Física 2 BACHILLERATO

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Física** para 2.º de Bachillerato es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el departamento de Ediciones Educativas de Santillana, dirigido por **Enrique Juan Redal**.

En su realización han intervenido:

Ana M. Peña Vidal

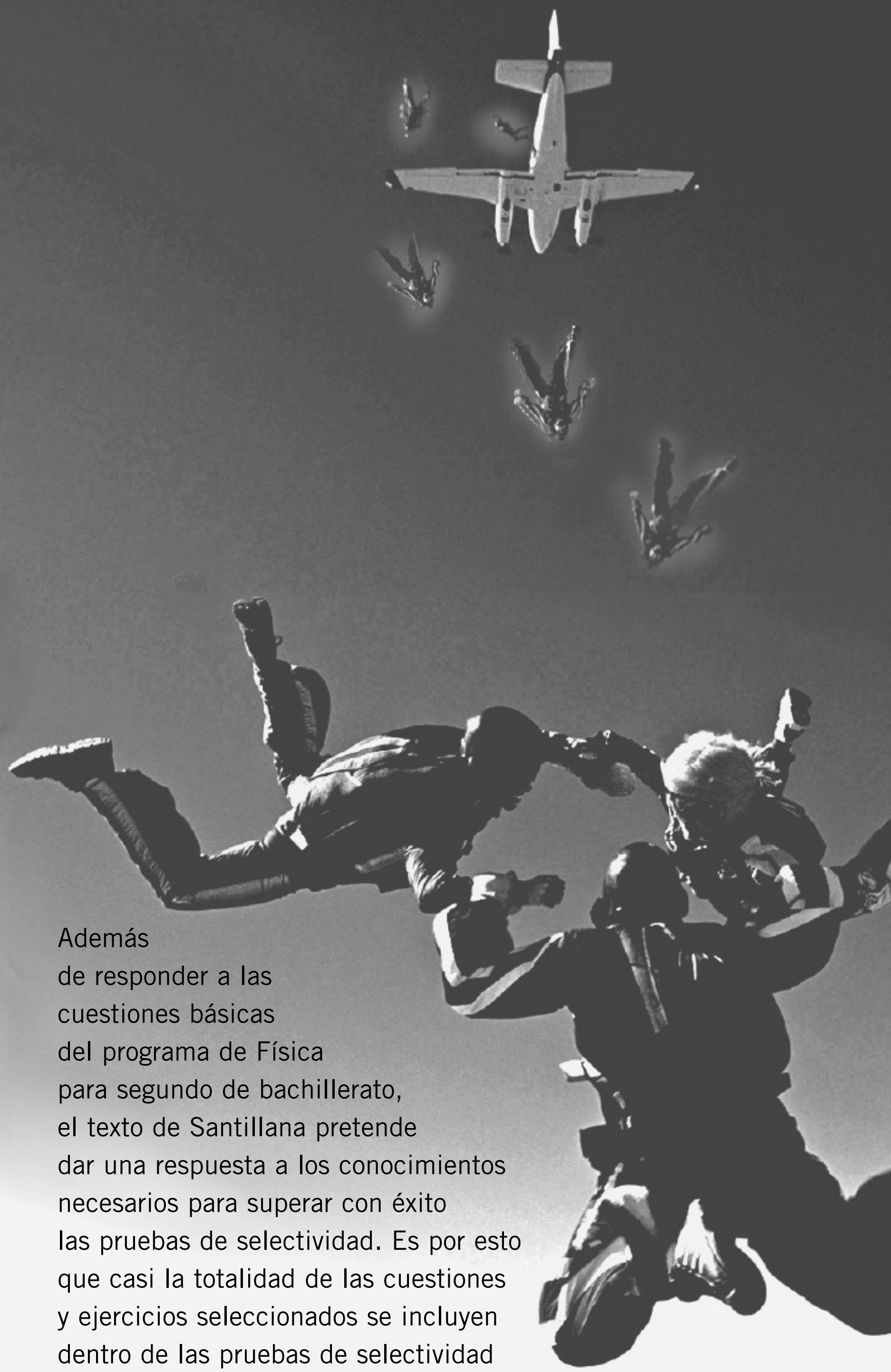
EDICIÓN
David Sánchez Gómez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Rocío Pichardo Gómez

Proyecto **La Casa del Saber**

Santillana

Presentación



Además
de responder a las
cuestiones básicas
del programa de Física
para segundo de bachillerato,
el texto de Santillana pretende
dar una respuesta a los conocimientos
necesarios para superar con éxito
las pruebas de selectividad. Es por esto
que casi la totalidad de las cuestiones
y ejercicios seleccionados se incluyen
dentro de las pruebas de selectividad
de todo el territorio nacional.

Índice

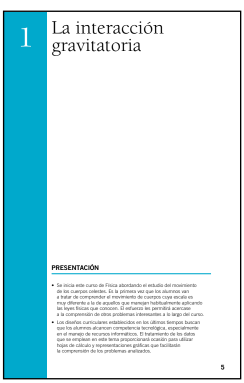
Introducción

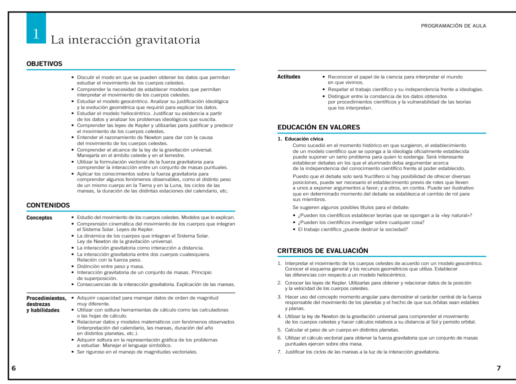
En cualquier texto de Física los ejercicios y las cuestiones constituyen una parte fundamental del contenido del libro. En nuestro material, las actividades aparecen agrupadas en dos secciones:

- Junto a la teoría, a pie de página.
- Al final de cada tema.

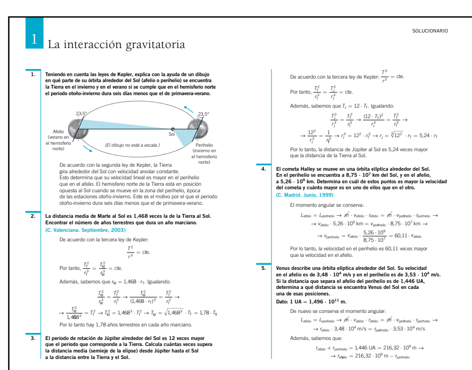
En este libro se presenta, para cada uno de los temas del libro de texto:

- La **Programación de aula** (objetivos, contenidos y criterios de evaluación).
- La **Resolución de todos los ejercicios** incluidos en el libro del alumno.





Además de este libro, al profesor se le ofrece como material de apoyo un **CD** con pruebas de acceso a la Universidad resueltas.



1 La interacción gravitatoria

PRESENTACIÓN

- Se inicia este curso de Física abordando el estudio del movimiento de los cuerpos celestes. Es la primera vez que los alumnos van a tratar de comprender el movimiento de cuerpos cuya escala es muy diferente a la de aquellos que manejan habitualmente aplicando las leyes físicas que conocen. El esfuerzo les permitirá acercase a la comprensión de otros problemas interesantes a lo largo del curso.
- Los diseños curriculares establecidos en los últimos tiempos buscan que los alumnos alcancen competencia tecnológica, especialmente en el manejo de recursos informáticos. El tratamiento de los datos que se emplean en este tema proporcionará ocasión para utilizar hojas de cálculo y representaciones gráficas que facilitarán la comprensión de los problemas analizados.

1 La interacción gravitatoria

OBJETIVOS

- Discutir el modo en que se pueden obtener los datos que permitan estudiar el movimiento de los cuerpos celestes.
- Comprender la necesidad de establecer modelos que permitan interpretar el movimiento de los cuerpos celestes.
- Estudiar el modelo geocéntrico. Analizar su justificación ideológica y la evolución geométrica que requirió para explicar los datos.
- Estudiar el modelo heliocéntrico. Justificar su existencia a partir de los datos y analizar los problemas ideológicos que suscita.
- Comprender las leyes de Kepler y utilizarlas para justificar y predecir el movimiento de los cuerpos celestes.
- Entender el razonamiento de Newton para dar con la causa del movimiento de los cuerpos celestes.
- Comprender el alcance de la ley de la gravitación universal. Manejarla en el ámbito celeste y en el terrestre.
- Utilizar la formulación vectorial de la fuerza gravitatoria para comprender la interacción entre un conjunto de masas puntuales.
- Aplicar los conocimientos sobre la fuerza gravitatoria para comprender algunos fenómenos observables, como el distinto peso de un mismo cuerpo en la Tierra y en la Luna, los ciclos de las mareas, la duración de las distintas estaciones del calendario, etc.

CONTENIDOS

Conceptos

- Estudio del movimiento de los cuerpos celestes. Modelos que lo explican.
- Comprensión cinemática del movimiento de los cuerpos que integran el Sistema Solar. Leyes de Kepler.
- La dinámica de los cuerpos que integran el Sistema Solar. Ley de Newton de la gravitación universal.
- La interacción gravitatoria como interacción a distancia.
- La interacción gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera. Relación con la fuerza peso.
- Distinción entre peso y masa.
- Interacción gravitatoria de un conjunto de masas. Principio de superposición.
- Consecuencias de la interacción gravitatoria. Explicación de las mareas.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Adquirir capacidad para manejar datos de orden de magnitud muy diferente.
- Utilizar con soltura herramientas de cálculo como las calculadoras o las hojas de cálculo.
- Relacionar datos y modelos matemáticos con fenómenos observados (interpretación del calendario, las mareas, duración del año en distintos planetas, etc.).
- Adquirir soltura en la representación gráfica de los problemas a estudiar. Manejar el lenguaje simbólico.
- Ser riguroso en el manejo de magnitudes vectoriales.

Actitudes

- Reconocer el papel de la ciencia para interpretar el mundo en que vivimos.
- Respetar el trabajo científico y su independencia frente a ideologías.
- Distinguir entre la constancia de los datos obtenidos por procedimientos científicos y la vulnerabilidad de las teorías que los interpretan.

EDUCACIÓN EN VALORES

1. Educación cívica

Como sucedió en el momento histórico en que surgieron, el establecimiento de un modelo científico que se oponga a la ideología oficialmente establecida puede suponer un serio problema para quien lo sostenga. Será interesante establecer debates en los que el alumnado deba argumentar acerca de la independencia del conocimiento científico frente al poder establecido.

Puesto que el debate solo será fructífero si hay posibilidad de ofrecer diversas posiciones, puede ser necesario el establecimiento previo de roles que lleven a unos a exponer argumentos a favor; y a otros, en contra. Puede ser ilustrativo que en determinado momento del debate se establezca el cambio de rol para sus miembros.

Se sugieren algunos posibles títulos para el debate:

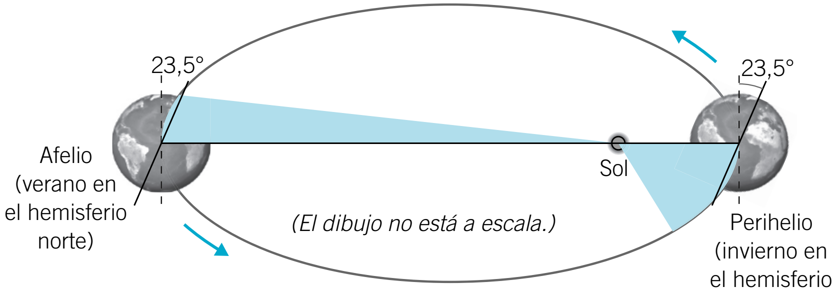
- ¿Pueden los científicos establecer teorías que se opongan a la «ley natural»?
- ¿Pueden los científicos investigar sobre cualquier cosa?
- El trabajo científico ¿puede destruir la sociedad?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Interpretar el movimiento de los cuerpos celestes de acuerdo con un modelo geocéntrico. Conocer el esquema general y los recursos geométricos que utiliza. Establecer las diferencias con respecto a un modelo heliocéntrico.
2. Conocer las leyes de Kepler. Utilizarlas para obtener y relacionar datos de la posición y la velocidad de los cuerpos celestes.
3. Hacer uso del concepto momento angular para demostrar el carácter central de la fuerza responsable del movimiento de los planetas y el hecho de que sus órbitas sean estables y planas.
4. Utilizar la ley de Newton de la gravitación universal para comprender el movimiento de los cuerpos celestes y hacer cálculos relativos a su distancia al Sol y periodo orbital.
5. Calcular el peso de un cuerpo en distintos planetas.
6. Utilizar el cálculo vectorial para obtener la fuerza gravitatoria que un conjunto de masas puntuales ejercen sobre otra masa.
7. Justificar los ciclos de las mareas a la luz de la interacción gravitatoria.

