NOTA:

En estos apuntes (esta es la primera parte) se resume y adapta el contenido del libro oficial de Matemáticas Especiales del Curso de Acceso Directo de la UNED. La experiencia demuestra que el libro es poco asequible para los alumnos, de modo que se ha tratado de hacer unos apuntes comprensibles y, sobre todo, orientados a aprobar el examen, pues se ha tenido en cuenta lo que habitualmente es materia de examen.

Las personas que hayan encargado a la editorial Treveris este material impreso recibirán gratis por correo electrónico una nueva colección de problemas que se está redactando durante este curso escolar (2000-2001). Son problemas ordenados desde "dificultad cero" hasta el nivel requerido, de modo que un problema ayuda a resolver el siguiente en la lista. El número total de problemas de esta nueva colección superará el millar, aunque algunos son de resolución inmediata. Las personas registradas también recibirán un segundo material: la solución a los problemas de clase, que también se está redactando este año, a medida que vaya progresando el curso. Finalmente, los registrados tendrán derecho a una tutoría personalizada a través de correo electrónico en

matematicas@treveris.es

donde podrán consultar todo tipo de dudas que surjan.

1 Tema 0: Operaciones algebraicas básicas

- Generalidades: propiedades conmutativa, asociativa y distributiva

►1.- Simplificar: $3a + a - (5a + 7 - a) + (a + 5) + 4(3a - 7) + 2(-3 - 5a) - 5(a - 1) =$

(Sol.: $-2a - 31$)

Para simplificar la expresión anterior deben tenerse en cuenta varias reglas.

Regla 1.- Los paréntesis marcan la *máxima prioridad* en las operaciones algebraicas. Por tanto, *si es posible*, debe tratar de simplificarse previamente el contenido de cada paréntesis. En este problema, sólo cabe simplificar el primero, $(5a+7-a)$; los demás no pueden simplificarse porque no cabe hacer dentro de ellos ninguna operación, como veremos más abajo.

Simplifiquemos, pues, $5a + 7 - a$. Esta expresión es un trinomio (polinomio de tres miembros). Los signos + y - separan un polinomio en monomios. El orden en que estén escritos los monomios de un polinomio es irrelevante (propiedad conmutativa de la suma (y la resta), **Regla 2**). Por ejemplo, el trinomio anterior también podía haberse escrito: $7 + 5a - a$ o $-a + 7 + 5a$ o $7 - a + 5a$, etc. (Ello es muy útil para evitar errores al hacer sumas de números con distintos signos. Por ejemplo, si piden hacer la siguiente operación: $-3+5$, podemos "darle la vuelta", aplicando lícitamente la propiedad conmutativa y escribir: $+5 - 3$, o, lo que es lo mismo, $5 - 3$ (pues un signo + al principio puede suprimirse), que es mucho más fácil de interpretar.

También pueden introducirse paréntesis arbitrariamente en el trinomio considerado para asociar monomios, escribiendo, por ejemplo: $(5a + 7) - a$ o $5a + (7 - a)$ (propiedad asociativa de la suma (y la resta), **Regla 3**) Es decir, si hay que hacer una suma con tres sumandos (como es el caso), pueden sumarse primero dos sumandos cualesquiera (siempre que sea posible, según las reglas del párrafo siguiente) y el resultado sumarlo con el tercer sumando. (Nota: al emplear la palabra *suma* nos referimos indistintamente a suma o resta; téngase en cuenta que "restar" $6 - 2$ es lo mismo que sumar los números 6 y -2.)

Los monomios pueden constar de letras, números o números y letras. *Sólo se pueden sumar (o restar)* aquellos monomios en los que todas las letras sean iguales y estén elevadas a iguales potencias (**Regla 4**). Por ejemplo, se pueden sumar entre sí los monomios $5a$ y $-a$, pero no $5a$ y 7. (De la misma manera, se pueden hacer las siguientes sumas: $5ab - ab$ $(= 4ab)$; $ab^2 + 2ab^2$ $(= 3ab^2)$; $-\frac{a}{c^3} + 3\frac{a}{c^3}$ $(= 2\frac{a}{c^3})$; $-3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$ $(-5\sqrt{a})$ pero no cabría sumar $5ab\ -b$ ni $ab+2ab^2$ ni $-\frac{a}{c^3}+3\frac{a^2}{c^3}$ ni $-3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{a}$.

De todo lo dicho debe quedar claro que $5a + 7 - a = 4a + 7.$, con lo que la expresión inicial queda: $= 3a + a - (4a + 7) + (a + 5) + 4(3a - 7) + 2(-3 - 5a) - 5(a - 1)$

Dentro de los demás paréntesis no se puede efectuar operación alguna. La única manera de seguir simplificando es *quitar los paréntesis.* Para ello hay que seguir ciertas reglas. Un paréntesis con un signo + delante puede quitarse directamente.(**Regla 5**) Es el caso del segundo paréntesis. Un signo – delante de un paréntesis permite quitar el paréntesis pero cambiando el signo de los monomios que hay dentro del paréntesis (**Regla 6**). Es el caso del segundo paréntesis. Un número o letra delante de un paréntesis multiplica (sin olvidar su signo) a todos los monomios que hay dentro del paréntesis (propiedad distributiva, **Regla 7**). Es el caso de los paréntesis tercero, cuarto y quinto.

Con lo dicho, la expresión queda:

$= 3a + a - 4a - 7 + a + 5 + 12a - 28 - 6 - 10a - 5a + 5 = -2a - 31$

donde se han tenido en cuenta las reglas de la multiplicación (y división) de signos ($+ \times + = + \qquad + \times - = - \qquad - \times + = - \qquad - \times - = +$)

• Operaciones con fracciones

⋆*Multiplicación y división*

A veces, resolver una expresión algebraica requiere manipular fracciones.

Multiplicarlas es fácil: se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí (**Regla 8**)

Para dividir dos fracciones se hace una *multiplican en cruz*, es decir, el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda (resultado que va arriba en la fracción final) y el denominador de la primera por el numerador de la segunda (lo cual va abajo) (**Regla 9**):

$\frac{2a^2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6a^2}{15}$

$\frac{2a^2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{10a^2}{9}$

Otro ejemplo: efectuar $x(-\frac{3x}{2})$ Tener en cuenta primero que eso es una multiplicación de una cantidad, x, por una fracción negativa; es decir, no es una resta; sería una resta si no existiera el paréntesis. En segundo lugar, tener en cuenta que el producto escrito se puede poner también como:

$\frac{x}{1} \cdot \frac{-3x}{2}$. Es fácil ver que la solución es $\frac{-3x^2}{2}$

⋆*Simplificación*

El resultado de las fracciones hay que simplificarlo si es posible. Por ejemplo, las siguientes pueden simplificarse *dividiendo arriba y abajo por el mismo valor (***Regla 10***)*:

$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (hemos dividido arriba y abajo por 5)

$\frac{2a}{6a} = \frac{1}{3}$ (hemos dividido arriba y abajo por $2a$)

⋆*Suma y resta*

Para sumar (o restar) fracciones hay que encontrar primero el *mínimo común múltiplo (mcm)* de sus denominadores. A su vez, para ello previamente hay que *factorizar* los denominadores, es decir, convertir cada uno de ellos en productos de factores primos. Una vez factorizados, para calcular el *mcm* se toman de cada producto *los factores no comunes elevados a sus exponentes y los comunes elevados al mayor exponente (***Regla 11***)*.

Por ejemplo, calcular el *mcm* de 25, 75 y 100. Primero factorizamos los tres números:

$25 = 5^2$ $\quad 75 = 5^2 \cdot 3$ $\quad 100 = 2^2 \cdot 5^2$

Los factores encontrados son 2 y 5, que están elevados a distintas potencias en cada número factorizado. El 2 es un factor *no común* a las tres factorizaciones: lo tomamos como está (elevado a su potencia: 2^2); el 5 sí es *común*; lo tomamos *elevado a la mayor potencia encontrada*: 5^3. El *mcm* se calcula, entonces, efectuando el producto $2^2 \cdot 5^3 = 300$.

Vamos a aplicar esto. Supongamos la siguiente suma (o resta) de fracciones:

$\frac{6}{25} - \frac{3}{75} + \frac{4}{100}$

Para resolverla se calcula el *mcm* de los denominadores (ya lo hemos hecho: *mcm* $= 300$) Luego se procede así: se escribe un signo igual y una raya larga de fracción en cuyo denominador irá el *mcm* encontrado. En el numerador irá la suma (o resta, según el signo) de cada uno de los numeradores multiplicado por el resultado de dividir el *mcm* entre el denominador correspondiente *(***Regla 12***)*: $\frac{6}{25} - \frac{3}{75} + \frac{4}{100} = \frac{6\cdot(\frac{300}{25})-3\cdot(\frac{300}{75})+4\cdot(\frac{300}{100})}{300} = \frac{6\cdot12-3\cdot4+4\cdot3}{300} = \frac{72-12+12}{300} = \frac{72}{300} = \frac{6}{25}$ (la última operación ha sido una simplificación, dividiendo numerador y denominador por 12).

También pueden hacerse operaciones de este tipo que incluyan letras:

$\frac{4}{12a} + \frac{b}{36a^2} =$ Factorización: $12a = 2^2 \cdot 3 \cdot a$ $\quad 36a^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^2$ el *mcm* es $= 3^2 \cdot a^2 \cdot 2^2 = 36a^2$

Entonces:

$\frac{4}{12a} + \frac{b}{36a^2} = \frac{4\cdot(\frac{36a^2}{12a})+b\cdot(\frac{36a^2}{36a^2})}{36a^2} = \frac{4\cdot(3a)+b\cdot(1)}{36a^2} = \frac{12a+b}{36a^2}$

En cierto momento hemos tenido que dividir $\frac{36a^2}{12a}$. Para ello se dividen primero los números (36 entre 12) y luego las letras (**Regla 13**) (a^2 entre a, lo que da a de la misma manera que 5^2 entre 5 da 5).

Efectuar las siguientes operaciones con fracciones:

►2.- $\frac{46}{100} + \frac{37}{25} - 10a =$ (Sol.: $\frac{97}{50} - 10a$ Ayuda: $10a$ se puede convertir en la fracción $\frac{10a}{1}$)

►3.- $-\frac{3}{ab} + \frac{7}{a^3b^3} =$ (Sol.: $-\frac{3a^2b^2-7}{a^3b^3}$)

►4.- $\frac{6(a+\frac{b}{2})}{23} + \frac{\frac{3a}{5}}{\frac{6}{7}} =$ (Sol.: $\frac{221}{230}a + \frac{3}{23}b$ Ayuda: primero se resuelve, por separado, el paréntesis del numerador de la primera fracción.

Una vez hecho eso y multiplicado por 6 (aplicando la propiedad distributiva) nos encontraremos con dos fracciones complejas (es decir, sus numeradores y denominadores son también fracciones) que hay que reducir a fracciones simples. Una fracción compleja como la siguiente: $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{-5}{6}}$ se reduce a una simple identificando en primer lugar dónde está la fracción principal (en este caso, señalada con una barra más larga, en el centro), y multiplicando luego el numerador de la de arriba por el denominador de la de abajo (resultado que irá arriba en la fracción simple final) y luego el denominador de la de arriba por el numerador de la de abajo, resultado que irá abajo. Esto se suele decir así: *producto de extremos dividido producto de medios.*.En este caso el resultado es:

$\frac{\frac{2}{4}}{\frac{-5}{6}} = -\frac{3}{5}$)

▶5.- Simplificar $6ab - 5(a + ab + c) + 1$ (Sol.: $ab - 5a - 5c + 1$)

▶6.- Simplificar $a^2b - \frac{a^2b}{2} + a(ab)$ (Sol.: $\frac{3}{2}a^2b$)

▶7.- Simplificar $a\left[5 - a\left(2 + \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{6a}{5} + \frac{7}{3}a^2$ (Sol.: $\frac{31}{5}a$)

Efectuar las siguientes operaciones y simplificar al máximo:

▶8.- $2(3 + a) - 4(5 + a) =$ (Sol.: $-14 - 2a$)

▶9.- $\frac{3}{4}(a + b + c) - 2a + \frac{5b}{4} + \frac{c}{2} =$ (Sol.: $-\frac{5}{4}a + 2b + \frac{5}{4}c$)

▶10.- $\frac{a+2b}{2} + 5a(2a + 2 + b) - 5ab =$ (Sol.: $\frac{21}{2}a + b + 10a^2$)

▶11.- $a(a^2 + 1) - a(2a + 3) =$ (Sol.: $a^3 - 2a - 2a^2$)

Vamos a practicar ahora con una extensión de la propiedad distributiva. Para multiplicar dos paréntesis que contienen al menos un binomio cada uno, se multiplica el primer monomio (producto de números y letras) del primer paréntesis por el primero del segundo, luego el primer monomio del primer paréntesis por el segundo del segundo; luego el primero del primero por el tercero del segundo, y así sucesivamente, y todos los resultados van sumados o restados entre sí, según su signo. Al terminar esta serie, se repite de igual modo para el segundo monomio del primer paréntesis, luego para el tercero, etc. (**Regla 14**) Siempre hay que tener en cuenta los signos de cada monomio. Si se están multiplicando tres paréntesis, se opera primero con dos de ellos (cualesquiera, por la propiedad conmutativa, que dice que el orden no altera el producto) y al resultado se le multiplica el tercer paréntesis. Un ejemplo de aplicación de lo dicho en este párrafo:

$(-2a + 5 + 7b)(-a + b - 4c - 1) = 2a^2 - 2ab + 8ac + 2a - 5a + 5b - 20c - 5 - 7ab + 7b^2 - 28bc - 7b =$

$2a^2 - 9ab + 8ac - 3a - 2b - 20c - 5 + 7b^2 - 28bc$

Ejercicios

►12.- $(a+5)(b+7)(c-1)-5abc-2a+5b-35c+35 =$ (Sol.: $-4abc-ab+7ac-9a+5bc$)

►13.- $(2a+4b)^2 =$ (Sol: $4a^2+16ab+16b^2$)

►14.- $(a+b)(a-b) =$ (Sol: a^2-b^2)

►15.- $(-a-b-c)(2+5b+7a)-5ab =$ (Sol.: $-2a-17ab-7a^2-2b-5b^2-2c-5bc-7ac$)

►16.- $-(a+\frac{2}{3}b-c)(a+\frac{b}{2})+(5-a)(5-b)(-3a) =$ (Sol.: $14a^2+\frac{83}{6}ab-\frac{1}{3}b^2+ac+\frac{1}{2}bc-75a-3a^2b$)

• Factor común

Sacar factor común.es, en cierto modo, una operación inversa a la aplicación de la propiedad distributiva. Consiste en ver que fáctores comunes existen en los monomios de un polinomio y extraer estos factores de cada monomio de manera que quede un producto. Lo veremos con un ejemplo:

Sacar factores comunes en: $5a^2+25a-75a^3$. Aunque con un poco de práctica esta operación se llega a hacer de forma automática, el proceso requeriría una factorización previa en factores primos: $5\cdot a\cdot a+5\cdot 5\cdot a-5\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a$. Puede observarse fácilmente que el factor común en los tres monomios es $5\cdot a$. Este factor se extrae de cada monomio, colocándose delante de un paréntesis al que va a multiplicar. Dentro del paréntesis se dejan los factores no extraídos (**Regla 15**):

$5\cdot a\cdot a+5\cdot 5\cdot a-5\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a = 5\cdot a\cdot(a+5-5\cdot 5\cdot a\cdot a) = 5a(a+5+25a^2)$

Si el último resultado obtenido se opera aplicando la propiedad distributiva llegaremos a la expresión original; por eso la operación de sacar factor común puede considerarse recíproca de la de aplicar la propiedad distributiva.

Otros ejemplos: sacar factor común en las siguientes expresiones:

$6ab+12b^2+12c = 6b(a+2b)+12c$

$ab+b^2+a^2 = a(b+a)+b^2$ (en este caso también podríamos haber sacado factor común b)

A veces puede ser útil (o, simplemente, nos lo pueden exigir en un problema) sacar determinado factor común aunque aparentemente no lo sea. Por ejemplo, sacar factor común $12x$ en la siguiente expresión:

$7x+x^2-6$ Sol.: $12x(\frac{7}{12}+\frac{1}{12}x)-6$ La prueba de que está bien la obtenemos cuando aplicamos la propiedad distributiva al resultado y comprobamos que coincide con la expresión original (**Regla 16**).

►17.- Sacar factor común $17x$ en la siguiente expresión: $34x^2 - \frac{17x}{3}$ (Sol.: $17x(2x - \frac{1}{3})$, y sacar factor común 17 en la misma expresión (Sol.: $17(2x^2 - \frac{1}{3}x)$

►18.- Sacar factor común todo lo posible en la expresión: $2a^2b - 16a^3b - 6a^4b^4$ (Sol.: $2a^2b(1 - 8a - 3a^2b^3)$)

►19.- Sacar factor común $2z$ en la siguiente expresión: $\frac{3z}{2} - z^2 + 4z^3$ (Sol.: $2z(\frac{3}{4} - \frac{z}{2} + 2z^2)$)

►20.- Sacar factor común -2 en $-2a - 3b + 4c$ (Sol.: $-2(a + \frac{3}{2}b - 2c)$; la comprobación de que está bien se tiene al efectuar la operación inversa: $-2(a + \frac{3}{2}b - 2c) = -2a - 3b + 4c$).

• Potencias y raíces

La mayoría de las propiedades de las potencias y raíces se deducen entendiendo bien el concepto de potencia y dos reglas que veremos más abajo

⋆*Multiplicación y división*

Hay que tener claro que, por ejemplo, a^3 significa $a \cdot a \cdot a$ y que $b^5 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$.

De aquí se deducen reglas como la del producto de potencia: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. (**Regla 17**) La prueba la vemos con un ejemplo: $a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9$ porque: $(a^4) \cdot (a^5) = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9$.

Debe tenerse en cuenta que sólo se pueden multiplicar potencias con la misma base, como en el ejemplo anterior; es decir, no cabe hacer ninguna operación en $a^2 \cdot b^6$.

La división se hace de la siguiente manera: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (**Regla 18**) Veamos un ejemplo: $\frac{a^7}{a^3} = a^4$. La razón podemos entenderla si aplicamos el concepto de potencia: $\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^3$. Lo que hemos hecho es lo siguiente: hemos cancelado tres de los factores a de arriba con tres de los de abajo; esto se puede hacer en una fracción siempre que los factores estén multiplicando a los demás, nunca sumando o restando (por ejemplo, no cabe cancelar nada en $\frac{a+b+c}{a}$ a pesar de que el factor a esté arriba y abajo). Siempre que surjan dudas con esto conviene recurrir a un ejemplo semejante en el que sustituyamos las letras por números. Por ejemplo, en la expresión $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$ sustituyamos cada a por un 2: y operemos directamente arriba y abajo: $\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} = \frac{128}{8} = 16$, pero $16 = 2^4$, lo que nos sirve de comprobación de que $\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}$ es igual,efectivamente, a a^4. Ahora, en el otro ejemplo, sitituyamos letras por números, haciendo por ejemplo la a igual a 2 , la $b = 5$ y la $c = 6$ Con estas sustituciones veremos que $\frac{a+b+c}{a}$ no puede ser igual a $b + c$ (cancelando arriba y abajo la a) porque $\frac{2+5+6}{2}$ no es igual a $5 + 6$ (=11) (ya que $\frac{2+5+6}{2}$ es igual a $\frac{13}{2}$)

También cabe aplicar cancelaciones en expresiones como $\frac{b^2}{b^5} = \frac{b\cdot b}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b} = \frac{1}{b\cdot b\cdot b} = \frac{1}{b^3}$. En casos como éste en que la potencia superior es menor que la inferior hay que dejar en el numerador un 1. Para entenderlo, hagámoslo con números; por ejemplo, supongamos que en la expresión $\frac{b^2}{b^5}$ hacemos $b = 2$, es decir: $\frac{2^2}{2^5} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (la última operación ha sido una simplificación de la fracción dividiendo arriba y abajo por 4). Pero como $8 = 2^3$, escribir $\frac{1}{8}$ es como si hubiéramos escrito $\frac{1}{2^3}$, lo que confirma que $\frac{b^2}{b^5} = \frac{1}{b^3}$.

►21.- Efectuar las siguientes operaciones aplicando las reglas de multiplicación y división de potencias: a) $2^3 \cdot 2^2$ (Sol.: 2^5); b) $\frac{2^3\cdot 2^2}{2^4}$ (Sol.: 2); a) $\frac{a^3\cdot a^2}{a^5}$ (Sol.: 1); c) $a^3 \cdot b^2 \cdot a$ (Sol.: $a^4 \cdot b^2$; en este caso y otros en el que hay potencias de distinta base se multiplican entre sí sólo las que tienen la misma base); d) $\frac{a^4\cdot b^2\cdot c}{ac}$ (Sol.: $a^3 \cdot b^2$); e) $\frac{2abc}{8a^2b^2c^2}$ (Sol.: $\frac{1}{4abc}$).

⋆$\mathrm{a}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{a}}$

Si al operar $\frac{b^2}{b^5}$ hubiéramos seguido estrictamente la regla de la división de potencias dada más arriba, hubiéramos llegado a la expresión b^{-3}, mientras que por el método de ir cancelando hemos llegado a $\frac{1}{b^3}$. ¿Por qué llegamos a resultados diferentes? Porque no son diferentes. Si ambas reglas son válidas (y lo son), los resultados deben ser iguales. Es decir, que $b^{-3} = \frac{1}{b^3}$. Esto es importantísimo y debe tenerse muy en cuenta, porque este tipo de potencias negativas aparece muy a menudo. En general, se puede decir que $a^{-1} = \frac{1}{a}$, o, lo que es lo mismo: $\frac{1}{a} = a^{-1}$. (**Regla 19**) Dicho de otro modo: siempre que encontremos una potencia con exponente negativo podemos transformarla en una fracción con un 1 en el denominador y la misma potencia pero con exponente positivo en el denominador, o al revés. Incluso, cuando convenga hacerlo, pueden hacerse más cambios. Por ejemplo, una potencia con exponente positivo se puede transformar en una fracción con un 1 en el numerador y la misma potencia con exponente negativo en el denominador. En resumen: una potencia puede cambiarse de lugar en numerador y denominador con sólo cambiar su signo. Así, las expresiones siguientes: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2a^2}$, $-\frac{3}{b}$, y $\frac{a}{b}$, pueden transformarse, respectivamente, en

2^{-1}, $(2a^2)^{-1}$, $-3b^{-1}$ y ab^{-1} (nótese que en la segunda expresión el exponente -1 afecta tanto al 2 como al a^2, pues el paréntesis así lo indica, pero en la tercera y cuarta el exponente -1 sólo afecta a la b).

Una expresión como $\frac{a^2c}{b^3}$ puede transformarse de muchas formas, como: a^2cb^{-3}, $\frac{a^2}{c^{-1}b^3}$, $\frac{1}{a^{-2}c^{-1}b^3}$ o $\frac{b^3}{a^{-2}c^{-1}}$. Por supuesto, cualquiera de estas transfromaciones no es obligatorio hacerla; cuando se llevan a cabo es porque a veces es más fácil solucionar problemas. *No se pueden hacer estas transformaciones* si hay sumas o restas afectando a los factores. Por ejemplo, no se puede transformar $\frac{1}{a^2+b}$ en $\frac{b^{-1}}{a^2}$.

Sabiendo esto, una división de potencias siempre se puede resolver transformándola en una multiplicación. Así, $\frac{a^4}{a} = a^4a^{-1}$, que, siguiendo la regla de la multiplicación, conduce a: $a^4a^{-1} = a^{4+(-1)} = a^3$, resultado idéntico al que habríamos llegado aplicando la regla de la división (nota: hemos escrito a^4a^{-1} y no $a^4 \cdot a^{-1}$: aunque entra dos expresiones monómicas no se escriba punto, se debe entender que se están multiplicando)

►22.- Efectuar, dejando el resultado en el denominador y luego en el numerador: $\frac{2abcd^2}{16b^2d^4}$ (Sol: $\frac{1}{8a^{-1}bcd^2}$ y $8^{-1}ab^{-1}c^{-1}d^2$)

⋆*Potencia de potencias*

Para resolver una potencia de potencia se multiplican los exponentes. Es decir: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.(**Regla 20**) Vayamos a un ejemplo que, de camino, servirá para justificar esta propiedad: resolver $(3^2)^3 = 3^6$. Efectivamente, si desarrollamos las potencias: $(3^2)^3 = (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$.

►23.- Efectuar y simplificar $\frac{(a^{-3})^2}{(a^2)^{-3}}$ (Sol.: 1)

⋆*Potencia de un producto y una suma*

La potencia de un producto (o cociente) de factores es el producto (o cociente) de las potencias de esos factores. Es decir: $(abc)^m = a^mb^mc^m$.

►24.- Efectuar $(4a^2b^{-1})^{-2}$ (Sol.: $\frac{b^2}{16a^4}$)

►25.- Efectuar $\left(\frac{a^2b}{4}\right)^2$ (Sol.:$\frac{a^4b^2}{16}$)

La potencia de una suma (o resta) *no es la suma (resta) de las potencias de los sumandos*. Se puede calcular convirtiéndola en un producto de la siguiente manera (por ejemplo): $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$, que se resuelve multiplicando primero los dos paréntesis y el resultado por el tercero.

►26.- Efectuar $(3-a)^2 =$ (Sol.: $9-6a+a^2$)

►27.- Efectuar $(-1-a^2+b)^3$ (Sol.: $-1-3a^2+3b-3a^4+6a^2b-3b^2-a^6+3a^4b-3a^2b^2+b^3$)

⋆*Propiedades de las raíces*

La principal propiedad de una raíz tipo $\sqrt[m]{a^n}$ es que se puede transformar en $a^{\frac{n}{m}}$. (**Regla 21**). Una vez hecha la transfromación, la raíz se puede tratar como una potencia. Por ejemplo, $\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1$. Esto nos sirve para operar con raíces.

Por ejemplo $\sqrt[2]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{6}} = \sqrt[6]{a^{19}}$

Hay que tener en cuenta que no se puede sumar ni restar raíces. (no cabe hacer, por ejemplo, $\sqrt[2]{a^5} + \sqrt[3]{a^2}$, aunque sí se podría sacar algún factor común). Es decir, la suma de dos raíces no es la suma de las raíces de los sumandos.

Pero la raíz de un producto (cociente) sí es el producto de las raíces: $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ (**Regla 22**)

A veces es conveniente "sacar todo lo que se pueda de una raíz". Por ejemplo, en $\sqrt{a^5b}$ se puede sacar algo, ya que $\sqrt{a^5b} = \sqrt{a^5}\sqrt{b} = \sqrt{a^2a^2a}\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\sqrt{a^2}\sqrt{a}\sqrt{b} = aa\sqrt{a}\sqrt{b} = a^2\sqrt{a}\sqrt{b}$..

Una raíz elevada a una potencia es la raíz del radicando elevado a esa potencia (y al revés). Por ejemplo: $\left(\sqrt[5]{a}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3}$

▶28.- Tratar de simplificar al máximo, sacando lo que se pueda de la raíz $\sqrt{\frac{16a^2b^6}{bc}}$ (Sol.: $4ab^2\sqrt{\frac{b}{c}}$

▶29.- Tratar de simplificar al máximo, sacando lo que se pueda de la raíz $\left(\sqrt[2]{(3a)^3}\right)^2$ (Sol.: $27a^3$)

⋆*Racionalización*

Cuando después de alguna operación quede alguna raíz en un denominador (como en la solución del ejercicio 28) es conveniente "racionalizar", es decir, eliminar esa raíz. Es bien fácil: en caso de que sea cuadrada, se multiplica arriba y abajo de la fracción por la raíz (recordemos que en una fracción siempre que se multiplique arriba y abajo por el mismo factor el valor de ésta no cambia, aunque presente formalmente otro aspecto). Ejemplo: racionalizar $\frac{2}{\sqrt{c}} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{2\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c^2}} = \frac{2\sqrt{c}}{c}$. Si la raíz es de otro grado (cúbica, cuarta, etc...) se multiplica arriba y abajo por la misma raíz elevada aun grado menos.

Si en el denominador hay una suma, se multiplica arriba y abajo por el conjugado de esa suma (es decir, por el mismo monomio pero con el signo central cambiado). Por ejemplo: $\frac{2}{-3-\sqrt{b}} = \frac{2\left(-3+\sqrt{b}\right)}{\left(-3-\sqrt{b}\right)\left(-3+\sqrt{b}\right)} = \frac{-6+2\sqrt{b}}{9-b}$

▶30.- Racionalizar $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ (Sol.:$\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}$) y $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (Sol.: $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$)

• Consejos para evitar errores típicos

⋆*¡Cuidado con el uso de los paréntesis!*

Hay que ser rigurosos con el uso de los paréntesis. Los paréntesis no son un capricho. Se usan para indicar prioridad o para agrupar a una serie de términos para indicar que están sometidos a la misma operación. Cuando no son estrictamente indispensables no hace falta ponerlos, pero a veces por razones de la operación que estemos efectuando de pronto sí hace falta incluirlos. Por ejemplo, es un error común el siguiente:(en la aplicación de la Regla 12)

$\frac{2+3a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{2\cdot 2+3a+a}{10}=\frac{4+4a}{10}$

El error está en haber dejado de considerar que el contenido de un numerador equivale a un paréntesis (y lo mismo un denominador); no se indica generalmente porque ya se presupone que se sabe que es así. Teniendo esto en cuenta, la forma correcta de hacer la suma anterior es, pues:

$\frac{2+3a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{2\cdot(2+3a)+a}{10}=\frac{4+6a+a}{10}=\frac{4+7a}{10}$

En general, siempre que temamos confusiones, podemos escribir paréntesis. Por ejemplo, para evitar confusiones en la suma anterior podemos escribirla así desde el principio:

$\frac{(2+3a)}{5}+\frac{a}{10}$

Otro ejemplo: si tenemos que hacer la siguiente multiplicación:

$2a\left(-\frac{3a+1}{4}\right)$ hemos de considerar que el numerador es un paréntesis, esto es, es como si escribiéramos:

$2a\left(-\frac{(3a+1)}{4}\right)$ y por tanto no hemos de olvidar que el signo $-$ afecta a todo el numerador. El resultado sería:

$\frac{-6a^2-2a}{4}$ o, si se prefiere: $-\frac{6a^2+2a}{4}$

⋆*La propiedad distributiva en la división*

En ocasiones, para simplificar, es útil aplicar la propiedad distributiva en la división, que es equivalente a la de la multiplicación. Así, del mismo modo que efectuamos $2(3+2a)=6+4a$, también puede efectuarse: $\frac{9-3a}{3}=3-a$.

⋆*Las fracciones admiten múltiples formas*

Una fracción se puede escribir de muchas formas, y eso hay que tenerlo en cuenta. Por ejemplo, todas las formas siguientes de la fracción $\frac{2ab}{cd}$ son equivalentes:

$\frac{2ab}{cd} \equiv 2\frac{ab}{cd} \equiv a\frac{2b}{cd} \equiv ab\frac{2}{cd} \equiv 2ab\frac{1}{c}\frac{1}{d} \equiv 2ab\frac{1}{cd}$ etc.

