4	14
5	32
7	52
10	64

En la primera serie el número total de datos es $N = 70$, por lo que:

$$\frac{N}{4} = 17{,}5;\ \frac{N}{2} = 35;\ 3 \cdot \frac{N}{4} = 52{,}5$$

Y se desprende directamente de la tabla de frecuencias absolutas que:

$$Q_1 = 5,\ Q_2 = 7,\ Q_3 = 10$$

La segunda serie tiene $N = 64$ datos, luego:

$$\frac{N}{4} = 16,\ \frac{N}{2} = 32,\ 3 \cdot \frac{N}{4} = 48$$

Y se desprende directamente de la tabla de frecuencias absolutas que:

$$Q_1 = 5,\ Q_2 = \frac{5+7}{2} = 6,\ Q_3 = 7$$

13 Probabilidad

13.1. Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

Aquellos experimentos que no están regidos por las leyes de la física, y cuyos resultados son por tanto impredecibles, dependen de las llamadas **leyes del azar**, y se denominan **aleatorios.** Ejemplos: La puntuación que se obtiene al lanzar un dado o el resultado de lanzar una moneda.

1 **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios:**

a) Observar el palo de una carta que se extrae, con los ojos cerrados, de una baraja.

b) Medir la longitud del lado de un cuadrado de área 16 m^2.

c) Observar el color de los zapatos de la primera persona que me encuentre.

d) Observar el número premiado en el sorteo del Niño.

Son aleatorios los experimentos *a*), *c*) y *d*), mientras que *b*) no lo es.

Regla de Laplace: Sean $A_1, \dots, A_n$ los posibles resultados de un **experimento aleatorio regular**, esto es, todos ellos son sucesos elementales y tienen la misma probabilidad. Sean S un suceso del mismo experimento y m el número de resultados en los que se presenta S de entre los n posibles, es decir, el número de casos **favorables** al suceso S que queremos analizar. Se dice entonces que la probabilidad $P(S)$ de dicho suceso es $P(S) = \frac{m}{n}$, es decir, el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Ejemplos:

- Al lanzar un dado equilibrado la probabilidad de que salga una cara determinada es $\frac{1}{6}$, mientras que la probabilidad de que salga un número par es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Si en una urna hay 3 bolas azules y 5 bolas rojas la probabilidad de que al extraer de la urna al azar una bola ésta sea azul es $\frac{3}{8}$, y la probabilidad de que salga roja es $\frac{5}{8}$.

2 **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de las puntuaciones de ambos sea 10? ¿Y la de que dicha suma sea 5?**

Al lanzar dos dados se pueden obtener $36 = 6 \cdot 6$ pares de puntuaciones. Por tanto hay 36 casos posibles, de los que solo (4, 6), (5, 5) y (6, 4) son favorables al suceso S_1: «la suma de las puntuaciones de ambos dados es 10». Por tanto, $P(S_1) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Las puntuaciones favorables al suceso S_2: «la suma de las puntuaciones de ambos dados es 5» son (1, 4), (2, 3), (3, 2) y (4, 1), por lo que su probabilidad es $P(S_2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

3 ¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha de dominó la suma de los puntos de la misma sea mayor que 10?

El dominó consta de 28 fichas distintas, de las cuales solo son favorables al suceso S del enunciado las siguientes: $(5, 6)$ y $(6, 6)$. Así, $P(S) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.

4 Un estudiante responde al azar tres preguntas de verdadero o falso. ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente las tres?

El estudiante puede responder de $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, modos distintos. Si V es la abreviatura de verdadero y F la de falso las posibles respuestas son:

(V, V, V), (V, V, F), (V, F, V), (F, V, V), (F, F, V), (F, V, F), (V, F, F) y (F, F, F)

De los cuales solo una es favorable. Así, la probabilidad del suceso S: «el estudiante responde bien a las tres preguntas» es $P(S) = \frac{1}{8}$.

5 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de las puntuaciones obtenidas sea múltiplo de 3?