1 La interacción gravitatoria

1. **Teniendo en cuenta las leyes de Kepler, explica con la ayuda de un dibujo en qué parte de su órbita alrededor del Sol (afelio o perihelio) se encuentra la Tierra en el invierno y en el verano si se cumple que en el hemisferio norte el periodo otoño-invierno dura seis días menos que el de primavera-verano.**



De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la Tierra gira alrededor del Sol con velocidad areolar constante. Esto determina que su velocidad lineal es mayor en el perihelio que en el afelio. El hemisferio norte de la Tierra está en posición opuesta al Sol cuando se mueve en la zona del perihelio, época de las estaciones otoño-invierno. Este es el motivo por el que el periodo otoño-invierno dura seis días menos que el de primavera-verano.

2. **La distancia media de Marte al Sol es 1,468 veces la de la Tierra al Sol. Encontrar el número de años terrestres que dura un año marciano.**
(C. Valenciana. Septiembre, 2003)

De acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$$

Por tanto, $\dfrac{T_T^2}{r_T^3} = \dfrac{T_M^2}{r_M^3} = \text{cte.}$

Además, sabemos que $r_M = 1{,}468 \cdot r_T$. Igualando:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_M^2}{(1{,}468 \cdot r_T)^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{T_M^2}{1{,}468^3} = T_T^2 \rightarrow T_M^2 = 1{,}468^3 \cdot T_T^2 \rightarrow T_M = \sqrt{1{,}468^3} \cdot T_T = 1{,}78 \cdot T_T$$

Por lo tanto hay 1,78 años terrestres en cada año marciano.

3. **El periodo de rotación de Júpiter alrededor del Sol es 12 veces mayor que el periodo que corresponde a la Tierra. Calcula cuántas veces supera la distancia media (semieje de la elipse) desde Júpiter hasta el Sol a la distancia entre la Tierra y el Sol.**

De acuerdo con la tercera ley de Kepler: $\dfrac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$

Por tanto, $\dfrac{T_T^2}{r_T^3} = \dfrac{T_J^2}{r_J^3} = \text{cte.}$

Además, sabemos que $T_J = 12 \cdot T_T$. Igualando:

$$\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{(12 \cdot T_T)^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12^2}{r_J^3} = \frac{1}{r_T^3} \rightarrow r_J^3 = 12^2 \cdot r_T^3 \rightarrow r_J = \sqrt[3]{12^2} \cdot r_T = 5{,}24 \cdot r_T$$

Por lo tanto, la distancia de Júpiter al Sol es 5,24 veces mayor que la distancia de la Tierra al Sol.

4. **El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio se encuentra a $8{,}75 \cdot 10^7$ km del Sol, y en el afelio, a $5{,}26 \cdot 10^9$ km. Determina en cuál de estos puntos es mayor la velocidad del cometa y cuánto mayor es en uno de ellos que en el otro.**

(C. Madrid. Junio, 1999)

El momento angular se conserva:

$$L_{afelio} = L_{perihelio} \rightarrow \cancel{m} \cdot v_{afelio} \cdot r_{afelio} = \cancel{m} \cdot v_{perihelio} \cdot r_{perihelio} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{afelio} \cdot 5{,}26 \cdot 10^9 \text{ km} = v_{perihelio} \cdot 8{,}75 \cdot 10^7 \text{ km} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{perihelio} = v_{afelio} \cdot \frac{5{,}26 \cdot 10^9}{8{,}75 \cdot 10^7} = 60{,}11 \cdot v_{afelio}$$

Por lo tanto, la velocidad en el perihelio es 60,11 veces mayor que la velocidad en el afelio.

5. **Venus describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Su velocidad en el afelio es de $3{,}48 \cdot 10^4$ m/s y en el perihelio es de $3{,}53 \cdot 10^4$ m/s. Si la distancia que separa el afelio del perihelio es de 1,446 UA, determina a qué distancia se encuentra Venus del Sol en cada una de esas posiciones.**

Dato: 1 UA = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.

De nuevo se conserva el momento angular:

$$L_{afelio} = L_{perihelio} \rightarrow \cancel{m} \cdot v_{afelio} \cdot r_{afelio} = \cancel{m} \cdot v_{perihelio} \cdot r_{perihelio} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{afelio} \cdot 3{,}48 \cdot 10^4 \text{ m/s} = r_{perihelio} \cdot 3{,}53 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Además, sabemos que:

$$r_{afelio} + r_{perihelio} = 1{,}446 \text{ UA} = 216{,}32 \cdot 10^9 \text{ m} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{afelio} = 216{,}32 \cdot 10^9 \text{ m} - r_{perihelio}$$

Sustituyendo:

$$(216{,}32 \cdot 10^9\ \text{m} - r_{\text{perihelio}}) \cdot 3{,}48 \cdot 10^4\ \text{m/s} = r_{\text{perihelio}} \cdot 3{,}53 \cdot 10^4\ \text{m/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{\text{perihelio}} = \frac{216{,}32 \cdot 10^9\ \text{m} \cdot 3{,}48 \cdot 10^4\ \text{m/s}}{3{,}48 \cdot 10^4\ \text{m/s} + 3{,}53 \cdot 10^4\ \text{m/s}} = 107{,}38 \cdot 10^9\ \text{m}$$

Entonces:

$$r_{\text{perihelio}} = 216{,}32 \cdot 10^9\ \text{m} - 107{,}38 \cdot 10^9\ \text{m} = 108{,}94 \cdot 10^9\ \text{m}$$

6. Si la órbita de un planeta es elíptica, ¿en qué punto de su trayectoria tendrá velocidad lineal máxima? ¿Y si la órbita fuera circular?

Una conclusión de la segunda ley de Kepler es que el momento angular de los planetas es constante:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{perihelio}} \rightarrow \cancel{m} \cdot v_{\text{afelio}} \cdot r_{\text{afelio}} = \cancel{m} \cdot v_{\text{perihelio}} \cdot r_{\text{perihelio}}$$

Si la órbita es elíptica, su velocidad lineal será máxima en el perihelio, ya que ahí la distancia al centro de giro ($r_{\text{perihelio}}$) es menor.

Si la órbita fuera circular, su velocidad lineal será la misma en toda la órbita.

7. Un cuerpo de masa m_1 está separado una distancia d de otro cuerpo de masa m_2 y entre ellos existe una fuerza de atracción $\vec{F}$. Calcula el valor de la fuerza si:

a) m_1 duplica su masa.

b) m_1 reduce su masa a la mitad.

c) Los cuerpos se aproximan hasta que la distancia entre ellos se reduce a la mitad.

d) Los cuerpos se alejan hasta que la distancia entre ellos se duplica.

a) Si $m'_1 = 2 \cdot m_1$:

$$F' = G \cdot \frac{m'_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = G \cdot \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow F' = 2 \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = 2 \cdot F$$

Si se duplica la masa de un cuerpo, la fuerza entre ellos se duplica.

b) Si $m'_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1$:

$$F' = G \cdot \frac{m'_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = G \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow F' = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = \frac{1}{2} \cdot F$$

Si se reduce a la mitad la masa de un cuerpo, la fuerza entre ellos también se reduce a la mitad.

c) Si $d' = \frac{1}{2} \cdot d$:

$$F' = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left(\frac{1}{2} \cdot d\right)^2} \rightarrow F' = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\frac{1}{4} \cdot d^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow F' = 4 \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = 4 \cdot F$$

Si la distancia entre los cuerpos se reduce a la mitad, la fuerza se cuadruplica.

d) Si $d' = 2 \cdot d$:

$$F' = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(2 \cdot d)^2} \rightarrow F' = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{4 \cdot d^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow F' = \frac{1}{4} \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \rightarrow F' = \frac{1}{4} \cdot F$$

Si la distancia entre los cuerpos se duplica, la fuerza se reduce a la cuarta parte.

8. Una astronauta lleva a la Luna la manzana que compró en el supermercado de su calle y que pesaba 250 g. ¿Cuánto pesará en la Luna si la mide con una balanza de resorte? ¿Y si la mide con una balanza de platos?

Con una balanza de platos pesará exactamente lo mismo, ya que compara la manzana con otro cuerpo que tiene su misma masa.

Con una balanza de resorte la medida se vería afectada por la gravedad.

$$\left.\begin{array}{l} P_{\text{Tierra}} = m \cdot g_{\text{Tierra}} \\ P_{\text{Luna}} = m \cdot g_{\text{Luna}} \end{array}\right\} \rightarrow P_{\text{Luna}} = P_{\text{Tierra}} \cdot \frac{g_{\text{Luna}}}{g_{\text{Tierra}}}$$

9. ¿Dónde tendrá más masa una pelota de tenis, en la Tierra o en la Luna? ¿Dónde pesará más?

Tendrá la misma masa en la Tierra y en la Luna, pero pesará más en la Tierra, porque la gravedad terrestre es mayor que la lunar.

10. La masa del planeta Júpiter es aproximadamente 318 veces la de la Tierra y su diámetro es 11 veces mayor. ¿Cuál es el peso en la superficie de este planeta de un astronauta cuyo peso en la Tierra es de 750 N? (En realidad, Júpiter es gaseoso y no tiene una superficie sólida como la Tierra o Marte.)

$$P = F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

En la Tierra $P_T = 750$ N. En Júpiter:

$$P_J = G \cdot \frac{M_J \cdot m}{R_J^2} = G \cdot \frac{318 \cdot M_T \cdot m}{(11 \cdot R_T)^2} = \frac{318}{11^2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T)^2} =$$

$$= \frac{318}{11^2} \cdot P_T = \frac{318}{11^2} \cdot 750 \text{ N} \rightarrow P_J = 1971 \text{ N}$$

11. En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de 6 m de lado tenemos un cuerpo de 5 kg.

a) Calcula la fuerza que el conjunto ejerce sobre otro cuerpo de 10 kg que se encuentra en el baricentro del triángulo.

b) ¿Y si el cuerpo que está en el baricentro fuese de 100 kg?

(Recuerda: el baricentro es el punto en que se cortan las medianas de un triángulo.)

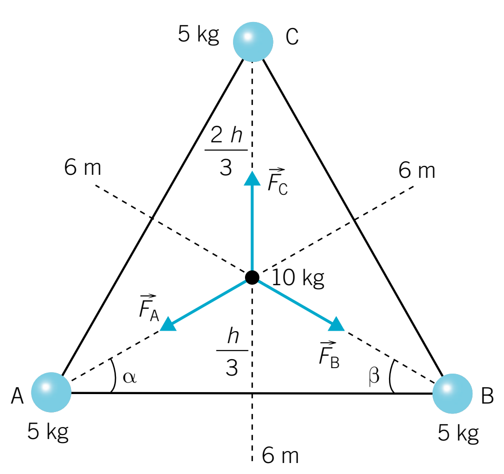
El baricentro del triángulo es el punto en que se cortan sus medianas; se encuentra a una distancia de cada vértice igual a $\frac{2\,h}{3}$.

Para el triángulo del problema:

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}20 \text{ m} \rightarrow \frac{h}{3} = \frac{5{,}20 \text{ m}}{3} = 1{,}73 \text{ m}$$

$$\frac{2 \cdot h}{3} = \frac{2 \cdot 5{,}20 \text{ m}}{3} = 3{,}47 \text{ m}$$

Dibujamos la fuerza que cada masa ejerce sobre el cuerpo que está en el baricentro. Por el principio de superposición, la fuerza resultante del sistema puede obtenerse como $\vec{F}_T = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$.