Del mismo modo, el signo en una fracción se puede poner arriba, en medio o abajo. Por ejemplo, son equivalentes las siguientes extresiones:

$-\frac{a+b}{3-c} \equiv \frac{-(a+b)}{3-a} \equiv \frac{a+b}{-(3-a)}$

A su vez, la segunda expresión anterior es equivalente a: $\frac{-a-b}{3-a}$, y la tercera, a: $\frac{a+b}{-3+a}$

En la segunda expresión hemos tenido que escribir paréntesis porque el signo afecta a todo lo que hay (arriba o abajo, según el caso). En la primera no hace falta escribirlo: cuando el signo va en medio de la fracción ya se entiende el paréntesis.

También se pueden hacer transformaciones al revés, pero con cuidado. Por ejemplo, supongamos que nos dan escrito: $\frac{5-a}{-2-b}$ y queremos transformarla de modo que el signo vaya en medio. *No* puede hacer así: $\frac{5-a}{-2-b} \equiv -\frac{5-a}{2-b}$, ya que el signo menos que lleva el 2 sólo le afecta a él. El signo que afecte a todo el denominador es el que se puede cambiar arriba o al centro. Para ver cuál es hemos de hacer primero una transformación reparando en que $-2-b \equiv -(2+b)$. Ahora:

$\frac{5-a}{-2-b} = \frac{5-a}{-(2+b)} \equiv -\frac{5-a}{2+b}$

Todo esto es útil en algunos casos en que entendemos mejor la operación haciendo cambios de este tipo. Por ejemplo, una resta de fracciones la podemos transformar en una suma:

$\frac{2}{3} - \frac{4a}{5} \equiv \frac{2}{3} + \frac{-4a}{5} = \frac{10+3(-4a)}{15} = \frac{10-12a}{15}$

⋆*Que no vayan un signo menos y uno de multiplicación seguidos*

Si nos dicen: "multiplicar 3 por $-3a+2$" no escribamos $3 \cdot -3a+2$, en primer lugar porque ello lleva a confusiones, y en segundo porque 3 debe multiplicar a todo $-3a+2$, según se desprende del enunciado. La forma correcta de escribirlo es $3 \cdot (-3a+2)$, (el punto se puede omitir), y la de efectuar es: $3 \cdot (-3a+2) = -9a+6$

⋆*Cambiar el signo un producto y una suma*

Si nos dan una multiplicación de factores y nos piden cambiarle el signo, basta cambiar el signo de todo el conjunto. Por ejemplo, si nos dicen "cambiar el signo de $2ab$" la solución es $-2ab$ (y no $(-2)(-a)(-b)$ ni nada parecido. En realidad. cambiar el signo es multuplicar por -1 , como puede verse.

Un producto de factores con signo menos admite, por otra parte, múltiples formas. Así, $-5a^2b$ se puede escribir, además: $5(-a^2b)$ o $5(-a^2)b$, etc. Obsérvese la importancia del paréntesis. Si en esta segunda expresión no lo hubiéramos escrito nos habría quedado $5-a^2b$, que es un binomio (formado en este caso por los monomios 5 y $-a^2b$).

Si nos dan la suma $3 + 5a - b$ y nos dicen que le cambiemos de signo, multiplicamos por -1, y hay que multiplicar cada uno de los sumandos (igual con una resta): $(-1)(3 + 5a - b) = -3 - 5a + b$. En la práctica, secambia el signo de cada uno de los sumandos.

2 Temas 1 y 2: Números enteros, racionales y reales

Divisibilidad, factorización, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, operaciones algebraicas, intervalos, ecuaciones e inecuaciones, potencias, ecuaciones de segundo grado, logaritmos, ecuaciones logarítmicas y exponenciales

2.0.1 ⋆Números

- *Tipos de números*

⊙ Naturales (N): $1, 2, 3, 4, 5, 6...$

⊙ Enteros (Z): todos los naturales, y además, los del tipo $-4, 0, -7...$

⊙ Racionales (Q): todos los naturales y enteros, y además, los del tipo $\frac{1}{3}, \frac{31}{7}, -\frac{4}{9}, -\frac{5}{81}...$

⊙ Reales (R): todos los naturales, enteros y racionales, y además, los del tipo $3.\widehat{3}...$, $\sqrt{2}$, $\pi...$

- *Números primos*

Son aquellos que sólo son divisibles (es decir, la división es un número entero) por sí mismos o por 1. or ejemplo, 5 es primo, porque sólo es divisible por 5 y por 1, pero 6 no es primo, pues es divisible, además de por 6 y por 1, por 2 y por 3.

- *Factorización en primos*

Llamaremos así a la operación de descomponer un número como producto de factores primos. Para hacerlo, se trata de dividir el número por 2; si da un resultado entero, se divide de nuevo por 2, y así hasta que sea posible; luego se trata de dividir por 3 todas las veces posibles, luego por $5, 7, 11, 13, 17...$ (en general, por todos los primos). Al final, si el número no es divisible por nada más (es decir, es primo), lo dividiremos por sí mismo)

Como ejemplo factorizaremos el número 5544; el resultado es $2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$, donde expresamos con las potencias el número de veces que aparece cada factor en la factorización (así, el 2 aparece tres veces)

- *Máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm)*

Para hallar el **mcd** de dos números los factorizaremos, y luego *multiplicaremos los factores comunes a ambas factorizaciones, elevados al menor exponente que tengan.*

Para hallar el **mcm** de dos números los factorizaremos, y luego *multiplicaremos los factores comunes a ambas factorizaciones, elevados al mayor exponente que tengan, y también los factores no comunes.*

►Ejemplo 1. Calcular el **mcd** y el **mcm** de los números: 3153150 y 3900. Primero los factorizamos:

$3153150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13$ $\qquad 3900 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13$

mcd$(3153150, 3900) = 2 \times 3 \times 5^2 \times 13 = 1950$

mcm$(3153150, 3900) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 6306300$

Esto quiere decir que el número más grande que al mismo tiempo es divisor de 3153150 y 3900 es 1950, y que el número más pequeño que al mismo tiempo es múltiplo de 3153150 y 3900 es 6306300.

- *Operaciones con enteros*

⊙ Se llama *valor absoluto* de un número al valor de ese número con signo positivo, independientemente del signo que tuviera. El valor absoluto se expresa entre barras. Así, $|-3| = 3 \qquad |+5| = 5$.

⊙En adelante, considérese sumar y restar como la misma operación básicamente: restar dos números es lo mismo que sumar al primero el negativo del segundo. Por ejemplo: $5 - 3 = 5 + (-3)$

⊙Para sumar dos enteros con el mismo signo se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo; para sumar dos enteros con distinto signo, se resta el valor absoluto del mayor menos el del menor y se deja el signo del del mayor:

▶ $5+6=11$
▶ $5-6=-1$
▶ $-5+6=1$
▶ $-5-6=-11$

⊙Para facilitar las sumas (o restas) hágase uso, si es necesario, de propiedades de los números como la conmutativa (el orden no importa) o asociativa (al sumar tres números se pueden sumar primero dos de ellos cualesquiera y al resultado sumarle el tercero),. Por ejemplo,

▶ $-15+21=21-15=6$ (obsérvese que es más fácil interpretar la segunda suma que la primera; ambas dan lo mismo por la propiedad conmutativa, siempre sin olvidar que cada número debe ir con su signo)

▶ $-5+8-9=(-5+8)-9=(8-5)-9=3-9=-6$

⊙Un signo $+$ delante de un paréntesis permite quitar el paréntesis dejando los signos que están dentro del paréntesis; un signo $-$ ante un paréntesis cambia los signos que están dentro:

▶ $3+(-8+7-9)=3-8+7-9=-7$
▶ $3-(-8+7-9)=3+8-7+9=13$

Según eso se debe entender que podamos hacer las siguientes transformaciones si en algún momento nos conviene:

▶ $3+8=3-(-8)$
▶ $2-4+2=2-(4-2)$

⊙Para la multiplicación y división de números con signos se emplean las siguientes reglas:

$+\cdot+=+$ $\quad -\cdot-=+$ $\quad +\cdot-=-$ $\quad -\cdot+=-$

$+:+=+$ $\quad -:-=+$ $\quad +:-=-$ $\quad -:+=-$

- *Operaciones on fracciones*

▷Multiplicación: se multiplican los numeradores y los denominadores: $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ (la última operación realizada es una simplificación de la fracción, algo que debe hacerse (siempre que sea posible) dividiendo arriba y abajo por el mismo número hasta que no se puedan obtener números naturales más pequeños)

▷División: se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el resultado es el numerador de la fracción final; el denominador de ésta es el producto del denominador de la primra por el numerador de la segunda:

▶ $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ (irreducible)

▷Suma y resta: se busca el *mcm* de los denominadores, y ese será el denominador de la fracción final; luego, cada numerador de las fracciones que estamos sumando se multiplicará por el resultado de dividir el *mcm* por su denominador*;* la suma o resta (según el signo) de estos productos será el denominador de la fracción final:

▶ $\frac{1}{12} - \frac{2}{8} + \frac{7}{24} - 3$ los cuatro denominadores son $12, 8, 24$ y 1, siendo su *mcm* $= 24$; ese será el denominador de la fracción final. Se divide a continuación 24 entre 12 $(= 2)$ y se multiplica por 1 (que es el numerador de la primera fracción); se hace igual con las otras fracciones, respetando siempre los signos, y queda:

▶ $\frac{1}{12} - \frac{2}{8} + \frac{7}{24} - \frac{3}{1} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 24}{24} = -\frac{23}{8}$

- *Prioridades a la hora de operar.* Para operar en el numerador largo del ejemplo anterior $(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 24)$, se deben efectuar primero las multiplicaciones y luego las sumas; esa es una regla de prioridad. *La prioridad principal la marca un paréntesis* y, aunque no esté escrito, se entiende que en expresiones como $4 + 2 \cdot 6$ el producto está dentro de un paréntesis (*se dice que la multiplicación y la división unen, y la suma y resta separan*), por lo que el resultado es 16, no 36. Del mismo modo, en $4 + \frac{6}{2}$ el resultado es 7, no 5.

En general, no es fácil enunciar unas reglas de prioridad, que sólo se aprenden con la práctica. La principal es la ya dicha: la máxima prioridad la marca un paréntesis, y cuando hay paréntesis anidados (unos dentro de otros), se deben resolver antes, si es posible, los más internos. El problema susle estribar en que normalmente se prescinde de paréntesis cuando no se consideran necesarios. Varias normas a tener en cuenta en este sentido son, entre otras:

1. un producto o un cociente se entiende que va dentro de un paréntesis
2. un numerador y un denominador de una fracción se entiende que van dentro de un paréntesis
3. el contenido de una raíz se entiende que va dentro de un paréntesis

4. se pueden operar dos paréntesis (por ejemplo, multiplicarlos) *sin necesidad* de resolver cada uno por separado previamente, *pero para ello hay que aplicar ciertas reglas especiales según el caso* (en algunas ocasiones, la *propiedad distributiva*)

Ilustraremos estas reglas con algunos ejemplos:

▶ $\frac{2+5\cdot4}{4}$ es como si se escribiera, combinando las reglas anteriores: $(\frac{(2+(5\cdot4))}{(4)})$; efectuamos primero primero el paréntesis más interno $(5\cdot4)$, y luego sumamos 2,con lo que queda: $\frac{22}{4}$ (habiendo suprimido al final paréntesis innecesarios).

▶ $\frac{2+5\cdot a}{4}$ este caso es csi como el anterior; ahora bien, el producto de $2a$ no se puede hacer (y se deja indicado simplemente como $2a$), ni la suma de $2a$ con 2. No obstante, se puede aplicar una "regla especial", la propiedad distributiva de la divisón respecto a la suma (o resta). Así, $\frac{(2+5\cdot a)}{(4)}$ puede resolverse como $\frac{2}{4}+\frac{5a}{4}$. En general, la propiedad distributiva mencionada puede expresarse como:$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

▶ $(2-5)(3+2)=-15$ (en este caso no hay que explicar nada, porque ya daban los paréntesis en el enunciado del ejercicio; todo lo que hay que hacer es resolver ambos previamente)

▶ $(2-b)(3+a)$ como no se pueden resolver los paréntesis previamente (pues no tiene sentido sumar $3+a$), en este caso cabe aplicar una regla especial para operar con los paréntesis sin necesidad de resolverlos previamente; es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma: $(2-b)(3+a)=6+2a-3b-ba$; en general: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ y $a(b+c)=ba+ac$, reglas en las que hay que tener en cuenta los signos de cada elemento.

▶ $\sqrt{2+5}$ es como si se hubiera escrito $\sqrt{(2+5)}$, cuyo resultado es $\sqrt{7}$; (nótese que $\sqrt{2+5}\neq\sqrt{2}+\sqrt{5}$)

▶ $\sqrt{2\cdot5}$ es como si se hubiera escrito $\sqrt{(4\cdot9)}$, cuyo resultado es $\sqrt{36}=6$ (nótese que $\sqrt{(4\cdot9)}$ da lo mismo que $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot3=6$; es decir, la raíz de un producto (o cociente) es lo mismo que el producto (o cociente) de las raíces, pero la raíz de una suma (o resta) *no es lo mismo* que la suma (o resta) de las raíces, como se vio en el anterior ejemplo.

▶ $\frac{2+6}{3+1}$ es lo mismo que $\left(\frac{(2+6)}{(3+1)}\right)=\left(\frac{8}{4}\right)=2$

▶ $\frac{3+1+\frac{8}{4}}{5-7\cdot3}$ es lo mismo que $\left(\frac{\left(3+1+\left(\frac{8}{4}\right)\right)}{(5-(7\cdot3))}\right)=\left(\frac{(3+1+2)}{(5-21)}\right)=\left(\frac{6}{-16}\right)=-\frac{6}{16}$ (nótese que el signo $-$ que estaba en el denominador lo hemos puesto delante de la fracción; eso siempre es válido; es decir, es lo mismo escribir $\frac{-4}{2}$ que $-\frac{4}{2}$ que $\frac{4}{-2}$)

▶ $\frac{2(3+5-a)}{2(a+1)}$ es lo mismo que escribir $\left(\frac{(2(3+5-a))}{(2(a+1))}\right) = \left(\frac{(2(8-a))}{(2(a+1))}\right) = \left(\frac{(16-2a)}{(2a+2)}\right)$ como ningún paréntesis se puede operar más, se deja así: $\frac{16-2a}{2a+2}$

Cuando un numerador y un denominador contienen factores comunes que están (tanto en el numerador como en el denominador) multiplicando (o dividiendo) *a todo lo demás*, pueden cancelarse.

Por ejemplo, eso ocurría en el anterior ejemplo cuando llegábamos a $\left(\frac{(2(8-a))}{(2(a+1))}\right)$; vemos que arriba y abajo aparecen sendos "2" que multiplican a todo lo demás tanto en el numerador como en el denominador; entonces, los cancelamos y queda: $\frac{8-a}{a+1}$. (Puede resultar curioso que hayamos llegado a dos resultados aparentemente distintos; en realidad son el mismo, pero la segunda fracción está más simplificada). Otros ejemplos:

▶ $\frac{2\cdot5\cdot6}{2\cdot3} = \frac{5\cdot6}{3} = \frac{5}{3}\cdot 6 = 5\cdot\frac{6}{3}$ (las dos últimas igualdades escritas son para indicar otra propiedad: es exactamente lo mismo multiplicar primero 5 por 6 y luego dividir el resultado por 3 que dividir primero 5 entre 3 y multiplicar luego el resultado por 6 que efectuar primero la división de 6 entre 3 y después multiplicar eso por 5 -compruébese-; en general, si hay sumas o restas eso no es posible))

▶No cabe cancelar el "2" en $\frac{2\cdot5+3}{2\cdot3}$, ya que la expresión equivale a $\frac{(2\cdot5)+3}{2\cdot3}$, lo que nos permite comprobar qu el "2" del numerador no multiplica a todo el resto del numerador, sino sólo a "5".

2.0.2 ⋆Ecuaciones

- *Intervalos*

Los números reales pueden representarse por los infinitos puntos de una recta:

–,———-,———-,———-,———-,======,======,———-,——— -,———-,———-,———-,——==,======,====—-,–

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

En la de la figura se han representado los números enteros desde el -7 hasta el 7, pero entre dos enteros hay infinitos números reales; por ejemplo, entre el 1 y el 2 están el 1.5, el 1.76588867695, el $1.2\widehat{3}$, etc. En matemáticas se considera "mayor" (¿) todo número que esté a la derecha de otro en esa recta, y es menor (¡) si está a la izquierda de otro. Por ejemplo, cabe escribir:

$2 > 1$ (que es equivalente a escribir $1 < 2$); $2 > -2$; $1 > -100$; $-2.44 < -1.1789$ $0 > -3$

Los signos $\leq$, $\geq$ tienen el significado de "menor o igual" y de "mayor o igual", respectivamente.

Los segmentos destacados con trazo doble se llaman intervalos. Si consideramos el representado a la derecha como el que comprende todos los números reales que hay entre -3 y -1, *ambos incluidos* el intervalo lo escribiremos $[-3, -1]$ y lo leeremos "intervalo *cerrado* entre -3 y -1". En ocasiones podemos querer expresar ese mismo intervalo pero sin incluir ni al -3 ni al -1; lo haremos así: $(-3, -1)$, y lo leeremos "intervalo *abierto* entre -3 y -1". Otras posibilidades son $[-3, -1)$ (cerrado por la izquierda y abierto por la derecha, qu incluye al -3 pero no al -1) y $(-3, -1]$. Estos dos últimos son intervalos *semiabiertos.* También cabe hablar de semirrectas abiertas y cerradas. Por ejemplo, todos los números mayores que 3 incluido el 3 ($x \geq 3$) es una semirrecta cerrada

Para decir que un número cualquiera x está dentro del intervalo $[-3, -1]$ escribiremos $-3 \leq x \leq -1$ (o bien su equivalente $-3 \geq x \geq -1$). Ejercicio: ¿cómo escribiremos que x está dentro de cada uno de los otros tres intervalos mencionados en el párrafo anterior?.

En la recta del dibujo, con el intervalo de la derecha se ha querido representar al $[4.6, 6.65]$

- *Potencias*

La propiedad fundamental de las potencias es su propia definición. En este sentido, debe tenerse muy claro, por ejemplo, que $5^3 = 5 \times 5 \times 5$, que $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ o que $(5a)^2 = 5a \times 5a$.

Otra propiedad fundamental menos evidente es la de la potencia negativa: en general $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

Con estas dos es fácil deducir las demás:

▷ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (comprobación con números: $5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) = 5^7$)

▷ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (comprobación con números: $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$)

▷ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (comprobación con números: $(2^5)^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{10}$)

Si las bases son distintas no se puede operar con ellas, excepto que sean iguales los exponentes:

▷ $a^n \times b^n = (ab)^n$ (comprobación con números: $2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) =$ $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = (2 \times 5)^3$)

▷ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ (comprobarlo con números)

También deben tenerse en cuenta todas las propiedades señaladas "al revés"; por ejemplo, que $(ab)^n = a^n \times b^n$ o que $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

A veces, al operar con potencias aparece una expresión del tipo a^0; debe saberse que cualquier número elevado a 0 es igual a 1 (demuéstrese partiendo, por ejemplo, del cálculo de $\frac{a^n}{a^n}$ que como se sabe es $= 1$).

- *Raíces*

La propiedad principal de las raíces es que se pueden expresar como potencias de la siguiente forma:

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

y aunque la potencia tenga un exponente fraccionario, se le pueden aplicar todas las propiedades vistas antes. Ejemplos:

▶ $\frac{\sqrt[3]{4^5} \times \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^8}} = \frac{\sqrt[3]{4^5} \times \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{4^4}} = \frac{4^{\frac{5}{3}} \times 4^{\frac{2}{6}}}{4^{\frac{4}{6}}} = 4^{\frac{5}{3}+\frac{2}{6}-\frac{4}{6}} = 4^{\frac{4}{3}} = (2^2)^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^2} =$ $= 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$

En este problema se han hecho a propósito distintas manipulaciones para mostrar cómo se pueden tratar raíces. Por ejemplo, al empezar el ejercicio se sustituyó $\sqrt[6]{2^8}$ por $\sqrt[6]{4^4}$; debe constatarse que la sustituciñon es perfectamente válida, pues $4 = 2^2$; y debe comprenderse que el cambio se ha hecho para procurar que todos los radicandos contuvieran al 4. Otra operación interesante es $\sqrt[3]{2^8} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2^2}$; en general, ésta podrá aplicarse a menudo. Se trata de "sacar todo lo posible de la raíz"; el objetivo es convertir el radicando en un producto de factores con potencias que coincidan con el índice de la raíz, para luego sacarlas fuera. Otro ejemplo: $\sqrt[5]{3^8} = \sqrt[5]{3^5 \times 3^3} = \sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[5]{3^3} = 3\sqrt[5]{3^3}$. Hemos aplicado ahí la propiedad de las raíces consistente en

$\sqrt[m]{a \times b} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$ (demostración: $\sqrt[m]{a \times b} = (a \times b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$

que en realidad puede demostrarse que deriva de las ya mencionadas para las potencias. Otra propiedad (también derivadas) es:

$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ (demostración: $(\sqrt[m]{a})^n = (a^{\frac{1}{m}})^n = a^{\frac{1}{m} \times n} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$) (otra demostración diferente usando números: $(\sqrt[4]{5})^3 = (\sqrt[4]{5}) \times (\sqrt[4]{5}) \times (\sqrt[4]{5}) = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$)

⋇ En general**, teniendo en cuenta el significado real de una potencia** (por ejemplo, que **:** $a^3 = a \times a \times a$**), y las propiedades:** $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ **y** $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ **podrían resolverse todos los problemas de raíces y potencias**.

Una práctica común en matemáticas es eliminar raíces de los denominadores, lo que se llama "racionalizar"; veremos dos casos:

a) en el denominador hay una raíz y nada más; entonces se multiplica numerador y denominador por esa raíz tantas veces como sea necesario para anularla (recordemos que si en una fracción numerador y denominador se multiplican ambos por la misma expresión, la fracción no cambia)

▶ $\frac{3}{\sqrt[2]{5}} = \frac{3}{\sqrt[2]{5}} \times \frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{3\sqrt[2]{5}}{(\sqrt[2]{5})^2} = \frac{3\sqrt[2]{5}}{5}$

▶ $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{5})^2} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$

b) en el denominador hay una expresión del tipo $a + \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} + b$ o $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; entonces se multiplica numerador y denominador por el *conjugado* del denominador, siendo los conjugados de las expresiones escritas anteriormente esas mismas expresiones pero con el signo central cambiado:

▶ $\frac{3}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3 \times (-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(-\sqrt{2}-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2-3} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

- *Ecuaciones e inecuaciones simples*

Una ecuación consta de dos miembros separados por un signo = ; resolver una ecuación de primer grado consiste en dejar la incógnita sola en uno de los miembros. Para ello, se pasan todos los elementos que contengan la incógnita a un mismo miembro, y los demás al otro; para cambiar de miembro, lo que suma pasa restando, y al revés. Finalmente, el número que acompañe a la incógnita pasará al otro miembro dividiendo o multiplicando, según multiplicara o dividiera a l incógnita, respectivamente.

Ejemplos. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

▶ $2x = 6$; $x = \frac{6}{2} = 3$

▶ $\frac{x}{3} = 7$; $x = 7 \times 3 = 21$ (en adelante, el signo de multiplicación lo escribiremos $\cdot$ para evitar confusiones; en algunos casos ni siquiera usaremos símbolo, como cuando escribimos $5x$, donde debe entenderse que quiere decir $5 \cdot x$)

▶ $2x + 3 = 4$; $2x = 4 - 3$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$

▶ $-x+3 = 4x-7$; $3+7 = 4x+x$; $10 = 5x$; $\frac{10}{5} = x$; $2 = x$

▶ $-\frac{3}{2}-2x=-\frac{x}{2}$ aquí multiplicaremos por -2 en ambos miembros en virtur de una propiedad de las ecuaciones: si se multiplica en ambos miembros por un mismo número, la ecuación no varía (lo mismo, dividir, sumar o restar un número y otras operaciones). Al multilplicar por -2 conseguirmos quitar los signos negativos y, lo que es más importante, los denominadores de las fracciones:

$-2(-\frac{3}{2}-2x)=-2(-\frac{x}{2})$; $3+4x=x$; $3=-3x$; $\frac{3}{-3}=x$; $x=-1$

▶ $\frac{3}{4}x-\frac{5}{3}=\frac{2x+1}{4}-\frac{x}{5}+3$ en este caso, en que los denominadores no son iguales, para poder eliminarlos conviene multiplicar las cinco fracciones (la última es $\frac{3}{1}$) por el *mcm* de los cinco denominadores, que es 60:

$60\cdot\frac{3}{4}x-60\cdot\frac{5}{3}=60\cdot\frac{2x+1}{4}-60\cdot\frac{x}{5}+60\cdot 3$ Haciendo uso de la propiedad asociativa de la multiplicación y la división (que nos dice, por ejemplo, que para multiplicar $60\cdot\frac{3}{4}$ es lo mismo multiplicar primero $60\cdot 3$ y dividir el resultado por 4 que dividir primero 60 entre 4 y multiplicar el resultado por 3), en estos caso *siempre haremos primero la división,* con lo que nos queda una expresión en la que *siempre habremos conseguido eliminar los denominadores*:

$15\cdot 3x-20\cdot 5=15\cdot(2x+1)-12\cdot x+60\cdot 3$; $45x-100=30x+15-12x+180$;

$45x-30x+12x=100+15+180$; $27x=295$; $x=\frac{295}{27}$

⋇ En la práctica, en ecuaciones con fracciones se quitan los denominadores multiplicando cada numerador por el cociente entre el *mcm* y su denominador.

Una *inecuación* es prácticamente igual que una ecuación, excepto que no contiene el signo =, y, en cambio, contiene normalmente una de las siguientes *desigualdades*: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Las reglas son prácticamente las mismas que para las ecuaciones, pero ha de tenerse en cuenta que *si se multiplican ambos miembros por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad*:

▶ $\frac{-x}{2}+3\geq 4$; (multiplicaremos por-2, por lo que habremos de cambiar el signo $\geq$ por el de sentido contrario correspondiente, que es: $\leq$): $x-6\leq -8$; $x\leq -8+6$; $x\leq -2$

- *Ecuaciones de segundo grado*

Son del tipo $ax^2+bx+c=0$; tienen dos soluciones, que son:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

▶Resolver: $2x^2 - x = 10$,

Se escribe la ecuación de manera que tenga la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y luego se aplica la fórmula indicada: $2x^2 - x - 10 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$; Las dos soluciones se obtienen tomando primero el signo $+$ y luego el $-$ de esa expresión; así:

$x_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1-9}{4} = -2$

Los resultados de una ecuación de cualquier tipo siempre deben comprobarse; para ello sustituimos los valores obtenidos para x en la ecuación original y comprobamos si la igualdad se cumple; por ejemplo, para $x = -2$:

$2(-2)^2 - (-2) = 10$; $\quad 2 \cdot 4 + 2 = 10$; $\quad 10 = 10$ luego -2 es una solución válida para x; comprobarlo para $\frac{5}{2}$.

▶Resolver: $2x^4 - x^2 = 10$ Ecuaciones como la anterior, que sólo contienen potencias 4 y 2 de x se llaman bicuadradas. Se solucionan haciendo $x^2 = m$ y sustituyendo en la ecuación original, que ahora queda de segundo grado para m: $2m^2 - m = 10$; las soluciones son $m = -2$ y $m = \frac{5}{2}$;y para las x serán, evidentemente: $x = \sqrt{-2}$ $\quad x = -\sqrt{-2}$ (estas dos soluciones son *complejas*, como veremos al estudiar números complejos), $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

- *Logaritmos*

Se llama "*logaritmo en base b de un número n" a un número l (* $\log_b n = l$) tal que:

$$n = b^l$$

Por ejemplo: $\log_{10} 1000 = 3$ porque $1000 = 10^3$
$\log_9 81 = 2$ porque $81 = 9^2$
$\log_3 27 = 3$ porque $27 = 3^3$

Existe también la operación llamada "antilogaritmo", que es la inversa. Así, el antilogaritmo de 3 en base 10 es $10^3 = 1000$.

Los logaritmos tienen dos propiedades muy útiles:

▷ $\log m^n = n \log m$

▷ $\log(m \cdot n) = \log m + \log n$

y su equivalente para la división (que en realidad puede deducirse de las dos anteriores y de aquella regla de la potencia según la cual: $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = m \cdot n^{-1}$) (En la formulación de estas propiedades no se ha indicado la base porque la propiedad es válida para cualquier base).

Estas reglas permiten conocer logaritmos de números sabidos los de otros:

▶Hallar el valor del $\log_{10} 16$ sabiendo que $\log_{10} 2 \approx 0.3$: Y teniendo en cuenta que $16 = 2^4$)

$\log_{10} 16 = \log_{10} 2^4 = 4 \log_{10} 2 \approx 1.2$

▶Supóngase que se conocen los valores de $\log_2 3$ y de $\log_2 5$. En función de esos valores conocidos, ¿cuál es el $\log_2 75$?

$\log_2 75 = \log_2 5^2 \cdot 3 = \log_2 5^2 + \log_2 3 = 2 \log_2 5 + \log_2 3$

⋆En ciertas ecuaciones aparecen logaritmos. Se resuelven aplicando las dos propiedades vistas y, si al final queda el primer miembro entero sometido a un logaritmo y lo mismo el segundo, éstos se suprimen. Ejemplos: resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

▶ $\log_2 x + \log_2 2x = 3$; $\log_2(x + 2x) = 3$; $\log_2 3x = 3$; $3x = 2^3$ (aquí hemos aplicado el antilogaritmo); $3x = 8$; $x = \frac{8}{3}$

▶ $\log_{10} x - \log_{10} 100 = 1$; $\log_{10} \frac{x}{100} = 1$; $\frac{x}{100} = 10^1$; $x = 1000$

▶ $4 \log_{10} 2x = 2 \log x$; $\log_{10}(2x)^3 = \log_{10} x^2$; como ambos miembros completos están afectados de la operación log, podemos suprimirla: $8x^3 = x^2$; (dividiendo ambos miembros por x^2): $8x = 1$; $x = \frac{1}{8}$.