Al lanzar dos dados se pueden obtener $36 = 6 \cdot 6$ pares de puntuaciones, que representamos en la forma (x, y), donde x es la puntuación obtenida al lanzar el primer dado e y la obtenida al lanzar el segundo dado. Los casos favorables son:

$(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3)$ y $(6, 6)$

En consecuencia, la probabilidad buscada es $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Propiedades

- El número m de casos favorables a un suceso S es siempre menor o igual que es número de casos posibles n, por lo que:

$$0 \leq \frac{m}{n} = P(S) \leq 1$$

- Consideramos un experimento con n casos posibles y un suceso S del mismo. Denotamos $\overline{S}$ al suceso *complementario*, esto es, *el suceso que consiste en que no sucede* S. Es claro que si m es el número de casos favorables a S, entonces, $n - m$ es el número de casos en los que no sucede S, esto es, los casos favorables a $\overline{S}$. En consecuencia:

$$P(S) + P(\overline{S}) = \frac{m}{n} + \frac{m-n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Por tanto, $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.

6 **Disponemos de dos bolsas, cada una de las cuales contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola de cada bolsa el número de dos dígitos formado con ambas bolas tenga las dos cifras distintas.**

Hay que calcular la probabilidad de S: «la numeración de las bolas extraídas de cada bolsa es diferente».

Por lo que el suceso complementario es $\overline{S}$: «ambas bolas tienen el mismo número».

De los 81 casos posibles solo hay 9 favorables a $\overline{S}$, que son:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8) \text{ y } (9, 9)$$

Y por tanto: $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - \frac{9}{81} = \frac{8}{9}$

Unión e intersección de sucesos. Sean S y T dos sucesos. Se denota $S \cup T$ al suceso «sucede S o sucede T», y se denota $S \cap T$ al suceso «ocurren S y T». El número de casos favorables al suceso $S \cap T$ es menor o igual que el número de casos favorables al suceso S, que a su vez es menor o igual que el de casos favorables al suceso $S \cup T$, luego $P(S \cap T) \leq P(S) \leq P(S \cup T)$. Además:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

7 **Consideremos el experimento que consiste en extraer una bola de una urna que contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100, y los sucesos:**

A: «se obtiene un múltiplo de 10» y B: «se obtiene un múltiplo de 15»

a) Describe los sucesos A, B y $S = A \cap B$.

$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, $B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$, luego $S = \{30, 60, 90\}$.

b) Calcula la probabilidad del suceso unión $T = A \cup B$.

El número de casos posibles del experimento es 100, luego fijándonos en el apartado anterior obtenemos $P(A) = \frac{10}{100}$, $P(B) = \frac{6}{100}$ y $P(S) = \frac{3}{100}$, por lo que:

$$P(T) = P(A) + P(B) - P(S) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{3}{100} = \frac{13}{100}$$

8 **De dos sucesos S y T se conoce que $P(S \cup T) = \frac{3}{5}$ y $P(S \cap T) = \frac{1}{5}$. ¿Cuál de los siguientes números puede ser la probabilidad de S? ¿Cuál es la probabilidad de T?**

a) $\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{2}{5}$

La probabilidad de todo suceso es menor o igual que 1, lo que descarta la primera opción. Además, $\frac{1}{5} = P(S \cap T) \leq P(S) \leq P(S \cup T) = \frac{3}{5}$ lo que descarta las opciones segunda y tercera. En consecuencia, $P(S) = \frac{2}{5}$. Y operando obtenemos: $P(T) = \frac{2}{5}$

Algunas propiedades de los sucesos

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$	$\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$

Hemos denotado por E y $\varnothing$ al **suceso seguro** y al **suceso imposible,** respectivamente, esto es, al suceso de probabilidad 1 y al de probabilidad 0.

9 **Consideremos el experimento que consiste en extraer una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20, y los sucesos:**

***A*: «se obtiene múltiplo de 5»** ***B*: «se obtiene un número menor que 10»**
***C*: «se obtiene un número par»**

Escribe los sucesos A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap (B \cup C)$ y $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, y sus probabilidades.

Los sucesos pedidos son: $A = \{5, 10, 15, 20\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A \cap C = \{10, 20\}$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5, 10, 20\}$ y $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B = \{5\}$

Por tanto, sus respectivas probabilidades son:

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad P(B) = \frac{9}{20} \qquad P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20} \qquad P(A \cap C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap (B \cup C)) = \frac{3}{20} \qquad P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) = \frac{1}{20}$$

Cuando el suceso $S \cap T$ no se produce nunca se dice que S y T son **incompatibles** o **mutuamente excluyentes.** Entonces $P(S \cap T) = 0$ por lo que en este caso:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

Esto también ocurre con uniones de más de dos sucesos, es decir, si S_1, S_2, …, S_n son sucesos tales que cualquier par de ellos no pueden ocurrir simultáneamente, entonces:

$$P(S_1 \cup \cdots \cup S_n) = P(S_1) + \cdots + P(S_n)$$

10 **Indica cuáles de los siguientes sucesos del experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja, son incompatibles.**

A: «Se obtiene un oro»; B: «Se obtiene una figura»; C: «Se obtiene el rey de espadas»; D: «Se obtiene una espada múltiplo de tres»

Son incompatibles los sucesos *A* y *C*, y también *A* y *D*.