El módulo de cada una de las tres fuerzas es idéntico:

$$F_i = G \cdot \frac{m_i \cdot m}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ kg}}{3{,}47^2 \text{ m}^2} = 2{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

(i = A, B, C.)

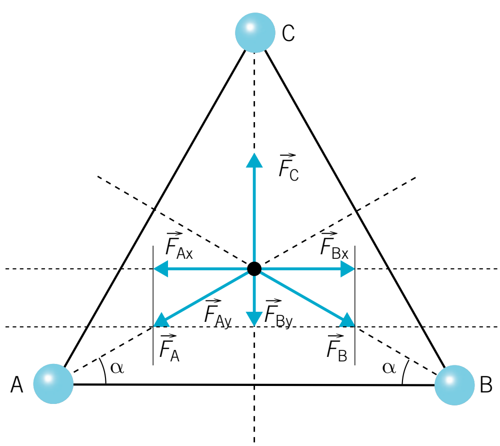
Para hacer la suma vectorial nos interesa expresar las tres fuerzas en función de sus componentes cartesianas. Descomponemos $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ en sus componentes horizontal y vertical:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1{,}73}{3{,}47} = 0{,}5 = \text{sen}\,\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{3{,}47} = 0{,}86 = \cos\beta$$

- $\vec{F}_A = -F \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - F \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}$
- $\vec{F}_B = +F \cdot \cos\beta \cdot \vec{i} - F \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \vec{j}$
- $\vec{F}_C = F \cdot \vec{j}$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{F}_T = (-F \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - F \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}) + (F \cdot \cos\beta \cdot \vec{i} - F \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \vec{j}) + F \cdot \vec{j}$$



Teniendo en cuenta que los ángulos α y β son iguales:

$$\vec{F}_T = -2 \cdot F \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j} + F \cdot \vec{j} = -2 \cdot F \cdot 0{,}5 \cdot \vec{j} + F \cdot \vec{j} = 0$$

Conclusión: $\vec{F}_T = 0$ N para cualquier masa que se coloque en el baricentro de un triángulo.

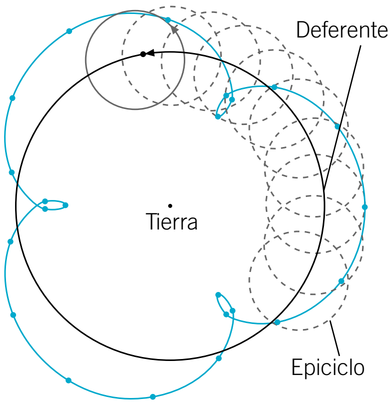
12. Utilizando el modelo de Ptolomeo de epiciclos y deferente:

a) Explica por qué un mismo astro aparece unas veces más brillante que otras.

b) Explica el movimiento retrógrado de Marte.

a) Un astro aparece a veces más brillante porque su distancia a la Tierra varía en función del punto del epiciclo en el que se encuentren en su deferente.

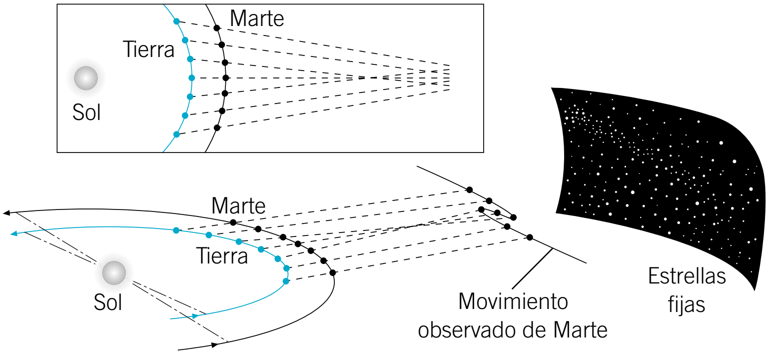
b) Los planetas giran alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria de pequeñas circunferencias (epiciclos) cuyo centro describe una circunferencia (deferente) con centro en la Tierra. Durante la mitad del epiciclo, el movimiento del planeta parece que avanza con respecto a la Tierra; y en la otra mitad, retrocede con respecto a la Tierra.



13. Utilizando un modelo heliocéntrico, justifica el movimiento retrógrado de Marte.

El movimiento retrógrado de Marte es la trayectoria «irregular» que sigue en su movimiento alrededor del Sol cuando se observa desde la Tierra. Ambos planetas giran alrededor del Sol, aunque la Tierra lo hace con mayor rapidez.

La trayectoria que observamos de Marte es resultado de la proyección en la bóveda celeste de sus distintas posiciones. Como podemos observar en el dibujo, la proyección de las distintas líneas visuales provoca lo que parece ser la trayectoria de un movimiento que avanza y retrocede (movimiento retrógrado).



14. Si el Sol está en el centro del universo y la Tierra gira a su alrededor, da una explicación de por qué no se observa paralaje estelar; es decir, por qué no se ve que cambie la posición de una estrella en el firmamento al cambiar la posición de la Tierra.

Porque todas las estrellas (excepto el Sol) se encuentran muy alejadas de la Tierra.

15. **En el lenguaje común decimos que el Sol sale por el este y se pone por el oeste. ¿Qué tipo de modelo de universo estamos empleando cuando hacemos esta afirmación?**

Geocéntrico, ya que estamos utilizando como referencia la Tierra y describiendo el movimiento del Sol en relación a ella.

16. **Una partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado alejándose continuamente de un punto que tomamos como origen del movimiento y en dirección radial.**
Su momento angular:

a) Es constante.

b) Es cero.

c) Aumenta indefinidamente.

Por la definición de momento angular:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |m \cdot \vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha$$

Si los vectores de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y sentido, resulta que forman un ángulo de 0°, por lo que sen 0° = 0 y el resultado es nulo, $L = 0$. Respuesta correcta: b).

17. **Resuelve el ejercicio anterior suponiendo que la partícula se acerca continuamente al origen.**

La única diferencia con respecto al ejercicio anterior es que, en este caso, los vectores forman un ángulo de 180°, pero, nuevamente, sen 180° = 0 y el resultado es nulo, $L = 0$.

18. **Una partícula se mueve en un plano con movimiento rectilíneo y uniforme. Demuestra que su momento angular, con respecto a un punto cualquiera de ese plano, va a ser constante.**

El momento angular es constante si no varía con el tiempo.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d(\vec{r})}{dt} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = 0$$

El vector $m \cdot \vec{v}$ es paralelo a $\vec{v}$. El producto vectorial $\frac{d\vec{r}}{dt} \times (m \cdot \vec{v}) =$
$= \vec{v} \times (m \cdot \vec{v})$ es 0, ya que el seno del ángulo que forman es 0.

Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow L = \text{cte.}$$

19. **Si una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, su momento angular respecto al centro de fuerzas:**

a) Aumenta indefinidamente.

b) Es cero.

c) Permanece constante.

De acuerdo con el teorema del momento angular, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Una fuerza central tiene, en todo momento, la dirección del radio. Si la partícula describe un movimiento circular bajo la acción de esta fuerza se cumplirá $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, por lo que $\vec{L}$ no presentará variación respecto al tiempo, y la respuesta correcta es la c).

20. **En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:**

a) Se conserva el momento angular y el momento lineal.

b) Se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza gravitatoria.

c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

La respuesta correcta es la c). Al moverse bajo la acción de fuerzas centrales (gravitatoria), se conserva su momento angular.

Sin embargo, la velocidad lineal con la que se mueve no es constante, por lo que su momento lineal no se conservará. Recuérdese la segunda ley de Kepler: la Tierra se mueve con velocidad areolar constante, por lo que su velocidad en el perihelio será mayor que en el afelio.

21. **Las órbitas de los planetas son planas porque:**

a) Se mueven con velocidad constante.

b) Se mueven bajo la acción de una fuerza central.

c) Los planetas son restos materiales de una única estrella.

No es verdad que los planetas se muevan con velocidad constante, y el origen material de los mismos no tiene nada que ver con la forma de su órbita. La respuesta correcta es la b), ya que al moverse bajo la acción de una fuerza central su momento angular es constante, y de ello se deriva que las órbitas son planas.

Recuérdese que $\vec{L}$ es en todo momento perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$; para que la dirección de $\vec{L}$ no cambie, $\vec{r}$ y $\vec{p}$ deben definir siempre el mismo plano, lo que obliga a que los planetas describan órbitas planas.

22. **Demuestra que para cualquier planeta el producto de su velocidad instantánea en un punto de la trayectoria por el radio vector correspondiente es constante.**

Una consecuencia de la segunda ley de Kepler es que los planetas se mueven con momento angular constante. Para dos puntos cualesquiera:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \vec{r}_1 \times (m \cdot \vec{v}_1) = \vec{r}_2 \times (m \cdot \vec{v}_2)$$

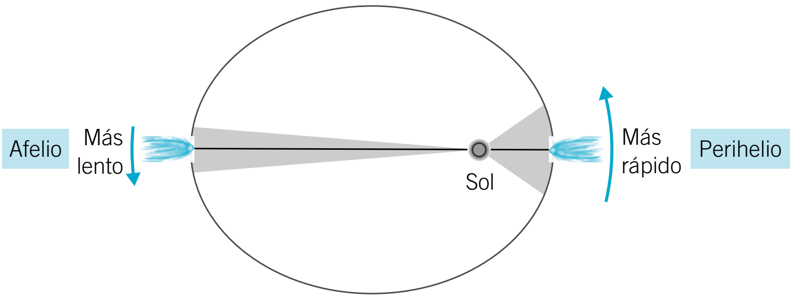
Simplificamos m:

$$\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \overrightarrow{\text{cte}}.$$

23. **Explicar por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen más velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.**

(C. F. Navarra. Septiembre, 2006)

En el caso de fuerzas centrales, de acuerdo con la segunda ley de Kepler, el radio vector que une un cometa al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



Por esto, cuando el cometa está más cerca del Sol, tendrá que recorrer una longitud de arco mayor para abarcar la misma área que la recorrida en el mismo tiempo cuando está alejado del Sol. Para ello, debe moverse más rápido.

24. **Dos satélites, A y B, cuyas masas son tales que $m_A = 50m_B$ se mueven alrededor de la Tierra en el mismo plano y con el mismo momento angular; sus velocidades son $v_B = 2v_A$. El radio de la órbita de B será:**

a) Igual a la de A.
b) El doble que la de A.
c) La mitad que la de A.
d) 25 veces mayor que la de A.

Si tienen el mismo momento angular:

$$L_A = L_B \rightarrow m_A \cdot v_A \cdot r_A = m_B \cdot v_B \cdot r_B \rightarrow$$
$$\rightarrow 50 \cdot \cancel{m_B} \cdot \cancel{v_A} \cdot r_A = \cancel{m_B} \cdot 2 \cdot \cancel{v_A} \cdot r_B \rightarrow 50 \cdot r_A = 2 \cdot r_B$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la d).

25. **Si por alguna causa interna la Tierra sufriese un colapso gravitatorio que redujese su radio a la mitad manteniendo constante su masa, ¿cómo sería su periodo de revolución alrededor del Sol?:**

a) Igual. **b) De 2 años.** **c) De 4 años.**

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, para un planeta que gira alrededor del Sol, $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$. La variación del radio de la Tierra no implica que varíe su distancia al Sol. Por tanto, el periodo de la Tierra permanece constante aunque varíe su tamaño.
Podemos hacer una demostración más exhaustiva teniendo en cuenta la ley de gravitación universal.
Cuando la Tierra está en órbita alrededor del Sol: $F_G = F_C$.

$$\cancel{m_T} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{m_T}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}$$

Por lo tanto, resulta que el periodo no depende del radio de la Tierra, sino del radio de su órbita. La respuesta correcta es la a).

26. ¿Qué cambio experimentaría el periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol si perdiese la mitad de su masa manteniendo su volumen?