⋆En ciertas ecuaciones en que la incógnita figura como exponente en una potencia a veces hay que recurrir a los logaritmos para solucionarlas. Estas ecuaciones se llaman exponenciales. Veremos un ejemplo:

▶ $25^x - 5^x = 2$; esta se puede solucionar así: $(5^2)^x - 5^x = 2$; $5^{2x} - 5^x = 2$; $(5^x)^2 - 5^x = 2$;

ahora se hace $5^x = m$, y queda: $m^2 - m - 2 = 0$, cuyas soluciones son $m = -1$ y $m = 2$; por tanto $5^x = -1$ y $5^x = 2$. Tomamos logaritmos en la segunda igualdad: $\log 5^x = \log 2$; $x \log 5 = \log 2$; $x = \frac{\log 2}{\log 5}$ (también debería tomarse logaritmo en la primera igualdad, pero en este caso no encontramos una solución porque hay que tratar la expresión $\log(-1)$, que no tiene sentido, pues *ni el logaritmo de un número negativo ni de* 0 *está definido en el campo de los números reales.* ((Por otro lado, el $\log 1$ en cualquier base es 0))

3 Temas 3 y 4: Conjuntos, Combinatoria

Elementos de la teoría de conjuntos, aplicaciones y funciones, composición de funciones, funciones inversas; Variaciones, permutaciones y combinaciones

3.0.3 $\star$Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de **elementos**. Por ejemplo, $V = \{a, e, i, o, u\}$ es el conjunto de las letras vocales. Los nombres de los elementos se escriben con minúsculas y entre llaves; los nombres de los conjuntos se escriben con mayúsculas.

Dos operaciones con conjuntos que nos interesan ahora son la unión ($\cup$) y la intersección ($\cap$). Supongamos el conjunto de las diez primeras letras del alfabeto, $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, y también el conjunto de todas las consonantes, que llamaremos C.

La **unión** de V con C es un nuevo conjunto (que llamaremos en este ejemplo A) cuyos elementos son los que están en V **o** en C, *indistintamente*. Hay que entender qué queremos decir con la expresión "o...indistintamente", algo diferente a lo que se entiende en el lenguaje normal. Podemos escribir $A = V \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$. El elemento b, por ejemplo, es un elemento del conjunto unión de V con C (conjunto que hemos llamado A) porque pertenece a V *o* a D, *indistintamente* (compruébese que en este caso pertenece a D, lo que se puede escribir simbólicamente: $b \in D$, siendo $\in$ un símbolo de la teoría de conjuntos que significa "pertenece a"); a es también un elemento del conjunto A porque está en V o en D, *indistintamente (*en este caso está en los dos, es decir, $a \in V$, $a \in D$, pero no es una condición imprescindible: basta que esté en uno de ellos, indistintamente*).* En la práctica, la operación *unión* se lleva a cabo tomando todos los elementos de ambos conjuntos, teniendo en cuenta que si algún elemento está en ambos sólo se escribe una vez en el conjunto unión

La **intersección** de V con C es un nuevo conjunto (que llamaremos en este ejemplo I) cuyos elementos son los que están en V **y** en C, *simultáneamente*. Podemos escribir $I = V \cap D = \{a, e, i\}$ El elemento a, por ejemplo, se dice que es un elemento del *conjunto intersección de V con D* (conjunto al cual llamamos I) porque pertenece a V *y* a D, *simultáneamente* (compruébese). En la práctica, la operación intersección se hace tomando sólo los elementos que se repiten en los conjuntos que se están intersectando.

Ejemplos. (Tratar de resolverlos antes de mirar la solución)

- ▶ $\{1, 2, 3\} \cup \{a, b, c\} = \{1, 2, 3, a, b, c\}$
- ▶ $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\} \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
- ▶ $\left\{\sqrt{2}, \pi, 3.9, r\right\} \cup \{a, b, c\} = \left\{\pi, r, a, b, c, 3.9, \sqrt{2}\right\}$
- ▶ $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$

▶ $\{a, b, c, d\} \cap \{d, e, f\} = \{d\}$
▶ $\{1, 2, 3\} \cap \{a, b, c\} = \emptyset$
En el último caso no hay intersección, puesto que no hay elementos que estén simultáneamente en ambos conjuntos; se dice entonces que la intersección es el conjunto vacío, $\emptyset$.
▶ $\{1, 2, 3, c\} \cap (\{2, 4, 6\} \cup \{a, b, c\}) = \{2, c\}$
▶ $(\{1, 2, 3, c\} \cap \{2, 4, 6\}) \cup (\{1, 2, 3, c\} \cap \{a, b, c\}) = \{2, c\}$
En estos dos últimos casos, los paréntesis marcan las prioridades a la hora de operar.

3.0.4 ⋆Aplicaciones y funciones

- Establecer una **aplicación** entre dos conjuntos es simplemente *relacionar* los elementos de uno de ellos con los del otro. Cuando los elementos del conjunto son números reales, la aplicación se llama **función**. La relación entre los elemento de un conjunto y los de otro puede expresarse simbólicamente. Por ejemplo, imaginemos los siguientes conjuntos:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$ (es decir, todos los números naturales)
$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36...\}$
Puede observarse que los elementos del conjunto C guardan una relación con los del N : los segundos son los cuadrados de los primeros (1 es el cuadrado de 1; 4 es el cuadrado de 2, etc) en el orden en que están escritos. Esto es una función, que puede escribirse simbólicamente, en este ejemplo, así: $f(x) = x^2$, donde x representa a los elementos del conjunto N (que se llama *original*) y $f(x)$ representa a los del conjunto C (que se llama *final* o *imagen*).

Comprobemos que la expresión simbólica $f(x) = x^2$ define perfectamente la relación, aplicación o función de nuestro ejemplo. Sustituyendo x por un número (o sea, un elemento de N, en nuestro ejemplo) podemos conocer cuánto vale el elemento $f(x)$ del conjunto C que le corresponde. Por ejemplo, a $x = 1$ le corresponde: $f(x) = f(1) = 1^2 = 1$.
▶Dada la función $f(x) = x^2$; ¿cuánto valen $f(2)$, $f(-2)$ y $f(10)$?
$f(2) = 2^2 = 4$ $\quad f(-2) = (-2)^2 = 4$ $\quad f(10) = 10^2 = 100$
▶Dada la función $g(x) = \frac{x}{3} - 2$; ¿cuánto valen $f(3)$, $f(-3)$ y $f(10)$? (Sol.: -1, -3 y $\frac{4}{3}$, respectivamente)

- **Operaciones con funciones**. Dos funciones se pueden *sumar (+)*, *restar (−)*, *multiplicar (·)*, *dividir* y *componer (∘)*, entre otras operaciones. También a menudo nos piden el cálculo de la *función inversa* de una función dada. Veamos estas operaciones (excepto la división) con algunos ejemplos.

Ejemplos. Sean $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \frac{x^2}{3} + x - 2$. Efectuar:

▶ $f(x) + g(x) = x^2 - x + \frac{x^2}{3} + x - 2 = \frac{4}{3}x^2 - 2$
▶ $f(x) - g(x) = x^2 - x - (\frac{x^2}{3} + x - 2) = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 2$
▶ $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - x) \cdot (\frac{x^2}{3} + x - 2) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2x$
▶ $f \circ g(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 - g(x) = (\frac{x^2}{3} + x - 2)^2 - \frac{x^2}{3} + x - 2 = \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 3x + 2$
▶ $g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{[f(x)]^2}{3} + f(x) - 2 = \frac{(x^2-x)^2}{3} + x^2 - x - 2 = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x - 2$
(Puede comprobarse que el resultado de $f \circ g(x)$ es distinto que el de $g \circ f(x)$; se dice por ello que que la composición de funciones no tiene la propiedad conmutativa, es decir, el orden en que se escriban las funciones *influye* normalmente en el resultado).

▶Dada la función $f(x) = 2x + 2$, calcular su función inversa, $f^{-1}(x)$. Para resolver este problema se iguala la expresión a v y se despeja x : $2x + 2 = v$; $2x = v - 2$; $x = \frac{v}{2} - 1$ El segundo miembro de esta expresión, pero escribiendo x donde aparezca v, es la función inversa de f(x), es decir: $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$ Las funciones inversas tienen una propiedad interesante, que es:

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{(compruébese).}$$

3.0.5 ⋆Combinatoria

Los elementos de un conjunto se pueden agrupar entre sí formando distintos tipos de subconjuntos o formando distintos tipos de ordenaciones. Por ejemplo, sea el conjunto de letras que forma la palabra *ROMA,* es decir*:* $L = \{r, o, m, a\}$. Estas cuatro letras se pueden ordenar de distintas formas para formar nuevas palabras: *AMOR, RAMO, OMAR, RMAO,* etc. Pues bien, el objeto de la combinatoria es **contar** el número de conjuntos u ordenaciones.

Hay, básicamente, dos tipos de problemas de combinatoria: los de **variaciones** y los de **combinaciones**. Para decidir de qué tipo es el problema hay que saber si los resultados son simples subconjuntos del conjunto original de elementos que nos dan para *jugar* con ellos (es decir, *no influye el orden*) o se trata de *ordenaciones* de estos elementos.

- *Variaciones (y permutaciones)*

1. Supongamos un conjunto E fomado por m elementos Supongamos que queremos tomar n de esos elementos (siendo $n \leq m$) ¿De cuántas formas distintas podemos tomarlos? Si el **orden** en que los vayamos tomando es un factor importante, entonces se trata de un problema de **variaciones**, que se resuelve por la siguiente fórmula:

$V(m,n) = \frac{m!}{n!}$

2. Si el **orden** influye y podemos tomar cualquiera de los elementos *más de una vez,* entonces se trata de un problema de **variaciones con repetición**, que se resuelve por la siguiente fórmula:

$VR(m,n) = m^n$

3. Si el **orden** influye y cada vez debemos tomar *todos* los elementos, sin repetir (dicho de otro modo: $m = n$, es un problema de **permutaciones**, aunque puede equipararse al problema de variaciones $V(m,m)$. Se resuelve por:

   $P(m) = m!$ (comprobar que $V(m,m) = m!$, lo que demuestra que las permutaciones sin repetición son un caso particular de las variaciones. *Nota:* para hacer esta comprobación, recordar que $0! = 1$)

4. Si el **orden** influye y debemos tomar *todos* los elementos de un conjunto algunos de los cuales se *repite un número determinado de veces,* se trata de un problema de **permutaciones con repetición** La fórmula general es:

   $PR(n)^{p,q,r,s,t...} = \frac{n!}{p!q!r!s!t!...}$ donde p, q, r, s, t...es el número de veces que se puede repetir cada elemento.

- *Combinaciones*

1. Supongamos un conjunto E fomado por m elementos Supongamos que queremos tomar n de esos elementos (siendo $n \leq m$) ¿De cuántas formas distintas podemos tomarlos? Si el **orden** en que los vayamos tomando **no** es un factor importante, entonces se trata de un problema de **combinaciones**, que se resuelve por la siguiente fórmula:

$C(m,n) = mn = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, donde la expresión nr se llama "número combinatorio m sobre n" y se resuelve por la fórmula señalada)

2 Si el **orden no** influye y podemos tomar cualquiera de los elementos *más de una vez,* entonces se trata de un problema de **combinaciones con repetición**, que se resuelve por la siguiente fórmula:

$CR(m,n) = m + n - 1n$

Ejemplos. Sean el conjunto E de los números 1, 2, 3, 4, es decir: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

►¿Cuántas *cifras de tres dígitos sin que se repita ninguno* pueden formarse con esos cuatro dígitos?

Ejemplos válidos: 123, 321, 124...; ejemplos no válidos: 113, 135, 1234. El orden en que se coloquen los dígitos es importante (pues 123 es una cifra distinta de 321); además, dice el enunciado que no se pueden repetir. Es un problema, por tanto, de variaciones sin repetición:

$V(4,3) = \frac{4!}{3!} = 24$. Pueden obtenerse, pues, 24 cifras de tres dígitos a escoger entre el 1, 2, 3 y 4 sin que se repita ninguno.

►¿Cuántas *cifras de tres dígitos* pueden formarse con esos cuatro dígitos *pudiendo repetirse cualquiera de ellos cualquier número de veces (*con la única limitación de que hay que tomar sólo tres dígitos cada vez*)*?

Ejemplos válidos: 123, 112, 111, 222, 144...; ejemplos no válidos: 135, 1112.... El orden en que se coloquen los dígitos es importante (pues 111 es una cifra distinta de 321); además, dice el enunciado que se pueden repetir. Es un problema, por tanto, de variaciones con repetición:

$VR(4,3) = 4^3 = 64$

►¿Cuántas *cifras de cuatro dígitos* pueden formarse con esos cuatro dígitos *sin repetir ninguno de ellos*?

Ejemplos válidos: 1234, 4321...; ejemplos no válidos: 123, 1112, 12345. Nótese que hay que construir cifras con *todos* los elementos que nos dan (ni uno más ni uno menos) y que influye el orden; estos dos requerimientos indican que se trata de un problema de permutaciones, en este caso sin repetición:

$P(4) = 4! = 24$ (O bien: $V(4,4) = \frac{4!}{0!} = 24$)

►¿Cuántas *cifras de 10 dígitos* pueden formarse con esos cuatro dígitos (1,2,3,4) de manera que el 1 se repita *exactamente* tres veces, el 2 cuatro veces, el 3 dos veces y el 4 sólo una vez? Repárese en que siempre hay que utilizar todos los dígitos que nos dan (es un problema, entonces, de permutaciones, puesto que además influye el orden en que se escriban los dígitos, pues dan lugar a cifras) y más importante aún: en que cada uno de ellos *hay que repetirlo siempre el mismo número de veces* en cada ordenación, número de veces que vienen indicado por el enunciado. Así, son ejemplos válidos:

1112222334, 1122122343,... y no válidos: 1234, 1111111234, 1234123412341234,...

Estas condiciones son precisamente las necesarias para hacer el problema por permutaciones con repetición teniendo en cuenta que el n que aparece en la fórmula *no es el número de dígitos de los que disponemos, sino el número de dígitos que forman la cifra (*en este caso, *10)* :

$PR(10)^{3,4,2,1} = \frac{10!}{3!4!2!1!} = 12600$

►Supongamos ahora que los números $1,2,3,4$ del conjunto E que estamos considerando a lo largo de todos estos ejemplos han sido asignados a cuatro trabajadores que deben hacer guardias en grupos de tres en tres ¿Cuántos posibles tríos de guardia se pueden formar*?*

Ejemplos válidos: $1,2,3,\ \ 1,2,4$,...; ejemplos no válidos: si es válido el trío $1,2,3$, no lo es el $3,2,1$, porque en realidad es el mismo; tampoco son válidos: $1,1,2,\ \ 1,2,3,4$,...Como el orden en que escriba los números no importa (trío $1,2,3$ = trio $3,2,1$), se trata de un problema de combinaciones, que además son sin repetición, obviamente:

$C(4,3) = 43 = 4$

►Supongamos, finalmente, que los números $1,2,3,4$ corresponden a instrumentos musicales: 1=violín; 2=viola; 3=violonchelo; 4=contrabajo. ¿Cuántos tipos de cuartetos de cuerda se pueden formar con estos instrumentos *pudiendo repetirse los mismos un número cualquiera de veces (*con la única limitación de que constituyan siempre un cuarteto)?

Ejemplos válidos: $1,1,1,1,\quad 1,2,3,4,\quad 1,1,2,2$,...; ejemplos no válidos: si ya hemos contado como válido el cuarteto $1,2,3,4$, no podemos contar como uno diferente el $4,3,2,1$, puesto que ambos son el mismo tipo de cuarteto (es decir, un cuarteto formado por violín, viola, violonchelo y contrabajo es el mismo que el formado por contrabajo, violonchelo, viola y violín). Otro ejemplo no válido: $1, 1, 2, 3, 4$ (eso es un quinteto). Como *no influye el orden* en que escribamos los elementos, se trata de combinaciones, y como *se pueden repetir*, de combinaciones con repetición:

$CR(4, 4) = 4 + 4 - 14 = 74 = 35$

- *Algunas recomendaciones*

★No debe tratarse de identificar tipos de elementos de un conjunto con tipos de problemas; por ejemplo, si los elementos de un conjunto son personas, no debe pensarse que el problema se hace por combinaciones y no por variaciones; puede hacerse por uno u otro medio. Lo importante no es el tipo de objetos, sino *si es importante el orden en que se toman o no.*

★No todos los problemas se pueden resolver de forma directa aplicando una de las seis fórmulas vistas. De hecho, a veces es necesario utilizar productos de esa fórmulas. Pero es más fácil tratar de "despiezar", analizar el problema en subproblemas más simples e ir haciendo cómputos parciales, a veces incluso sin utilizar la combinatoria Por ejemplo, si nos preguntan cuántos números impares hay entre 0 y 1348 es útil considerar cuatro categorías: los de un dígito, los de dos, los de tres y los de cuatro:

-De un dígito hay 5 cifras (no hace falta aplicar ninguna fórmula de combinatoria; son: 1, 3, 5, 7, 9).

-Para saber cuántas hay de dos dígitos observemos que a su vez hay cinco subcategorías que considerar:

_ 1   _ 3   _ 5   _ 7   _ 9

y que cada subcategoría consta de 9 números (la primera está formada del 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91); siendo fácil comprobar que cada una de las otras cuatro está formada por igual número de cifras, por lo que hay en total 45 cifras de dos dígitos.

-Para saber cuántas cifras impares hay de tres dígitos reparemos en que serán de uno de los siguientes subtipos:

_ _ 1   _ _ 3   _ _ 5   _ _ 7   _ _ 9

Consideremos el primero de ellos: el primer hueco lo pueden ocupar los dígitos del 1 al 9 (no el 0), y el segundo, cualquier dígito. Hay, entonces, 90 cifras del primer subtipo (ya que por cada uno de los nueve dígitos que pueden ir en el primer hueco, pueden ir 10 en el segundo), y habrá otras tantas de los otros cuatro; en total, 450. Otro método hubiera sido considerar todos los casos, incluidos aquellos que tengan en el primer hueco un 0. Ello se haría por $VR(10,2) = 10^2 = 100$, restando luego los 10 casos que empiezan por 0 (011, 021, 031, 041, etc.). Quedan 90, entonces, que multiplicado por 5 subtipos da 450.

-Finalmente, para saber cuántos impares hay entre 1000 y 1348 debemos considerar que las cifras en cuestión sólo podrán empezar por

10 _ _ 11 _ _ 12 _ _ y 13 _ _

olvidémonos en principio de los del tipo 13 _ _. Hay, pues, 3 formas de empezar las cifras:

10 _ _, 11 _ _ y 12 _ _. Cada una de esas tres permite cualquier dígito en la tercera posición (10 dígitos distintos) y cinco en la cuarta (1,3,5,7,9), lo que hace un total de $3 \cdot 10 \cdot 5 = 150$ cifras (esto se llama **regla de la multiplicación**, que vemos más abajo); finalmente, hay que contar 24 cifras impares que hay entre 1301 y 1347.

-En total, pues, hay $5 + 45 + 450 + 150 + 24 = 674$ cifras impares entre 0 y 1038.

★**Regla de la multiplicación**. tengo 10 libros, tres de ellos de metamáticas, dos de lengua y cinco de economía y los quiero colocar en una estantería de manera que queden juntos los de la misma materia. ¿De cuántas formas puedo ponerlos si me importa el orden en que queden? Llamaremos a cada libro con la inicial el tema y un subíndice (1, 2...)

Ejemplos válidos: $M_1M_2M_3L_1L_2E_1E_2E_3E_4E_5$, $M_1M_3M_2L_1L_2E_5E_2E_3E_4E_1$, $E_5E_2E_3E_4E_1M_1M_3M_2L_1L_2$, etc.; ejemplos no válidos: $L_1M_3M_2E_1L_2E_5E_2E_3E_4M_1$ (pues tienen que ir juntos los del mismo tipo), $M_3M_2E_1L_2E_5E_2E_3$, etc...

Una forma de solucionar este problema es considerar sólo tres bloques: M, L y E, y ver de cuántas formas pueden ir. Por ejemplo: M,L,E; M,E,L, etc. Serán $P(3) = 3! = 6$. Consideremos cada una de estas formas, por ejemplo la M,L,E, es decir, primero irán los de matemáticas, luego los de lengua y luego los de economía. Los de matemáticas, entre sí, se puede ordenar de $P(3) = 3! = 6$ formas diferentes; los de lengua, de $P(2) = 2! = 2$ formas diferentes entre sí (estas son: L_1L_2 y L_2L_1), y los de economía de $P(5) = 5! = 120$ formas diferentes. Reparemos ahora en que *por cada forma de colocar los de matemáticas hay 2 formas de poner los de lengua y por cada forma de poner los de matemáticas y los de lengua hay 120 formas de poner los de economía;* el número total de formas es de $6 \cdot 2 \cdot 120 = 1440$ maneras distintas. Esta ha sido una aplicación de la llamada *regla de la multiplicación.*

Finalmente, para terminar el problema, recordemos que hemos obtenido 1440 formas de poner los libros manteniendo el orden de bloque M,L,E; pero como había 6 ordenaciones de los bloques, en total tenemos $6 \cdot 1440 = 8640$ formas de poner los libros.

Si no se entiende este problema es útil *ponerse un ejemplo más simple* (dos tipos de libros y por ejemplo 2 libros de un tipo y tres de otro, y trate de contarse el número de ordenaciones por la regla de la multiplicación y por la *cuenta de la vieja)*

4 Temas 5 y 6: Probabilidad, Estadística

Suceso, sucesos incompatibles, sucesos independientes, probabilidad de un suceso, unión e intersección de sucesos; Estadística

4.0.6 ⋆Conceptos de teoría de la probabilidad: espacio muestral y suceso

- **Experimento aleatorio**: experimento que se puede repetir cuantas veces se quiera y cuyo resultado es impredecible. Ej.: lanzar un dado y ver sus resultados.

- **Suceso**: cada uno de los resultados de un experimento aleatorio; *suceso elemental* es cada uno de los *resultados más simples, más directos* de un experimento aleatorio. Ej.: "obtener un 3" al lanzar un dado es un suceso elemental; "obtener cifra par" es un suceso no elemental; ambos son *resultados* del experimento, pero el primero es más directo (en lo que sigue, hablaremos de *suceso elemental* y de *resultado*.indistintamente).

- **Espacio muestral:**conjunto de *todos los sucesos elementales* de un experimento aleatorio; desde este punto de vista, un *suceso (elemental o no elemental)* es cualquier subconjunto del espacio muestral. Ej.: al lanzar un dado para ver qué número sale, el espacio muestral de ese experimento aleatorio es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; cada uno de los elementos de ese conjunto: 1, 2, ...6, es un suceso elemental, y cada subconjunto posible es un suceso; por ejemplo, el subconjunto $S =$

$\{2, 4, 6\}$ es el suceso "salir par", y el subconjunto $S = \{1, 2, 3\}$ es "salir 1, 2 ó 3".

- Se dice que un **suceso ocurre** cuando el *resultado* del experimento está incluido en el subconjunto que representa a dicho suceso. Ej.: si al tirar un dado sale un 2 cabe decir que *ha ocurrido el suceso "salir par"* porque $2 \in \{2, 4, 6\}$ (es decir, el elemento "2" está incluido en el subconjunto que representa al suceso "salir par".

- Si un suceso no ocurre, se dice que ha ocurrido el **suceso contrario** o **complementario**. Ej.: el suceso contrario de $S =$"salir 2" es $S^c =$"salir 1, 3, 4, 5 ó 6" , ya que "si no ha salido 2 es que ha salido 1, 3, 4, 5 ó 6"; lo contrario de "salir par" es "salir 1, 3 ó 5", o, lo que es lo mismo, "salir impar".

- Dos sucesos son entre sí **incompatibles** cuando no pueden ocurrir simultáneamente. Ej.: los sucesos "2" y "3" al lanzar un dado son incompatibles; por el contrario, los sucesos "salir par" y "salir 2" son compatibles. Con más rigor, dos sucesos S_1 y S_2 son incompatibles si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

- Dos sucesos son entre sí **independientes** cuando el hecho de que el primero haya ocurrido no influye en la *probabilidad de que ocurra* el segundo. Por ejemplo, si tiro un dado y obtengo "2", eso no influye en la probabilidad que tiene el "3" de salir en la próxima tirada.

- Dos sucesos son **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir, en el sentido en que entendemos comúnmente la palabra **probabilidad**; por ejemplo, si arrojamos un disco perfectamente construido sobre una superficie perfectamente lisa y horizontal, es igualmente probable que caiga de una cara o de la otra.

4.0.7

4.0.8 ⋆Probabilidad de un suceso

1. En general, la probabilidad de que ocurra un suceso puede determinarse experimentalmente llevando a cabo muchas veces el experimento correspondiente y midiendo la frecuencia con que se repite el suceso. *En el límite infinito, la probabilidad coincide con la frecuencia.* Por

ejemplo, si lanzáramos un dado perfectamente construido "infinitas veces" podemos esperar que la frecuencia con que saldrá el "2" será $\frac{1}{6}$ (es decir, una vez de cada seis por término medio); decimos entonces que la probabilidad del suceso "salir 2" es $\frac{1}{6}$: $\quad P(\text{"}salir\ 2\text{"}) = \frac{1}{6}$.

2. *Ley de Laplace.* La probabilidad de un suceso (equiprobable) se calcula dividiendo el número de resultados favorables a dicho suceso entre el número de resultados posibles:

$$P = \frac{|S|}{|E|} \qquad (LeydeLaplace)$$

Los valores de probabilidad siempre están entre 0 y 1: $\quad 0 < P < 1$

Ejemplos ►¿Cuál es la probabilidad de obtener un "5" al lanzar un dado? Escribamos el espacio muestral y el suceso "obtener" 5, recordando siempre que el suceso es un subconjunto del espacio muestral:

$E = \{1, 2, 3, 5, 4, 6\} \qquad S_5 = \{5\} \qquad P = \frac{|S_5|}{|E|} = \frac{1}{6} \simeq 0,167 \equiv 16,7\%$

►¿Cuál es la probabilidad de obtener "cifra par" al lanzar un dado?
$E = \{1, 2, 3, 5, 4, 6\} \qquad S_{par} = \{2, 4, 6\} \qquad P = \frac{|S_{par}|}{|E|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \equiv 50\%$

3. Para poder resolver un problema aplicando la *ley de Laplace* es muy importante tener en cuenta que *el espacio muestral E debe estar formado de sucesos equiprobables*. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema: ¿cuál es la probabilidad de obtener "*suma de puntos igual a 7*" al lanzar dos dados? El primer impulso es escribir el espacio muestral con los posibles resultados de sumar las puntuaciones de dos dados:

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

pero debe tenerse en cuenta que los resultados de ese espacio muestral no son equiprobables; por ejemplo, los resultados "2" y "6" no lo son, ya que "2" sólo puede obtenerse si ambos dados dan "1", pero "6" puede obtenerse si ambos dan "3", o si uno da "1" y el otro "5", o si uno da "2" y el otro "4". En estos casos, hay que buscar un espacio muestral en que todos los elementos sean equiprobables, lo que normalmente se consigue *descomponiendo el* *experimento global en otros más sencillos equivalentes y siempre teniendo en cuenta* todas *las posibilidades*:

$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), ... (6,2), (6,3), ($

Obsérvese que deben escribirse *todas* las posibilidades: así, un resultado es $(1,2)$ y otro distinto es $(2,1)$. Normalmente el problema está en contar todos los resultados favorables al suceso, $|S|$, y todos los resultados posibles, $|E|$. Para ello podemos valernos de las fórmulas de la Combinatoria (Variaciones o Combinaciones, según el caso). Por ejemplo, en este problema se trata de contar cuántas parejas pueden formarse con los números 1 al 6, influyendo el orden (es decir, $(1,6) \neq (6,1)$) y pudiéndose repetir los números (esto es, valen el $(1,1)$, $(2,2)$, etc.). Lo calculamos, pues, por $\mathrm{VR}(6,2) = 36$.

4. *Unión e intersección de sucesos.* Cuando un experimento aleatorio es complejo puede descomponerse en otros más simples equivalentes. Es muy útil que la descomposición se lleve a cabo haciendo el uso adecuado de las partículas "*y*", "*o*".o una combinación de ambas. Lo podemos entender con los siguientes ejemplos, en los que introducimos las dos fórmulas necesarias para calcular la *probabilidad de la intersección y la unión de sucesos.*

- ►Ejemplo de intersección de sucesos: Una urna contiene tres bolas rojas y tres verdes. Calcular la probabilidad de que "al sacar simultáneamente dos bolas ambas sean rojas". La frase entrecomillada es equivalente a esta otra: "se saque en una primera extracción una bola roja *y* luego, en una segunda extracción, también una bola roja". Obsérvese que hemos usado la partícula *y*, la cual escribiremos simbólicamente $\cap$ (intersección).

Si llamamos SrI al suceso "sacar en la primera extracción una bola roja" y $SrII$ al suceso "sacar en la segunda extracción una bola roja" la probabilidad que nos piden se escribe simbólicamente $P(SrI \cap SrII)$ y se calcula según la siguiente fórmula general, escrita para los sucesos S_1 y S_2 :

Probabilidad de la intersección de dos sucesos: $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1)$

donde el segundo factor, $P(S_2/S_1)$, se lee "probabilidad de S_2 *si ha ocurrido antes* S_1" (es lo que se llama una **probabilidad condicionada**). En nuestro ejemplo:

$P(SrI \cap SrII) = P(SrI) \cdot (SrII/SrI) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = 0,2$

- ▶Ejemplo de unión de sucesos: Una urna contiene tres bolas rojas y tres verdes. Calcular la probabilidad de que "al sacar dos bolas sean del mismo color". La frase entrecomillada es equivalente a decir que: "se saquen dos bolas rojas *o* dos verdes". Obsérvese que hemos usado la partícula *o*, la cual traduciremos simbólicamente por $\cup$ (unión); en matemáticas "*o*" tiene el sentido de "*indistintamente, no excluyentemente*".

Si llamamos $S2r$ al suceso "sacar dos bolas rojas" y $S2v$ al suceso "sacar dos bolas verdes" la probabilidad que nos piden en este caso se escribe simbólicamente $P(S2r \cup S2v)$ y se calcula según la siguiente fórmula general, escrita para los sucesos S_1 y S_2 :

Probabilidad de la unión de dos sucesos: $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$

donde el tercer sumando, $P(S_1 \cap S_2)$, se calcula por la fórmula vista anteriormente para la intersección de probabilidades y es igual a cero en el caso de sucesos *incompatibles*, como es el caso, ya que ambos no pueden ocurrir simultáneamente. Como hay el mismo número de bolas de cada clase, $S^{2r} = S^{2v} = 0,2$, según vimos en el ejemplo anterior.