11 **De los sucesos S y T se sabe que $P(S) = \frac{3}{10}$, $P(T) = \frac{3}{5}$ y $P(S \cap T) = \frac{1}{5}$. Calcula la probabilidad de los sucesos $\bar{S}$, $\bar{T}$, $S \cup T$ y $S \cap \bar{T}$.**

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = \frac{7}{10},\ P(\bar{T}) = 1 - P(T) = \frac{2}{5} \text{ y}$$

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

Para el cuarto suceso observamos que como T y $\bar{T}$ son incompatibles también $S \cap T$ y $S \cap \bar{T}$ lo son, y puesto que $S = (S \cap T) \cup (S \cap \bar{T})$, resulta:

$$\frac{3}{10} = P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \bar{T}) = \frac{1}{5} + P(S \cap \bar{T})$$

Y en consecuencia $P(S \cap \bar{T}) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

¿Qué se puede decir de la probabilidad de la intersección de dos sucesos S y T *de un experimento aleatorio*? El caso más sencillo es aquél en el que dichos sucesos son **independientes,** es decir que suceda o no S no influye en que suceda o no T. Esto equivale a que $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$.

12 **¿Son independientes dos sucesos A y B de un experimento aleatorio si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}76$?**

Los sucesos A y B son independientes pues $P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$

y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$

13 **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cuatro veces una moneda se obtenga al menos una cruz?**

Si S: «al lanzar cuatro veces una moneda se obtiene al menos una cruz», entonces $\bar{S}$: «al lanzar cuatro veces una moneda obtenemos cuatro caras». Por otro lado, si para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ S_i denota el suceso: «al lanzar por *i-ésima* vez la moneda obtenemos una cara», los sucesos S_i son independientes, por lo que:

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) = 1 - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) \cdot P(S_4) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

13.2. Probabilidad condicionada

Ejemplo: Consideremos el experimento consistente en lanzar un dado. Sea S el suceso **obtener un número par.** Por la Regla de Laplace, $P(S) = \frac{1}{2}$.

Supongamos que el experimento **ya se ha realizado,** y sabemos que ha salido un número menor o igual que 3. Llamamos a este suceso A. Con esta información adicional la probabilidad de S ha cambiado. Denotamos $P(S/A)$, la probabilidad de que ocurra S si sabemos que ha ocurrido A, entonces $P(S/A) = \frac{1}{3}$, pues ahora los casos posibles son 1, 2 o 3, y el único favorable es 2.

Fijados dos sucesos S y A se denomina **probabilidad de *S* condicionada por *A*** a la probabilidad de que ocurra S suponiendo que ha ocurrido A. Se denota $P(S/A)$ y su valor es:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)}$$

14 **Se lanza dos veces un dado. ¿Cuál la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un cinco sabiendo que la suma de las puntuaciones de ambos lanzamientos es 8?**

Llamamos $A =$ «la suma de ambas puntuaciones es 8» y $S =$ «en el primer lanzamiento sale un 5». El suceso A es $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ luego $P(A) = \frac{5}{36}$.

Por otro lado, $S \cap A = \{(5, 3)\}$, por lo que $P(S \cap A) = \frac{1}{36}$. Así:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

15 **En una caja hay 5 bolas azules y 4 verdes. Se extraen sucesivamente 2 sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que la primera bola sea azul y la segunda verde.**

Consideremos los sucesos:

$A =$ «la primera bola extraída es azul»; $S =$ «la segunda bola extraída es verde»

Nos piden calcular $P(S \cap A)$, y emplearemos la fórmula $P(S \cap A) = P(S/A) \cdot P(A)$. En nuestro caso, $P(A) = \frac{5}{9}$ y $P(S/A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, pues después de extraer una bola azul en la caja quedan 4 azules y 4 verdes. En consecuencia:

$$P(S \cap A) = P(S/A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Si los sucesos S y A son **independientes** se tiene $P(S \cap A) = P(S) \cdot P(A)$, luego en este caso:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(S)}{P(A)} = P(S)$$

Esta igualdad explica el nombre dado a los sucesos independientes; lo son porque la **probabilidad de S no queda condicionada por A,** esto es, es independiente de que A haya sucedido o no.