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, para un planeta que gira alrededor del Sol, $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$. La variación del radio de la Tierra no implica que varíe su distancia al Sol. Por tanto, el periodo de la Tierra permanece constante aunque varíe su masa.
Podemos hacer una demostración más exhaustiva teniendo en cuenta la ley de gravitación universal.
Cuando la Tierra está en órbita alrededor del Sol: $F_G = F_C$.

$$\cancel{m_T} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{m_T}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}$$

Por lo tanto, resulta que el periodo no depende de la masa ni del volumen de la Tierra, sino de la masa del Sol. No experimenta ningún cambio.

27. Un objeto que describe órbitas circulares alrededor del Sol irá más rápido:

a) Cuanto mayor sea el radio de la órbita.

b) Cuanto menor sea el radio de la órbita.

c) Cuanto mayor sea la masa del objeto.

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, para cualquier objeto que gire alrededor del Sol, $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v};\ \frac{\frac{(2\pi)^2 \cdot r^2}{v^2}}{r^3} = \text{cte.} \rightarrow v = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{r \cdot \text{cte.}}}$$

T^2

Por lo tanto, la velocidad y el radio de órbita varían de forma inversa: v será mayor cuanto menor sea r. Además, la velocidad no depende de la masa del objeto, por lo que la respuesta correcta es la b).

28. **Determina la masa del Sol sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 1,49 · 10⁸ km y que la Tierra tarda 365,256 días en dar una vuelta completa alrededor del Sol.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

(P. Asturias. Junio, 2006)

Cuando la Tierra está en órbita alrededor del Sol, $F_G = F_C$:

$$m_T \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot m_T}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\cancel{m_T} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{m_T}}{r^2} \rightarrow M_S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_S = \left(\frac{2\pi}{31{,}558 \cdot 10^6\ \text{s}}\right)^2 \cdot \frac{(1{,}49 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = 1{,}965 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

29. **a) Enuncia las leyes de Kepler y demuestra la tercera en el caso particular de órbitas circulares.**

b) Rhea y Titán son dos satélites de Saturno que tardan, respectivamente, 4,52 y 15,9 días terrestres en recorrer sus órbitas en torno a dicho planeta. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Rhea es 5,27 · 10⁸ m, calcula el radio medio de la órbita de Titán y la masa de Saturno.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

(Aragón. Septiembre, 2006)

a) 1. Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.

2. Los planetas se mueven con velocidad areolar constante; es decir, el vector de posición de cada planeta con respecto al Sol (el radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales.

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte.}$$

3. Para todos los planetas: $\frac{T^2}{a^3} = k$ (constante). Donde a es el semieje mayor de la elipse y T es el periodo del planeta.

Demostramos esta ley con la ley de gravitación universal.
Para un planeta que describe una órbita circular:

$$F_G = F_C \rightarrow \cancel{m_T} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{m_T}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo:

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = G \cdot \frac{M_S}{(2\pi)^2} = \text{cte.}$$

b) Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler para ambos satélites:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \rightarrow \frac{(4{,}52 \text{ días})^2}{(5{,}27 \cdot 10^8 \text{ m})^3} = \frac{(15{,}9 \text{ días})^2}{r_T^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_T = \sqrt[3]{\frac{(15{,}9 \text{ días})^2 \cdot (5{,}27 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(4{,}52 \text{ días})^2}} = 1{,}22 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Para calcular la masa de Saturno estudiamos el sistema formado por este planeta y uno de sus satélites, por ejemplo, Rhea.

Cuando un satélite está en órbita alrededor de Saturno $F_G = F_C$:

$$\cancel{m_R} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{m_R}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \rightarrow M_S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G}$$

Teniendo en cuenta los datos de Rhea, expresados en unidades SI:

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{T_R}\right)^2 \cdot \frac{r_R^3}{G} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{390{,}528 \cdot 10^3 \text{ s}}\right)^2 \cdot \frac{(5{,}27 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_S = 568{,}015 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

30. **Júpiter es un planeta que está rodeado de una serie de lunas que giran en torno a él de forma similar a como los planetas giran alrededor del Sol. Completa la tabla para conocer los datos orbitales de las lunas de Júpiter.**

Nombre	Radio orbital, en 10^6 m	Periodo (días)
Ío	421,6	1,769
Europa		3,551
Ganimedes	1070	
Calisto	1882	16,689

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los satélites que giran alrededor de un mismo planeta verifican: $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$

Por tanto, $\frac{T_I^2}{r_I^3} = \frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_G^2}{r_G^3} = \text{cte.}$

Igualando:

$$\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \rightarrow r_E = \sqrt[3]{\frac{T_E^2}{T_I^2} \cdot r_I^3} = \sqrt[3]{\frac{3{,}551^2}{1{,}769^2} \cdot 421{,}6^3} = 670{,}89 \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{\text{Europa}} = 670{,}89 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Y para Ganimedes:

$$\frac{T_G^2}{r_G^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \rightarrow T_G = \sqrt{\frac{r_G^3}{r_I^3} \cdot T_I^2} = \sqrt{\frac{1070^3}{421{,}6^3} \cdot 1{,}769^2} = 7{,}152 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{\text{Gaminedes}} = 7{,}152 \text{ días}$$

31. **El periodo de revolución de Marte alrededor del Sol es de 687 días. Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros, calcular la distancia de Marte al Sol. (Suponer que las órbitas descritas son circunferencias.)**
(C. F. Navarra. Junio, 2007)

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los planetas que giran alrededor del Sol verifican: $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} = \text{cte.}$$

Igualando:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow r_M = \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{T_T^2} \cdot r_T^3} = \sqrt[3]{\frac{687^2}{365^2} \cdot 150^3} = 228{,}67 \rightarrow$$

$$\rightarrow r_M = 228{,}67 \cdot 10^6 \text{ km}$$

32. **Europa, satélite de Júpiter descubierto por Galileo en 1610, describe una órbita completa de 6,71 · 10⁵ km de radio cada 3 días, 13 horas y 14,6 minutos. Calcula:**

a) La velocidad lineal de Europa con relación a Júpiter.

b) La masa de Júpiter.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Obtenemos el periodo en segundos:

$$T = 3\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 13\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + $$
$$+ 14{,}6\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 306{,}876 \cdot 10^3\ \text{s}$$

a) $v = \omega \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot r = \left(\frac{2\pi}{306{,}876 \cdot 10^3\ \text{s}}\right) \cdot 6{,}71 \cdot 10^9\ \text{m} =$

$= 13{,}74 \cdot 10^3\ \text{m/s}$

b) Cuando Europa está en órbita alrededor de Júpiter, $F_G = F_C$:

$$\cancel{m_E} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_J \cdot \cancel{m_E}}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_J = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(13{,}74 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2 \cdot 6{,}71 \cdot 10^8\ \text{m}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 1{,}899 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

33. **Calcula la masa de la Tierra, sabiendo que la Luna tiene un periodo igual a 2,3 · 10⁶ s y se encuentra a una distancia media de la Tierra de 384 400 km.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra $F_G = F_C$:

$$\cancel{m_L} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_L}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2}{r} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \rightarrow M_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{r^3}{G} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_T = \left(\frac{2\pi}{2{,}3 \cdot 10^6\ \text{s}}\right)^2 \cdot \frac{(388\,400 \cdot 10^3\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = 6{,}35 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

34. **La distancia Tierra-Luna es aproximadamente 60 R_T. Calcula:**

a) Su velocidad lineal alrededor de la Tierra.

b) El periodo de rotación en días.

Dato: en la superficie terrestre, $g = 9{,}86$ m/s²; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra, $F_G = F_C$:

$$\cancel{m_L} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_L}}{r^2} \rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \qquad [1]$$

En la superficie de la Tierra:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g \cdot R_T^2 = G \cdot M_T \qquad [2]$$

Sustituimos [2] en [1] y tenemos en cuenta la relación $r = 60 \cdot R_T$:

$$v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{g \cdot R_T^2}{60 \cdot R_T} = \frac{g \cdot R_T}{60} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{9{,}86 \text{ m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}}{60}} = 1{,}023 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) Relacionamos magnitudes lineales y angulares:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot 60R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{v} \cdot 60R_T = \frac{2\pi \cdot 60 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}}{1{,}023 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ s} \rightarrow$$

$$\rightarrow T = 2{,}35 \cdot 10^6 \cancel{\text{s}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1 \text{ días}}{24 \cancel{\text{h}}} = 27{,}17 \text{ días}$$

35. **Los cuerpos se atraen con una fuerza gravitatoria que es proporcional a su masa. En ausencia de rozamiento, caen más rápido los cuerpos:**

a) De mayor masa.

b) De menor masa.

c) Todos igual de rápido.

$$F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = g \cdot m$$

La rapidez con la que caen los cuerpos viene determinada por la aceleración que les imprime la fuerza gravitatoria, y solo depende del cuerpo que los atrae (la Tierra) y de la distancia que los separa del centro de ese cuerpo.

Como se aprecia en la fórmula, en ausencia de rozamiento todos los cuerpos caen con la misma aceleración; por tanto, con la misma rapidez. La respuesta correcta es la c).

36. **Para conocer el peso de un cuerpo utilizamos una balanza de platos. La balanza se equilibra cuando colocamos en un plato el cuerpo y en el otro pesas por valor de 15,38 g.**

a) Si hiciésemos la experiencia en la Luna, ¿cuántas pesas tendríamos que colocar en el platillo para equilibrar el peso de ese cuerpo?

b) ¿Y si hiciésemos la experiencia con una balanza de resorte?

Datos: $g_T = 9{,}8$ m · s^{-2}; $g_L = 1{,}7$ m · s^{-2}.

Con una balanza de platos habrá que colocar la misma cantidad de pesas.

Con una balanza de resorte, la medida se vería afectada por la gravedad.

$$\left.\begin{array}{r} P_{\text{Tierra}} = m \cdot g_{\text{Tierra}} \\ P_{\text{Luna}} = m \cdot g_{\text{Luna}} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{\text{Luna}} = P_{\text{Tierra}} \cdot \frac{g_{\text{Luna}}}{g_{\text{Tierra}}} = P_{\text{Tierra}} \cdot \frac{1{,}7 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}} = P_{\text{Tierra}} \cdot 0{,}173$$

37. **Una persona de 70 kg se encuentra sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es su peso? ¿Y cuál sería su peso…**

a) … si la masa de la Tierra se reduce a la mitad?

b) … si el radio de la Tierra se reduce a la mitad?

c) … si el radio y la masa de la Tierra se reducen a la mitad?

Dato: $g_0 = 9{,}8$ m · s^{-2}.

$P = F_G = m \cdot g$.

a) En la Tierra:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \rightarrow P = 70 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 686 \text{ N}$$

b) Si $M'_T = \dfrac{M_T}{2}$:

$$g' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{R_T^2} = \frac{g}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow P' = m \cdot g' = m \cdot \frac{g}{2} = \frac{P}{2} = \frac{686 \text{ N}}{2} = 343 \text{ N}$$

c) Si $R'_T = \dfrac{R_T}{2}$:

$$g' = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{M_T}{\frac{R_T^2}{4}} = 4 \cdot g \rightarrow$$

$$\rightarrow P' = m \cdot g' = m \cdot 4 \cdot g = 4 \cdot P = 4 \cdot 686 \text{ N} = 2744 \text{ N}$$

d) Si $M'_T = \frac{M_T}{2}$ y $R'_T = \frac{R_T}{2}$:

$$g' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\frac{R_T^2}{4}} = 2 \cdot g \rightarrow$$

$$\rightarrow P' = m \cdot g' = m \cdot 2 \cdot g = 2 \cdot P = 2 \cdot 686\ \text{N} = 1372\ \text{N}$$

38. ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo que la fuerza centrípeta a que está sometido en la superficie de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Utilizamos unidades del SI:

$$P = F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} \cdot m = 9{,}83 \cdot m \quad [1]$$

Para calcular la fuerza centrípeta tenemos en cuenta que el cuerpo que está en la superficie de la Tierra tiene un movimiento de rotación idéntico al de la Tierra, es decir, con un periodo de 1 día. Utilizamos unidades del SI:

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = m \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot r \rightarrow$$

$$\rightarrow F_C = m \cdot \frac{(2\pi)^2}{(24 \cdot 3600)^2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 = m \cdot 0{,}034 \quad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$\frac{P}{F_C} = \frac{9{,}83 \cdot \cancel{m}}{0{,}034 \cdot \cancel{m}} = 289$$

39. Calcula la aceleración de la gravedad en un punto que está situado a una distancia de la Tierra equivalente a la distancia a la que se encuentra la Luna (unos 60 radios terrestres).