$P(S2r \cup S2v) = P(S2r) + P(S2v) - P(S2r) \cdot P(S2v/S2r) = 0,2 + 0,2 - 0,2 \times 0 = 0,4$

5. *Por Combinatoria.* En realidad, todos los cálculos de probabilidades pueden hacerse por Combinatoria, aunque a veces son muy complicados por esa vía. Para resolver el primer ejemplo del parágrafo anterior basta tener en cuenta que hay $|E| = C(6,2) = 62 = 15$ parejas posibles de bolas a extraer, y de esas, $|S^{2r}| = C(3,2) = 32 = 3$ parejas son de bolas rojas, por lo que la probabilidad de sacar dos rojas es $P = \frac{|S^{2r}|}{|E|} = \frac{3}{15} = 0,2.$ El problema puede hacerse también por variaciones, y de hecho, *los problemas de probabilidad por Combinatoria es mejor, para evitar ciertos errores, hacerlos por Variaciones.*

   Para la segunda parte del problema: $P = \frac{|S^{2r}|+|S^{2r}|}{|E|} = \frac{3+3}{15} = 0,4$

6. *Probabilidad del suceso contrario* A veces, sobre todo cuando los problemas son muy difíciles, es útil calcular la probabilidad del **suceso contrario** al que nos piden. Llamaremos a ese suceso S^c. Pues bien,

conocida la probabilidad de ese suceso contrario, $P(S^c)$, puede calcularse la del suceso directo, $P(S)$, mediante la fórmula:

$$P(S) = 1 - P(S^c)$$

- ►Ej.: Una urna contiene tres bolas rojas y tres verdes. Calcular la probabilidad de que "al sacar tres bolas alguna sea roja". La frase entrecomillada es equivalente a decir que: "se saque una bola roja O dos rojas O tres rojas" Más fácil es considerar lo contrario: que salgan tres verdes, o lo que es lo mismo, que la primera sea verde Y la segunda verde Y la tercera verde, probabilidad esta última que se calcula así:

$P(S^{3v}) = P(S_I^v \cap S_{II}^v \cap S_{III}^v) = P(S_I^v) \cdot P(S_{II}^v / S_I^v) \cdot P(S_{III}^v / S_I^v \cap S_{II}^v) = \frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

La probabilidad del suceso directo que nos han pedido será, entonces: $P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

4.0.9 ⋆Estadística

La estadística es una rama de las matemáticas que estudia conjuntos de datos para calcular su media, su desviación típica, etc., y, en algunos casos, permitir compararlos con otros conjuntos de datos.

Sean los dos siguientes conjuntos de datos, referidos a la puntuaciones obtenidas por dos personas al realizar una de ellas una prueba 10 veces, y la otra persona, 14:

⊙ Primera persona (14 datos): $10, 9, 9, 13, 11, 9, 6, 7, 10, 7, 9, 9, 9, 11$
⊙ Segunda persona (10 datos): $9, 10, 9, 10, 7, 11, 10, 10, 8, 7$

- Se llama *frecuencia absoluta* al número de veces que se repite un dato. Por ejemplo, la frecuencia del 9 en la distribución de datos de la primera persona es 6., y en la de la segunda es 2 La *frecuencia relativa* de un dato se calcula dividiendo su frecuencia absoluta por el número total de datos de la distribución; así, la frecuencia relativa del dato 9 en la primera distribución es $\frac{9}{14} = 0.64$, y en la segunda: $\frac{2}{10} = 0.20$.

- *Moda* es el valor que se repite más (tiene más frecuencia) en una distribución de datos. La moda de la primera distribución es 9 , y la de la segunda, 10. Hay distribuciones que tienen más de una moda.

- *Mediana* es el valor central de una distribución en la que hemos previamente ordenado sus datos de menor a mayor (o al revés). Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos centrales. Para la primera distribución $(6, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 13)$ la mediana es 9, y para la segunda, 9.5.

- *Media aritmética* es la suma de los datos dividido por el número de ellos. La media, $< x_1 >$, para la primera distribución es:

$< x_1 >= \frac{10+9+9+13+11+9+6+7+10+7+9+9+9+11}{14} = 9.21$

la fracción larga se puede resumir como $\frac{{}_{i=1}^{14} x_i}{14}$, cuyo numerador se lee "sumatorio desde $i = 1$ hasta $i = 14$ de todos los valores x_i". El símbolo de "sumatorio" es $\sum$, encima y debajo del cual se escribe desde qué número hasta cuál se tiene que sumar.

(((Por ejemplo, sea la siguiente serie de números: $4, 7, 9, 3, 5, 4, 6, 8$; en ella ${}_{i=3}^{7} x_i$ quiere decir $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$, donde los subíndices de las x se refieren al orden ocupado en la serie. En ese caso concreto:

$${}_{i=3}^{7} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 9 + 3 + 5 + 4 + 6 = 27$$

)))

La media para la segunda distribución de datos del problema es:
$< x_2 >= \frac{{}_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{9+10+9+10+7+11+10+10+8+7}{10} = 9.10$

- Se llama *desviación* de un dato a la diferencia (con signo positivo) entre ese dato y la media. Por ejemplo, en la primera distribución, la diferencia entre el dato 9 y la media es: $9 - 9.21 = -0.21$; por tanto, la desviación del dato 9 es 0.21 Puede calcularse la media de las desviaciones de todos los datos, lo que se llama *desviación media*. La fórmula para calcularla es:

  $\frac{{}_{i=1}^{n} |x_i - <x>|}{n}$

siendo n el número de datos de la distribución (14 en la primera y 10 en la segunda, en nuestro ejemplo), y significando las barras dentro del sumatorio que debe tomarse el valor absoluto de las restas, es decir, siempre con signo positivo independientemente del signo que tengan. En nuestro caso, para la primera distribución la desviación media es:

$\frac{{}_{i=1}^{n} |x_i - <x>|}{n} =$
$\frac{|10-9.21|+|9-9.21|+|9-9.21|+|13-9.21|+|11-9.21|+|9-9.21|+|6-9.21|+|7-9.21|+|10-9.21|+|7-9.21|+|9-9.21|+|9-9.21|+|}{14}$
1.27

y para la segunda distribución sería:
$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - <x>|}{n} = \frac{|9-9.1|+|10-9.1|+|9-9.1|+|10-9.1|+|7-9.1|+|11-9.1|+|10-9.1|+|10-9.1|+|8-9.1|+|7-9.1|}{10} =$
1.1

- La *varianza*, que se representa con el símbolo σ^2 ("sigma cuadrado") es la media de los cuadrados de las desviaciones, es decir:

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}{n}$. Una fórmula más sencilla y equivalente para la varianza es: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - < x >^2$

(esta última se puede memorizar así: "media de los cuadrados menos cuadrado de la media"). Aplicando cualquiera de estas fórmulas a la primera y segunda distribución de nuestro problema obtenemos los siguientes respectivos valores de la varianza:

$\sigma^2 = 3.26$ $\sigma^2 =$
1.88

- La *desviación típica*, que se representa con el símbolo σ ("sigma") es la raíz cuadrada de la varianza. Las desviaciones típicas para la primera y segunda distribuciones son, entonces, respectivamente:

$\sigma = 1.81$ $\sigma =$
1.37

La desviación típica (y también la varianza y la desviación media) dan una medida de la dispersión de los datos alrededor de la media. Por ejemplo, si una persona obtiene 10 puntuaciones y todas son 9, la media es evidentemente 9y se puede demostrar que la desviación media, la varianza y la desviación típica son 0, porque todos los datos coinciden con la media (es decir, *no se desvían nada de la media*). Sin embargo, para la siguiente distribución: $10, 10, 9, 10, 9, 8, 10$, la media es 9.43 y la desviación típica es ya distinta de 0 (puesto que los datos no coinciden con la media); en este caso concreto es 0.79. Para esta otra distribución: $30, 30, 18, 10, 0, -12, -10$ la media es la misma que antes (9.43), y sin embargo la desviación típica es 17.54, es decir, mucho mayor que antes, porue los datos están más alejados de la media.

Hay ciertas distribuciones que se llaman "normales", lo que quiere decir que el grueso de los datos se agrupa en torno a la media y hay pocos datos con valores bajos y con valores altos, teniendo toda la distribución, cuando se representa gráficamente, la forma de "campana de Gauss". En una distribución normal (y las dos del ejemplo general que estamos tratando lo son, aunque eso no hay por qué saberlo *a priori*), si sumamos a la media el valor de la desviación típica y restamos de la media el valor de la desviación típica encontramos un intervalo dentro del cuál está aproximadamente el 68" de los datos; esta es una ley de las distribuciones normales. Comprobémoslo con la primera distribución. La media, $< x_1 >$, es 9.21, y la desviación típica, $\sigma_1 = 1.81$. El intervalo del que estamos hablando es:

$$[9.21 - 1.81, 9.21 + 1.81] = [7.40, 11.02]$$

es decir, puesto que nos han asegurado que la distribución es normal, aproximadamente el 68% de los 14 datos deben entar comprendidos entre 7.40 y 11.02 El 68% de 14 es 9.52, que redondearemos a 10; efectivamente, cuéntense y se verá como 10 de los 14 datos tienen valores comprendidos entre 7.40 y 11.02.

- Cuando se quieren comparar dos muestras lo mejor es usar el llamado *coeficiente de variación* (CV), que nos da la "homogeneidad" de cada muestra. Se calcula por la fórmula:

$CV = \frac{\sigma}{<x>}$ (es decir, la desviación típica dividido por la media).
Los CV para las dos distribuciones de nuestro ejemplo son:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{<x_1>} = \frac{1.81}{9.21} = 0.20 \qquad CV_2 = \frac{\sigma_2}{<x_2>} = \frac{1.37}{9.10} = 0.15$$

La segunda distribución es más homogénea (datos más "semejantes" entre sí) que la primera, puesto que la segunda tiene un menor CV. Obsérvese que la primera persona, aunque tiene una media peor, tiene más "regularidad" que la segunda. La primera, por el contrario, ofrece valores más extremos.

- *Tipificación* de datos. Normalmente, en estadística no se trabaja con los datos directamente, sino que previamente se *tipifican* todos y cada uno de ellos, con lo que se consigue tratarlos y entender su significado más fácilmente y al mismo tiempo hacerlos más directamente comparables con los de otra distribución. Los datos tipificados de una distribución normal siempre valen entre -3 y 3, aproximadamente. Un dato x_i se tipifica (y se llamará z_i) aplicando la siguiente fórmula:

$$z_i = \frac{x_i - <x>}{\sigma}$$

Por ejemplo, el dato 9 de la primera distribución ($media = 9.21$; $\sigma = 1.81$) queda, tipificado así

$$z = \frac{9 - 9.21}{1.81} = -0.12$$

Quienes trabajan en Estadística *habitualmente lo hacen con datos tipificados.*

5 Temas 7, 8 y 9: Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones

Sistemas de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas, matrices, determinantes y sus propiedades, resolución de sistemas de ecuaciones por determinantes (método de Cramer)

5.0.10

5.0.11 ♦ Matrices y determinantes

- Una *matriz* es una ordenación de números (que a veces vienen representados por letras) en filas y columnas. Por ejemplo, son matrices:

▶Ejemplo 1: $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ \sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ -\pi & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\; 3 \quad 1 \quad a \quad 2 \quad -1$$

la primera de ellas es una matriz cuadrada 3×3 (3 filas por 3 columnas), que se suele llamar "matriz cuadrada de orden 3" o, más simplemente, "matriz de orden 3"); la segunda es una matriz cuadrada 2×2 (o de orden 2); la tercera es una matriz 4×2; la cuarta es una matriz 1×5 (y las de ese tipo se llaman *matrices-fila*, como también hay *matrices-columna*), y la quinta es una matriz 1×1, que es el tipo más simple de matriz que existe.

En general, cada elemento de una matriz se suele identificar mediante la notación a_{ij} , donde i es el número de fila que ocupa y j el número de columna. Por ejemplo, el valor $\sqrt{5}$ de la tercera matriz del Ejemplo 1 corresponde al elemento a_{21}, porque está en la segunda fila y primera columna.

- Dada una matriz, podemos obtener de ella *submatrices* eliminando un número cualquiera de filas, de columnas, o de filas y columnas. Por ejemplo, si en la primera matriz el Ejemplo 1 eliminamos la primera fila nos queda:

$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ (submatriz 2×3 de la primera matriz del Ejemplo 1)

y si eliminamos la segunda fila y la segunda columna nos queda la submatriz de orden 2:

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Otras submatrices de la primera del Ejemplo 1 son:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (0) \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nótese que consideramos a una matriz como una submatriz de sí misma (eliminando 0 filas y 0 columnas) Las submatrices, como matrices que son, pueden ser *cuadradas* (mismo número de filas y columnas) o no. Las cuadradas son las que más nos van a interesar aquí. Obsérvese que la primera matriz del Ejemplo 1 puede tener *submatrices cuadradas* de orden 3 (es decir, 3×3), de orden 2 (o sea, 2×2) y de orden 1 (1×1). Por su lado, la segunda y tercera matrices del Ejemplo 1 pueden tener submatrices cuadradas de orden 2 y de orden 1, y la cuarta y la quinta, sólo *submatrices cuadradas* de orden 1.

(Obsérvese que el concepto de *orden* está siempre asociado al de matrices *cuadradas*; no se habla de orden si la matriz no es cuadrada: orden es el número de filas (o de columnas, que es lo mismo) de una matriz cuadrada. En adelante debe tenerse esto en cuenta).

- Al igual que sobre los números reales, sobre las matrices pueden realizarse ciertas operaciones (multiplicarlas por un número, sumar dos matrices, etc.). Una de las operaciones es calcular el *determinante* de una matriz cuadrada (no está definida la operación *determinante* para una matriz no cuadrada). Para indicar que vamos a efectuar la operación determinante sustituiremos los paréntesis redondos de la matriz: () por paréntesis cuadrados: [] .

$\triangleright$El determinante de una matriz cuadrada de orden 1 es el mismo número. Por ejemplo, el determinante de la matriz (-7) es -7.

$\triangleright$El determinante de una matriz cuadrada de orden 2 :

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se calcula mediante la siguiente fórmula: $ad - bc$; por ejemplo, el determinante de la matriz segunda del Ejemplo 1 es $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$\triangleright$El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 :

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, se calcula mediante la siguiente fórmula:

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{223}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$

Para evitar memorizar esa fórmula usaremos una regla mnemotécnica. Para ilustrarla, vamos a calcular el determinante de la primera matriz del Ejemplo 1. Se escribirán las tres primeras filas igual que están, y debajo se repetirán la primera y la segunda, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 4 & -\mathbf{1} & 0 \\ 1 & 9 & \mathbf{0} \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}$$

luego se multiplican entre sí los números de la diagonal del 3 (señalados en negrita), los de la diagonal paralela inferior (la que empieza en 4) y a los de la inferior a ésta última (la del 1), sumándose al final los tres productos obtenidos. Se hace lo mismo con las tres diagonales secundarias (la que empieza por el 0 que está en el vértice superior derecho y las dos paralelas por debajo), y el resultado se resta del obtenido anteriormente. Es decir:

$[3 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 9 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0] - [0 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 9 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 4] = 0$

El resultado de ese determinante es, pues, 0.

El resultado del que se plantea a continuación es -16. (comprobarlo):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -16$$

$\triangleright$Para resolver determinantes de orden 4 o superior hay que entender primero el concepto de *menor complementario*. Seguimos con la matriz primera del Ejemplo 1. El menor complementario del elemento 3 es el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila y la columna donde está el 3, es decir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad .$$

Otro ejemplo: el menor complementario del 0 superior derecho es $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = 37$

Otro concepto indispensable es el del *signo por su posición* de cada elemento de un determinante. Independientemente de su signo propio, se considera que cada elemento tiene un *signo por su posición* según las siguientes reglas: 1) en un determinante cualquiera, el elemento que está en el vértice superior izquierdo tiene el *signo por su posición* $+$; 2) los elementos adyacentes en vertical o en horizontal a uno dado tienen el *signo por su posición* contrario. Con estas dos reglas es fácil ver que en la práctica para saber el *signo por su posición* de un elemento dado se empieza por el elemento superior izquierdo del determinante, a_{11}, al que se le asigna el $+$, y se trata de llegar al elemento dado yendo *casilla por casilla en horizontal o vertical, nunca en diagonal, por el camino que se quiera, cambiando de signo al saltar de casilla.* Por ejemplo, sea el siguiente determinante de orden 4;

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

para saber el *signo por su posición* del elemento 5 vamos hacia él desde el 7 en horizontal o vertical, casilla por casilla (por cualquier camino), cambiando de signo al saltar de casilla:

$$\begin{bmatrix} + & & & \\ - & + & & \\ & - & & \\ & + & - & \end{bmatrix}$$ y, como vemos, concluimos que el *signo por su posición* del 5 es $-$.

Sabido esto, un determinante de orden mayor que 3 se resuelve así: se escoge cualquier fila (o cualquier columna) y se va multiplicando cada elemento de esa fila por su menor complementario. Al final se *suman o restan* todos los productos obtenidos, dependiendo que se sumen o se resten del signo por su posición de cada elemento de fila (o columna) tomado. Se comprenderá que conviene tomar aquella fila (o columna) con números más sencillos, y preferentemente con el máximo número de ceros. Ilustramos esto con un ejemplo: resolveremos el determinante de orden 4 escrito más arriba. Elegiremos la columna tercera (que tiene dos ceros); el método es así:

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = +0 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$5 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$= 0 + 1 \cdot (-96) + 0 - 5 \cdot 166 = -926$

Si el determinante hubiera sido de orden 5 se sigue el mismo método, pero hubieramos obtenido cinco determinantes de orden 4 cada uno de los cuales habríamos tenido que resolver aparte, reduciéndolos a determinantes de orden 3.

- Se comprenderá por lo visto que resolver un determinante de orden elevado será tanto más fácil cuantos más ceros tenga en una fila o columna el determinante, ya que así se anulan términos en el desarrollo anterior. Si el determinante no contiene ceros, o pocos, es posible y conviene *hacer ceros* aplicando cierta propiedad. Para *hacer ceros* debemos comprobar si hay dos filas (o dos columnas) que tengan el mayor número de elementos iguales o proporcionales en idénticas posiciones, o bien si una fila (o columna) tiene elementos que son la suma de los de otras filas (o columnas) situados en las mismas posiciones.

Se reescribe el determinante manteniendo iguales todas las filas (o columnas) excepto una de ellas, que *se cambia por el resultado de restarle otra o de restarle la suma de otras incluso multiplicada previamente alguna de estas últimas por un número.* Esto se entiende mejor con un ejemplo. Sea el siguiente determinante:

▶Ejemplo 2: $$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ \mathbf{3} & 6 & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}$$

Puede observarse que las columnas primera y tercera tienen tres números iguales en las mismas posiciones (marcados en negrita). Entonces, reescribiremos el determinante manteniendo iguales las columnas segunda, tercera y cuarta, y en vez de la primera escribiremos una nueva, que será el resultado de restarle a la primera la tercera. Así conseguimos hacer 3 ceros y puede demostrarse que eso no afectará al resultado del determinante. A continuación resolvemos el determinante obtenido por el método de los menores complementarios usando la primera columna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{-5} & -1 & 4 & 1 \\ \mathbf{0} & 6 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = +0 \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} -(-5) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} +0 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} -$$

$$0 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

También podía haberse resuelto el determinante del Ejemplo 2 observando la relación entre las filas primera y tercera: tres números de la tercera son el triplo de los de la primera en las mismas posiciones. Podríamos hacer ceros ahí dejando intactas la primera, segunda y cuarta filas y restando a la tercera la primera multiplicada por 3.

- Nótese que siempre hay que dejar fijas todas las filas (o columnas) excepto una, *y a esa se le debe restar* otra fila (o columna) o bien una *combinación lineal* de filas (o de columnas). Una combinación lineal de filas (o de columnas) es el resultado de sumar o restar entre sí esas filas (incluso si previamente se han multiplicado previamente algunas o todas ellas por números).

►Ejemplo 3. Resolver el siguiente determinante

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En él podemos notar que si sumamos la segunda columna con la tercera y el doble de la cuarta obtenemos (salvo en el último número) la primera. Entonces, reescribiremos el determinante manteniendo las columnas segunda, tercera y cuarta y reescribiendo la primera como el resultado de restarle la combinación lineal indicada (segunda + tercera + doble de cuarta). A continuación aplicaremos el método de los menores complementarios (esta vez no escribiremos los términos que incluyan una multiplicación por 0)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -(-5) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 45$$

La operación de hacer ceros se puede repetir varias veces, tanto en filas como en columnas, hasta que se considere necesario. Desde luego, no es imprescindible hacer ceros para resolver un determinante. Simplemente facilita los cálculos.

De esta propiedad es fácil deducir otras:

▷Un determinante con dos filas (o columnas) exactamente iguales o proporcionales (es decir, una de ellas es la otra multiplicada por un número) es igual a 0.

▷Un determinante en el que una fila (columna) es combinación lineal de dos o más filas (dos o más columnas) es igual a 0. Por ejemplo, el siguiente determinante, en el que la cuarta fila es combinación lneal de las tres primeras, es 0:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

(en este caso, la cuarta fila es la suma primera + segunda + tercera; se dice entonces que la cuarta fila es una combinación lineal de las tres primeras. Otras combinaciones lineales, a título de ejemplo, podrían ser: la primera multiplicada previamente por 3 menos la segunda menos la tercera; la segunda menos la cuarta por 5, la primera más la cuarta, etc...).

5.0.12 ♦ Resolución de sistemas de ecuaciones por determinantes (método de Cramer)

- Entre otras utilidades, los determinantes sirven para **resolver sistemas de ecuaciones por el llamado método de Cramer**. Sea el siguiente sistema (Ejemplo 4)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 4 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x - y - z &= 1 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que las soluciones para x, y y z vienen dadas directamente por los siguientes cocientes:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{4} & 1 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}} = 1 \qquad y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{4} & -1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 3 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}} = 2 \qquad z =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{4} \\ 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 3 & -1 & \mathbf{1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}} = 0$$

Repárese en cómo se han construido los tres cocientes: los denominadores son en los tres casos los determinantes de la llamada *matriz de los coeficientes* (matriz formada por los coeficientes de las incógnitas, ordenadas), y los numeradores son esos mismos determinantes pero sustituyendo en ellos la columna correspondiente a la incógnita que se esté solucionando cada vez (la x, la y o la z) por la columna de los términos independientes del sistema de ecuaciones (en este caso, 4, 3, 1). Este es el *método de Cramer*. Para evitar errores, el sistema de ecuaciones hay que escribirlo de modo que las incógnitas estén bien alineadas en columnas, y los términos independientes en el segundo miembro. Se aplica del mismo modo a sistemas más complejos (cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, etc...) y más simples (dos ecuaciones con dos incógnitas)

A veces un sistema de ecuaciones *no tienen solución*. Efectivamente, si el determinante de la matriz de los coeficientes (el del denominador de las expresiones de Cramer) es 0, el sistema no se puede resolver. Y si, siendo 0 el determinante del denominador, lo es también el del numerador para al menos una de las incógnitas, el sistema puede no tener solución o tener *infinitas soluciones*.

Recapitulando: los sistemas de ecuaciones pueden tener

⊗ *ninguna* solución, y se llaman entonces *incompatibles*;

⊗ *una y sólo una*, y se llaman entonces *compatibles determinados*;

⊗ *infinitas* soluciones, y se llaman entonces *compatibles indeterminados*.

- Hay otra forma de comprobar si un sistema de ecuaciones tiene o no solución, y en el primer caso si la solución es única o son infinitas. Lo veremos con el sistema del Ejemplo 4 tratado anteriormente. Construiremos las llamadas *matriz de los coeficientes* (C) y *matriz ampliada* (A) para ese sistema (esta última es la matriz de los coeficientes con una nueva columna añadida: la de los términos independientes):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcularemos ahora los *rangos* de ambas matrices. Rango de una *matriz* es *el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante distinto de cero que podamos encontrar dentro de la matriz en cuestión.*

Dentro de la matriz C podemos encontrar submatrices cuadradas de orden 1, 2 y 3, y lo mismo, en este caso, dentro de la matriz A. La única submatriz cuadrada de orden 3 que contiene la matriz C es ella misma. Calculamos su determinante, que da un valor distinto de 0 (concretamente da 8). Como hemos encontrado que una submatriz de C de orden 3 tiene determinante distinto de 0, el rango de C es 3. A tendrá el mismo rango, puesto que no podemos encontrar dentro de ella submatrices cuadradas de mayor orden y sí una de orden 3 igual a la anterior, para la que ya hemos demostrado que tiene determinante distinto de 0.

Si llamamos r_C al rango de la matriz de los coeficientes, r_A al rango de la matriz ampliada y n al número de incógnitas, deberemos tener en cuenta las siguientes relaciones para saber si un sistema tiene o no solución:

$$\begin{array}{rc} r_C = r_A = n & \text{sistema compatible determinado} \\ r_C = r_A \neq n & \text{sistema compatible determinado} \\ r_C \neq r_A & \text{sistema incompatible} \end{array}$$

En nuestro ejemplo anterior, el sistema es compatible determinado, y la solución única puede determinarse por el método de Cramer como ha quedado visto. Veremos ahora otros ejemplos.

►Ejemplo 5. Averiguar si el siguiente sistema tiene o no solución y, en su caso, darla:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ y + z &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- El rango de C es 2, puesto que 2 es el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante distinto de 0 que somos capaces de encontrar dentro de C (comprobarlo); y el rango de A es 3, puesto que se puede encontrar una submatriz cuadrada de orden 3 dentro de A.(por ejemplo, la formada con las columnas segunda, tercera y cuarta) El sistema es, pues, incompatible.

►Ejemplo 6. Averiguar si el siguiente sistema tiene o no solución y, en su caso, darla:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 3 \\ y+z &= 5 \\ 2x+2y-2z &= 6 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- En este caso, el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y también lo es el de la ampliada (compruébese que *las cuatro posibles submatrices de orden* 3 de la matriz ampliada tienen determinante igual a 0). Como el número de incógnitas es 3, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Estos sistemas se resuelven como sigue. Se considera qué submatriz se utilizó para demostrar que el rango de C es 2 (cada persona puede haber usado una submatriz distinta; eso no importa). Supongamos que hemos tomado la submatriz marcada con números en negrita para demostrar que el rango de C es 2 (esa submatriz nos hubira valido, en efecto, porque su determinante es distinto de 0):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pues bien, se tacha la fila que no hemos empleado (en este caso, la tercera), lo que equivale a *olvidarnos de la tercera ecuación del sistema* que nos dieron, y la incógnita que no hemos empleado (en este caso la z, tercera columna) se sustituye, donde aparezca, por la letra griega λ (*lambda*), pasándola además al segundo miembro. Es decir el sistema de ecuaciones se reescribe así:

$$\begin{aligned} x+y &= 3+\lambda \\ y &= 5-\lambda \end{aligned}$$

Ahora:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3+\lambda \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

(nótese que A tiene 3 columnas, no 4)

Ese sistema es ahora compatible y determinado (compruébese que ambos rangos son 2, y téngase en cuenta que ahora 2 es el número de incógnitas, pues z ha dejado de ser incógnita). Lo solucionaremos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 3+\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = -2+2\lambda \qquad y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3+\lambda \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = 5-\lambda$$

La solución del sistema es: $x = -2+2\lambda \qquad y = 5-\lambda \qquad z = \lambda$

Ahora bien, si hubiéramos tomado como referencia otra submatriz para demostrar que el rango de C es 2 habríamos obtenido otro resultado, pero en realidad es el mismo, lo que vamos a demostrar. Por ejemplo, si hubiéramos tomado como submatriz la señalada con números en negrita para demostrar que el rango de C es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

entonces deberíamos haber eliminado la primera ecuación del sistema y parametrizar la incógnita no usada, haciéndola igual a t (para distinguir de la λ usada entes; es decir, $x = t$). El sistema quedaría ahora:

$$\begin{aligned} y+z &= 5 \\ 2y-2z &= 6-2t \end{aligned}$$

y si lo resolvemos por el método de Cramer obtendríamos: $x = t \qquad y = 4-\frac{1}{2}t \qquad z = 1+\frac{1}{2}t$, solución que parece distinta a la anterior. Pero es la misma. Esto podemos entenderlo si comprendemos primero qué significa expresar la solución de una ecuación de esa forma, es decir, parametrizada. Significa que en realidad son infinitas las soluciones, y cada una de ellas se obtiene dando un valor arbitrario a λ (o a t); por ejemplo, para $\lambda = 0$ las soluciones para la ecuación son: $x = -2 \quad y = 5 \quad z = 0$; para $\lambda = 1$: $x = 0 \quad y = 4 \quad z = 1$, etc. A esas mismas soluciones siempre se puede llegar dando los adecuados valores a t; así, para $t = -2$ obtenemos de nuevo $x = -2 \quad y = 5 \quad z = 0$, y para $t = 0$ llegamos a $x = 0 \quad y = 4 \quad z = 1$.

(En la práctica, para saber cómo se corresponden λ y t basta igualar, en cualquiera de las incógnitas, sus expresiones correspondientes en función de λ y de t; por ejemplo, como $x = t$ y $x = -2 + 2\lambda$, de ahí se deduce que $-2 + 2\lambda = t$, lo que nos permite conocer la relación entre λ y t; según esa relación, para $\lambda = 0$, $t = -2$, es decir, se obtiene la misma solución para x, y, z usando $\lambda = 0$ en la primera forma de solucionar el sistema que hemos abordado que empleando $t = -2$ en la segunda.)

$\triangleright$ Un tipo especial de problemas consiste en determinar si un sistema tiene o no solución en función de un parámetro. Por ejemplo, sea el siguiente (en el que se usa el parámetro a):

$$\begin{aligned} ax - y - 2z &= 1 \\ x + y &= 3 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Para resolver este caso concreto, se plantea la matriz de los coeficientes (C) y la ampliada (A); se resuelve el determinante de C, que, lógicamente, quedará en función de a (en este caso ese determinante da $a - 1$); el resultado se iguala a 0, y eso nos permite calcular el valor de a que hace el determinante 0, o, lo que es lo mismo, que hace que la matriz tenga rango 2; cualquier otro valor de a hará que la matriz tenga rango 3. También hay que comprobar el rango de la matriz ampliada, que da 3 *independientemente de* a. Concretamente, en este problema, para $a = 1$ el rango de la matriz C da 2, y para cualquier otro valor de a da 3; de ahí es fácil deducir que para $a = 1$ el sistema es incompatible y que para $a \neq 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Cada caso concreto de este tipo de problemas es diferente, pero la forma de resolverlo es básicamente la indicada.

$\triangleright$ Hay sistemas en que los términos independientes valen todos 0; se llaman *homogéneos* y *siempre son compatibles, puesto que al menos admiten una solución:* $x = 0, y = 0, z = 0$. Lo que hay que determinar en ellos es si sólo tienen esa solución (compatibles determinados) o infinitas (compatibles indeterminados). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

es compatible indeterminado con solución general $x = \lambda \qquad y = -3\lambda \qquad z = 2\lambda$.

NOTA:

En estos apuntes (esta es la segunda parte) se resume y adapta el contenido del libro oficial de Matemáticas Especiales del Curso de Acceso Directo de la UNED. La experiencia demuestra que el libro es poco asequible para los alumnos, de modo que se ha tratado de hacer unos apuntes comprensibles y, sobre todo, orientados a aprobar el examen, pues se ha tenido en cuenta lo que habitualmente es materia de examen.