16 **¿Son independientes dos sucesos S y A de los que se sabe que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(S) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup S) = \frac{2}{3}$?**

$$P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Por otro lado, $P(A) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, luego A y S son independientes.

Teorema de la probabilidad total. Sean $A_1, \ldots, A_n$ sucesos incompatibles dos a dos, tales que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ es el **suceso seguro.** Entonces, para cada suceso S se tiene:

$$P(S) = P(S/A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(S/A_n) \cdot P(A_n)$$

17 **Disponemos de dos bolsas con bolas rojas y negras. La primera tiene tantas bolas rojas como negras, mientras que el número de bolas rojas de la segunda duplica al de negras. Lanzamos una moneda al aire y si sale cara extraemos una bola de la primera bolsa y si sale cruz de la segunda. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.**

Sean los sucesos:

$A =$ «obtenemos cara al lanzar la moneda»

$\bar{A} =$ «obtenemos cruz».

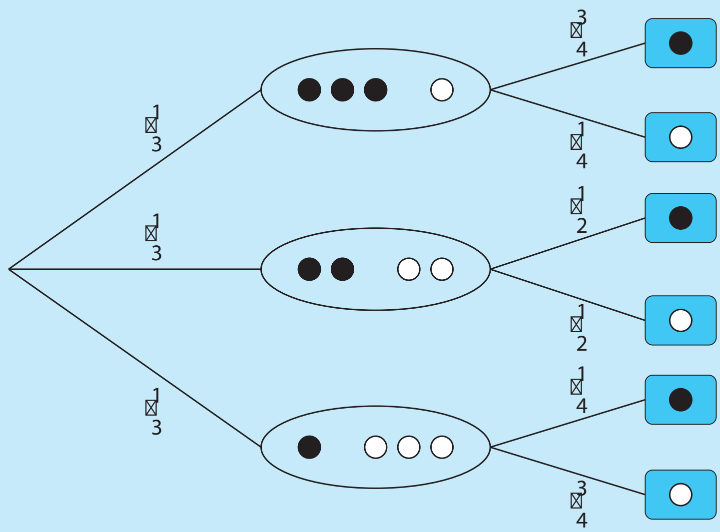
Denotamos por S el suceso que consiste en extraer una bola roja. Así:

$$P(S) = P(S/A) \cdot P(A) + P(S/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

13.3. Diagramas de árbol

El **teorema de la probabilidad total** se ilustra gráficamente mediante los llamados **diagramas en árbol.** Veamos un ejemplo. Se dispone de tres bolsas con bolas negras y blancas. En la primera bolsa hay tres bolas negras y una blanca, en la segunda hay dos de cada color y en la tercera hay una bola negra y tres blancas. Elegimos una bolsa al azar y extraemos una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola elegida sea blanca?

El siguiente diagrama de árbol esquematiza el problema:



Denotamos por A_1, A_2 y A_3 los sucesos que consisten en elegir la primera, la segunda o la tercera bolsa respectivamente. Sus probabilidades son iguales:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, es inmediato que si B = «la bola extraída es blanca», las probabilidades condicionadas son:

$$P(B/A_1) = \frac{1}{4},\ P(B/A_2) = \frac{1}{2} \text{ y } P(B/A_3) = \frac{3}{4}$$

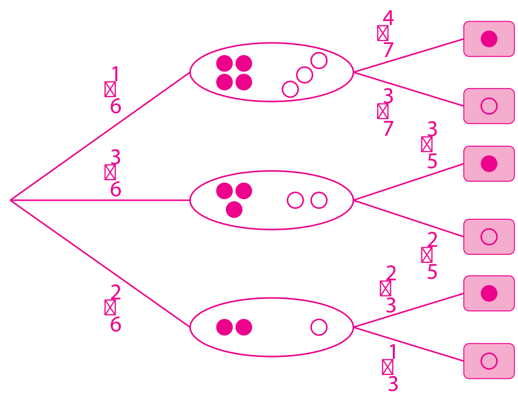
Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Es conveniente observar que la suma de los números situados en las ramas que salen de un mismo vértice es 1 y que la probabilidad de cada uno de los sucesos que aparecen a la derecha es la **suma de los productos de los números situados en las ramas que conducen a él.**