Llamamos g_0 al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y suponemos que vale 9,8 m/s².

$$g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + 60 \cdot R_T)^2} = \frac{1}{61^2} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow g = \frac{g_0}{61^2} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{3721} = 2{,}63 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

40. **La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días. Calcula:**

a) La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) El valor de la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna y con que la Luna atrae a la Tierra, sabiendo que la masa de la Luna es 1/81 veces la de la Tierra.

c) Si en la Luna se deja caer un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

d) ¿Con qué velocidad llegará al suelo si se deja caer desde una altura de 10 m de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 4R_L$; $R_T = 6370$ km.

a) Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra, $F_G = F_C$:

$$\cancel{m_L} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_L}}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo (unidades SI) y despejando:

$$\frac{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r_L^2}{r_L} = G \cdot \frac{M_T}{r_L^2} \rightarrow r_L = \sqrt[3]{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{T_L}{2\pi}\right)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_L = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{27{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= 383{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) En este caso:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{r_L^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot \dfrac{M_T}{81}}{r_L^2} =$$

$$= \frac{1}{81} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})^2}{(383{,}06 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 200{,}68 \cdot 10^{18} \text{ N}$$

La fuerza con que la Tierra atrae a la Luna es igual y de sentido contrario a la fuerza con que la Luna atrae a la Tierra.

c) El cuerpo que cae tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Vendrá determinado por las ecuaciones:

$$v = v_0 + at; \;\; y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Suponemos que $v_0 = 0$ y que el origen de tiempos y espacios está en el momento y en el punto en que se inicial el movimiento. La aceleración será en cada caso la de la gravedad; utilizando un sistema de referencia cartesiano, tendrá signo negativo.

Trabajamos en unidades del SI. Para una altura de 10 m será:

$$g_L = G \cdot \frac{m_L}{(R_L + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\dfrac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{81}}{\left(\dfrac{6370 \cdot 10^3 + 10}{4}\right)^2} = 1{,}94 \text{ m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} g_L \cdot t^2 \to -10 \text{ m} = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}94 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \to$$

$$\to t = \sqrt{\frac{10 \text{ m} \cdot 2}{1{,}94 \text{ m/s}^2}} = 3{,}21 \text{ s}$$

Por tanto:

$v_L = -g_L \cdot t = -1{,}94 \text{ m/s}^2 \cdot t = -1{,}94 \text{ m/s} \cdot 3{,}21 \text{ s} \to v_L = -6{,}23 \text{ m/s}$

El signo negativo indica que está descendiendo.

d) Las consideraciones son las mismas que en el caso anterior. Calculamos el valor de g en ese punto; como antes, es muy similar al valor en la superficie:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3 + 10)^2} = 9{,}83 \text{ m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} g_T \cdot t^2 \to -10 \text{ m} = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}83 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \to$$

$$\to t = \sqrt{\frac{10 \text{ m} \cdot 2}{9{,}83 \text{ m/s}^2}} = 1{,}43 \text{ s}$$

Por tanto:

$$v_T = -g_T \cdot t = -9{,}83 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}43 \text{ s} = -14{,}06 \text{ m/s}$$

El signo negativo indica que está descendiendo.

41. Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. Si se traslada a un planeta con una masa 10 veces inferior a la masa de la Tierra, pero con igual tamaño, ¿cuál será su peso? Dato: $g_T = 9{,}8$ m · s^{-2}.

$P = F_G = m \cdot g$. En la Tierra:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

En el planeta ($M_P = M_T/10$; $R_P = R_T$):

$$g_P = G \cdot \frac{M_P}{R_P^2} = G \cdot \frac{\dfrac{M_T}{10}}{R_T^2} = \frac{1}{10} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{10} \cdot g_T = \frac{1}{10} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 =$$

$$= 0{,}98 \text{ m/s}^2 \to P = m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 0{,}98 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ N}$$

42. **a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita.**

b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «la gravedad en la superficie de Venus es el 90 % de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, *G*, el valor obtenido sería el 90 % del medido en la Tierra».

(Andalucía, 2007)

a) 1. Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.

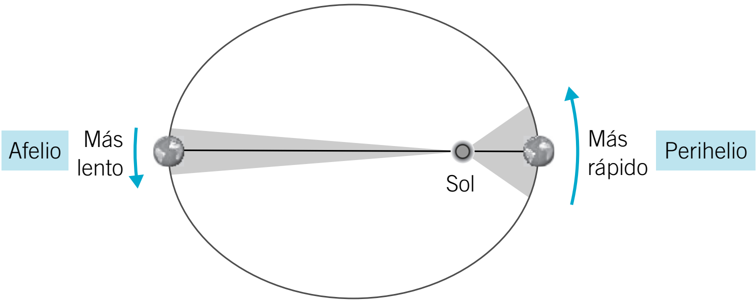
2. Los planetas se mueven con velocidad areolar constante; es decir, el vector de posición de cada planeta con respecto al Sol (el radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales.

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte.}$$

3. Para todos los planetas: $\frac{T^2}{a^3} = k$ (constante).

Donde a es el semieje mayor de la elipse y T es el periodo del planeta.

Para que se cumpla la segunda ley de Kepler los planetas deben moverse más rápido al estar más cerca del Sol (perihelio), ya que una velocidad areolar constante implica una longitud de arco mayor en ese punto que cuando esté más alejado del Sol para un mismo intervalo de tiempo.



b) La constante G es universal, por lo que no varía entre la Tierra y Venus; lo que varía es el valor de la aceleración de la gravedad, g, en cada caso:

$$g_{\text{Venus}} = G \cdot \frac{M_{\text{Venus}}}{R^2_{\text{Venus}}};\ g_{\text{Tierra}} = G \cdot \frac{M_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}}$$

43. **El planeta Egabbac, situado en otro sistema solar, posee un radio doble del de la Tierra, pero una densidad media igual a la de la Tierra. ¿El peso de un objeto en la superficie de Egabbac sería igual, mayor o menor que en la superficie de la Tierra? Si es mayor o menor, ¿en qué proporción?**

Con un razonamiento idéntico al del ejercicio anterior demostraremos que g en Egabbac será el doble que en la Tierra. Si $R_P = 2R_T$:

$$d = \frac{m}{V} \rightarrow d_P = \frac{M_P}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi \cdot (2R_T)^3} = d_T = \frac{M_T}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi \cdot R_T^3} \rightarrow M_P = 8M_T$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_P = G \cdot \frac{M_P}{R_P^2} = G \cdot \frac{8M_T}{(2R_T)^2} = 2g_T$$

Como $P = F_G = m \cdot g$, resulta que el peso ($2m \cdot g_T$) será el doble que en la Tierra.

44. **La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra su diámetro, 10 veces mayor que el terrestre, y su distancia media al Sol, 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol.**

a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg.

b) Calcule el tiempo que tarda Júpiter en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres.

Datos: $g = 10$ m · s^{-2}; radio orbital terrestre = 1,5 · 10^{11} m.

(Andalucía, 2007)

a) $P = F_G = m \cdot g$ y $g_J = G \cdot \dfrac{M_J}{R_J^2}$.

Si $M_J = 300 \cdot M_T$ y $R_J = 10 \cdot R_T \rightarrow g_J = G \cdot \dfrac{300 \cdot M_T}{(10 \cdot R_T)^2} = 3 \cdot g_T \rightarrow$

$$\rightarrow P = m \cdot g_J = 75 \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10 \text{ m/s} = 2250 \text{ N}$$

b) De acuerdo con la tercera ley de Kepler, cualquier planeta que gira alrededor del Sol verifica: $\dfrac{T^2}{r^3} = \text{cte}$.

Por tanto, $\dfrac{T_T^2}{r_T^3} = \dfrac{T_J^2}{r_J^3} = \text{cte}$. Además, $r_J = 5 \cdot r_T$. Igualando:

$$\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_J^2}{(5 \cdot r_T)^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_J^2}{5^3} = T_T^2 \rightarrow T_J^2 = 5^3 \cdot T_T^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_J = \sqrt{5^3} \cdot T_T = 11{,}18 \cdot T_T$$

Por tanto, el periodo de Júpiter es de 11,18 años terrestres.

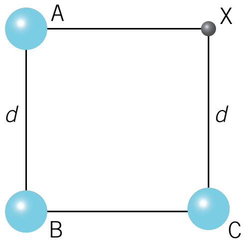
45. **Tenemos tres cuerpos iguales de gran masa, A, B y C, y uno de pequeña masa, X. Si los disponemos consecutivamente en los vértices de un cuadrado, A y B por un lado y C y X por otro:**

a) A y B se acercarán uno al otro más rápidamente.

b) C y X se acercarán uno al otro más rápidamente.

c) Se acercarán ambas parejas con la misma aceleración.

La rapidez con la que un cuerpo se acerca a otro depende de su aceleración. Tal y como están anunciadas las posibles respuestas, estudiamos el acercamiento de cada pareja de masas con independencia de la presencia de la otra pareja.



La fuerza con que se atraen las masas A y B es:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot M}{d^2}$$

M: masa de A, B, C.
m: masa de X.

Como los dos cuerpos tienen la misma masa:

$$F_G = M \cdot a \rightarrow G \cdot \frac{M}{d^2} = a_A = a_B$$

La fuerza con que se atraen las masas C y X es:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

La aceleración de los cuerpos C y X es distinta:

$$F_{GX} = m \cdot a_X \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{d^2} = \cancel{m} \cdot a_X \rightarrow G \cdot \frac{M}{d^2} = a_X$$

$$F_{GC} = M \cdot a_C \rightarrow G \cdot \frac{\cancel{M} \cdot m}{d^2} = \cancel{M} \cdot a_C \rightarrow G \cdot \frac{m}{d^2} = a_C$$

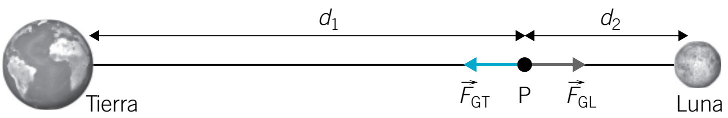
El cuerpo C se mueve con menor aceleración que cualquiera de los otros tres; por tanto, la pareja A, B se acerca uno al otro con más rapidez que la pareja C y X. En realidad, A se moverá hacia abajo y hacia la derecha; B, hacia arriba y hacia la derecha; C, hacia arriba y hacia la izquierda; y X, hacia abajo y hacia la izquierda.

46. **Sabiendo que la distancia entre la Tierra y la Luna es de $3,84 \cdot 10^8$ m, ¿en qué punto debiera situarse un satélite de 10 toneladas para que sea igualmente atraído por ambas? ¿Y si el cuerpo tuviese 20 toneladas?**

Dato: la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra.

(P. Asturias. Septiembre, 1999)

El punto que buscamos (P) es aquel en el que un cuerpo cualquiera se verá atraído por la Tierra con una fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce la Luna sobre él.



Por la definición de fuerza gravitatoria:

$$F_{GT} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d_1^2};\ F_{GL} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{d_2^2}$$

Y queremos que $F_{GT} = F_{GL}$:

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{d_1^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_L \cdot \cancel{m}}{d_2^2} \rightarrow \frac{M_T}{d_1^2} = \frac{M_L}{d_2^2} \qquad [1]$$

Además sabemos que $d_1 + d_2 = 3{,}84 \cdot 10^8$ m $\rightarrow d_1 = 3{,}84 \cdot 10^8$ m $- d_2$ y $M_L = 0{,}012 \cdot M_T$. Retomando [1]:

$$\frac{\cancel{M_T}}{(3{,}84 \cdot 10^8 - d_2)^2} = \frac{\cancel{M_T} \cdot 0{,}012}{d_2^2} \rightarrow d_2^2 = 0{,}012 \cdot (3{,}84 \cdot 10^8 - d_2)^2$$

Desarrollando la ecuación de 2.° grado y descartando el resultado negativo, resulta:

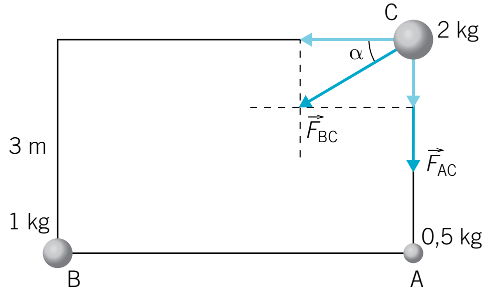
$$d_2 = 37{,}906 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\text{y } d_1 = 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m} - 37{,}906 \cdot 10^6 \text{ m} = 346{,}094 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Y la solución es independiente de la masa del cuerpo.