Las personas que hayan encargado a la editorial Treveris este material impreso recibirán gratis por correo electrónico una nueva colección de problemas que se está redactando durante este curso escolar (2000-2001). Son problemas ordenados desde "dificultad cero" hasta el nivel requerido, de modo que un problema ayuda a resolver el siguiente en la lista. El número total de problemas de esta nueva colección superará el millar, aunque algunos son de resolución inmediata. Las personas registradas también recibirán un segundo material: la solución a los problemas de clase, que también se está redactando este año, a medida que vaya progresando el curso. Finalmente, los registrados tendrán derecho a una tutoría personalizada a través de correo electrónico en

matematicas@treveris.es

donde podrán consultar todo tipo de dudas que surjan.

1 Temas 10, 11 y 12: Geometría y trigonometría

Ángulos, triángulos, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, fórmulas trigonométricas

1.0.1 ▲ Razones trigonométricas de un ángulo

▽ *Ángulos*

Clásicamente los ángulos se miden en **grados**: la vuelta completa a una circunferencia son 360^o; media vuelta son 180^o; un cuarto de vuelta (un ángulo recto), 90^o, etc. Pero la unidad más científica es el **radián**. La relación entre grados y radianes es:

360 grados son 2π radianes

Pasar de una unidad a otra es simple: basta hacer una regla de tres.

∇ *Seno y coseno de un ángulo*

Sobre los ángulo se pueden realizar, entre otras, unas operaciones que se denominan **razones trigonométricas**. Las más importantes son el **seno** (sen) y el **coseno** (cos). Para definirlas y estimarlas nos ayudaremos siempre de un círculo cuyo centro coincidirá con el de un sistema de coordenadas cartesianas X, Y clásico *Consideraremos siempre que el radio del círculo es* 1. Todo esto viene ilustrado en la siguiente figura:

dtbpF2.6472in2.4388in0ptfoe5eq00.wmf

En ella también se han numerado los llamados cuatro *cuadrantes* en que queda dividido el círculo y se han representado algunos valores de los ejes X e Y (en los que cada muesca de la escala vale 0.1 unidades, como puede comprobarse). También se han representado angulos ángulos típicos. Donde está representado el ángulo 0^o se considera el punto de partida para medir ángulos; yendo contra las agujas del reloj el sentido se considera positivo (al revés es negativo: así, el ángulo 270^o también puede llamarse -90^o).

El **seno** de un ángulo se define como el valor de la coordenada Y (ordenada) del punto que representa a dicho ángulo en el círculo de radio unidad que estamos tomando como referencia; el **coseno** es el valor de la coordenada X (abscisa). Por ejemplo, el seno de 30^o es 0.5, y el coseno de 30^o es un valor que está entre 0.8 y 0.9, como puede comprobarse, según las definiciones dadas, en la siguiente figura:

dtbpF2.5253in2.5123in0ptfn07qx01.wmf

De la figura puede también deducirse que el seno de un ángulo es la altura del punto que representa al ángulo (marcado con $\times$) respecto al eje de las X.

Por lo tanto, en adelante hay que tener muy en cuenta que:

seno: valor de la coordenada y del punto que representa al ángulo

coseno: valor de la coordenada x del punto que representa al ángulo

Por supuesto, el signo de estas coordenadas puede ser positivo o negativo. Por ejemplo, siguiendo la definición que hemos dado, el valor del seno de un ángulo que esté situado en el tercer cuadrante (digamos 210^o) debe ser negativo, pues en ese cuadrante la coordenada y tiene valor negativo.

$\ggg$De las definiciones dadas y de la observación de la figura siguiente puede deducirse que las razones trigonométricas de un ángulo dado pueden coincidir (totalmente o a falta del signo) con las de otros ángulos del círculo.

dtbpF2.9187in2.5123in0ptfn08i903.wmf

Si en la figura observamos los puntos que representan a los ángulos escritos (puntos señalados con $\times$), veremos qur todosellos tienen el mismo valor absoluto (es decir, signo aparte) de la coordenada y (0.5) y el mismo de la x (entre 0.8 y 0.9). Por tanto, todos esos ángulos tienen el mismo valor absoluto del seno y del coseno.

Esta constatación podemos generalizarla. *En general, sabiendo las razones trigonométricas (seno y coseno) de los ángulos del primer cuadrante podemos conocer las de los ángulos de cualquiera de los otros tres cuadrantes*, siguiendo las siguientes reglas:

$\diamondsuit$ un ángulo del segundo cuadrante tiene las mismas razones trigonométricas en valor absoluto que el que corresponda al primer cuadrante al trazar una recta paralela al eje de las X (así, las razones de 150^o son las mismas (signos aparte) que las de 30^o, y las de 178^o las mismas que las de 2^o).

$\diamondsuit$ un ángulo del tercer cuadrante tiene las mismas razones trigonométricas en valor absoluto que el que corresponda al primer cuadrante al trazar una recta que pase por el centro de coordenadas.(así, las razones de 210^o son las mismas (signos aparte) que las de 30^o, y las de 254^o las mismas que las de 74^o).

$\diamondsuit$ un ángulo del cuarto cuadrante tiene las mismas razones trigonométricas en valor absoluto que el que corresponda al primer cuadrante al trazar una recta paralela al eje de las Y. (así, las razones de 330^o son las mismas (signos aparte) que las de 30^o, y las de 271^o las mismas que las de 89^o).

►Ejemplo: calcular las razones trigonométricas de 225^o. Este ángulo está en el tercer cuadrante (es decir, su seno y su coseno serán ambos negativos) y sus razones trigonométricas equivaldrán a las de 45^o, según las reglas vistas. Por tanto:

$\text{sen}225^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 225^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangledown$ *Otras funciones trigonométricas*

La **tangente** se *define* como el cociente entre el seno y el coseno; siguiento el ejemplo anterior podemos decir que:

$\text{tg}225^o = \frac{sen225^o}{\cos 225^o} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1$

La **cotangente** se *define* como la inversa de la tangente. Así:
cotg225^o $= \frac{1}{tg225^o} = \frac{1}{1} = 1$
La **cosecante** se *define* como la inversa del seno. Así:
cosec225^o $= \frac{1}{sen225^o} = \frac{1}{-\sqrt{2}/2} = -\sqrt{2}/2$
La **secante** se *define* como la inversa del coseno. Así:
sec225^o $= \frac{1}{cos225^o} = \frac{1}{-\sqrt{2}/2} = -\sqrt{2}/2$

$\triangledown$ *Razones trigonométricas básicas*

Es necesario memorizar las razones trigonométricas de 0^o, 30^o, 45^o, 60^o y 90^o. En realidad, basta memorizar los senos y cosenos, pues las demás se obtienen fácilmente de sus definiciones.

	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg
0^o	0	1	0	$-$	1	$-$
30^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	1	0	$-$	1	$-$	0

$\triangledown$ *Funciones inversas*

Dado un número real cualquiera, podríamos preguntarnos, por ejemplo, para qué ángulo su seno da ese número real. Por ejemplo, ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0.5? Esa operación se llama "**arco seno**", y se representa así en este caso:

arcsen $0.5 = 30^o$ arcsen $0.5 = 150^o$ (nótese que arcsen 0.5 tiene dos soluciones porque hay dos ángulos (30^o y 150^o) cuyo seno es 0.5.

Del mismo modo podemos escribir (usando calculadora)

arccos $0.2257 \simeq 76.95^o$ arccos $0.2257 \simeq 283.04^o$ (también dos soluciones)

y (sin necesidad de calculadora):

arctg $1 = 45^o$ arctg $1 = 225^o$

$\triangledown$ *Relaciones trigonométricas útiles*

Siempre se cumple que

$\diamondsuit$ $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (esto nos permite calcular el coseno de un ángulo sabiendo el seno, o al revés; por ejemplo, si el seno de 26^o es aproximadamente 0.438, su coseno será: $\cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \simeq 0.899$

$\diamondsuit$ sen$(-\alpha)$ =senα $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (Ejemplo.: sen(-30) =sen30 $= \frac{1}{2}$)

$\diamondsuit$ sen$(\alpha+\beta)$ =sen$\alpha\cos\beta$+cosαsenβ $\cos(\alpha+\beta)$ = $\cos\alpha\cos\beta$−senαsenβ (fórmulas útiles para calcular razones de ángulos como 105^o, que es la suma de 60^o y 45^o; así:

sen105^o =sen(60^o+45^o) =sen$60^o\cos 45^o$+cos60^osen45^o $= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \simeq 0.966$

También podemos calcular utilizando este tipo de fórmulas las razones de 15^o; por ejemplo:

$\cos 15^o = \cos(60^o-45^o) = \cos(60^o+(-45^o)) = \cos 60^o\cos(-45^o)-\text{sen}60^o\text{sen}(-45^o) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \simeq 0.966$

$\diamondsuit$ sen$\alpha = \cos(90^o-\alpha)$ (por ejemplo: sen$10^o = \cos 80^o$

1.0.2 ▲ Trigonometría de triángulos

▽ *Teorema de Tales y Pitágoras*

En la siguiente figura, considérense los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{abc}$. Ambos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales entre sí; se dice que son **triángulos semejantes**. Para dos triángulos semejantes se cumple el **Teorema de Tales**:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

Por otra parte, en cualquier triángulo rectángulo (aquél que tiene un ángulo recto, como es el caso en este ejemplo) se cumple el **Teorema de Pitágoras**.

dtbpF227.875pt174pt0ptFigure

▽ *Razones trigonométrica en un triángulo*

Por lo que hemos visto hasta ahora, y teniendo en cuenta la figura anterior, en la que el círculo interno suponemos que tiene radio 1 y el externo un radio distinto (en el ejemplo = 2) podemos escribir que

$$\begin{aligned} sen\alpha &= a \\ \cos\alpha &= b \end{aligned}$$

pero por el teorema de Tales podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{a}{A} &= \frac{c}{C} \qquad \Longrightarrow a = \frac{Ac}{C} = \frac{A}{C} \qquad (pues \quad c = 1) \\ \frac{b}{B} &= \frac{c}{C} \qquad \Longrightarrow b = \frac{Bc}{C} = \frac{B}{C} \qquad (pues \quad c = 1) \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones y las anteriores podemos obtener las fórmulas generales para calcular el seno y el coseno de *cualquier triángulo*:

$$\begin{aligned} sen\alpha &= \frac{A}{C} \\ \cos\alpha &= \frac{B}{C} \\ y, portanto &: \quad tg\alpha = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

o, dicho con palabras:

$$\begin{aligned} sen\alpha &= \frac{catetoopuesto}{hipotenusa} \\ \cos\alpha &= \frac{catetocontiguo}{hipotenusa} \\ tg\alpha &= \frac{catetoopuesto}{catetocontiguo} \end{aligned}$$

Estas tres fórmulas, que hay que memorizar, sirven para conocer algunos lados o ángulos de un triángulo conocidos otros. No se olvide que sólo pueden aplicarse a triángulos rectángulos, aunque si no lo son pueden partirse de modo que se obtengan subtriángulos rectángulos.

►Resolver el siguiente triángulo a partir de los datos conocidos:

dtbpF204.6875pt116pt0ptFigure

Podemos conocer en primer lugar en ángulo α, pues:

sen$\alpha = \frac{1.2}{3} = 0.4 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha =$arcsen $0.4 \simeq 23.58^o$ (con calculadora)

Eso permite saber cuánto vale β, pues en cualquier triángulo debe cumplirse:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^o \qquad \Longrightarrow \qquad \beta \simeq 106.42^o$

A puedeconocerse a partir de:

sen$50^o = \frac{1.2}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1.2}{sen50^o} \simeq 1.57$

Por otro lado, podemos calcular las bases (llamémoslas $B\prime$ y B") de los triángulos rectángulos de la izquierda y la derecha (delimitados por la línea que representa la altura):

$\cos\alpha = \frac{B'}{3} \quad \Longrightarrow \quad B' = 3\cos 23.58^o \simeq 2.75$

$\cos\gamma = \frac{B''}{1.57} \quad \Longrightarrow \quad B'' \simeq 1.57\cos 50^o \simeq 1.01$

Por tanto, $B = B' + B'' \simeq 3.76$

2 Tema 14: Números complejos

Números complejos en forma binómica y en forma trigonométrica, Operaciones con complejos

♦ *Necesidad de los números complejos;el número* **i**

En la resolución de algunos problemas (como algunas ecuaciones de segundo grado) pueden aparecer raíces cuadradasde números negativos, algo que no tiene sentido en el campo de los números reales. Para solucionarlo se idearon los números complejos.

La expresión $\sqrt{-1}$ es un número complejo que llamaremos i. Usando i podremos solucionar raíces como $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = \pm 4i$

Cuando en determinada operación encontremos i elevado a alguna potencia lo transformaremos según:

$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i$

serie que se repite cíclicamente (por ejemplo: $i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1$, etc...), de modo que potencias más altas pueden reducirse a la serie principal dividiendo el exponente por 4 y tomando el resto de la división.

►Ejemplo: encontrar un equivalente a i^{11} dentro de la serie principal anterior: i^{11} debe valer cualquiera de los siguientes valores: $1, i, -1, -i$ para saberlo, dividimos 11 entre 4 y tomamos el resto, que es 3 :

$11 = 4\times 2 + 3$ Podemos escribir entonces que $i^{11} = i^3$, y observando la serie mencionada, en que $i^3 = -i$ escribiremos: $i^{11} = -i$

♦ *Forma binómica de un número complejo*

Un número complejo expresado en la llamada **forma binómica** es un binomio de la forma

$$a + bi$$

, donde a puede ser cualquier número real (incluido el 0) y se denomina *parte real*, y b puede ser cualquier número real (incluido el 0) y se denomina *parte imaginaria*.

Un complejo cuya parte real sea cero se llama *imaginario puro*; lo es, por ejemplo, el complejo $-3i$, y un complejo cuya parte imaginaria sea cero se llama simplemente real; por ejemplo el 5.

▽ *Operaciones con complejos en forma binómica*

⊥ *Suma, resta, multiplicación y potencia:* se efectúan como en cualquier monomio. Si aparece i elevado a una potencia superior a 1 debe reducirse como ha quedado explicado más arriba.

►Ejemplo: Sean los complejos $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = -1 - i$; su suma es $1 - 4i$; su resta:

$(2 - 3i) - (-1 - i) = 2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i$; su poducto es: $(2 - 3i)(-1 - i) = -5 + i$; y la potencia de cualquiera de ellos se obtiene multiplicándolo por sí mismo tantas veces como sea necesario; por ejemplo: $z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z$. (se multiplica primero $z \cdot z$, luego el resultado por z y este resultado, finalmente, por z de nuevo).

⊥⊥ *División*: para efectuar el cociente entre dos números complejos se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador, *siendo el conjugado de un complejo el mismo complejo pero con la parte imaginaria (sólo la parte imaginaria) cambiada de signo*:

►Ejemplo: $\frac{2-3i}{-1-i} = \frac{(2-3i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

⧫ *Forma trigonométrica de un número complejo*

▽ *Representación cartesiana*

Un complejo $a+bi$ puede representarse en coordenadas cartesianas como el punto (a, b). Por ejemplo, los complejos $4 + 2i$ y $-2 - 2i$ pueden representarse por los puntos señalados en el siguiente gráfico:

dtbpF2.5218in2.5088in0ptfokrb900.wmf

La distancia desde el punto que representa al complejo al centro de coordenadas, r, se llama **módulo** del complejo, y el ángulo entre el eje X y el radio r se llama **argumento** del complejo.

▽ *Expresión trigonométrica y operaciones con complejos en dicha forma*

Dado un complejo en forma binómica $a + bi$ puede expresarse en forma trigonométrica así:

$$r(\cos\alpha + isen\alpha)$$

donde r es su módulo y α su argumento, que según la figura anterior pueden calcularse así:

$$\begin{aligned} r &= +\sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha &= arctg\frac{b}{a} \end{aligned}$$

►Ejemplo: escribir en forma trigonométrica los complejos $z_1 = -2-2i$ y $z_2 = 3-i$.

Para z_1 el módulo es: $r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y el argumento es:

α =arctg$\frac{b}{a}$ =arctg$\frac{2}{2}$ =arctg1 = Como se ve,hemos escrito tanto b como a positivos, a pesar de ser negativos. Esto conviene hacerlo siempre así. El ángulo cuya tangente es 1 (esto es, la solución de arctg1) es 45^o, pero también puede serlo cualquiera de los ángulos correspondientes a 45^o en los otros tres cuadrantes (véase Trigonometría, en particular el dibujo en el que se observan los ángulos correspondientes a 30^o, que son: 150^o, 210^o y 330^o.) Los ángulos correspondientes a 45^o son 135^o, 225^o y 315^o. Para saber cuál de los cuatro es la solución, estudiamos dónde está el punto $(-2,-2)$ que representa al complejo: está en el tercer cuadrante; por tanto, el argumento de z_1 es $\alpha = 225^o$.

Por tanto, el complejo es: $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225^o + i\text{sen}225^o)$

Para z_2 el módulo es: $r = \sqrt{(3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ y el argumento es:

α =arctg$\frac{1}{3}$ (recuérdese que tomamos los números a dividir siempre positivos, aunque sean negativos). Empleando una calculadora, el ángulo debe ser aproximadamente 18.43^o o cualquiera de sus correspondientes: 161.57^o, 198.43^o o 341.57^o. De los cuatro nos quedamos con 341.57^o, pues el punto que representa al complejo, $(3,-1)$ está en el cuarto cuadrante.

Por tanto, el complejo es: $z_2 = \sqrt{10}(\cos 341.57^o + i\text{sen}341.57^o)$

►Ejemplo: escribir en forma trigonométrica los complejos $z_3 = -2$ y $z_4 = \sqrt{3}i$. Pasar a forma trigonométrica números complejos que en realidad son reales puros (como $.z_3$) o imaginarios puros (como $.z_4$) es especialmente fácil:

○ el módulo de un real puro es él mismo (siempre con signo positivo aunque sea negativo), y sólo hay dos posibles argumentos: 0^o si es positivo y 180^o si es negativo (pues recordemos que la parte real de un complejo se representa en el eje de las X). Por tanto: $z_3 = 2(\cos 180^o + i\text{sen}180^o)$.

$\circ$ el módulo de un imaginario puro es el número que multiplica a la i (siempre con signo positivo aunque sea negativo), y sólo hay dos posibles argumentos: 90^o si es positivo y 270^o si es negativo (pues recordemos que la parte imaginaria de un complejo se representa en el eje de las Y). Por tanto: $z_3 = \sqrt{3}(\cos 90^o + i\mathrm{sen}90^o)$.

►Ejemplo: pasar a forma binómica el complejo en forma trigonométrica $5(\cos 45^o + i\mathrm{sen}45^o)$

Basta operar: $5(\cos 45^o + i\mathrm{sen}45^o) = 5(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

▽ *Operaciones con complejos en forma trigonométrica*

La forma trigonométrica es muy útil para multiplicar, dividir, elevar a potencia y sacar raíces de complejos.

♢ El producto de dos complejos es un nuevo complejo que tiene por módulos el producto de los módulos, y por argumento, la suma de los argumentos (si sumados pasan de 360^o, buscamos el ángulo correspondiente menor de 360^o eliminando circunferencias completas: por ejemplo, 375^o es una circunferencia completa más 15^o por tanto, 375^o es lo mismo que 15^o).

♢ El cociente de dos complejos es un nuevo complejo que tiene por módulos el cociente de los módulos, y por argumento, la diferencia de los argumentos (si al restarlos da un valor negativo, pasarlo a positivo sumando 360^o (si tras sumar 360^o sigue dando negativo, volvemos a sumar esa cantidad —todo esto se basa en que los ángulos pueden contarse en el círculo de referencia en sentido contrario al habitual haciéndolos negativos; por ejemplo, puede hablarse de -10^o, pero llegamos a un punto en la circunferencia que equivale a 350^o; de ahí que para pasar un ángulo negativo a positivo lo mejor sea sumar 360^o; en el caso de este último ejemplo: $-10^o + 360^o = 350^o$).

♢ Un complejo elevado a cierta potencia da como resultado otro cuyo módulo es el del primero elevado a esa potencia, y su argumento es el del primer complejo multiplicado por el exponente de esa potencia.

♢ La raíz de un complejo es otro cuyo módulo es la raíz del primero, y cuyo argumento, β, se calcula por la fórmula: $\beta = \frac{\alpha + 360k}{n}$, donde α es el módulo del complejo al que le estamos sacando la raíz, n es el índice de la raíz y k es un número entero que va desde 0 a $n-1$, lo cual quiere decir que la raíz n de un complejo tiene n soluciones, una por cada valor de k tomado. (Nota: si expresamos los ángulos en radianes, la fórmula mencionada es: .$\beta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$).

►Ejemplos. Sean los complejos $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225^o + isen225^o)$ y $z_2 = \sqrt{10}(\cos 341.57^o + i\mathrm{sen}341.57^o)$ y . Calcular: $z_1 \cdot z_2$,

$z_1/\ z_2, \qquad z_1^4, \qquad \sqrt[3]{z_1}$

$z_1{\cdot}z_2 = 2\sqrt{2}\sqrt{10}(\cos(225^o{+}341.57^o){+}i\text{sen}(225^o{+}341.57^o)) = 4\sqrt{5}(\cos 566.57^o+ i\text{sen}566.57^o) = 4\sqrt{5}(\cos 206.57^o + i\text{sen}206.57^o)$

$z_1/z_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}(\cos(225^o{-}341.57^o){+}i\text{sen}(225^o{-}341.57^o)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}(\cos(-116.57^o)+ i\text{sen}(-116.57^o)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}(\cos 243.43^o + i\text{sen}243.43^o)$

$z_1^4 = (2\sqrt{2})^4(\cos(4\cdot 225^o) + i\text{sen}(4\cdot 225^o)) = 64(\cos 900^o + i\text{sen}900^o) = 64(\cos 180^o + i\text{sen}180^o)$

$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}(\cos\frac{180^o+360k}{3} + i\text{sen}\frac{180^o+360k}{3})$ Las tres soluciones se obtienen dando a k los valores de $0, 1, 2,$ respectivamente.

3 Temas 13 y 15: Vectores

Vectores, módulo de un vector, suma y resta, multiplicación por un escalar, producto escalar, ángulo entre dos vectores, producto vectorial, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base y sistema de generadores

3.0.3 ▲ Conceptos

▽ Un vector es un segmento orientado. En la figura siguiente se representan varios vectores. Todos ellos consisten en segmentos orientados que parten del centro de coordenadas; se conocen como **vectores libres**, y son los que se tratan en este curso.

dtbpF245pt169.375pt0ptFigure

Cada vector se simboliza por las coordenadas cartesianas de su extremo. Así, el vector $\overrightarrow{v}$ de la figura puede representarse por el par de coordenadas $(4,2)$.

En el caso de que nos den un vector indicando las coordenadas de su origen y su extremo lo reduciremos siempre a su vector libre correspondiente. El procedimiento para ello es restar las coordenadas del extremo menos la del origen.

►Ejemplo: ¿cuál es el vector libre cuyas coordenadas del extremo son $(2,3)$ y las del origen $(-2,3)$. Sol.: la primera coordenada es $2-(-2)=4$, y la segunda es $3-3=0$. El vector libre es, pues, el $(4,0)$ y con éste es con el que normalmente se trabajará.

$\triangledown$ **Vectores en el espacio**: los vectores puestos hasta ahora como ejemplo están en el plano, pero también podemos considerar vectores en el espacio "normal" (es decir, el de tres dimensiones, simbolizado habitualmente por R^3) o espacios de más dimensiones (R^4, R^5...). *Por cada dimensión se necesita una coordenada para definir al vector.* En el plano, la primera coordenada se refiere a la x del sistema de coordenadas cartesiano; y la segunda a la y. En el espacio normal es necesaria una tercera coordenada, llamada z, y así sucesivamente. Un vector en R^3 puede ser, por ejemplo, el $(3, -3, \frac{1}{2})$.

$\triangledown$ **Dirección** de un vector es la recta sobre la que se apoya el vector; cada dirección tiene dos **sentidos** (que vienen indicados por la punta de flecha de cada vector). Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{t}$ de la figura tienen igual dirección pero distinto sentido.

$\triangledown$ **Módulo** de un vector es la longitud de la flecha que lo representa, medida en la escala del sistema de coordenadas correspondiente. Observando la figura anterior es fácil deducir, aplicando el teorema de Pitágoras, que el módulo del vector $\overrightarrow{v}$ es: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$. En general, el módulo de un vector $\overrightarrow{v}$ en el plano cuyas coordenadas sean (v_1, v_2) viene dado por la expresión:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

El modulo de un vector $\overrightarrow{v}$ en el espacio cuyas coordenadas sean (v_1, v_2, v_3) se calculará por :

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

El módulo de un vector siempre es positivo, pues es la medida de una longitud. Así, el módulo del vector $\overrightarrow{t}$ es $\sqrt{20}$ (compruébese).

$\triangledown$ **Vectores opuestos**: dos vectores con el mismo módulo, igual dirección pero diferentes sentidos se dice que son opuestos. En la figura anterior, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{t}$ son opuestos. En la práctica, dado cualquier vector, su opuesto es otro que tiene las mismas componentes pero cambiadas de signo. Así por ejemplo, el opuesto de $(-2, 3)$ es $(2, -3)$ y el opuesto de $(-1, 0, 1)$ es el $(1, 0, -1)$.

$\triangledown$ **Vectores unitarios**: son aquéllos cuyo módulo es 1. Por ejemplo, los vectores $(0, 1)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ y $(0, 0, 1)$ son unitarios (compruébese).

3.0.4 ▲ Operaciones con vectores

▽ **Suma**:(o resta): basta sumar (o restar) las componentes respectivas entre sí.

►Ejemplo: Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (-1, -3)$; $\overrightarrow{v} = (2, -5)$; sumarlos y restar $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$:

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (-1, -3) + (2, -5) = (1, -8)$
$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (-1, -3) - (2, -5) = (-3, 2)$
$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = (2, -5) - (-1, -3) = (3, -2)$

Geométricamente dos vectores pueden sumarse contruyendo con ellos un paralelogramo como indica la figura siguiente. La resta puede considerarse una suma; efectivamente, la resta de dos vectores $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ es lo mismo que la suma $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{w})$ (es decir, la suma de $\overrightarrow{v}$ con el opuesto de $\overrightarrow{w}$).

dtbpF2.514in2.3756in0ptfp7p9m01.wmf

▽ **Multiplicación por un escalar** (un número real): basta multiplicar el escalar por cada una de las componentes del vector. Por ejemplo, $3(2, -5) = (6, -15)$.

►Ejemplo: Efectuar la siguiente operación: $a(2, -5, 1) - 3\,(2, -1, 1)$
Sol.:.$a(2, -5, 1) - 3\,(2, -1, 1) = (2a, -5a, a) - (6, -3, 3) = 2a-6, -5a+3, a-3)$

▽ **Producto escalar**: Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, siendo sus módulos, respectivamente $|\overrightarrow{u}|$ y $|\overrightarrow{v}|$ y siendo α el ángulo que forman ambos. El producto escalar de estos dos vectores, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, *da un escalar*, y puede (y en ocasiones *debe*) calcularse por dos métodos diferentes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos\alpha \end{aligned}$$

De las dos expresiones anteriores puede deducirse, igualando los segundos miembros y despejando $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|}$$

Lo que permite conocer el ángulo α formado por dos vectores.

►Ejemplo: ¿Qué ángulo forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$?
$\cos\alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0}{1\cdot 1} = 1$; por lo tanto el ángulo es 90^o.

Los dos vectores del ejemplo anterior, junto al vector $(0,0,1)$, forman la llamada base canónica del espacio (más tarde se definirá qué es una base). Como puede comprobarse fácilmente, los tres son unitarios. Se les suele llamar, respectivamente, $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$.

∇ **Producto vectorial**: Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. y sean $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ los vectores que forman la base canónica del espacio, definidos en el ejemplo anterior. El producto vectorial de estos dos vectores, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, *da un vector* que se obtiene resolviendo el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

►Ejemplo: Calcular el producto vectorial de los vectores: $(1,-2,1)$ y $(3,3,1)$:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$$

Como se observa, se obtiene un vector, *aunque presentado en forma de suma de tres vectores.* Para ponerlo en coordenadas cartesianas podemos sustituir los vectores unitarios $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ por sus coordenadas cartesianas:

$-5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k} = -5(1,0,0) + 2(0,1,0) + 9(0,0,1) = (-5,2,9)$

Como se puede observar, *las coordenadas cartesianas de un vector son, simplemente, los números que multiplican a los vectores de la base canónica* $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

►Ejemplos: Expresar en coordenadas cartesianas el vector $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$. Sol.: $\overrightarrow{u} = (2,-1,-3)$

Expresar usando la base canónica el vector $\overrightarrow{v} = (1,0,-2)$ Sol.: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{k}$.

⊪ Interpretación geométrica del producto vectorial:

El vector producto vectorial tiene siempre como dirección la perpendicular al plano que forman los dos vectores que se están multiplicando, y su sentido lo indica la llamada *ley del sacacorchos*: es el que seguiría un sacacorchos que gira para llevar el primer vector sobre el segundo por el camino más corto, según se observa en la figura:

dtbpF4.766in2.4379in0ptfp7vvr02.wmf

Otra propiedad interesante del producto vectorial es que el módulo del vector producto (el llamado $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ en la figura anterior) coincide con el área del paralelogramo formado por los vectores que se están multiplicando (paralelogramo $OABC$). Esto es útil, por ejemplo, para calcular el área del triángulo formado por dos vectores (triángulo OAC), que será la mitad de la del paralelogramo.

►Ejemplo: Calcular el área del triángulo delimitado por los puntos del espacio $(2, 1, 3)$, $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 1)$

⊪De lo dicho debe quedar claro que *el producto vectorial no es conmutativo*; concretamente, se dice que es **anticonmutativo**, porque si el producto $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ da (digamos) el vector $\overrightarrow{w}$ el producto $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ dará $-\overrightarrow{w}$, es decir, el opuesto.

3.0.5 ▲ Base de un espacio vectorial

▽ **Combinación lineal de vectores**: una combinación lineal de dos o más vectores es la suma de esos vectores previamente multiplicados por un número (que puede ser el 1 y que puede ser negativo). Así, dado los vectores (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3), una combinación lineal de ambos es:

$$a(u_1, u_2, u_3) + b(v_1, v_2, v_3)$$

donde a y b pueden ser positivos o negativos y valer cualquier número real, incluido el 1.

►Ejemplo: Hallar dos combinaciones lineales cualesquiera de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(0, 2, 2)$. Sol.: una puede ser $(1, 2, -1) + (0, 2, 2) = (1, 4, 1)$; otra: $3(1, 2, -1) - (0, 2, 2) = (3, 4, -5)$... Se dice que *el vector* $(1, 4, 1)$ *es una combinación lineal de los vectores* $(1, 2, -1)$ y $(0, 2, 2)$; y el vector $(3, 4, -5)$ es *otra* combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(0, 2, 2)$.

Cuando tenemos tres vectores y uno de ellos es combinación lineal de los otros dos, el determinante formado con los tres siempre es cero. Lo comprobaremos con uno de los ejemplos anteriores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Se dice entonces que esos tres vectores **no forman una base**.