18 Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 4 negras; una segunda contiene 2 bolas blancas y 3 negras, y una tercera contiene 1 bola blanca y 2 negras. Se lanza un dado, y si sale un 1 se extrae una bola de la primera bolsa. Si sale un número primo (el 1 no es primo) se extrae de la segunda bolsa, y en otro caso se extrae una de la tercera bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

A_1 = «la bola se extrae de la primera bolsa», A_2 = «la bola se extrae de la segunda bolsa» y A_3 = «la bola se extrae de la tercera bolsa», cuyas probabilidades son:



$P(A_1)=\frac{1}{6}$, $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ y

$P(A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Así, la probabilidad del suceso S = «la bola extraída es blanca», se calcula mediante la fórmula:

$$P(B)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+P(B/A_3)\cdot P(A_3)$$

y las probabilidades condicionadas que aparecen en la fórmula anterior son:

$$P(S/A_1)=\frac{3}{7},\ P(S/A_2)=\frac{2}{5}\ \text{y}\ P(S/A_3)=\frac{1}{3}$$

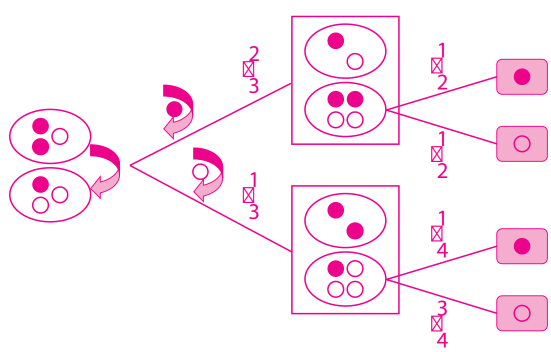
Por tanto, al sustituir estos valores resulta:

$$P(S)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{241}{630}$$

19 Una bolsa contiene una bola blanca y dos negras, y una segunda bolsa contiene dos bolas blancas y una negra. Se saca al azar una bola de la primera bolsa y se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

Sean los sucesos S = «la bola extraída en segundo lugar es blanca» y A = «la bola extraída de la primera bolsa es blanca». Así:

$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(S/A)=\frac{3}{4}$ y $P(S/\bar{A})=\frac{1}{2}$.



Por tanto:

$$P(S)=P(S/A)\cdot P(A)+P(S/\bar{A})\cdot P(\bar{A})=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

13.4. Tablas de contingencia

Las **tablas de contingencia** son tablas de entrada múltiple en cuyas celdas se escribe el número de objetos que cumplen las características indicadas en la intersección de la fila y la columna en que se encuentra dicha celda.

Veremos a continuación cómo utilizarlas para resolver problemas en los que haya que calcular probabilidades.

Ejemplo: Supongamos que se sortea un coche entre los 140 empleados de una empresa, de los que 75 son mujeres, 90 son personas casadas y 20 son mujeres solteras.

Vamos a responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el agraciado con el coche sea un hombre soltero?

b) Sabiendo que la persona afortunada es casada, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

- En primer lugar construimos la tabla que recoge los datos del enunciado.
- Después completamos la tabla rellenando los huecos.

	Mujeres	Hombres	Totales
Solteros	**20**	30	50
Casados	55	35	**90**
Totales	**75**	65	**140**

A partir de esta tabla se pueden responder directamente las preguntas formuladas inicialmente.

a) Como hay 30 hombres solteros de un total de 140 personas la probabilidad del suceso S = «el agraciado con el coche es un hombre soltero» es:

$$P(S) = \frac{30}{140} = \frac{3}{14}$$

b) Como el total de personas casadas es 90, y de ellas 55 son mujeres, la probabilidad $P(T/A)$ del suceso T = «la persona afortunada con el coche es mujer», suponiendo que se da el suceso A = «la persona a la que le toca el coche es casada», es:

$$P(T/A) = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

20 **En una clase de 25 alumnos hay 10 que han aprobado Física, 12 que han aprobado Química y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Construye una tabla de contingencia que refleje los datos del enunciado. Elegimos al azar un alumno de esa clase:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado Física y Química?

b) Sabiendo que ha aprobado Química, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Física?

	Aprueban Química	Suspenden Química	Totales
Aprueban Física	3	7	10
Suspenden Física	9	6	15
Totales	12	13	25

Denotamos por Q y F los siguientes sucesos:

Q = «el alumno seleccionado aprueba Química»

F = «el alumno seleccionado aprueba Física».