47. En los vértices inferiores de un rectángulo de 5 m de lado se han colocado dos masas de 1 kg y 0,5 kg, respectivamente. Determina la fuerza que ejercen sobre otra masa de 2 kg que está en el tercer vértice, si la altura del rectángulo es de 3 m.

Llamamos A al cuerpo de 0,5 kg y B al cuerpo de 1 kg, respectivamente. $\vec{F}_{AC}$ será la fuerza ejercida sobre el cuerpo C de 2 kg por el cuerpo A; y $\vec{F}_{BC}$, la ejercida por el cuerpo B.



$\vec{F}_{AC}$ tiene la dirección y sentido que se indica, y el módulo será:

$$F_{AC} = G \cdot \frac{m_A \cdot m_C}{d_{AC}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{kg}}{\text{kg}^2} \cdot \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 2 \text{ kg}}{3^2 \text{ m}^2} = 7{,}41 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

En forma vectorial:

$$\vec{F}_{AC} = -F_{AC} \cdot \vec{j} = -7{,}41 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La distancia que separa las masas C y B es:

$$\sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}83 \text{ m}$$

$\vec{F}_{BC}$ tiene la dirección y sentido que se indica, y el módulo será:

$$F_{BC} = G \cdot \frac{m_B \cdot m_C}{d_{BC}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{kg}}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ kg}}{5{,}83^2 \text{ m}^2} = 3{,}92 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

Para poder hacer la suma de ambas fuerzas, expresamos $\vec{F}_{BC}$ de forma vectorial. Obtendremos sus componentes proyectando la fuerza sobre los ejes cartesianos:

$$\vec{F}_{BC} = -F_{BC} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - F_{BC} \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{BC} = -3{,}92 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{5}{5{,}83} \cdot \vec{i} - 3{,}92 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{3}{5{,}83} \cdot \vec{j} \text{ N} =$$

$$= -3{,}36 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 2{,}02 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por superposición: $\vec{F}_T = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC}$.

$$\vec{F}_T = (-7{,}41 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}) + (-3{,}36 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 2{,}02 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_T = -3{,}36 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 9{,}43 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

El módulo será:

$$F_T = \sqrt{(-3{,}36 \cdot 10^{-12})^2 + (-9{,}43 \cdot 10^{-12})^2} = 1 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

2

El campo gravitatorio

PRESENTACIÓN

- Tras estudiar la ley de la gravitación universal propuesta por Newton, en este tema nos proponemos estudiar la interacción gravitatoria como una perturbación que modifica las propiedades del medio en el que se encuentran los cuerpos por el hecho de tener masa. Utilizaremos el concepto de campo para describir la perturbación cuyo valor en cada punto nos permitirá predecir la interacción que sufrirá un cuerpo determinado que se coloque en ese punto. Tanto el estudio del campo como el de la interacción se hará de forma dinámica y energética.
- La segunda parte del tema se dedica a profundizar en el concepto de campo gravitatorio terrestre y en sus implicaciones en el movimiento de los satélites artificiales; dispositivos tecnológicos cada vez más utilizados para realizar comunicaciones, hacer predicciones meteorológicas, etc.

OBJETIVOS

- Reconocer el concepto campo como un recurso adecuado para estudiar la interacción a distancia.
- Separar conceptualmente la perturbación provocada por un cuerpo en el espacio que le rodea de la acción que sufre otro cuerpo que penetra en el campo.
- Aprender a manejar con soltura la función intensidad de campo y la función potencial como dos funciones matemáticas (la primera, vectorial, y la segunda, escalar) que definen la perturbación gravitatoria.
- Obtener una representación gráfica del campo gravitatorio.
- Comprender la interacción gravitatoria como una interacción conservativa.
- Utilizar el principio de superposición para determinar el valor del campo creado por un conjunto de masas puntuales.
- Identificar la Tierra como una distribución continua de masa y abordar el estudio del campo gravitatorio que crea en distintos puntos por encima y por debajo de su superficie.
- Reconocer el campo gravitatorio terrestre como el responsable del movimiento de los satélites artificiales.
- Aplicar la ley de la gravitación universal y el principio fundamental de la dinámica para estudiar el movimiento de los satélites que orbitan la Tierra.

2 El campo gravitatorio

CONTENIDOS

Conceptos

- El campo como un concepto para estudiar la interacción que un cuerpo crea en el espacio que le rodea.
- Definición del vector intensidad de campo gravitatorio creado por un cuerpo puntual. Relación con la aceleración de caída libre.
- Relación de la intensidad en un punto del campo creado por un cuerpo con la fuerza gravitatoria que ejerce sobre otro cuerpo colocado en ese punto.
- Demostración de que el campo gravitatorio es un campo conservativo.
- Definición del potencial en un punto del campo y su relación con la energía potencial que adquiere otro cuerpo que se coloca en dicho punto.
- Relación entre el trabajo que realizan las fuerzas del campo cuando un cuerpo se desplaza de un punto a otro y la variación de energía potencial en el desplazamiento.
- Conservación de la energía mecánica.
- Estudio de campos creados por varias masas puntuales. Principio de superposición.
- Representación gráfica del campo: líneas de campo y superficies equipotenciales.
- Estudio del campo gravitatorio que crea la Tierra; variación en función de la profundidad, la altitud y la latitud.
- El movimiento de satélites en torno a la Tierra. Estudio de sus características orbitales, de la velocidad para que alcance una órbita determinada y de la velocidad de escape.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Adquirir capacidad para manejar datos de orden de magnitud muy diferente.
- Llevar a cabo un esfuerzo de abstracción para diferenciar la perturbación que provoca un cuerpo de la interacción que sufre un segundo cuerpo por la perturbación creada por el primero.
- Valorar la representación gráfica de una propiedad por medio de las líneas de campo o las superficies equipotenciales.
- Adquirir soltura en la representación gráfica de los problemas a estudiar. Manejar el lenguaje simbólico.
- Ser riguroso en el manejo de magnitudes vectoriales.
- Reconocer las magnitudes y las relaciones entre ellas que se requieren para estudiar el movimiento de satélites.

Actitudes

- Interés por aplicar los conocimientos teóricos que aporta este tema para comprender el movimiento de los satélites artificiales.
- Comprender el esfuerzo científico y tecnológico que supone enviar una nave al espacio. Valorar el esfuerzo que requiere su recuperación.

EDUCACIÓN EN VALORES

Este tema nos permite abordar la educación en valores bajo diversos aspectos.

1. Educación cívica

Las primeras aplicaciones de los satélites artificiales que orbitaban la Tierra eran de carácter militar. Pero hoy en día la mayoría se emplean en tareas de comunicación y predicción meteorológica. Su coste obliga, en ocasiones, a que varios países o instituciones se unan para el mantenimiento de un servicio; sirva como ejemplo el sistema Galileo de comunicaciones que están tratando de poner en marcha los países de la Unión Europea.

Al hilo de estas ideas se puede reflexionar con el alumnado acerca del cambio social que han provocado los avances tecnológicos relacionados con los satélites artificiales. También se puede analizar la relación coste-beneficio de estos servicios y compararlo con el coste que supondrían otros beneficios que requieren con urgencia ciertos sectores de la humanidad.

2. Educación medioambiental

La actividad de los satélites artificiales provoca la aparición de basura espacial. Se puede reflexionar con el alumnado sobre este hecho a fin de que, desde una posición más amplia que la que representa ser vecinos de un barrio, tomen postura y tengan una opinión formada acerca de lo que conviene hacer con esa basura. ¿Qué puede significar la idea de reutilizar, reciclar y recuperar la basura espacial?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Calcular el campo y el potencial gravitatorios que una masa puntual crea en un punto del espacio determinado.
2. Hallar el campo y el potencial gravitatorios que un conjunto de masas puntuales crea en un punto del espacio determinado.
3. Calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo que está en un determinado punto de un campo creado por una o más masas puntuales.
4. Averiguar e interpretar el signo del trabajo o la energía que se requiere para que un cuerpo se desplace de un punto a otro de un campo gravitatorio.
5. Representar gráficamente el campo gravitatorio creado por una o más masas puntuales. Reconocer las propiedades de las líneas de campo y las superficies equipotenciales.
6. Calcular e interpretar el valor de la intensidad del campo gravitatorio creado por la Tierra en distintos puntos por encima y por debajo de su superficie.
7. Realizar cálculos relativos al movimiento de los satélites artificiales que orbitan la Tierra. Determinar el peso del satélite, el radio de la órbita, el periodo, etc.
8. Determinar la energía que se requiere para poner un satélite en una órbita concreta, para que pase de una órbita a otra o para que escape del campo gravitatorio terrestre.

2 El campo gravitatorio

1. **Dos masas puntuales de 10 kg cada una están en las posiciones (5, 0) y (−5, 0). Una tercera masa de 0,1 kg se deja en libertad y con velocidad nula en el (0, 10). Calcula:**

a) La aceleración que actúa sobre la masa en las posiciones:

- **A (0, 10).**
- **B (0, 0).**

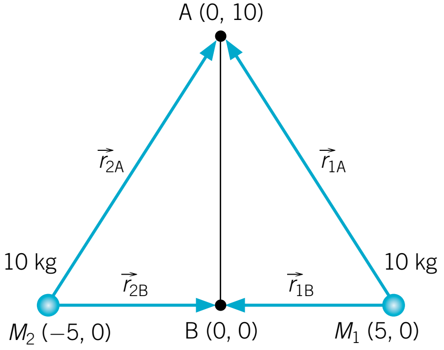
b) La velocidad de la masa de 0,1 kg en (0, 0).

a) De acuerdo con el principio fundamental de la dinámica:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Cuando la fuerza que actúa sobre un cuerpo es la gravitatoria, la aceleración coincide con el vector intensidad del campo gravitatorio en el punto:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$



Calculamos el valor de la intensidad del campo gravitatorio en los puntos A y B.

Por el principio de superposición:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A};\ \vec{g}_B = \vec{g}_{1B} + \vec{g}_{2B}$$

Sabemos que $\vec{r}_{1A}$ es un vector con origen en (5, 0) y extremo en (0, 10). Por tanto:

$$\vec{r}_{1A} = -5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{1A} = \frac{\vec{r}_{1A}}{|\vec{r}_{1A}|} = \frac{-5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{-5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{11{,}18}$$

Queda:

$$\vec{g}_{1A} = -\frac{G \cdot M_1}{r_{1A}^2} \cdot \vec{u}_{r\,1A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{11{,}18^2} \cdot \frac{-5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{11{,}18}\ \text{N/kg} =$$

$$= 2{,}386 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 4{,}773 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}\ \text{N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_{2A}$ es un vector con origen en (–5, 0) y extremo en (0, 10). Por tanto:

$$\vec{r}_{2A} = 5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{2A} = \frac{\vec{r}_{2A}}{|\vec{r}_{2A}|} = \frac{5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{11{,}18}$$

Queda:

$$\vec{g}_{2A} = -\frac{G \cdot M_2}{r_{2A}^2} \cdot \vec{u}_{r\,2A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{11{,}18^2} \cdot \frac{5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}}{11{,}18} \text{ N/kg} =$$

$$= -2{,}386 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 4{,}773 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Finalmente:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A} = (2{,}386 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 4{,}773 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}) \text{ N/kg} +$$

$$+ (-2{,}386 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 4{,}773 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}) \text{ N/kg} =$$

$$= -9{,}546 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Los cálculos son análogos para B.