$\triangledown$ **Base y sistema de generadores**: una base vectorial es un conjunto de vectores a partir de la cual, por combinación lineal, se puede construir cualquier otro.

Para empezar, tres vectores en el espacio de tres dimensiones, R^3, forman una base cuando el determinante formado con los tres es distinto de cero. Los tres vectores del determinante anterior no forman una base, pero sí la forman los siguientes: $(1,-2,-2),(3,0,1),(1,1,5)$ ya que su determinante es distinto de cero:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \neq 0 \ \ (concretamente\ = 21)$$

(Inversamente, siempre que el determinante formado con tres vectores sea distinto de cero *puede afirmarse* que no se puede encontrar una combinación lineal entre los tres, es decir, que el primero no es combinación lineal del segundo y el tercero, ni el segundo lo es del primero y el tercero, etc.).

Otra forma, más elaborada, de comprobar que tres vectores en el espacio tridimensional forman una base es resolver con ellos un sistema como el siguiente (que ejemplificamos con los tres vectores anteriores). Si el sistema (homogéneo) resulta ser compatible y determinado, y por tanto con solución única $\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$, entonces los tres vectores forman una base:

$$\lambda(1,-2,-2) + \mu(3,0,1) + \nu(1,1,5) = (0,0,0)$$

Haciendo operaciones:

$(\lambda,-2\lambda,-2\lambda)+(3\mu,0,\mu)+(\nu,\nu,5\nu) = (0,0,0);$ $(\lambda+3\mu+\nu,-2\lambda+\nu,-2\lambda+\mu+5\nu) = (0,0,0)$

de donde puede plantearse el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu + \nu &= 0 \\ -2\lambda + \nu &= 0 \\ -2\lambda + \mu + 5\nu &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es: $\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0$.

En general, *tres vectores en el espacio tridimensional, R^3, cuyo determinante es distinto de cero se dice que son linealmente independientes y forman una base.*

En el plano, R^2, *dos*vectores cuyo determinante es distinto de cero son linealmente independientes y forman una base.

Generalizando, en un espacio n-dimensional, R^n, n vectores cuyo determinante sea distinto de cero forman una base (y son linealmente independientes).

Otra cosa a tener en cuenta es que cada espacio puede tener *infinitas bases*.

Debe quedar muy claro que una base la forman tantos vectores como dimensiones tenga el espacio vectorial que tratemos: 2 para el plano, 3 para el espacio tridimensional, cuatro para el tetradimensional, etc. Por ello, nunca podremos decir que *cuatro* vectores forman una base en el espacio trimensional, o que *tres* vectores forman una base en el plano. Dados cuatro vectores en el espacio trimensional, si tres de ellos forman una base (es decir, son linealmente independientes entre sí), el cuatro será necesariamente dependiente de estos tres, es decir, podrá escribirse como una combinación lineal de estos tres. Por ejemplo, sean los tres vectores $(1, -2, -2), (3, 0, 1), (1, 1, 5),$ que hemos demostrado más arriba que forman una base; un vector *cualquiera*, por ejemplo, el $(5, 5, 5)$ *se puede* construir utilizando la base, mediante una combinación lineal:

$$(5, 5, 5) = a(1, -2, -2) + b(3, 0, 1) + c(1, 1, 5)$$

Operando y planteando un sistema de ecuaciones de tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 5 \\ -2a + c &= 5 \\ -2a + b + 5c &= 5 \end{aligned}$$

resulta $a = -\frac{20}{7}, b = \frac{20}{7}, c = -\frac{5}{7}$. Es decir, hemos demostrado que el vector $(5, 5, 5)$ puede construirse a partir de la base dada. Ese es el sentido de **base**: un conjunto de vectores que permite construir cualquier otro. Sin embargo, los vectores $(1, 2, -1), (0, 2, 2), (1, 4, 1),$ cuyo determinante es cero, como vimos más arriba, no forman una base, y el vector $(5, 5, 5)$ no podrá construirse como combinación lineal de ellos. Tratemos de hacerlo:

$$(5, 5, 5) = a(1, 2, -1) + b(0, 2, 2) + c(1, 4, 1)$$

Con esa expresión planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} a + c &= 5 \\ 2a + 2b + 4c &= 5 \\ -a + 2b + c &= 5 \end{aligned}$$

que es incompatible (es decir, no tiene solución).

A veces es conveniente considerar una base y uno o más vectores que sean combinación lineal de los que forman la base. Al conjunto se le llama **sistema de generadores**. Por ejemplo, forman un sistema de generadores los vectores $(1, -2, -2), (3, 0, 1), (1, 1, 5), (5, 5, 5)$, ya que los tres primeros forman una base. Es decir, un sistema de generadores puede estar formado por un número indefinido de vectores, pero un número determinado de ellos (según la dimensión del espacio que consideremos), debe formar una base.

3.0.6 ▲ Cambio de base

La base más sencilla en el espacio tridimensional es la formada por los vectores unitarios $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, definidos anteriormente. Se llama base canónica: $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. Cuando nos dan las coordenadas de un vector, por ejemplo $\overrightarrow{v} = (3, 1, -7)$ ello significa que se puede construir mediante la base canónica, es decir, como combinación lineal de $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, en este caso, concretamente, así:

$$\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$$

Esto quiere decir que el vector $\overrightarrow{v}$ se puede construir multiplicando el $\overrightarrow{i}$ por 3, sumándole el $\overrightarrow{j}$ y, al vector resultante de esta suma, restándole $7\overrightarrow{k}$.

Ahora bien, podemos plantearnos si el vector $\overrightarrow{v}$ podemos expresarlo mediante otra suma de tres vectores que no sean los canónicos. Por supuesto que sí, siempre que constituyan una base. Supongamos que los vectores $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}$ forman una base distinta de la canónica. Entonces, el vector $\overrightarrow{v}$ anterior, puede expresarse *también* así:

$$\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{r} + b\overrightarrow{s} + c\overrightarrow{t}$$

y de la misma manera que $(3,1,-7)$ son las coordenadas de $\overrightarrow{v}$ en base canónica, (a,b,c) se dice que son las coordenadas de $\overrightarrow{v}$ en la base formada por los vectores $\overrightarrow{r},\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}$. ¿Cómo calcular los valores de a,b y c? Resolveremos el problema con un ejemplo concreto y luego daremos una fórmula general. Supongamos que $\overrightarrow{r}=(2,0,1)$, $\overrightarrow{s}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{t}=(0,1,3)$. Entonces podemos escribir:

$$\overrightarrow{v}=a(2,0,1)+b(-2,-1,-1)+c(0,1,3)$$

Como *también* se cumple que: $\overrightarrow{v}=3(1,0,0)+(0,1,0)-7(0,0,1)=(3,1-7)$ podemos igualar:

$$a(2,0,1)+b(-2,-1,-1)+c(0,1,3)=(3,1-7)$$

operando: $(2a-2b,-b+c,a-b+3c)=(3,1,-7)$
con lo que podemos plantear el sistema:

$$\begin{aligned} 2a-2b &= 3 \\ -b+c &= 1 \\ a-b+3c &= -7 \end{aligned}$$

cuya solución nos da las nuevas coordenadas de $\overrightarrow{v}$ en la nueva base: $(-\frac{7}{3},-\frac{23}{6},-\frac{17}{6})$

En general, podemos emplear la siguiente fórmula. Sean (x,y,z) las coordenadas en base canónica de un determinado vector $\overrightarrow{v}$; la relación que existe entre estas coordenadas y las coordenadas (a,b,c) del mismo vector expresadas en la base $\overrightarrow{r}=(r_1,r_2,r_3)$, $\overrightarrow{s}=(s_1,s_2,s_3)$, $\overrightarrow{t}=(t_1,t_2,t_3)$ es:

$$(x,y,z)=a(r_1,r_2,r_3)+b(s_1,s_2,s_3)+c(t_1,t_2,t_3)$$

►Ejemplo: Las coordenadas de un vector en la base $(3,3,3),(1,2,3),(0,0,-1)$ son $(1,1,2)$ ¿cuáles son sus coordenadas en base canónica?

En la expresión anterior, las incógnitas no son ahora a,b y c, sino x,y,y z:

$$(x,y,z)=1(3,3,3)+1(1,2,3)+2(0,0,-1)$$

De aquí, $x = 4$, $y = 5$, $z = 4$ es decir,las coordenadas del vector en base canónica son $(4, 5, 4)$.

▽ **Interpretación geométrica del cambio de base**

En la siguiente figura puede interpretarse geométricamente el significado de un cambio de base:

dtbpF2.444in2.4388in0ptfpao5t01.wmf

$\overrightarrow{v}$ es un vector en el plano cuyas coordenadas (como se observa fácilmente), son $(7, 5)$, lo que, según lo visto, puede interpretarse de dos maneras totalmente equivalentes: su extremo está en el punto $(7, 5)$ del sistema de coordenadas cartesiano, o bien el vector $\overrightarrow{v}$ puede expresarse como la suma de 7 veces el vector unitario $\overrightarrow{i}$ más 5 veces el vector unitario $\overrightarrow{j}$ (ambos forman la base canónica), es decir:

$$\overrightarrow{v} = 7\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$$

Si queremos averiguar cuáles son sus coordenadas en la base $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$, en realidad lo que nos preguntamos es por qué numeros a y b hay que multiplicar $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{s}$ para que nos den $\overrightarrow{v}$. Empleamos la fórmula vista anteriormente, aplicada ahora al plano:

$$(x, y) = a(r_1, r_2) + b(s_1, s_2)$$

es decir: $(7, 5) = a(5, 1) + b(1, 4)$ donde $(5, 1)$ y $(1, 4)$ son las cordenadas de los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{s}$, como fácilmente se deduce de la figura. Planteando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 7 &= 5a + b \\ 5 &= a + 4b \end{aligned}$$

encontramos la solución: $a = \frac{23}{19}$, $b = \frac{18}{19}$, lo que quiere decir que hay que multiplicar el vector $\overrightarrow{s}$ por $\frac{18}{19}$ (es decir, aproximadamente 0.947 (casi 1), como puede verse en la figura) y el $\overrightarrow{r}$ por aproximadamente 1. 210, y luego sumar, para obtener el vector $\overrightarrow{v}$.

4 Tema 16: La recta

Ecuación de la recta, vector de dirección, ángulo entre rectas, distancia entre una recta y un punto, posición relativa de dos rectas,

4.0.7 ▲ La ecuación $y = mx + n$

▽ Consideremos la expresión general $y = mx + n.$ y dos ejemplos particulares de la misma: $y = \frac{1}{5}x - 4.$ $y = -3x + 2.$ Si en estas dos últimas damos valores a x y calculamos los correspondientes de y (con tres valores es suficiente) y representamos en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos obtenidos (con tres es suficiente), podemos comprobar que se forman sendas rectas:

dtbpF2.4569in2.4379in0ptfpfg4602.wmf

En la expresión $y = mx + n.$ el número real m se llama "*pendiente* de la recta", y n es la llamada "*ordenada en el origen*". La pendiente de la recta nos informa de su grado de inclinación; mirando la recta de izquierda a derecha, si "va subiendo" tiene pendiente positiva; si "va bajando", negativa, y si es paralela al eje de las Y (es decir, ni sube ni baja) vale cero. La ordenada en el origen es el valor de la coordenada y en el corte de la recta con el eje de las Y.

En el gráfico anterior, una de las rectas tiene pendiente positiva ($m = \frac{1}{5}$) y corta al eje de las Y en $y = -4$; la otra tiene pendiente negativa ($m = -3$) y corta al eje de las Y en $y = 2$. Un ejemplo de recta con pendiente cero es: $y = 6$ (esta recta es paralela al eje de las X y corta al eje de las Y en $y = 6$)

▽ Un concepto muy importante de una recta es su llamado *vector de dirección*, que es *cualquier vector que se apoye en la recta* (una recta tiene, pues, *infinitos vectores de dirección ,pero todos ellos tienen sus coordenadas proporcionales*) Dada la ecuación general de la recta $y = mx + n$ (ecuación que se llama *implícita*) la forma más fácil de obtener uno de sus vectores directores es tomando el número que multiplica a y (que si la ecuación está expresada en esta forma siempre es 1) y el que multiplica a x, es decir: $(1, m)$. (Debe notarse que ésta es simplemente una *regla* para calcular el vector director, y que la coordenada x del vetor director es 1 y la coordenada y es m, aunque se hayan tomado "al revés").

Los vectores de dirección de las rectas anteriores son:

recta $y = \frac{1}{5}x - 4$; su vector de dirección es: $(1, \frac{1}{5})$ [o cualquier múltiplo como $(5, 1)$, $(10, 2)$, etc.]

recta $y = -3x + 2$; su vector de dirección es $(1, -3)$ [o cualquier múltiplo como $(-1, 3)$, $(\frac{1}{3}, -1)$, etc.]

Otro ejemplo: un vector de dirección de la recta $y = 4$ (que es como escribir $y = 0x + 4$)es el $(1, 0)$

Como m es la pendiente, puede memorizarse lo siguiente:

- un vector de dirección de una recta tiene como primera coordenada 1 y como segunda la pendiente (m); es decir $(1, m)$

4.0.8 ▲ La ecuación $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$ (ecuación paramétrica)

▽ Otra forma de expresar la ecuación de una recta es la siguiente:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$$

Mediante esta ecuación se pueden calcular también todos los puntos que se quiera (x, y) por los que pasa la recta. Sólo hay que conocer uno de los puntos por los que pasa, de coordenadas (p_1, p_2), y el vector director, (v_1, v_2). t es un parámetro (es decir, se le puede dar cualquier valor).

Sea, por ejemplo, la ecuación paramétrica $(x, y) = (-1, 2) + t(2, 0)$. Podemos calcular puntos por los que pasa dando valores arbitrarios a t. Así, si $t = 1$ se obtiene el punto $(x, y) = (-1, 2) + t(2, 0) = = (-1, 2) + 1(2, 0) = (-1, 2) + (2, 0) = (1, 2)$. Otro punto podemos obtenerlo, por ejemplo, haciendo $t = 2$: en ese caso $(x, y) = (3, 2)$. Y así podemos obtener *los infinitos* puntos de la recta.

La ecuación paramétrica suele expresarse más bien como dos ecuaciones, ya que $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \end{aligned}$$

4.0.9 ▲ Problemas típicos

▽ **Cómo pasar de paramétricas a implícita y viceversa**

Para pasar de paramétricas a implícita basta *eliminar la* t por cualquier método (normalmente despejando t en una ecuación y sustituyendo en la otra o, en caso de que sea fácil, por eliminación directa de la t aplicando el sistema de reducción)

►Ejemplo: Dadas las ecuaciones paramétricas

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 2t \\
y &= 3 + 4t
\end{aligned}
$$

obtener la implícita. Despejando t en la primera: $t = \frac{x-1}{2}$, y sustituyendo ese valor en la segunda:

$y = 3 + 4\left(\frac{x-1}{2}\right)$, es decir: $y = 2x + 1$ También se puede hacer por reducción, multiplicando la primera por -2 y sumando a la segunda el resultado.

Para pasar de implícitas a paramétricas basta hacer $x = t$ (y esa es la primera paramétrica) y sustituir en la ecuación.(con lo que se obtiene la segunda paramétrica)

►Ejemplo: Pasar a paramétricas la ecuación implícita $y = -2x + 4$. Las paramétricas son:

$$
\begin{aligned}
x &= t \\
y &= -2t + 4
\end{aligned}
$$

Hay que tener en cuenta que una recta dada tiene infinitas ecuaciones paramétricas. Para obtener otra se da a x cualquier valor que esté en función del parámetro t y se sustituye ese valor en la ecuación. Por ejemplo, otras paramétricas de la ecuación implícita anterior son:

$$
\begin{aligned}
x &= t + 1 \\
y &= -2t + 2
\end{aligned}
$$

¿Cómo comprobar si dos pares de ecuaciones paramétricas como los dos anteriores corresponden a la misma recta? *La forma más fácil es convertir ambos paraes de paramétricas en las implícitas correspondientes y ver si coinciden.*

$\triangledown$ **Cómo saber si un punto está contenido en una recta**

Si la recta está en implícitas basta sustituir la coordenada x del punto por la variable x de la ecuación y la coordenada y del punto por la variable y de la ecuación; si la igualdad es válida, el punto está contenido en la recta.

▶Ejemplo: El punto $(2,3)$ ¿está contenido en la recta $y = x + 1$? Sustituyendo: $3 = 2 + 1;$ $3 = 3$ Por tanto sí está en la recta.

El punto $(-1,5)$ ¿está contenido en la recta $y = x + 1$? Sustituyendo: $5 = -1 + 1$ $5 = 0$ Como esa igualdad no es válida, el punto no está contenido en la recta.

Si la recta está en paramétricas conviene pasarla primero a implícita.

▽ **Cómo conocer la ecuación implícita de una recta que pasa por un punto conocido $P(p_1, p_2)$ y cuyo vector de dirección (v_1, v_2) también se conoce**

Resolviendo la siguiente igualdad y despejando la y:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 \\ y - p_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

▶Ejemplo: una recta pasa por el punto $(1,-1)$ y su vector de dirección es $(3,2)$; ¿cuál es su ecuación implícita?

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 3 \\ y + 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, resolviendo el determinante: $(x-1)2 - (y+1)3 = 0$ de donde $2x - 2 - 3y - 3 = 0$ y por tanto: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

▽ **Cómo conocer la ecuación implícita de una recta que pasa por dos puntos conocidos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$**

Restando las coordenadas de ambos puntos una a una (en cualquier orden) se obtiene un vector de dirección; después éste se usa junto a cualquiera para aplicar el método anterior.

▶Ejemplo: una recta pasa por los puntos $(2,-2)$ y $(3,0)$; ¿cuál es su ecuación implícita?

Un vector de dirección es el $(2-3, -2-0) = (-1,-2)$ Con éste vector director y *cualquiera* de los puntos se aplica el método anterior.

▽ **Cómo conocer la ecuación implícita de una recta que pasa por un punto conocido $P(p_1, p_2)$ y se conoce su pendiente m**

Mediante la pendiente puede calcularse un vector de dirección, que será $(1, m)$. Usándolo junto al punto conocido y aplicando el método visto podemos conocer la ecuación.

▶Ejemplo: una recta pasa por el punto $(\frac{2}{5}, -4)$ y tiene por pendiente -10; ¿cuál es su ecuación implícita?

Un vector de dirección es el $(1,-10)$. Con éste y el punto se sabe la ecuación aplicando el método visto.

Otra forma: La ecuación de la recta será del tipo $y=-10x+n$ Para calcular n se sutituyen las variables x y y por el punto por el que se sabe que pasa la recta, que en este caso es el $(\frac{2}{5},-4)$:

$-4 = -10(\frac{2}{5})+n \Rightarrow n=0$ Por tanto, la ecuación de la recta es $y=-10x$

▽ **Cómo saber si dos rectas son paralelas o se cortan**

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente; si no, se cortan. En el caso de que tengan pendientes inversas y opuestas, son perpendiculares.

►Ejemplo: las rectas $y=2x-1$ y $y=2x+6$ son paralelas (la pendiente de ambas es 2); las rectas $y=2x-1$ y $y=-\frac{1}{2}x+2$ son perpendiculares; y las rectas $y=2x-1$ y $y=-2x-1$ no son ni paralelas ni perpendiculares

▽ **Cómo saber el valor del ángulo que forman dos rectas**

Salvo en el caso en que sean paralelas o perpendiculares, en que el valor del ángulo es trivial (0 y 90 grados, respectivamente) para calcular el ángulo se efectúa el producto escalar de los vectores de dirección de ambas rectas; de este modo puede saberse el $\cos\alpha$ y de ahí el valor de α.

►Ejemplo: ¿qué ángulo forman las rectas $y=2x-1$ y $y=-\frac{1}{2}x+2$? Sus vectores directores son, respectivamente, $(1,2)$ y $(1,-\frac{1}{2})$. Su producto escalar es: $(1,2)\cdot(1,-\frac{1}{2})=0$. Como el producto escalar también se calcula por: $\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}\cos\alpha$ (siendo $\sqrt{5}$ y $\sqrt{\frac{5}{4}}$ los módulos de ambos vectores) y ese producto debe dar 0 en este caso, es decir:

$$\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}\cos\alpha=0$$

de ahí se concluye que $\cos\alpha=0$ y por tanto $\alpha=90^o$ (rctas perpendiculares)

▽ **Caso particular de ecuación de una rcta:** $x=a$

Un tipo de rectas son especiales; son las del tipo $x=a$ siendo a un número real cualquiera. Esas rectas son paralelas al eje de las Y y cortan al de las X en el punto $x=a$. Su vector de dirección es el $(0,1)$ (es decir, el vector unitario canónico $\overrightarrow{j}$). La pendiente tiende a infinito.

Semejantes a estas son las del tipo $y=b$, aunque estas últimas pueden considerarse normales. Su pendiente es 0 (seguir la norma general de que la pendiente es el número que multiplica a la x cuando la y está completamente despejada) y por lo tanto su vector de dirección es el $(1,0)$, es decir, el vector unitario $\overrightarrow{i}$. Lógicamente on paralelas al eje X y cortan al Y en $y = b$.

▽ **Punto de corte de dos rectas**

Se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones planteado con ambas. Si el sistema no tienen solución es que las rectas no se cortan (son paralelas); si tiene infinitas soluciones es que son la misma.

►Ejemplo: ¿en qué punto se cortan las rectas $y = 2x+1$ y $y = -3x$.

Planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

cuya solución, y por tanto el punto de corte, es: $(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$

NOTA:

En estos apuntes (esta es la tercera parte) se resume y adapta el contenido del libro oficial de Matemáticas Especiales del Curso de Acceso Directo de la UNED. La experiencia demuestra que el libro es poco asequible para los alumnos, de modo que se ha tratado de hacer unos apuntes comprensibles y, sobre todo, orientados a aprobar el examen, pues se ha tenido en cuenta lo que habitualmente es materia de examen.

Las personas que hayan encargado a la editorial Treveris este material impreso recibirán gratis por correo electrónico una nueva colección de problemas que se está redactando durante este curso escolar (2000-2001). Son problemas ordenados desde "dificultad cero" hasta el nivel requerido, de modo que un problema ayuda a resolver el siguiente en la lista. El número total de problemas de esta nueva colección superará el millar, aunque algunos son de resolución inmediata. Las personas registradas también recibirán un segundo material: la solución a los problemas de clase, que también se está redactando este año, a medida que vaya progresando el curso. Finalmente, los registrados tendrán derecho a una tutoría personalizada a través de correo electrónico en

matematicas@treveris.es

donde podrán consultar todo tipo de dudas que surjan.

1 Temas 18, 19 y 22: Sucesiones, límite de sucesiones; introducción al límite de funciones

Sucesiones, límite de sucesiones, el número *sle*, propiedades de los límites; límite de funciones

1.0.1 ▲ Sucesiones y límite de sucesiones

▽ A veces las **sucesiones** de números tienen una ley de formación. Por ejemplo, en la sucesión $1, 4, 9, 16, 25, 36...$ cada término es el cuadrado del lugar que ocupa. Se dice que **término general** a_n de esa sucesión es $a_n = n^2$. El término general de una sucesión nos permite calcular cualquier término de ésta sabiendo el lugar que ocupa.

►Ejemplo: Sea la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{n}{n-1}$; ¿cuál es el quinto término?:Basta sustituir n por $5:$ $a_5 = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}$

▽ En ocasiones queremos saber a cuánto se acerca el término de la sucesión cuando n se hace tan grande como queramos, es decir, cuando n *tiende a infinito.* Por ejemplo, en la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ a medida que vamos aumentando n nos vamos acercando a 0. Efectivamente, los primeros términos de esa sucesión son: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}...,$ que escritos en números decimales son: $1.000, 0.500, 0.333, 0.250, 0.200, 0.166, 0.143, 0.125...$ Como se ve, a mdida que avanzamos en la serie nos vamos acercando más a cero (el término 1000, por ejemplo, ya vale 0.001). Se dice que **el límite** *de la sucesión* $a_n = \frac{1}{n}$ *es cero*, o bien, que *la sucesión* $a_n = \frac{1}{n}$ *tiene por límite cero*, o que *la sucesión* $a_n = \frac{1}{n}$ *tiende a cero cuando* n *tiende a infinito.* Todo ello se expresa simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

▽ **Propiedades**: las propiedades más importantes de los límites son que el límite de una suma (o resta) es la suma (o resta) de los límites; que el límite de un producto (o cociente) es el producto (o cociente) de los límites y que el límite de una potencia es el límite de la base elevado al límite del exponente.

▽ **Cálculos típicos de límites**: veamos algunos ejemplos típicos de problemas de límites, y cómo se resuelven:

► $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n}{2n^3-1}$ Se trata del límite del cociente de dos polinomios. Al sustituir n por ∞ nos queda $\frac{\infty}{\infty}$, valor que es indeterminado. Para resolver la indeterminación se divide arriba y abajo por la potencia más alta de n (esté en uno u otro polinomio), aquí es n^3 :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n}{2n^3-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{2n}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$ (resultado al que hemos llegado teniendo en cuenta que el límite de $\frac{2}{n^2}$ y de es $\frac{1}{n^3}$ es 0 (pues estamos dividiendo números finitos entre ∞)

En la práctica este tipo de problemas se resuelve así: si el polinomio numerador tiene mayor grado que el denominador, el límite es ∞; si es al revés, el límite es 0, y si ambos tienen el mismo grado, el resultado es l cociente entre los coeficientes de los términos de grado más alto arriba y abajo.

► $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+n+1}$ Al sustituir n por ∞ nos queda $\infty - \infty$, valor que es indeterminado. Para resolver este tipo de indeterminaciones es útil multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión dada:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+n+1}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3-\left(n^2+n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n-4}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{n}{n}-\frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(nótese que en la segunda parte del problema nos ha quedado una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que hemos aplicado el método del ejemplo anterior, que es dividir arriba y abajo por la potencia más alta; ahora bien, la potencia más alta abajo es n (no n^2, porque al efectuar la raíz obtendríamos n), pero al dividir la raíz por n, este valor entra dentro de ella como n^2 (de la misma manera que, por ejemplo $\frac{\sqrt{36}}{3} = \sqrt{\frac{36}{3^2}}$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{3n}$ Este es un límite del tipo llamado "del número e". Para resolverlo hemos de saber que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. En estos problemas se trata de hacer manipulaciones algebraicas que acerquen la expresión pedida a la del número e, como se verá a continuación, y de tener en cuenta que el límite de una potencia es el límite de la base elevado al límite del exponente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\frac{2}{2}}{\frac{n^2}{2}}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{3n\cdot\left(\frac{n^2}{2}\cdot\frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{n^2}{2}\cdot\left(3n\cdot\frac{2}{n^2}\right)} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^{3n\cdot\frac{2}{n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 3n\cdot\frac{2}{n^2}} = e^0 =$$

1

1.0.2 ▲ Límite de funciones

Un concepto relacionado con el de límite de sucesiones es el de **límite de funciones.** Desde un punto de vista operativo muchos límites de funciones se resuelven por los mismos métodos que los de sucesiones. Ahora bien, al hablar de funciones tenemos que introducir el concepto de **límite lateral** y considerar que la variable x puede tender a infinito o a cualquier número real. Para que el límite exista realmente, los dos límites laterales que *cabe y deben tenerse en cuenta* (excepto cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$) deben coincidir; *caso contrario, no existe el límite.*

▶ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ Al sustituir x por 2 en la función cuyo límite estamos calculando (que es $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$) obtenemos $\frac{0}{0}$, lo que constituye también una indeperminación (como lo son asimismo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$, ya vistas anteriormente). En este caso no nos vale dividir por la potencia más alta arriba y abajo (hágase y se verá como la indeterminación persiste). En casos como éste es muy útil *primero, sacar factor común donde se pueda, y luego factorizar los polinomios.* Aquí, factorizando arriba:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} x+2$ operación que ha roto la indeterminación. Hasta ahora sólo hemos hecho manipulaciones algebraicas. A la hora de sustituir x por 2 para resolver el límite debemos considerar los llamados límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^+} x+2$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} x+2$ donde con $x \to 2^+$ queremos decir que x tiende a un valor todo lo próximo que queramos a 2 pero acercándonos por la derecha del 2 en la recta de los números reales (es decir, para fijar ideas, digamos que damos a x valores como $2.01, 2.0001, 2.0000001$,etc); y con $x \to 2^-$ queremos decir que x tiende a un valor todo lo próximo que queramos a 2 pero acercándonos por la izquierda del 2 en la recta de los números reales (es decir, para fijar ideas, digamos que damos a x valores como $1.99, 1.9999, 1.9999999$,etc.).

Tenemos, así pues:

$\lim\limits_{x\to 2^+} x+2 = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} x+2 = 4$

En este caso da igual acercarse a 2 por la derecha o por la izquierda y ambos límites laterales coinciden; en otros casos no tiene por qué ser así. Por ejemplo en:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x}$ Aquí, el límite por la derecha es: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ y el límute por la izquierda es: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$

2 Temas 20 y 21: Funciones y polinomios

Funciones, dominio, gráficas, operaciones con funciones, función inversa, funciones crecientes y decrecientes, pares e impares. Polinomios, operaciones con polinomios, raíces de un polinomio, descomposición de un polinomio en factores, descomposición de funciones racionales en fracciones simples

2.0.3 ▲ Función y polinomio

▽ Una expresión del tipo siguiente $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ se dice que es una **función de la variable** x. Según el valor que demos a la x a la función $f(x)$ le corresponderá un valor determiando. Por ejemplo, si $x = 2$ la función $f(x)$ vale: $f(2) = 15$

Una función de la forma de la anterior, que sólo tiene letras (x) y números se dice que es una función polinómica; concretamente la expresión x^3+2x^2-1 se dice que es un **polinomio** (en este caso, de grado 3, pues el grado el máximo exponente que alcance la x).