Sin más que mirar la tabla obtenemos: $P(Q \cap F) = \frac{3}{25}$ y $P(F/Q) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

21 **Considera la siguiente tabla que contiene los resultados de un estudio que analiza la efectividad del uso de cascos de seguridad en ciclistas, para prevenir lesiones en la cabeza en caso de accidentes.**

	Usa casco	No usa casco	Totales
Con lesión en la cabeza	17	218	235
Sin lesión en la cabeza	130	428	558
Totales	147	646	793

Seleccionado uno de los accidentados al azar calcular la probabilidad de que haya sufrido lesiones en la cabeza. Si sabemos que llevaba el casco puesto, ¿cuál es la probabilidad de que haya sufrido lesiones en la cabeza?

Denotamos por L y C los siguientes sucesos:

L = «el accidentado sufrió lesiones en la cabeza»

C = «el accidentado llevaba el casco puesto»

Sin más que mirar la tabla obtenemos: $P(L) = \frac{235}{793}$; $P(L/C) = \frac{17}{147}$

22 En una bolsa hay 40 bolas, unas son rojas y las otras verdes. Se sabe que la probabilidad de sacar bola verde es $\frac{3}{5}$. ¿Cuántas bolas hay de cada color?

El número de bolas verde es $\frac{3}{5}$ de 40, esto es, 24 son verdes y, por tanto, 40 – 24 = 16 son rojas.

23 ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido en dos dados sea distinto?

El número de parejas de puntuaciones es $6 \cdot 6 = 36$. Se pide calcular la probabilidad del suceso S: «las puntuaciones de ambos dados no coinciden». Es más sencillo contar el número de parejas de puntuaciones coincidentes, que son las seis siguientes: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (6, 6). Por tanto, $P(\overline{S}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ luego $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = \frac{5}{6}$.

24 La probabilidad de que Ana apruebe Matemáticas es $\frac{3}{5}$, mientras que la probabilidad de que las apruebe Beatriz es $\frac{1}{2}$. Además, la probabilidad de que apruebe Ana y no apruebe Beatriz es $\frac{3}{10}$. Calcula la probabilidad de que:

a) Aprueben Ana y Beatriz.

Llamamos A al suceso Ana aprueba y B al suceso Beatriz aprueba. Por el enunciado:

$$P(A) = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{1}{2} \text{ y } P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow \frac{3}{5} = P(A \cap B) + \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

En consecuencia, la probabilidad de que aprueben Ana y Beatriz es $\frac{3}{10}$.

b) Solo apruebe Beatriz.

Se trata de calcular $P(\overline{A} \cap B)$. Razonando como en el caso anterior:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{5}$$

c) Apruebe al menos una de los dos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$$

25 En tres cajas tenemos que la primera contiene 10 bombillas, 3 de las cuales están fundidas; en la segunda hay 6 bombillas, todas en perfecto estado, y la tercera tiene 3 fundidas de un total de 8. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar una bombilla al azar, funcione?

Denotamos por A_1, A_2 y A_3 los sucesos consistentes en «elegir una bombilla de la primera», «de la segunda» y «de la tercera caja». Llamamos F al suceso «la bombilla elegida al azar funciona». Aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene:

$$P(F) = P(F/A_1) \cdot P(A_1) + P(F/A_2) \cdot P(A_2) + P(F/A_3) \cdot P(A_3) =$$
$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{93}{120} = \frac{31}{40}$$

1 **Calcula la probabilidad de que al lanzar tres dados la suma de las puntuaciones obtenidas sea 6.**

Representamos los resultados de los lanzamientos como ternas de números comprendidos entre 1 y 6. El número total de dichas ternas es $6^3 = 216$, mientras que aquéllas cuyos miembros suman 6 son las siguientes:

$$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Por tanto, hay, exactamente, 9 casos posibles, así que la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

2 **Consideremos el experimento que consiste en lanzar una moneda 3 veces, y los sucesos:**

A = «se obtienen al menos dos caras»; B = «se obtienen exactamente dos caras»; C = «se obtiene cara en el primer lanzamiento» y D = «se obtiene cruz en los dos primeros lanzamientos».

a) Escribe los cuatro sucesos anteriores y calcula sus probabilidades.