Sabemos que $\vec{r}_{1B}$ es un vector con origen en (5, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{1B} = -5 \cdot \vec{i} \rightarrow \vec{u}_{1B} = \frac{\vec{r}_{1B}}{|\vec{r}_{1B}|} = \frac{-5 \cdot \vec{i}}{5} = -\vec{i}$$

Queda:

$$\vec{g}_{1B} = -\frac{G \cdot M_1}{r_{1B}^2} \cdot \vec{u}_{r\,1B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{5^2} \cdot (-\vec{i}) \text{ N/kg} =$$

$$= 26{,}68 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} \text{ N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_{2B}$ es un vector con origen en (–5, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{2B} = 5 \cdot \vec{i} \rightarrow \vec{u}_{2B} = \frac{\vec{r}_{2B}}{|\vec{r}_{2B}|} = \frac{5 \cdot \vec{i}}{5} = \vec{i}$$

Queda:

$$\vec{g}_{2B} = -\frac{G \cdot M_2}{r_{2B}^2} \cdot \vec{u}_{r\,2B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{5^2} \cdot \vec{i} \text{ N/kg} =$$

$$= -26{,}68 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} \text{ N/kg}$$

Por último:

$$\vec{g}_B = \vec{g}_{1B} + \vec{g}_{2B} = 26{,}68 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 26{,}68 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} = 0$$

b) Si admitimos que la única interacción que existe es la gravitatoria, se conservará la energía mecánica. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a los puntos A y B:

$$E_{C\,A} + E_{P\,A} = E_{C\,B} + E_{P\,B}$$

- $E_{P\,A} = E_{P\,1A} + E_{P\,2A} = -\dfrac{GM_1 \cdot m}{r_{1A}} - \dfrac{GM_2 \cdot m}{r_{2A}} =$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{11{,}18} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{11{,}18} =$$

$$= -11{,}93 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

- $E_{P\,B} = E_{P\,1B} + E_{P\,2B} = -\dfrac{GM_1 \cdot m}{r_{1B}} - \dfrac{GM_2 \cdot m}{r_{2B}} =$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{5} =$$

$$= -26{,}68 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Por tanto, usando unidades del SI:

$$E_{C\,A} + E_{P\,A} = E_{C\,B} + E_{P\,B} \to 0 + E_{P\,A} = \frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2 + E_{P\,B} \to$$

$$\to 0 - 11{,}93 \cdot 10^{-12} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot v_B^2 - 26{,}68 \cdot 10^{-12} \to$$

$$\to v_B = 1{,}72 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}$$

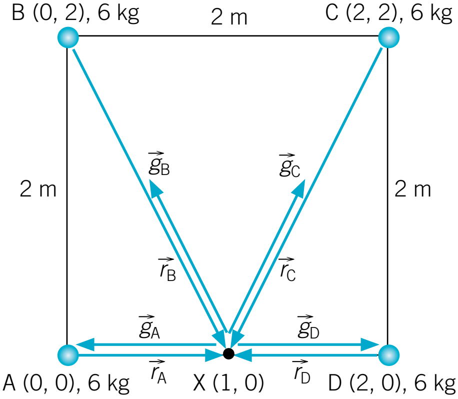
2. Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcula:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.

b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

(C. Madrid, 2008)



a) Dado que el sistema es perfectamente simétrico, calculamos el campo gravitatorio en uno de los lados:

$$\vec{g}_X = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C + \vec{g}_D$$

Sabemos que $\vec{r}_A$ es un vector con origen en (0, 0) y extremo en (1, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_A = \vec{i} \to \vec{u}_{rA} = \frac{\vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} = \frac{\vec{i}}{1} = \vec{i}$$

Tenemos:

$$\vec{g}_A = -\frac{G \cdot M_A}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{1^2} \cdot \vec{i}\ \text{N/kg} =$$

$$= -4{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\ \text{N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_B$ es un vector con origen en (0, 2) y extremo en (1, 0).

Por tanto:

$$\vec{r}_B = \vec{i} - 2\,\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{rB} = \frac{\vec{r}_B}{|\,\vec{r}_B|} = \frac{\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

Queda:

$$\vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r_B^2} \cdot \vec{u}_{rB} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{5} \cdot \frac{\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{5}}\ \text{N/kg} =$$

$$= -3{,}58 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 7{,}16 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ \text{N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_C$ es un vector con origen en (2, 2) y extremo en (1, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_C = -\vec{i} - 2\,\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{rC} = \frac{\vec{r}_C}{|\,\vec{r}_C|} = \frac{-\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

Queda:

$$\vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r_C^2} \cdot \vec{u}_{rC} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{5} \cdot \frac{-\vec{i} - 2\,\vec{j}}{\sqrt{5}}\ \text{N/kg} =$$

$$= 3{,}58 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 7{,}16 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ \text{N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_D$ es un vector con origen en (2, 0) y extremo en (1, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_D = -\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{rC} = \frac{\vec{r}_D}{|\,\vec{r}_D|} = \frac{-\vec{i}}{1} = -\vec{i}$$

Queda:

$$\vec{g}_D = -\frac{G \cdot M_D}{r_D^2} \cdot \vec{u}_{rD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{1^2} \cdot (-\vec{i}\,)\ \text{N/kg} =$$

$$= 4 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\ \text{N/kg}$$

Finalmente:

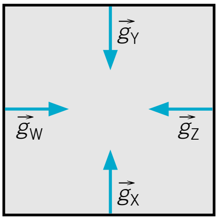
$$\vec{g}_X = (-4 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\,) + (-3{,}58 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 7{,}16 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\,) +$$

$$+ (3{,}58 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 7{,}16 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\,) + (4 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\,) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_X = +1{,}43 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}\ \text{N/kg}$$

De forma similar se calcularía el campo en el centro de los otros lados. El resultado sería:

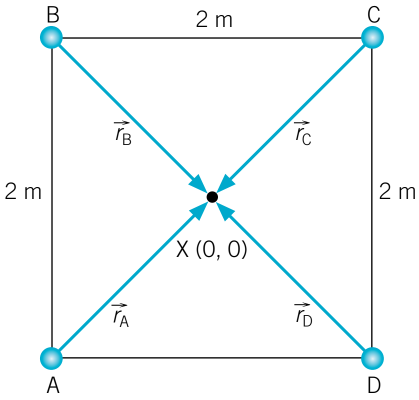
- $\vec{g}_Y = -1{,}43 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}$ N/kg
- $\vec{g}_W = +1{,}43 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}$ N/kg
- $\vec{g}_Z = -1{,}43 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}$ N/kg



b) Dado que el potencial es un escalar, calculamos el valor del potencial en el centro (punto X) como la suma del potencial que crea cada una de las masas que están en los vértices:

$V_X = V_A + V_B + V_C + V_D$

Tomando el infinito como origen de potenciales, el potencial en un punto r creado por la masa M viene dado por la expresión:



$$V = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Todos los puntos están a la misma distancia del centro, que es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$r = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_A = -\frac{G \cdot M_A}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{\sqrt{2}} = -2{,}83 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Como $V_A = V_B = V_C = V_D$:

$$V_X = 4 \cdot V_A = 4 \cdot (-2{,}83 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}) = -1{,}13 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

3. **Suponiendo que la Tierra es una esfera maciza de $R = 6370$ km y $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, señala en qué punto del interior de la Tierra un cuerpo de masa m pesa lo mismo que en lo alto del pico del Teide (3718 m de altura).**

Primeramente, obtenemos g para la altura del Teide. Como no nos dan G:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Así:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)^2} = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} =$$

$$= g_0 \cdot \frac{(6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 + 3718)^2} \rightarrow g = 0{,}9988 \cdot g_0$$

De acuerdo con el teorema de Gauss, para puntos interiores a la Tierra ($r < R_T$):

$$g = g_0 \cdot \frac{r}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = R_T \cdot \frac{g}{g_0} = R_T \cdot \frac{0{,}9988 \cdot \cancel{g_0}}{\cancel{g_0}} = 0{,}9988 \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m} =$$

$$= 6{,}362356 \cdot 10^6 \text{ m} = 6362{,}36 \text{ km}$$

El punto se encuentra a una profundidad de:

6370 km – 6362,36 km = 7,64 km desde la superficie de la Tierra

4. **Razona sobre la veracidad o falsedad de esta frase: «No todos los puntos de un mismo paralelo terrestre tienen el mismo valor de la gravedad aunque se encuentren a la misma altura»:**

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Depende de qué paralelo sea.

La respuesta correcta es la b) Falso, ya que todos los puntos del mismo paralelo tienen la misma latitud, por lo que, si están a la misma altura, tendrán el mismo valor de gravedad, ya que no hay variación por latitud.

5. **Razona sobre la veracidad o falsedad de esta frase: «No todos los puntos de un mismo meridiano terrestre tienen el mismo valor de la gravedad, aunque se encuentren a la misma altura»:**

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Depende de qué meridiano sea.

La respuesta correcta es la a) Verdadero, ya que en un mismo meridiano hay variación de latitud y, por lo tanto, existe una variación de la gravedad asociada a la latitud.

6. **Tras estudiar este apartado, Luisa y Juan deciden emprender un negocio para hacerse ricos sin grandes esfuerzos; consiste en comprar lingotes de oro en Ecuador y venderlos en Groenlandia. Razona si este negocio puede tener éxito o conviene que piensen en otra alternativa.**

Si se utilizan balanzas que determinan el peso de un cuerpo por comparación con unas pesas determinadas, los lingotes pesarán lo mismo en cualquier punto, ya que la influencia de la atracción gravitatoria sobre el lingote se da de forma idéntica en las pesas.

Si se utilizan balanzas que miden la fuerza de atracción gravitatoria, por ejemplo, midiendo el estiramiento que sufre un muelle del que cuelga el lingote, este pesará más en el polo que en el ecuador. La razón es que, debido al movimiento de rotación de la Tierra, los cuerpos que están en el ecuador están sometidos a una fuerza centrífuga que se opone a la gravitatoria y, en consecuencia, la atracción gravitatoria efectiva que sufren los cuerpos en el ecuador es menor de la que tendrían si la Tierra no rotase. La fuerza centrífuga es directamente proporcional al radio de la órbita que describe el cuerpo en su movimiento de rotación con la Tierra, por lo que es nula en el polo; en el polo la fuerza gravitatoria efectiva que sufren los cuerpos (su peso) coincide con la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce realmente la Tierra.

7. Un satélite artificial de 500 kg de masa, que se encuentra en una órbita circular, da una vuelta a la Tierra en 48 horas.

a) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encuentra?

b) Calcula la aceleración del satélite en su órbita.

c) ¿Cuál será su periodo cuando se encuentre a una altura de la superficie terrestre igual a dos veces el radio de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

(Canarias. Junio, 2005)

a) Para el satélite que gira a una altura h:

$$F_C = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2$$

Como conocemos el tiempo que tarda en dar una vuelta, ponemos v en función de T:

$$v = \omega \cdot r;\ \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 = \frac{GM_T}{r}$$

El periodo es:

$$T = 48\ \cancel{h} \cdot \frac{60\ \cancel{min}}{1\ \cancel{h}} \cdot \frac{60\ s}{1\ \cancel{min}} = 172\,800\ s$$

Reordenando y despejando la expresión anterior:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 172\,800^2}{4\pi^2}} =$$
$$= 67{,}03 \cdot 10^6\ m$$

Queda:

$$h = r - R_T = 67{,}03 \cdot 10^6\ m - 6370 \cdot 10^3\ m = 60{,}66 \cdot 10^6\ m$$

b) Coincide con el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto. También se podría calcular como $a = \frac{v^2}{r}$.