2.0.4 ▲ Factorización de un polinomio y descomposición de funciones racionales

▽ **Operaciones con polinomios.** Las veremos con ejemplos:

►Suma y resta: $(x^3 + 2x^2 - 1) - (x^2 + 3) = x^3 + 2x^2 - 1 - x^2 - 3 = x^3 + x^2 - 4$

►Multiplicación: $(x^3 + 2x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3) = x^5 + 3x^3 + 2x^4 + 6x^2 - x^2 - 3 = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 3$

►División: $(x^3 + 2x^2 - 1) : (x^2 + 3)$ Para dividir se escribe el dividendo y el divisor como en una división normal; se divide el monomio de grado más alto del dividendo entre el divisor; el resultado se irá multiplicando por todos los monomios del divisor y se irán poniendo estos productos debajo del dividendo según su grado, *pero siempre cambiando el signo*; luego se efectúan las sumas correspondientes y con el resultado se repiten las operaciones:

1^o paso:

$$\begin{array}{ccc|cc} x^3 & +2x^2 & -1 & x^2 & +3 \\ & & & x & \end{array}$$

2^o paso:

$$\begin{array}{llll|ll} x^3 & +2x^2 & & -1 & x^2 & +3 \\ -x^3 & & -3x & & x & \\ & 2x^2 & -3x & -1 & & \end{array}$$

3^o paso:

$$\begin{array}{llll|ll} x^3 & +2x^2 & & -1 & x^2 & +3 \\ -x^3 & & -3x & & x & +2 \\ & 2x^2 & -3x & -1 & & \\ & -2x^2 & & -6 & & \\ & & -3x & -7 & & \end{array}$$

Una vez llegados a un resto $(-3x - 7)$ de grado menor que el divisor $(x^2 + 3)$ hemos acabado la división. El cociente es $x + 2$

En determinados problemas nos va a ser útil aplicar el algoritmo de la división a divisiones de polinomios, para, por conveniencia, expresar la división de otra forma. En este caso, como:

$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$

nos queda:

$\frac{x^3+2x^2-1}{x^2+3} = x + 2 + \frac{-3x-7}{x^2+3}$

$\triangledown$ **Raíces de un polinomio y factorización.** Si un polinomio lo igualamos a 0 obtenemos una ecuación (del grado del polinomio); sus soluciones se llaman raíces del polinomio. *Un polinomio tiene tantas raíces como grado. Pueden ser todas reales, todas complejas o reales y complejas.*

Se puede demostrar que si todas las soluciones son números reales el polinomio se puede escribir también como

$$m(x-a)(x-b)...$$

siendo $a, b,$ etc., las raíces, y m el coeficiente del término de grado más alto del polinomio. Tal como ha quedado escrito anteriormente el polinomio se dice que está factorizado.

Para encontrar las raíces puede recurrirse al método anterior (igualar el polinomio a cero y solucionar la ecuación) o aplicar el **método de Ruffini**, que ahora veremos. Un consejo: si en el polinomio se puede sacar factor común x, hacerlo; de esta manera habremos encontrado automáticamente la primera raíz: $x = 0$, como veremos en el siguiente ejemplo.

►Calcular las raíces del polinomio $3x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 12x$. Lo primero que hacemos, ya que se puede, será sacar factor común, en este caso $3x$:

$3x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$

Con ello ya hemos empezado a factorizar el polinomio automáticamente. Obsérvese que la expresión anterior equivale a escribirla:

$3(x - 0)(x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$

que empieza a tener una forma parecida a la general $m(x - a)(x - b)...$

A continuación extraeremos, ya por l método de Ruffini, la siguiente raíz, contenida en el polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ Probaremos sólo con múltiplos de 4 (probar otras raíces no es operativo desde un punto de vista práctico). Empezaremos probando con el 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Como vemos, el 1 es raíz, porque hemos obtenido resto 0 en el algoritmo de Ruffini.

Ahora el polinomio inicial queda parcialmente factorizado así:

$3(x - 0)(x - 1)(x^2 - 4)$

donde $x^2 - 4$ es el polinomio que queda tras haber efectuado Ruffini una vez (corresponde a los coeficientes de la última línea, es decir, $1, 0, -4$, teniendo en cuenta que se trata de un polinomio de un grado menos de aquel al que se le aplica el método de Ruffini (que en este caso era $x^3 - 3x^2 - 4x + 4$).

Para calcular las dos raíces que nos quedan podemos aplicar de nuevo Ruffini a $x^2 - 4$: Probamos de nuevo con 1 , porque puede ocurrir que 1 sea una raíz múltiple (doble, triple, etc...)

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -3 \end{array}$$

Como no se obtiene resto 0, no es raíz. Probamos ahora con 2 :

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Vemos que 2 es raíz. Al polinomio resultante, $x + 2$, le aplicamos de nuevo Ruffini. En este caso es obvio que la raíz es -2

	1	2
-2		-2
	1	0

Obtener al final un 1 y de rsto 0 es prueba de que hemos agotado el algoritmo de Ruffini. Si hubiéramos obtenido otro número real m y de resto 0 al final deberemos añadir a la facotrización tipo $(x-a)(x-b)...$ el factor real m, es decir: $m(x-a)(x-b)...$

En este caso, resumiendo, la factorización ha quedado:

$3x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 12x = 3(x-0)(x-1)(x-2)(x+2)$

Atención y consejos:

¿¿ Cuando el término de mayor grado del poliomio tenga un coeficiente m distinto de 1 (en el ejemplo anterior m era 3) este coeficiente *debe aparecer* en la factorización final. A veces aparece automáticamente, como en el ejemplo anterior; otras lo detectaremos porque aparecerá al final del algoritmo de Ruffini junto a un resto 0; si no aparece automáticamente, hay que ponerlo de todas formas al final de la factorización.

¿¿ Se recomienda que si se está aplicando Ruffini, al obtener un polinomio reducido de grado 2 deje de aplicarse Ruffini y se obtengan las dos raíces contenidas en él igualando el polinomio a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado correspondiente

¿¿ No se olvide sacar factor común todo lo que se pueda antes de empezar a factorizar; al sacar factor común ya obtenemos un factor automáticamente. Tras sacar factor común si el polinomio es de primero, segundo grado o bicuadrado –este último es el que tiene potencias cuarta y segunda únicamente– lo mejor es igualarlo a cero y solucionar la ecuación; esta es la forma más rápida de encontrar las raíces en este caso.

¿¿ Cuando se está tratando de resolver una ecuación de segundo grado (o de cuarto, sexto, etc...) y se comprueba que las raíces son complejas, no hace falta calcularlas; se deja el polinomio de segundo grado (o de cuarto, sexto, etc...) tal como está y él constituye de por sí un factor único. Por ejemplo: $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ (las dos raíces contenidas en (x^2+1) son complejas, como puede comprobarse fácilmente).

►Ejemplos. Factorizar los siguientes polinomios:

$2x^3 + x^2$ (Sol: $x^2(2x+1)$)

$4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ (Sol: $2(x-1)(x-1)(2x^2+x+1)$)

$4x^3 - 2x^2 - 16x + 8$ (Sol: $4(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2})$)

∇ **Descomposición de funciones racionales en funciones simples.** Una función polinómica racional es un cociente de polinomios. A veces conviene descomponer ese coeficiente en fracciones más simples (en particular, ello es muy útil a la hora de calcular ciertas integrales)

Veremos con tres ejemplos cómo se hacen estas descomposiciones.

▶Descomponer en fracciones simples la siguiente función racional: $\frac{x^3-2x+3}{2x^3-4x^2-10x+12}$

Se factoriza el polinomio *denominador*: $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 2(x-1)(x+2)(x-3)$

Como vemos, *sólo tiene raíces reales y ninguna es múltiple.* En este caso la descomposición se hace así:

$\frac{x^3-2x+3}{2x^3-4x^2-10x+12} = \frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-3)}$ donde A, B y C son incógnitas a determinar. Para ello efectuamos la suma indicada en el segundo miembro. No es difícil, porque el mínimo común múltiplo es en este caso (y en todos los semejantes en que no hay raíces múltiples) el producto de los tres factores que constituyen los denominadores: $2(x-1)(x+2)(x-3)$:

$\frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-3)} = \frac{A(x+2)(x-3)+B(2(x-1))(x-3)+C(2(x-1))(x+2)}{2(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{Ax^2+2Bx^2+2Cx^2-Ax-8Bx+2Cx-6A}{2(x-1)(x+2)(x-3)}$

Por tanto, llegamos a la conclusión de que

$\frac{x^3-2x+3}{2x^3-4x^2-10x+12} = \frac{Ax^2+2Bx^2+2Cx^2-Ax-8Bx+2Cx-6A+6B-4C}{2(x-1)(x+2)(x-3)}$

y como los denominadores son iguales, deben serlo los numeradores. Para ello, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} 1 &= A + 2B + 2C \\ -2 &= -A - 8B + 2C \\ 3 &= -6A + 6B - 4C \end{aligned}$$

cuya solución es: $A = -\frac{1}{3}, B = \frac{11}{30}, C = \frac{3}{10}$

y por lo tanto la función racional inicial queda simplificada (después de arreglar un poco los numeradores) como:

$$-\frac{1}{6(x-1)} + \frac{11}{30(x+2)} + \frac{3}{10(x-3)}$$

▶Descomponer en fracciones simples la siguiente función racional: $\frac{3x^3-3}{x^3-3x+2}$

En este caso el polinomio denominador se descompone como $(x-1)(x-1)(x+2)$, que, como se ve, tiene una raíz múltiple. La descomposición en fracciones simples se hace así:

$\frac{3x^3-3}{x^3-3x+2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}$

Para sumar el segundo miembro hay que tener en cuenta que el mínimo común múltiplo es $(x-1)(x-1)(x+2)$. Lo de más se hace exactamente igual que en el ejemplo anterior.

▶Descomponer en fracciones simples la siguiente función racional: $\frac{x+1}{x^3-2x-4}$

El denominador admite la factorización $(x^2+2x+2)(x-2)$ (es decir, tiene una raíz real simple y dos complejas). La descomposición en fracciones simples se hace así:

$\frac{x+1}{x^3-2x-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+2)}$

Se suma el segundo miembro (el mcm es $(x^2+2x+2)(x-2)$) y se efectúa el resto como en el primer ejemplo.

▶Puede haber más formas, pero son combinaciones de las anteriores. Si, por ejemplo, sale una raíz real simple a, una real triple b y dos complejas dobles se hace así:

$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+mx+n} + \frac{Gx+H}{(x^2+mx+n)^2}$

pero nunca se van a plantear en el curso situaciones tan complejas.

2.0.5 ▲ Dominio de una función

Dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de valores de x para los que está definida la función. Por ejemplo, la función real de variable real $f(x) = \frac{1}{x}$ no está definida en el campo de los números reales para $x = 0$, pues $\frac{1}{0}$ no es ningún número real.

Para determinar el dominio de una función deben tenerse en cuenta algunas reglas elementales. Por ejemplo, si la función es racional, el denominador no puede ser cero; si la función es una raíz cuadrada, el radicando no puede ser negativo; si la función es logarítmica, la expresión dentro del logaritmo debe ser mayor que cero.

▶Ejemplos

▶Calcularel dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3+2x^2-13x+10}$

Los valores de la x tienen que ser tales que hagan al radicando mayor o igual a cero:

$x^3+2x^2-13x+10 \geq 0$ o, lo que es lo mismo: $(x-1)(x-2)(x+5) \geq 0$ Para que se cumpla que el producto de los tres factores es mayor que cero (es decir, positivo) debe cumplirse, por ejemplo, que los tres sean positivos, o que dos sean negativos y uno positivo. Lo mejor es hacer un cuadro que permite estudiar el signo en cada factor $(x-a)$; este cuadro tendrá dos entradas: una de ellas (vertical) son los factores y el producto de ellos, y la otra todos los intervalos abiertos delimitados por las raíces (como las raíces aquí son -5, 1 y 2, los intervalos en que queda dividida la recta de los números reales por ellas son: $(-\infty, 5)$, $(-5, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$).

	$(x-1)$	$(x-2)$	$(x+5)$	$(x-1)(x-2)(x+5)$
$(-\infty,-5)$				
$(-5,1)$				
$(1,2)$				
$(2,+\infty)$				

Para ver el signo de cada factor imaginamos cualquier número que esté comprendido dentro del intervalo correspondiente. Por ejemplo, en $(-\infty, -5)$ podemos imaginar el valor -10, en $(-5, 1)$ el -3, y en $(1, 2)$ el 1.25, y en $(2, +\infty)$.el 10. Para rellenar la primera fila, si hemos pensado en el -10, veremos que $(x-1) = -10-1$ tiene signo negativo; $(x-2) = -10-2$ tiene signo negativo; $(x+5) = -10+5$ tiene signo también negativo; y por tanto el producto de los tres factores es negativo. Así hacemos con las otras filas:

	$(x-1)$	$(x-2)$	$(x+5)$	$(x-1)(x-2)(x+5)$
$(-\infty,-5)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-5,1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(1,2)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(2,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, está claro que el polinomio es positivo en los intervalos $(-5, 1)$ y $(2, +\infty)$. Ahora bien, recordemos que si el polinomio vale cero la raíz también existe, y considerando esos dos intervalos, es cero en $x = -5$, en $x = 1$ y en $x = 2$. Por tanto, el dominio de la función es $[-5, 1] \cup [2, +\infty)$

►Calcularel dominio de la función $f(x) = \log(2x + 3)$

Para que la función esté definida la x tiene que tener tales valores que se cumpla: $2x + 3 > 0$. Por tanto, despejando la x de esa inecuación nos queda: $x > -\frac{3}{2}$. Por tanto, el dominio de esa función es $(-\frac{3}{2}, \infty)$ (en este caso el intervalo es abierto por la izquierda, porque si se incluye el propio valor $-\frac{3}{2}$ la expresión dentro del logaritmo da cero, y el $\log 0$ no está definido).

►Calcular el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{-x-5}}{x+8}$

Aquí la función no está definida si el denominador es cero, es decir, está definida para $x + 8 \neq 0$. Por lo tanto, está definida para cualquier valor que no sea -8. Ahora bien, también hay que tener en cuenta la raíz cuadrada contenida dentro de la función. Esa raíz sólo está definida para valores de x que cumplen: $-x-5 \geq 0$, es decir: $x+5 \leq 0$, y por tanto: $x \leq -5$, es decir, el dominio es $(-\infty, -5)$ excluyendo el valor -8, lo que se puede representar por $(-\infty, -5) - \{-8\}$

$\triangledown$ **Gráfica** de una funciónes su representación en un sistema de coordenadas, normalmente cartesiano. Se van dando valores arbitrarios a la variable independiente, x, y calculando los correspondientes a la función $f(x)$ ($f(x)$ se representa en la coordenada y).

▶Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2+10}{3}$

Damos valores a la x (unos ocho valores) y calculamos los de la $f(x)$, representándolos en una tabla. Por ejemplo, si $x = 0$, $f(x) = \frac{10}{3}$. Luego representamos todos los puntos y los unimos por una línea:

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunction.wmf

La función de la figura se dice que es decreciente entre $x = -\infty$ y $x = 0$ y creciente entre $x = 0$ y $x = +\infty$. Esta función se dice que es par porque cumple que $f(x) = f(-x)$. Es decir, por ejemplo: $f(2) = f(-2) = \frac{14}{3}$

$\triangledown$ **Operaciones con funciones** Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir siguiendo las reglas algebraicas básicas. También cabe *componerlas* y calcular la llamada *función inversa*, operaciones estas últimas que vimos en un tema anterior.

3 Tema 23: Continuidad de funciones

Funciones continuas, funciones continuas en un intervalo, teoremas de continuidad, continuidad de la función inversa

3.0.6 ▲ Continuidad de una función

Una función se dice que es continua en un punto a cuando se cumple

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

o, dicho de forma más detallada pero equivalente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

En ciertos problemas piden calcular la continuidad de una función en un sólo punto, en otros, en un intervalo, y en otros, en todo **R**.

Es útil saber que *un polinomio es continuo en todo* **R** y que un cociente entre dos polinomios es continuo en todo **R** excepto en los valores de x que anulen el denominador.

►Ejemplos

►¿Es continua la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ en el punto $x = 1$?

Para que sea continua sebe cumplirse la condición $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ que está claro que no se cumple porque no existe $f(a)$ (ya que $f(1) = \frac{1}{0}$, cociente que no está definido)

►¿Es continua la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ en el intervalo $(2, 3)$? ¿Y en el $[2, 3]$? Para que una función sea continua en un intervalo abierto debe serlo en todos sus puntos. En este caso lo es, puesto que una función cociente entre dos polinomios es continua en todos los puntos que no anulen el denominador, y entre $x = 2$ y $x = 3$ no los hay.

Para que una función sea continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe serlo en todos los puntos interiores (a, b) y cumplirse estas dos condiciones:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

condiciones que en este caso se cumplen como es fácil comprobar.

►Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2/(x-1) & si \quad 1 < x \end{cases}$$

Como vemos, la función está compuesta de tres tramos polinómicos. Los polinomios son continuos en todo **R**, y sus cocientes lo son en todo **R** excepto en los x que anulen el denominador. En el tercer intervalo de la función vemos que para $x = 1$ ésta no estaría definida, y por tanto $x = 1$ sería un punto de discontinuidad, pero advirtamos que indican que en ese tramo sólo estamos autorizados a tomar valores mayores que 1, luego $x = 1$ no es sustituible ahí y por lo tanto no podemos sacar conclusiones sobre la discontinuidad o discontinuidad en $x = 1$ con ese criterio.

Por otra parte, puede haber discontinuidad en los puntos que separan los tramos, es decir, en este caso, en 0 y en 1. Estudiemos ambos:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+2 = 2$ (calculamos el límite con el tramo de la función que nos permite usar *el cero aproximándonos a él por la izquierda*, que es el primer tramo)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$ (calculamos el límite con el tramo de la función que nos permite usar *el cero aproximándonos a él por la derecha*, que es el segundo tramo)

$f(0) = 2$ (calculamos el valor de $f(0)$ con el tramo de la función que nos permite usar *el cero exacto*, que es el segundo tramo)

La función, pues, es continua en $x = 0$. En cuanto a $x = 1$:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2$ (calculamos el límite con el tramo de la función que nos permite usar *el valor* 1 *aproximándonos a él por la izquierda*, que es el segundo tramo)

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$ (calculamos el límite con el tramo de la función que nos permite usar *el valor* 1 *aproximándonos a él por la derecha*, que es el tercer tramo)

$f(1) = 2$ (calculamos el valor de $f(0)$ con el tramo de la función que nos permite usar *el valor* 1 *exacto*, que es el segundo tramo)

La función, por lo tanto, no es es continua en $x = 1$.

3.0.7 ▲ Teoremas de continuidad

▽ **Teorema de Bolzano:**

Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto al de $f(b)$ entonces existe al menos un punto x dentro del intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$

▽ **Teorema de los valores intermedios:**

Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ y c es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe al menos un valor x que pertenece al intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) = c$

▽ **Teorema de Weierstrass**

Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces f tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$, es decir, existen puntos c y d de $[a, b]$ tales que $f(c) \geq f(x)$ y $f(d) \leq f(x)$ para todo valor de x que pertenece al intervalo $[a, b]$

▽ **Continuidad de la función inversa:**

Si f es continua y creciente en un intervalo $[a, b]$, la función inversa es continua y creciente en $f([a, b])$

Si f es continua y decreciente en un intervalo $[a, b]$, la función inversa es continua y decreciente en $f([a, b])$

4 Temas 24, 26 y 27: Derivadas

Funciones derivables, cálculo de derivadas simples, funciones trigonométricas y sus derivadas, funciones logarítmicas y exponenciales y sus derivadas

$\triangledown$ **Función derivable**

Se dice que una función es derivable en un punto a cuando existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si existe ese límite, se le llama **derivada de la función f en el punto a** y se representa por $f'(a)$

Si una función es derivable en a entonces es continua en a, pero lo recíproco no es cierto en general

$\triangledown$ **Cálculo práctico de derivadas**

El problema más común no es hallar la derivada de una función $f(x)$ en un punto a, sino, en general, hallar la derivada de $f(x)$ en todo punto x; es lo que llamamos la función derivada, $f'(x)$, o también escribiremos $\frac{d(f(x))}{dx}$ y, en muchos casos, para simplificar, $\frac{dy}{dx}$ (pues a menudo se llama a $f(x)$ "y").

Para calcular la función derivada de cualquier función se aplican unos algoritmos descubiertos por Leibniz. Los más importantes son los recogidos en la siguiente tabla, donde u y v son funciones de x y las primas hay que entenderlas como derivadas:

$f(x)=a$	$f'(x)=0$	$f(x)=au$	$f'(x)=au'$
$f(x)=u^a$	$f'(x)=au^{a-1}u'$	$f(x)=\sqrt[a]{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{a\sqrt[a]{u^{a-1}}}$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=u\cdot v$	$f'(x)=u'v+uv'$	$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f(x)=senu$	$f'(x)=u'\cos u$	$f(x)=\cos u$	$f'(x)=-u'senu$
$f(x)=arcsenu$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\arccos u$	$f'(x)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=tgu$	$f'(x)=\frac{u'}{\cos^2 u}$	$f(x)=\cot gu$	$f'(x)=-\frac{u'}{sen^2 u}$
$f(x)=\ln u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}$	$f(x)=\log u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}\log e$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=u'e^u$	$f(x)=a^u$	$f'(x)=u'a^u\ln a$

$f(x)=arctgu$

▽ **Ejemplos**

Veremos con unos ejemplos cómo se aplica esta tabla

▶ $f(x)=x$ Este es el caso más fácil; la derivada de x es 1 : $f'(x)=1$

▶ $f(x)=x^3$ Hay que aplicar la regla de $f(x)=u^a$ (siendo en este caso $u=x$). La solución es $f'(x)=3x^2$

▶ $f(x)=3x^3$ Hay que aplicar las reglas de $f(x)=u^a$ y $f(x)=au$. La solución es $f'(x)=9x^2$

▶ $f(x)=3x^3-2x^2+1$ Para solucionarla hay que aplicar las reglas de $f(x)=u+v$, $f(x)=u^a$, $f(x)=a$ y $f(x)=au$. Teniendo todas en cuenta está claro que la solución es: $f'(x)=9x^2-4x$

▶ $f(x)=\sqrt{3x^3-2x^2+1}$ Además de todas las reglas anteriores hay que tener en cuenta la de la derivada de una raíz cuadrada. La solución es: $f'(x)=\frac{9x^2-4x}{2\sqrt{3x^3-2x^2+1}}$

▶ $f(x)=\ln\sqrt{3x^3-2x^2+1}$ En principio hay que tener en cuenta la regla de la derivación de un logaritmo neperiano, $f(x)=\ln u$, pero al efectuarla debemos tener en cuenta que $u=\sqrt{3x^3-2x^2+1}$, y, por tanto, a la hora de efectuar la operación u' deberemos mirar la fórmula de la derivada de una raíz. Se dice que en este caso estamos haciendo la derivad de una función (el ln) de otra función (la raíz cuadrada). El resultado es: $\frac{\frac{9x^2-4x}{2\sqrt{3x^3-2x^2+1}}}{\sqrt{3x^3-2x^2+1}}=\frac{9x^2-4x}{2(3x^3-2x^2+1)}=\frac{9x^2-4x}{6x^3-4x^2+2}$

▶ $f(x)=\cos\left(\ln\sqrt{3x^3-2x^2+1}\right)$ Aquí tenemos una función (el cos) de otra función (el ln) de otra función (la raíz). Los primero que tenemos que considerar es la **función más externa**, es decir, la última que se aplica en caso de que queramos sustituir x por un número real (en ese caso, lo primero que se efectúa es el polinomio, luego la raíz, luego el ln y finalmente el cos). Iremos, por tanto, a la fórmula de la derivada del coseno. En ella nos aparecerá una u', es decir, la derivada de u, teniendo en cuenta que u en ese caso es: $u = \left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)$. Al efectuar la derivación de u habremos de tener en cuenta que se trata de la derivada de un logaritmo neperiano, en cuya fórmula de derivación aparece una u que en ese caso es $u = \sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}$, y aparece también una u', es decir, la derivada de una raíz. Y así sucesivamente. Teniedo todo esto en cuenta, y haciendo uso directamente del resultado obtenido en el ejemplo anterior, la derivada buscada es:

$f'(x) = -\frac{9x^2-4x}{6x^3-4x^2+2}\operatorname{sen}\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)$ (que, aunque podría simplificarse más, dejaremos así)

► $f(x) = \cos^3\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)$ En este caso hay un grado más de complicación: la potencia del coseno, que ahora es la función más externa. Es como si hubiéramos escrito $f(x) = \left[\cos\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)\right]^3$

La derivada es: $3\left[\cos\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{9x^2-4x}{6x^3-4x^2+2}\right)\operatorname{sen}\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)$ (para lo cual hemos echado mano del resultado del ejercicio anterior)

♦♦♦ La **regla de la cadena**

Un método para simplificar derivadas complejas como la anterior es aplicar la llamada regla de la cadena. consistente en ir sustituyendo las funciones más internas en cada eslabón de una cadena por otra variable, del siguiente modo (para simplificar notaciones, llamaremos a $f(x)$ "y")

$y = \left[\cos\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)\right]^3$

$u = 3x^3 - 2x^2 + 1$

$y = \left[\cos\left(\ln\sqrt{u}\right)\right]^3$

$v = \sqrt{u}$

$y = \left[\cos\left(\ln v\right)\right]^3$

$w = \ln v$

$y = (\cos w)^3$

$t = \cos w$

$y = t^3$

Ahora tendremos en cuenta *solamente la última expresión de la función* (en este caso $y = t^3$) *y todas las sustituciones hechas (*en este caso: $t = \cos w$; $w = \ln v$; $v = \sqrt{u}$ y $u = 3x^3 - 2x^2 + 1$ 3y aplicaremos la siguiente regla (que depende del caso, pero que siempre tiene la misma estructura):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

donde $\frac{dy}{dx}$ es la derivada que nos preguntan, y las demás las vamos sacando de las expresiones señaladas, teniendo en cuenta que operaremos siempre como si la variable independiente del segundo término fuera una x (por ejemplo, a la hora de derivar la expresión $w = \ln v$ consideramos que pone $w = \ln x$, y por tanto, siguiendo las reglas de la tabla de derivadas: $\frac{dw}{dv}$ diremos que es $\frac{1}{v}$) Teniendo esto en cuenta nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3t^2 \cdot (-senw) \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \left(9x^2 - 4x\right)$$

Finalmente hay que ir cambiando las variables pauulatinamente de modo que al final todo aparezca en función de x. Se puede ir haciendo así:

$3t^2 \cdot (-\text{sen}w) \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (9x^2 - 4x) = 3\,(\cos w)^2 \cdot (-\text{sen}w) \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (9x^2 - 4x) =$

$= 3\,[\cos(\ln v)]^2 \cdot [-sen\,(\ln v)] \cdot \frac{1}{2u} \cdot (9x^2 - 4x) =$

$= 3\left[\cos\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)\right]^2 \cdot \left[-sen\left(\ln\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}\right)\right] \cdot \frac{9x^2 - 4x}{6x^3 - 4x^2 + 2}$

que es el mismo resultado obtenido antes, aunque los factores estén en otro orden.

5 Temas 25: Estudio y representación de funciones; más sobre límite de funciones

Simetría y asimetría, funciones periódicas, cortes con los ejes, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, asíntotas, teoremas de Rolle y del valor medio; regla de L'Hôpital, recapitulación de límite de funciones (en temas 25 y 27)

5.0.8 ▲ Estudio de funciones

▽ Funciones simétricas y asimétricas

Una función es simétrica respecto al eje Y cuando no varía al cambiar x por $-x$, es decir, cuando $f(x) = f(-x)$

Por ejemplo, $f(x) = x^4 - 2x^2$ es simétrica respecto al eje Y, ya que $f(-x) = (-x)^4 - 2\,(-x)^2 =$

$= f(x) = x^4 - 2x^2$

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunctio2.wmf

▽ **Funciones periódicas**

Una función se dice periódica cuando cumple que $f(x) = f(x+p)$, siendo p el llamado periodo de la función. Por ejemplo, las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente son periódicas. Así:

$$\cos 25^o = \cos(25^o + 360^o)$$

El periodo de la función coseno es 360^o (o 2π, si expresamos los ángulos en radianes)

▽ **Cortes con los ejes**

Para saber en qué punto corta una función al eje Y, calculamos $f(x)$ para $x = 0$;el punto de corte será $(0, f(0))$; para saber en qué punto corta la función al eje X hacemos $f(x) = 0$ y despejamos x; el punto es $(x_0, 0)$ siendo x_0 el valor de la x despejada.

Por ejemplo, calculemos los puntos de corte de la función $f(x) = 4x^2 - 1$ con los ejes X e Y:

–con el eje Y: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1$ El punto de corte es $(0, 1)$

–con el eje X: $f(x) = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ Los puntos de corte son $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$

▽ **Máximos y mínimos**

Una función puede tener puntos máximos y mínimos. Por ejemplo, en la más arriba tiene dos puntos mínimos. Para calcular los extremos de una función se calcula la derivada primera, se iguala a cero, se resuelve la ecuación correspondiente para la x y el valor o valores obtenidos se sustituye(n) en la derivada segunda; si la función da negativa, el punto era un máximo, si positiva, un mínimo. (Si la derivada segunda da cero (es decir, ni positiva ni negativa), no se puede decir si el punto en cuestión es máximo o mínimo, aunque *puede ser cualquiera de las dos cosas*. Otras veces ocurre que en un punto hay un máximo o un mínimo y la función no es derivable en ese punto. Para determinar máximos y mínimos en estos casos hay que recurrir a otro método que veremos más abajo.).

Este procedimiento nos da máximos y mínimos **relativos**. De entre varios máximos (o mínimos) relativos hay uno **absoluto**: el que hace mayor (o menor) a la función.

►Aplicaremos el método a $f(x) = x^4 - 2x^2$

Primer paso: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Segundo paso: $4x^3 - 4x = 0$ Esta ecuación, aunque es de tercer grado, puede solucionarse fácilmente sacando factor común x : $x(4x^2 - 4) =$

0; para que esa igualdad sea cierta tiene que ocurrir o que $x = 0$ o que $4x^2 - 4 = 0$. Las tres soluciones son: $x = 0$ y las dos que se obtienen de la ecuación de segundo grado, que son: $x = 1$ y $x = -1$. Esos puntos pueden corresponder a extremos (máximos o mínimos)

Tercer paso: $f"(x) = 12x^2 - 4$ Calculamos $f"(0)$, $f"(1)$ y $f"(-1)$ para ver qué signo tienen:

$f"(0) = -4$, $f"(1) = 8$ y $f"(-1) = 8$. Esto nos dice que en $x = 0$ hay un máximo, y en $x = 1$ y $x = -1$ hay sendos mínimos (comprobarlo en la gráfica anterior). Concretamente, los puntos son: máximo: $(0, 0)$; mínimos: $(-1, -1), (1, -1)$ (los valores de la y de cada punto se calculan sustituyendo los correspondientes valores de la x en la función original $f(x) = x^4 - 2x^2$)

En este caso, los dos mínimos encontrados son absolutos, pero el máximo es relativo (pues hay valores mayores de la función; ver la gráfica).

$\triangleright\triangleright$ En ocasiones nos piden el máximo o mínimo de una función dentro de un intervalo cerrado $[a, b]$. En esos caso hay que aplicar el método visto pero, además, hay que calcular $f(a)$ y $f(b)$, puesto que el método visto la mayoría de las veces *no permite* detectar máximos o mínimos que coincidan exactamente con los extremos del intervalo, a y b. Supongamos que hemos encontrado un sólo máximo, en x_0 (que está dentro de $[a, b]$) . Entonces calculamos $f(x_0)$; si resulta que $f(a)$ es mayor que $f(x_0)$, entonces $f(a)$ es un máximo. Lo mismo se aplica a $f(b)$. Y parecidas consideraciones deben hacerse respecto a un los mínimos.