Escribimos cada resultado como una terna formada por símbolos c y x, que denotan, respectivamente, que se ha obtenido cara o cruz. Por ello, el número de posibles resultados es

$$2^3 = 8, \text{ y } A = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\}, \quad B = \{(c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\},$$
$$C = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (c, x, x)\} \text{ y } D = \{(x, x, c), (x, x, x)\}$$

En consecuencia:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{8}, \quad P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b) Calcula la probabilidad de los sucesos: $S_1 = B \cap C$, $S_2 = B \cup C$, $T = (A \cap C) \cup D$ y $\bar{T}$

$S_1 = B \cap C = \{(c, c, x), (c, x, c)\}$, luego $P(S_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, y, por tanto:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Por otro lado:

$$T = (A \cap C) \cup D = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, x, c), (x, x, x)\}$$

Y así: $P(T) = \frac{5}{8}$, $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

3 **Indica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) Si dos sucesos son incompatibles entonces necesariamente son complementarios.

La primera afirmación es falsa. Basta realizar el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de una baraja española y considerar los sucesos A: *se obtiene una figura* y B: *se obtiene un* 2. Es claro que los sucesos son incompatibles pues ningún 2 es figura, y sin embargo no son complementarios.

b) Si dos sucesos son complementarios entonces necesariamente son incompatibles.

La segunda afirmación es cierta pues para cualquier suceso A se cumple que $A \cap \bar{A} = \emptyset$, luego $P(A \cap \bar{A}) = P(\emptyset) = 0$.

4 **De una caja que contiene 5 bolas azules y 4 verdes se extraen sucesivamente 2 sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea verde.**

Consideremos los sucesos:

A: «la primera bola extraída es azul» y S: «la segunda bola extraída es verde»

Sabemos que $P(A) = \frac{5}{9}$ y $P(S/A) = \frac{1}{2}$, mientras que $P(S/\bar{A}) = \frac{3}{8}$, pues al suponer que la primera bola extraída es verde en la caja quedan 5 bolas azules y 3 verdes. Además:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{9}$$

Y por la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad buscada es:

$$P(S) = P(S/A) \cdot P(A) + P(S/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

5 **Pedro se presenta a un examen habiendo estudiado 10 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. El examen consiste en desarrollar un tema que el alumno elegirá entre los dos que han sido seleccionados al azar. Calcula la probabilidad de que Pedro pueda desarrollar uno de los temas que ha estudiado.**

Sean S_1: «el primer tema elegido al azar es uno de los que Pedro no ha estudiado», S_2: «el segundo tema elegido al azar es uno de los que Pedro no ha estudiado» y S el suceso cuya probabilidad nos piden. Si sucede S_1 quedan por sortear 24 temas, de los que Pedro ha estudiado 10, luego $P(S_2/S_1) = \frac{14}{24}$. Como $P(S_1) = \frac{15}{25}$ se tiene:

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) = 1 - \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$$

Evaluación general

1 **Prueba que al restar a un número entero de tres cifras el que resulta de escribir sus cifras en orden inverso se obtiene un múltiplo de 99.**

Si el número dado se escribe $n = abc$, el que se obtiene al escribir sus cifras en orden inverso es $m = cba$, y al restarlos:

$$n - m = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99\,a - 99c = 99(a - c)$$

que es múltiplo de 99.

2 **En las rebajas el precio de un televisor de 800 euros ha quedado reducido a 640 euros. ¿Qué porcentaje de descuento le han aplicado?**

El descuento ha sido de $800 - 640 = 160$ euros, es decir, $\frac{160}{800} = \frac{1}{5}$ del precio original del producto, luego el porcentaje de descuento es $\frac{1}{5} \cdot 100 = 20\,\%$.

3 **Una empresa de construcción ha calculado que 5 camiones consiguen evacuar 600 m^3 de tierra en 4 días si cada camión realiza 6 viajes al día. ¿Cuántos días tardarán en mover 3500 m^3 de tierra con 7 camiones haciendo 10 viajes al día cada uno?**

Cinco camiones evacuan 600 m^3 de tierra en $4 \cdot 6 = 24$ viajes.

Un camión evacua $600 : 5 = 120$ m^3 de tierra en 24 viajes.

Un camión evacua $120 : 24 = 5$ m^3 de tierra en un viaje.

Un camión evacua $5 \cdot 10 = 50$ m^3 de tierra en 10 viajes.

Siete camiones evacuan $50 \cdot 7 = 350$ m^3 de tierra en un día con 10 viajes cada uno.

Por tanto, para evacuar 3500 m^3 de tierra en esas condiciones necesitarán:

$$\frac{3\,500}{350} = 10 \text{ días}$$

4 **Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 + 7x^2 + kx - 15$ es múltiplo de $x + 5$. Halla k y descompón $p(x)$ en factores de grado 1.**

Se deduce del Teorema del resto que $p(-5) = 0$, luego:

$$0 = p(-5) = (-5)^3 + 7(-5)^2 - 5k - 15 = 35 - 5k \Rightarrow k = 7$$

Aplicando Ruffini sucesivamente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 7 & -15 \\ -5 & & -5 & -10 & 15 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x+5)(x^2 + 2x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(x) = (x+5)(x^2 + 2x - 3) = (x+5)(x-1)(x+3)$$

5 **Encuentra dos números cuya diferencia es 6 sabiendo que la diferencia entre el cuádruple del menor y el doble del mayor es 10.**

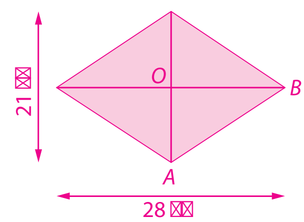
Sean x e y los números buscados, y suponemos $x > y$. En consecuencia, $x - y = 6$ y $4y - 2x = 10$, esto es, $2y - x = 5$. Se trata entonces de resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow x = 17 \text{ e } y = 11.$$

6 **Las diagonales de un rombo miden 21 y 28 cm. Calcula mediante el Teorema de Pitágoras la longitud de los lados del rombo.**

Con las notaciones de la figura, cada lado del rombo mide AB. Además, el triángulo AOB es rectángulo y sus catetos miden $OA = \dfrac{21}{2}$ y $OB = \dfrac{28}{2} = 14$. Por el teorema de Pitágoras:

$AB^2 = \left(\dfrac{21}{2}\right)^2 + 14^2 = \left(\dfrac{35}{2}\right)^2$ es decir, $AB = \dfrac{35}{2}$.



7 **Una bolsa contiene 2 bolas blancas y 3 rojas y una segunda bolsa contiene 3 bolas blancas y 2 rojas. Se lanza un dado y, si se obtiene par o múltiplo de 3 se extrae una bola de la primera bolsa, y en caso contrario de la segunda. Calcula la probabilidad de que la bola sea blanca.**

Se trata de calcular la probabilidad del suceso B: «la bola extraída es blanca». Denotamos A_1 al suceso: «la bola se extrae de la primera bolsa» y A_2 al suceso: «la bola se extrae de la segunda bolsa». Los números de las caras del dado que son pares o múltiplos de 3 son 2, 3, 4 y 6, luego $P(A_1) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ por lo que $P(A_2) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Como las probabilidades condicionadas son $P(B/A_1) = \dfrac{2}{5}$ y $P(B/A_2) = \dfrac{3}{5}$. En consecuencia:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

8 **Calcula la mediana de los números positivos $2x$, $x - 3$, $x + 4$, $x - 1$, 15, x^2 y $3x - 3$ sabiendo que su media es 11.**

Como la media es 11 se tiene:

$$11 = \overline{x} = \frac{2x + (x-3) + (x+4) + (x-1) + 15 + x^2 + (3x-3)}{7} = \frac{x^2 + 8x + 12}{7}$$

por lo que $x^2 + 8x - 65 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 65}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 260}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-8 \pm 18}{2}$$

Luego $x = -13$ o $x = 5$. Como nos dicen que los números son positivos, ha de ser $x = 5$. Los números son 2, 4, 9, 10, 12, 15 y 25, cuya mediana es $M_e = 10$.

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford. Como parte integrante de esta institución, promueve el objetivo de excelencia en la investigación y la educación a través de sus publicaciones en todo el mundo. Oxford y Oxford Educación son marcas registradas de Oxford University Press.

Publicado en España por
Oxford University Press España S. A.
Parque Empresarial San Fernando, Edificio Atenas
28830 San Fernando de Henares (Madrid)

ISBN: 978-84-673-7705-7
Depósito legal: M-12856-2013

AUTORA
M.ª Belén Rodríguez Rodríguez

EDICIÓN
Coordinación: Mercedes Pérez Delgado
Ana Fernández Saiz
Sergio Nombela Díaz-Guerra

DISEÑO DE CUBIERTA
Pepe Freire

MAQUETACIÓN
Gráficas Blanco, S. L.

ILUSTRACIÓN
Ramón Colera Cañas
Gráficas Blanco, S. L.

DOCUMENTACIÓN
Coordinación: Belén Santiago Fondón
Ángel Somolinos Estévez

FOTOGRAFÍAS
Oppenoffice.org (Calc), y Archivo Oxford

Las capturas de pantalla del programa Excel de las páginas 45 y 46 han sido reproducidas con permiso de Microsoft Corporation