►Veamos un ejemplo: determinar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 5x + 1$ en el intervalo $[-1, 2]$.

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunctio3.wmf

Aplicando el método anterior encontramos que esta función tiene un máximo en $x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ y un mínimo en $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Ahora bien, el primer punto está fuera del intervalo $[-1, 2]$, luego no nos interesa. Por lo tanto, en principio podemos decir que en ese intervalo sólo hay un mínimo. Calcularemos también los valores de $f(x)$ en los extremos del intervalo. Son: $f(-1) = 5$ y $f(2) = -1$. Ambos valores son mayores que el valor de la función en el mínimo, valor que es: $f(\frac{\sqrt{15}}{3}) \simeq -3.303$. Por lo tanto, en $x = -1$ y en $x = 2$ hay sendos máximos en el intervalo $[-1, 2]$, a pesar de que el método de las derivadas no los detectó. *Todo esto es aplicable sólo si nos piden calcular máximos y mínomos en intervalos.*

$\triangledown$ **Puntos de inflexión**

Son los puntos en los que la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa (una función cóncava es la que se ve como una "cueva" mirando la función "desde abajo")

Para determinar puntos de inflexión se calcula la derivada segunda, se iguala a cero, se resuelve el valor o valores de la x; éstos se sustituyen en la derivada tercera, y si se obtienen valores distintos de cero se trata de un punto o puntos de inflexión. (Si da cero, *puede* ser un punto de inflexión, pero no se puede saber y hay que recurrir a otro método que veremos más abajo).

Calcularemos posibles puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 2x^2$ (los tiene con toda seguridad; basta ver la representación gráfica de la función para darse cuenta de ello)

Primer paso: Calculamos la derivada segunda: $f"(x) = 12x^2 - 4$

Segundo paso: la igualamos a cero: $12x^2 - 4 = 0$, y solucionamos la ecuación: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tercer paso: $f'''(x) = 24x$ Al sustituir en x las soluciones encontradas vemos que en ambos casos $f'''(x) \neq 0$, luego en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay sendos puntos de inflexión. Concretamente son: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$

▽ **Crecimiento y decrecimiento**

Si en un intervalo la derivada primera de una función se mantiene positiva, se dice que la función es **creciente** en dicho intervalo; si se mantiene negativa, es **decreciente**. Evidentemente, no se puede comprobar punto por punto si la derivada se mantiene positiva o negativa. En vez de ese procedimiento imposible se aplica el que ilustramos con el siguiente ejemplo, que es sistemático para conocer el signo de una función.

►Calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$(representada gráficamente más arriba)

Todo consiste en calcular la primera derivada y estudiar su signo. La derivada es: $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

A continuación se factoriza el polinomio, y queda: $f(x) = 4x\,(x-1)\,(x+1)$. Como vemos, sus raíces son -1, 0 y 1. Vamos a dividir a continuación la recta real (el eje X) en tramos o intervalos que vengan limitados por las raíces. En este caso esos intervalos son: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. Construimos ahora una tabla del mismo tipo que las que vimos en los temas 20 y 21 cuando explicamos el concepto de dominio de una función.

Recordemos que en esta tabla se escriben en vertical los factores en que ha quedado factorizado el polinomio, con una çúltima columna que es el propio polinomio, y en horizontal los intervalos delimitados por sus raíces:

	$(x+1)$	$4x$	$(x-1)$	$4x\,(x-1)\,(x+1)$
$(-\infty,-1)$				
$(-1,0)$				
$(0,1)$				
$(1,\infty)$				

Se empieza con la primera fila. Se da a la x *cualquier valor* que esté dentro del intervalo correspondiente, en este caso entre $-\infty$ y -1; por ejemplo, consideramos el valor -10. Ahora vemos el signo de todos los factores del polinomio considerando $x=-10$. Obviamente, $4x$ es negativo (pues $4\cdot(-10)=40$), $x-1$ es negativo y $x+1$ también es negativo. El polinomio global, producto de estos tres factores, será por lo tanto negativo. Hacemos lo mismo con la segunda columna (dando a x, por ejemplo, el valor -0.5), la tercera y la cuarta. Así, nos queda la siguiente tabla de signos:

	$(x+1)$	$4x$	$(x-1)$	$4x\,(x-1)\,(x+1)$
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-1,0)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(0,1)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(1,\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Es decir, entre $-\infty$ y -1 la función es decreciente (signo menos de la derivada primera, según la tabla); en $(-1,0)$ es creciente, en $(0,1)$ es de nuevo decreciente y entre 1 y ∞ es creciente. *Adicionalmente estos datos nos dan, como resulta evidente, otra información*: si entre $-\infty$ y -1 la función decrece y entre -1 y 0 crece, y como es continu (los polinomios lo son) eso significa *necesariamente* que en $x=-1$ hay un mínomo de la función. Por el mismo razonamiento deducimos que en $x=0$ hay un máximo y que en $x=-1$ hay otro mínimo. Este es el método al que nos referíamos antes para calcular extremos (máximos y mínimos) cuando el método de las derivadas primera y segunda no nos vale.

$\triangledown$ **Concavidad y convexidad**

Si en un intervalo la derivada segunda de una función se mantiene negativa, se dice que la función es **cóncava** en ese intervalo; si se mantiene positiva, es **convexa**. Para determinar estos intervalos se aplica exactamente el mismo método que para determinar el crecimiento y el decrecimiento, pero sobre la derivada segunda. Lo veremos con un ejemplo.

▶Calcular los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=$

$x^4 - 2x^2$

Calculamos la derivada segunda de la función: $f"(x) = 12x^2 - 4$ y la factorizamos: $12x^2 - 4 == 12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Las raíces son $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Con estos datos construimos la tabla de los signos de la derivada segunda:

	12	$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, entre $-\infty$ y $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ la función es convexa; entre $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ es cóncava; y entre $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y ∞ es convexa. Por lo tanto, esto *nos proporciona una información adicional*: que en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay sendos puntos de inflexión (pues en ellos la función pasa de cóncava a convexa o al revés).

▽ **Asíntotas**

A veces una función tien una rama que tiende a convertirse en recta; a ésta recta se la llama **asíntota**. Consideremos por ejemplo la función $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$ (la función es la parte curva de la gráfica; la recta paralela al eje de las X que se observa es la asíntota que vamos a definir a continuación).

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunctio4.wmf

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$ y la recta $y = 1$

Como se aprecia en la representación gráfica, la función $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$ por su izquierda tiende, en $-\infty$, a confundirse con la recta $y = 1$ (quedando por encima de ella), y por su derecha tiende a la misma recta aunque por abajo, de manera que en el infinito podemos considerar que función y recta se confunden. En este caso se dice que la función tiene como **asíntota horizontal por la izquierda** la recta $y = 1$, y como **asíntota horizontal por la derecha** la misma recta.

Esto se demuestra con el siguiente criterio:

♣ Una función tiene una asíntota horizontal por la izquierda $y = a$ si se cumple que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

y tiene una asíntota horizontal por la derecha $y = a'$ si se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a'$$

Es decir, esas asíntotas existen *si el límite de la función es un número real* (no si el límite es infinito). Comprobémoslo en este caso:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+2} = 1$$

con lo que hemos demostrado lo que habíamos intuido viendo la gráfica.

Podemos querer conocer también *si la asíntota está por arriba o por debajo de la función.*Para ello basta restarlas y estudiar el signo de esta diferencia: $f(x)-y =: \frac{x^2-x+1}{x^2+2} - 1 = -\frac{x+1}{x^2+2}$. Esta función-diferencia tiene un denominador que es positivo para cualquier valor de x (pues x está al cuadrado), por lo que el signo depende del numerador. Está claro que para valores de x menores que -1 la función-diferencia es positiva, y por tanto la función original está por enima de la recta; por el contrario, para valores de x mayores que -1 la función-diferencia es negativa, y por tanto para esos valores la función originl está por debajo de la recta (verlo en la gráfica).

Ahora veremos cómo se demuestra si una función tiene asíntotas verticales y oblicuas. Consideremos la función $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x-1}$, que tiene la peculiaridad de tener dos ramales, como se observa en la figura (ambos ramales son las partes curvas de la gráfica; las partes rectas (una paralela al eje de llas Y y una oblicua) son las asíntotas, que se han representado junto a la función).

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunctio5.wmf$f(x) = \frac{2x^2-1}{3x-1}$, y las rectas $x=\frac{1}{3}$ y $y = \frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$

Se intuye que la función tiene dos asíntotas, una vertical (la recta $x=\frac{1}{3}$) y otra oblicua (la recta $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$). Veamos cómo se comprueba esto analíticamente.

♣ Una función tiene una asíntota vertical por su derecha $x=b$ si se cumple que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

y tiene una asíntota vertical $x = b$ por la izquierda de la función si se cumple que $y = a'$ si se cumple que

$$\lim_{x \to b^+} \frac{2x^2 - 1}{3x - 1} = \pm\infty$$

La pregunta es: ¿existe un valor de x para el cual ese límite sea $+\infty$ o $-\infty$? Sí, está claro que si el denominador se anula el límite es $+\infty$ o $-\infty$, es decir, si $3x - 1 = 0$, y por tanto, si $x = \frac{1}{3}$. Comprobémoslo:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \frac{2x^2 - 1}{3x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} \frac{2x^2 - 1}{3x - 1} = -\infty$$

es decir, según la definición que hemos dado, la recta vertical $x = \frac{1}{3}$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x-1}$, y en este caso lo es tanto por la derecha como por la izquierda (no siempre tiene por qué ocurrir así). Concretamente, $x = \frac{1}{3}$ es una asíntota vertical por la derecha de un ramal de la función y por la izquierda del otro.

♣ Una función tiene una asíntota oblicua por su izquierda o su derecha $y = mx + n$ si el siguiente límite da un número real distinto de cero (es decir, no da infinito ni cero). Ese número es precisamente m

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Una vez conocido m, n se calcula así:

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

En el caso que nos ocupa hay efectivamente una asíntota oblicua. Demostrémoslo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2-1}{3x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2-1}{3x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-x}=\frac{2}{3}$$

Vemos que es asíntota oblicua tanto por la izquierda como por la derecha. Calculemos n :

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2-1}{3x-1}-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{9x-3}=\frac{2}{9}$$

La asíntota es, por tanto, $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$, y lo es por tanto por el ramal izquierdo como por el derecho de la función. El ramal izquierdo de la función queda por encima de la asíntota. Eso lo sabemos porque al restar la función menos la asíntota da siempre positivo:entre $-\infty$ y $\frac{1}{3}$

$f(x)-y=\frac{2x^2-1}{3x-1}-\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)=-\frac{7}{9(3x-1)}=$ (compruébese con cualquier valor entre $-\infty$ y $\frac{1}{3}$ que ese cociente da positivo. Y el ramal izquierdo (es decir, entre $\frac{1}{3}$ e ∞) da positivo siempre para cualquier valor de $x>\frac{1}{3}$ (compruébese)

▽ **Teoremas de Rolle y del valor medio**

Hay dos teoremas importantes al respecto del concepto de máimo y mínimo de una función: son los de Rolle y del valor medio.

El teorema de Rolle dice que si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en todo punto dentro de (a,b),de modo que $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un valor c que está dentro de (a,b), que cumple: $f'(c)=0$.

El teorema del valor medio establece que si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en todo punto dentro de (a,b), entonces existe al menos un valor c que está dentro de (a,b), que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5.0.9 ▲ Más sobre límites

Para resolver límites más complejos que los vistos hasta ahora es necesario conocer nuevas herramientas.

▽ **Regla de L'Hôpital**

Para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ es muy útil aplicar la regla de L'Hôpital, que se puede expresar como

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(siendo a cualquier número real o $\pm\infty$)

▶Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-2x}}$

Por la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+\frac{2}{2\sqrt{2-2x}}}=\frac{3}{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$

(habría que hacer $\lim\limits_{x\to 0^+}$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}$, pero en este caso se comprueba inmediatamente que ambos existen y son iguales a $2\sqrt{2}$)

⋆*Si después de hacer la primera derivación hubiera persistido la indeterminación tipo* $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, *se aplicaría de nuevo L'Hôpital, y así hasta que la indeterminación se rompa.*

▽ **Límites tipo** 1^∞

Puede aplicarse la siguiente fórmula

$$\lim_{x\to a}f^g=e^{\lim\limits_{n\to a}(f-1)g}$$

(donde a puede ser cualquier valor entre $-\infty$ e ∞) siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

$f(x)$ debe ser distinta de 1 para todo valor de x

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$

debe existir $\lim\limits_{x\to a}(f-1)g$

▶Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+4}\right)^{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+4}\right)^{x^2+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+4}-1\right)\left(x^2+1\right)}=e^{-6}$ (el limite lo podemos solucionar por L'Hôpital)

▽ **Límites tipo** 0^0, ∞^0 y 1^∞

En general es útil tener en cuenta la siguiente fórmula general:

$$\lim f^g=e^{\lim(g\ln f)}$$

▽ **Límites tipo** $\infty-\infty$

Puede multiplicarse y dividirse por el conjugado:

$$f - g = \frac{(f-g)\,(f+g)}{(f+g)}$$

o bien aplicar la siguiente transformación algebraica:

$$f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$$

▽ **Límites tipo** $\infty \cdot 0$
Es útil aplicar las siguientes transformaciones:

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \qquad \textit{obien}: \qquad f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

▽ **Cambio de variable**
Para solucionar algunos límites es útil hacer el siguiente cambio de variable en la función: $u = \frac{1}{x}$. Hay que tener en cuenta, eso sí, que al llevarlo a cabo, en el límite, si x tendía a $+\infty$, hay que sustituir eso por $u \to 0^+$ y que si $x \to -\infty$ hay que cambiarlo por $u \to 0^-$

6 Temas 28, 29 y 30: Integrales indefinidas y definidas

Primitiva de una función; métodos de integración: por partes, por cambio de variable, integración de funciones racionales y de funciones trigonométricas; integral definida; la integral como área

6.0.10 ▲ Primitiva de una función; integración

Del mismo modo que sacar la raíz cuadrada es la operación inversa a elevar al cuadrado, integrar es la inversa de diferenciar (o, si se quiere, de derivar)

Integrar consiste en, dada una función derivada, calcular la función que al derivarla produce esa derivada; esa segunda función se llama **primitiva**. Por ejemplo, supongamos que nos dicen que $f'(x) = 6x^2$ es la derivada de cierta función, y nos piden calcular cuál era esa función primitiva. Está claro que era $f(x) = 2x^3$; la prueba es que al derivar $f(x) = 2x^3$ obtenemos $f'(x) = 6x^2$. En realidad hay un número infinito de funciones primitivas que al derivarlas dan $f'(x) = 6x^2$; así, por citar tres ejemplos: $f(x) = 2x^3 + 3$, $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{5}$, $f(x) = 2x^3 - \sqrt{\frac{a}{4}}$ (siendo a una constante). Como observamos, la única diferencia entre todas ellas es una constante (pues la derivada de una constante es cero). Esto ocurrirá siempre. Para tenerlo en cuenta, siempre que integremos agregaremos al resultado la constante k (que en realidad es un parámetro: puede valer cualquier número real).

$\triangledown$ **Simbolismo de la integral**

En el capítulo dedicado a las derivadas comentamos que la forma más correcta de expresar la derivada de una función $f(x)$ es $\frac{df(x)}{dx}$ (aunque admitíamos la simplificación $f'(x)$). Supongamos el ejemplo anterior: la derivada de una función $f(x)$ es $6x^2$ y queremos conocer cuánto vale la función. Eso lo simbolizaremos así:

$\frac{df(x)}{dx} = 6x^2$ Para calcular $f(x)$ procedemos así (despejando primero $df(x)$ y realizando luego la operación **integral** (que se representa con el símbolo $\int$) en los dos miembros):

$df(x) = 6x^2dx$ $\int df(x) = \int 6x^2dx$ Una integral con una diferencial se anulan (como una raíz cuadrada se anula al elevarla al cuadrado), y por tano el primer miebro queda simplemente $f(x)$.

Por lo tanto, una expresión del tipo $f(x) = \int 6x^2dx$ es la que encontraremos siempre que nos planteen resolver una integral. Hay que tener en cuenta que lo que hay que integrar es "$6x^2$", haciendo "caso omiso" a "dx", cuya aparición en la integral acabamos de explicar. La operación, con todo lo visto, queda así:

$$f(x) = \int 6x^2dx = 2x^3 + k$$

$\triangledown$ **Integrales inmediatas**

Hay integrales que se resuelven de forma inmediata, como la anterior. En general, las integrales polinómicas son muy sencillas. Hay una regla simple para integrar monomios, que es:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

Otra regla a tener en cuenta es que cuando una constante (un número) multiplica al resto de una función, la constante puede sacarse de la integral directamente; por ejemplo:

$$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\frac{x^3}{3} + k = 2x^3 + k$$

Y una tercera regla importante es que *la integral de una suma de funciones (o una resta) es la suma (o la resta) de las integrales* (*no pudiéndose* aplicar regla parecida productos o cocientes).

Con todo ello debe quedar clara la resolución de la integral del siguiente ejemplo:

$$\int \left(6x^2 + 5x - 1\right) dx = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + k$$

(*Comprobar si una integral está bien hecha es fácil*: basta derivar la expresión obtenida para ver si se obtiene la original; así, la derivada de $2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + k$ está claro que es $6x^2 + 5x - 1$)

Veremos una integral inmediata típica: la del logaritmo neperiano: si nos dan para integrar un cociente y el numerador es la derivada del denominador, entonces la integral es inmediata: es el ln del denominador. Por ejemplo:

$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln|x^2+3| + k$ (se ponen las barras de valor absoluto porque tanto vale $\ln(-x^2-3)$ como $\ln(x^2+3)$ y esto ocurre siempre). Pruébese que la integral está bien hecha.

En muchos casos nos enfrentamos con integrales de eset tipo que no son completamente inmediatas, pero "casi" si hacemos alguna sencilla manipulación algeraca previa que tenemos que idear. Por ejemplo:

$\int \frac{7x}{x^2+3}dx$ en este caso el numerador no es la derivada del denominador, pero "casi". Procederemos en casos como este como sigue (buscando que en el numerador aparezca $2x$, pues nos interesa):

$\int \frac{7x}{x^2+3}dx = \int \frac{7x\cdot\frac{2}{2}}{x^2+3}dx = \int \frac{2x\cdot\frac{7}{2}}{x^2+3}dx = \int \frac{7}{2}\frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{7}{2}\ln|x^2+3| + k$

Haremos una última integral inmediata:

$\int 3\cos x dx = 3\mathrm{sen}x + k$ (algo que es evidente tras sacar la constante de la integral, pues como la derivada del seno es el coseno, la integral del coseno debe ser el seno).

6.0.11 ▲ Integrales no inmediatas: métodos para resolverlas

La mayoría de las veces las integrales no serán inmediatas. Veremos algunos métodos para resolverlas.

▽ **Integración por partes**

Se suele aplicar cuando el integrando es un producto de funciones. Se basa en la siguiente fórmula (a la que se llega fácilmente a partir de la derivada de un producto de funciones):

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Se trata de identificar en una integral dos partes: a una la llamaremos u y a la otra dv. Puede hacerse como se quiera (o se intuya: la única condición es que la parte dv contenga a la dx de la integral.

►Resolver la integral $I = \int 3x^2 e^x dx$

Las partes pueden hacerse como se quiera, pero normalmente la integral "no sale" si las hemos escogido mal. En ese caso, se toman de otra manera. Aquí tomaremos las partes así:

$$u = 3x^2 \qquad\qquad dv = e^x dx$$

Un consejo: *las partes deben tomarse de tal manera que sea muy fácil derivr la parte* u *y muy fácil integrar la parte* dv. Necesitamos saber cuánto vale du y cuánto v para aplicar la fórmula:

$$\frac{du}{dx} = 6x \Longrightarrow du = 6xdx \qquad\qquad \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$

(la integral $\int e^x dx$ es inmediata –basta ver las tablas de derivadas–; no ponemos la k porque es más cómodo ponerla al final de la integración completa)

Aplicamos ahora la fórmula con esos datos:

$\int 3x^2 e^x dx = \int udv = uv - \int vdu = 3x^2 e^x - \int e^x 6xdx$

La integral $\int e^x 6xdx$ no es inmediata, pero volvemos a aplicar el método de las partes para resolverla. Ahora: $u = 6x \Longrightarrow du = 6dx$ $dv = e^x dx \Longrightarrow \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v = e^x$. Aplicando la fórmula:

$\int 6xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = 6xe^x - \int 6e^x dx = 6xe^x - 6e^x$

Llevando este resultado a donde nos faltaba:

$\int 3x^2 e^x dx = \int udv = uv - \int vdu = 3x^2 e^x - (6xe^x - 6e^x) = e^x(3x^2 - 6x + 6) + k$

▽ **Integración por cambio de variable**

Hay casos en que la integral sería inmediata si la variable adoptara una forma más conveniente, ma´s simple. Entonces se hace un cambio de variable. Veamos un ejemplo.

►Resolver la integral $I = \int \frac{2}{(-5x+3)^2+1} dx$

Si abajo en vez de $(-5x+3)$ apareciera sólo x^2 la integral sería inmediata (del tipo arctg)

Haremos el siguiente cambio de variable: $u = -5x + 3.$ para tratar que la integral quede claramente del tipo arctg. Hay que tener en cuenta que *también hay que cambiar* dx, pues tras el cambio *todo debe quedar en función de* u. Para ello derivamos u, de lo que deducimos que $du = -5dx \Longrightarrow dx = -\frac{du}{5}$ El cambio queda:

$I = \int \frac{2}{(-5x+3)^2+1} dx = \int \frac{2}{u^2+1} \left(-\frac{du}{5}\right) = -\frac{2}{5} \int \frac{1}{u^2+1} du = -\frac{2}{5} arctgu + k = -\frac{2}{5} arctg\,(-5x+3) + k$

Al final del proceso *hay que deshacer el cambio de variable para que quede el resultado como función de* x.

▽ **Integración de expresiones racionales**

Cuando se trata de integrar expresiones del tipo (por ejemplo) $\int \frac{2x^2+5}{x^5-9x+2x^2+6} dx$ hay que descomponer primero la expresión en fracciones simples. En este caso:

$\frac{2x^2+5}{x^5-9x+2x^2+6} = \frac{13}{63(x+2)} - \frac{11}{72(x-1)} + \frac{7}{12(x-1)^2} - \frac{1+3x}{56(x^2+3)}$

de manera que se puede escribir:

$\int \frac{2x^2+5}{x^5-9x+2x^2+6} dx = \int \left(\frac{13}{63(x+2)} - \frac{11}{72(x-1)} + \frac{7}{12(x-1)^2} - \frac{1+3x}{56(x^2+3)} \right) dx = \int \frac{13}{63(x+2)} dx - \int \frac{11}{72(x-1)} dx + \int \frac{7}{12(x-1)^2} dx - \int \frac{1+3x}{56(x^2+3)} dx$

Las dos primeras son del tipo ln :

$\int \frac{13}{63(x+2)} dx = \frac{13}{63} \ln|x+2|$

$-\int \frac{11}{72(x-1)} dx = -\frac{11}{72} \ln|x-1|$

La tercera puede solucionarse fácilmente haciendo el cambio de variable $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$ con lo que la integral queda:

$\int \frac{7}{12(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{12u^2} du = \frac{7}{12} \int u^{-2} du = \frac{7}{12} \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{7}{12u} = -\frac{7}{12(x-1)}$

Y la cuarta se resuelve así:

$-\int \frac{1+3x}{56(x^2+3)} dx = -\frac{1}{56} \int \frac{3x+1}{x^2+3} dx$

prescindiremos de la constante $-\frac{1}{56}$ por el momento y nos centraremos en la integral. El numerador es "casi" la derivada del denominador. Podemos ajustarlo así:

$\int \frac{3x+1}{x^2+3} dx = \int \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) \frac{3x+1}{x^2+3} dx = \int \frac{3}{2} \frac{\frac{2}{3}(3x+1)}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2+3} dx =$

$\frac{3}{2}\int\left(\frac{2x}{x^2+3}+\frac{\frac{2}{3}}{x^2+3}\right)dx =$

$\frac{3}{2}\left[\int\frac{2x}{x^2+3}dx+\int\frac{\frac{2}{3}}{x^2+3}dx\right]$

Prescindamos de nuevo de la constante ($\frac{3}{2}$). Ahora, en la primera integral vemos que el numerador es la derivada del denominador, luego es del tipo ln :

$\int\frac{2x}{x^2+3}dx = \ln|x^2+3|$

La segunda es "casi" del tipo arctg; de hecho lo será si hacemos unas pequeñas transformaciones algebraicas y un cambio de variable:

$\int\frac{\frac{2}{3}}{x^2+3}dx = \frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+3}dx = \frac{2}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{3}+\frac{3}{3}}dx = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$ Hacemos $u=\frac{x}{\sqrt{3}} \Longrightarrow du=\frac{1}{\sqrt{3}}dx$

$\Longrightarrow dx=\sqrt{3}du$

La integral queda:

$\frac{2}{9}\sqrt{3}\int\frac{1}{u^2+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{9}\text{arctg}u = \frac{2\sqrt{3}}{9}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$

Finalmente, sólo queda sumar todas las integrales parciales que hemos ido obteniendo sin olvidar multiplicarlas por las constantes correspondientes que quedaron fuera de las integrales.

▽ **Integración de expresiones trigonométricas**

♣ Para resolver integrales con expresiones trigonométricas (no inmediatas) es útil probar el siguiente cambio de variable:

$\text{tg}\frac{x}{2}=t$ lo que implicará que $x=2arctgt$ y, por tanto, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Con este cambio, cada vez que aparezca $senx$ escribiremos: $senx=\frac{2t}{1+t^2}$

y cada vez que aparezca $\cos x$ pondremos: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Este cambio reduce la integral a una función racional del tipo de las vistas anteriormente. Pero en algunas ocasiones se pueden hacer algunos cambios más simples. Veámoslos a continuación.

♣ Si el integrando es par en seno y en coseno (es decir, si ambos están elevados a potencias pares) puede hacerse el cambio:

$\text{tg}x=t$ lo que implicará que $x=arctgt$ y, por tanto, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Con este cambio, cada vez que aparezca $senx$ escribiremos: $senx=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

y cada vez que aparezca $\cos x$ escribiremos: $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

♣ Si el integrando es impar en seno puede hacerse el cambio:

$\cos x=t$ con lo cual $-senxdx=dt$

♣ Si el integrando es impar en coseno puede hacerse el cambio:
$senx = t$ con lo cual $\cos x dx = dt$

►Ejemplo $I = \int 3\text{sen}x \cos^2 x dx$

Es impar en seno; hacemos el cambio indicado y queda (haciendo un pequeño ajuste algebraico):

$I = \int 3\text{sen}x \cos^2 x dx = \int (-3) \cos^2 x(-\text{sen}x dx) = -3 \int t^2 dt = -3\frac{t^3}{3} + k = -\cos^3 x + k$

♣ En otras ocasiones será mejor estudiar alguna transformación trigonométrica que simplifique el integrando, o resolverla por partes, cambio de variables, etc.

A veces, cuando tratamos de resolver una integral trigonométrica por partes, en el proceso de resolución aparece de nuevo la integral. Estas integrales se llaman recurrentes y se resuelven pasando las integrales a un mismo miembro y despejándolas como si fueran una incógnita. Por ejemplo:

$I = \int e^x senxdx$ Hacemos $u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx;$ $dv = senxdx \Longrightarrow v = -\cos x$

Se aplica la fórmula de la integración por partes:

$I = \int e^x senxdx = uv - \int vdu = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

La segunda integral también la resolvemos por partes. Hacemos ahora: $u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx;$ $dv = \cos dx \Longrightarrow v = \text{sen}x$

Al aplicar la fórmula:

$\int e^x \cos x dx = e^x \text{sen}x - \int e^x \text{sen}x dx$

Como vemos, hemos vuelto a obtener la integral original. Recapitulemos los resultados:

$\int e^x senxdx = -e^x \cos x + e^x \text{sen}x - \int e^x \text{sen}x dx$

En la ecuación anterior se pasan las dos integrales iguales al primer miembro (como si fueran una incógnita) y se depeja

$2 \int e^x senxdx = -e^x \cos x + e^x \text{sen}x$

$\int e^x senxdx = \frac{e^x(senx - \cos x)}{2} + k$ (la constante podemos agregarla al final)

6.0.12 ▲ Integrales definidas

Las integrales que hemos resuelto hasta ahora se llaman indefinidas. Hay otro tipo de integrales, basadas en las anteriores, que se llaman **definidas**. Lo único que las diferencia de las anteriores es que tienen los llamados **límites de integración**. Se resuelven de modo exactamente igual que las indefinidas, excepto que no se pone la constante (k) al final y que se tienen en cuenta los límites de integración como se indica a continuación con un ejemplo.

►Ejemplo $\int_0^1 4x^2 dx$

Los límites de integración en el caso anterior son 0 y 1. Se resuelve la integral sin tenerlos en cuenta (y sin escribir la k). Es inmediata: $\frac{4x^3}{3}$. Ahora se sustituye la x por el límite superior (es decir, 1), y luego por el límite inferior (0). *Con ello se obtienen dos números reales que se restan en es orden.* Ese número es la integral definida. Es decir, a diferencia de una integral indefinida, cuyo resultado es una función, en la integral definida lo que se obtiene es un número. En este caso el resultado es:

$\frac{4(1)^3}{3} - \frac{4(0)^3}{3} = \frac{4}{3}$

►Ejemplo $\int_{-2}^{\sqrt{2}} (4x^2 + 3x - 1)\, dx = \left| \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right|_{-2}^{\sqrt{2}} = \left(\frac{4\sqrt{2}^3}{3} + \frac{3\sqrt{2}^2}{2} - \sqrt{2} \right) - \left(\frac{4(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} - (-2) \right) = \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{17}{3}$

►Ejemplo $\int_{-2}^{3} \frac{2x}{x^2-1} dx = \left|\ln\left|x^2 - 1\right|\right|_{-2}^{1} = \ln\left|3^2 - 1\right| - \ln\left|(-2)^2 - 1\right| = \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}$

(el paso final es la aplicación de una de las propiedades de los logaritmos, como se vio en el tema correspondiente)

Nota: cuando se hace la integral por el método de cambio de variable, *no se olvide deshacer el cambio antes de sustituir la x por los límites de integración.* Otra posibilidad es cambiar los límites de integración de acuerdo con el cambio de variable hecho, pero en general puede resultar más complicado.

▽ Interpretación de la integral definida

La integral definida se puede interpretar como el área que queda entre la función integrando, el eje de las X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Por ejemplo, $\int_1^3 (x^2 + 10)\, dx$ es el área que queda entre el trazo de la función $f(x) = x^2 + 10$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$:

dtbpF3.8112in2.911in0ptfunctio6.wmf$f(x) = x^2 + 10$

La solución de $\int_1^3 (x^2 + 10)\, dx$ es $\frac{86}{3}$, luego esa es el área indicada.