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(67{,}03 \cdot 10^6)^2} = 8{,}86 \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}^2$$

c) En esa órbita también se cumplirá:

$$F_C = F_G \rightarrow G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2$$

$$v = \omega \cdot r;\ \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 = \frac{GM_T}{r}$$

De aquí se deduce el valor de T (unidades del SI):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (3 \cdot R_T)^3}{GM_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (3 \cdot 6370 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}} = 26{,}304 \cdot 10^3\ \text{s} =$$

$$= 7{,}3\ \text{h} = 7\ \text{h}\ 18\ \text{min}$$

8. Se desea situar un par de satélites artificiales en una órbita ecuatorial. Se pretende que el primero de ellos sea geoestacionario, mientras que el segundo se situará al doble de distancia del centro de la Tierra. Calcula:

a) La altura a la cual debe orbitar el primero.

b) El periodo de orbitación del segundo.

c) ¿En qué influiría la masa de los satélites?

Datos: R_T = 6370 km; M_T = 5,96 · 10^{24} kg;
G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}.

a) El satélite geoestacionario tendrá el mismo periodo de rotación que la Tierra, es decir, 1 día. Obtenemos la altura a la que debe orbitar.

Cuando el satélite está en órbita:

$$F_C = F_G \rightarrow G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2$$

Conocemos el periodo T:

$$v = \omega \cdot r;\ \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 = \frac{GM_T}{r}$$

Despejando r podremos calcular el radio de la órbita.

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot GM_T}{4\pi^2}} \qquad [1]$$

Sustituyendo los datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600 \text{ s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2}} = 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m} - 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} = 3{,}59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) Obtenemos el radio de órbita del segundo satélite a partir del radio obtenido en el apartado anterior:

$$r_2 = 2 \cdot r = 2 \cdot 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m} = 8{,}46 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Reordenamos la expresión [1] para obtener el periodo. Sustituyendo los datos correspondientes a este caso:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r_2^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (8{,}46 \cdot 10^7)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}} = 2{,}45 \cdot 10^5 \text{ s} = 68 \text{ h}$$

c) La masa del satélite no influye ni en el periodo ni en el radio de la órbita. Influiría en la energía mecánica de los sistemas o en la determinación de su peso en un lugar determinado.

9. Los NOAA son una familia de satélites meteorológicos norteamericanos que orbitan la Tierra pasando sobre los polos, con un periodo aproximado de 5 horas. Calcula:

a) La altura a la que orbitan sobre la superficie de la Tierra.

b) La velocidad con que lo hacen.

Datos: $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}.

a) Para el satélite que gira a una altura h:

$$F_C = F_G \rightarrow G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2$$

El periodo es:

$$T = 5 \,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60 \,\cancel{\text{min}}}{1 \,\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \,\cancel{\text{min}}} = 18\,000 \text{ s} = 5 \text{ h}$$

Como conocemos el tiempo que tarda en dar una vuelta, ponemos v en función de T:

$$v = \omega \cdot r;\ \omega = \frac{2\pi}{T};\ v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 = \frac{GM_T}{r}$$

Reordenando y despejando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 18\,000^2}{4\pi^2}} = 14{,}84 \cdot 10^6 \text{ m} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = r - R_T = 14{,}84 \cdot 10^6 \text{ m} - 6370 \cdot 10^3 \text{ m} = 8{,}47 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) Para el satélite que gira a una altura h:

$$F_C = F_G \rightarrow G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{14{,}84 \cdot 10^6}} = 5{,}18 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

10. **Un satélite artificial describe una órbita circular de radio $2R_T$ en torno a la Tierra. Calcula:**

a) La velocidad orbital.

b) El peso del satélite en la órbita si en la superficie de la Tierra pesa 5000 N (dibuja las fuerzas que actúan sobre el satélite).

Datos: $R_T = 6370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $g_0 = 9{,}8$ m/s².

a) Para el satélite que gira a una altura h:

$$F_C = F_G \rightarrow G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Además:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^{\cancel{2}}}{2\cancel{R_T}}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 6370 \cdot 10^3}{2}} = 5{,}587 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

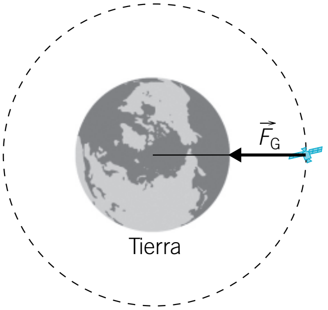
b) $F = m \cdot g$. Para la fuerza peso, en la Tierra: $P = mg$.

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{G \cdot M_T}{(2 \cdot R_T)^2} =$$

$$= \frac{g_0 \cdot R_T^2}{4 \cdot {R_T}^2} = \frac{g_0}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = m \cdot g = m \cdot \frac{g_0}{4} =$$

$$= \frac{P_T}{4} = \frac{5000 \text{ N}}{4} = 1250 \text{ N}$$



La única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, es decir, el peso del satélite.

11. Calcula la velocidad con que debe lanzarse un satélite de 500 kg desde la superficie de la Tierra para llevarlo a 2000 km de altura. ¿Con qué velocidad debería lanzarse para llevarlo al infinito?

Datos: R_T = 6370km y $g_{0\ \text{Tierra}}$ = 9,8 m · s^{-2}.

Admitiendo que la única interacción que actúa sobre el sistema es la gravitatoria, se conserva la energía mecánica, de forma que la energía mecánica del sistema en el punto del lanzamiento ($E_{M\,i}$) coincide con la energía mecánica en la órbita ($E_{M\,f}$).

$$E_{M\,i} = E_{M\,f} \rightarrow E_{C\,i} + E_{P\,i} = E_{M\,f} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m_s}\cdot v_i^2 - \frac{G\cdot M\cdot \cancel{m_s}}{R_T} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot\cancel{m_s}}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}v_i^2 = \frac{G\cdot M}{R_T} - \frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M}{r} = GM\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

Para que un cuerpo alcance una órbita a una determinada altura h, tal que:

$$r = h + R_T = 2000\cdot 10^3\ \text{km} + 6370\cdot 10^3\ \text{km} = 8370\ \text{km}$$

debe lanzarse con una velocidad:

$$v_i = \sqrt{2GM\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6370\cdot 10^3} - \frac{1}{2\cdot 8370\cdot 10^3}\right)} =$$

$$= 8{,}8\cdot 10^3\ \text{m/s}$$

Para que alcance el infinito (velocidad de escape), debe ser $r = \infty$:

$$v_i' = \sqrt{2GM\cdot\left(\frac{1}{R_T} - 0\right)} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6370\cdot 10^3}\right)} = 11{,}18\cdot 10^3\ \text{m/s}$$

12. Calcula la energía cinética que tendría que tener una persona de 70 kg para estar dando vueltas alrededor de la Tierra en su superficie sin caer. Calcula cuánta energía sería necesaria para elevarla a una órbita estable de 6370 km de altura.

Datos: R_T = 6370 km y $g_{0\ \text{Tierra}}$ = 9,8 m · s^{-2}.

Para el satélite que gira a una altura h por encima de la superficie de la Tierra:

$$F_C = F_G \rightarrow G\cdot\frac{M_T\cdot\cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s}\cdot v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T + h}}$$

Además:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Para la superficie de la Tierra: $r = R_T$.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^{\cancel{2}}}{\cancel{R_T}}} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6370 \cdot 10^3} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}5 \cdot 70 \cdot (7{,}9 \cdot 10^3)^2 = 2{,}18 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se trata de llevar a la persona a una órbita estable de $r = R_T + h = 2R_T$. Habrá que comunicarle una energía que sea la diferencia entre la energía de la persona en las dos órbitas:

$$\Delta E = E_{M2} - E_{M1} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2R_T} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} =$$

$$= G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_T}\right) = GM_T \cdot m \cdot \frac{R_T}{2R_T^2} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2R_T}$$

Haciendo uso de la relación $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$:

$$\Delta E = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2R_T} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{2R_T} = \frac{g_0 \cdot R_T \cdot m}{2} =$$

$$= \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 75 \text{ kg}}{2} = 2{,}34 \cdot 10^9 \text{ J}$$

13. Indica si es cierta o no la siguiente expresión:

«Si el valor del campo gravitatorio debido a una masa M_1 en un punto A es -8 N/kg y el campo en ese mismo punto creado por una masa M_2 es -4 N/kg, el campo debido a la acción conjunta de las masas M_1 y M_2 en el punto A es -12 N/kg».

Es falsa, ya que en virtud del principio de superposición el campo gravitatorio total se obtiene como la suma vectorial de los campos gravitatorios debidos a cada masa. Sería necesario conocer dirección y sentido de ambos para poder realizar el cálculo.

14. Indica si es cierta o no la siguiente expresión:

«Si el valor del potencial gravitatorio debido a una masa M_1 en un punto A es -8 J/kg y el potencial en ese mismo punto creado por una masa M_2 es -4 J/kg, el potencial debido a la acción conjunta de las masas M_1 y M_2 en el punto A es -12 J/kg».

Es verdadera, ya que en virtud del principio de superposición, como el potencial gravitatorio es una función escalar, el total se obtiene como la suma escalar de los potenciales gravitatorios creados por cada masa.

15. **Dadas dos masas M_1 y M_2:**

a) ¿Existirá algún punto del espacio en el que el campo gravitatorio provocado por esas dos masas sea cero?

b) ¿Existirá algún punto del espacio en el que el potencial gravitatorio provocado por esas dos masas sea cero?

a) Existe un punto del espacio en el que el campo gravitatorio provocado por ambas masas se anula, y se encuentra sobre la línea que une ambas masas, ya que al ser su dirección la misma y sentidos opuestos, se anulará en el punto en que su módulo se iguale.

b) No existe ningún punto del campo en el que el potencial gravitatorio se anule, ya que es una función escalar cuyo signo es siempre negativo. Solo en las zonas del espacio donde no se aprecie el efecto de ese campo (en $r = \infty$) se puede decir que el potencial es cero.

16. **Razona cuál de las siguientes respuestas es correcta: dadas dos masas puntuales iguales, el campo y el potencial en el punto medio de la línea que une ambas masas es:**

a) $g = 0$; $V < 0$.

b) $g = 0$; $V = 0$.

c) $g = 0$; $V > 0$.

d) $g \neq 0$; $V < 0$.

e) $g \neq 0$; $V > 0$.

En el punto medio de la línea que las une, como los vectores de posición y las masas son iguales, el módulo de $\vec{g}$ será también igual. La dirección también es la misma y, al ser sus sentidos diferentes, el resultado será cero.

Además, el potencial gravitatorio no se anula ni podrá ser positivo, ya que es una función escalar cuyo signo es siempre negativo.

Con todo esto, la opción a) es la correcta.

17. **Justifica si es cierta la siguiente afirmación:**

«Cuando dos masas M_1 y M_2 crean un campo gravitatorio en la misma región del espacio, hay puntos en los que se cruzan las líneas del campo que crea cada una de ellas y puntos en los que se cortan las superficies equipotenciales correspondientes a cada una de ellas».

Por las propiedades de las líneas de campo, estas no se pueden cruzar (si dos líneas de campo se cruzan, en el punto de corte existirán dos valores para la intensidad del campo gravitatorio, lo cual es imposible, ya que la intensidad del campo tiene un valor único en cada punto).

Además, tampoco pueden cortarse las superficies equipotenciales (si lo hiciesen, el punto de corte tendría dos valores de potencial, lo cual es imposible porque el potencial tiene un valor único en cada punto), por lo que la afirmación es falsa.

18. **Razona si el vector intensidad de campo gravitatorio tiene el sentido de los potenciales crecientes o decrecientes.**

Tiene el sentido de los potenciales decrecientes.

Las líneas de campo gravitatorio van dirigidas hacia la masa que lo crea. El potencial gravitatorio creado por la masa (negativo) aumenta (se hace menos negativo) a medida que se aleja de la masa:

$$V = -\frac{GM}{r}$$

19. **Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale −200 J hasta otro donde vale −400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza del campo?**

a) −200 J **b) 200 J** **c) −600 J**

El trabajo será:

$$W = -\Delta E_P = E_{P\,i} - E_{P\,f} =$$
$$= -200\text{ J} - (-400\text{ J}) = -200\text{ J} + 400\text{ J} = 200\text{ J}$$

20. **Determina cuánto valdrá el trabajo que realiza la fuerza de un campo gravitatorio para desplazar un cuerpo de masa *m* de un punto A a otro B si ambos pertenecen a la misma superficie equipotencial.**

Las superficies equipotenciales son regiones del espacio en las que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor.

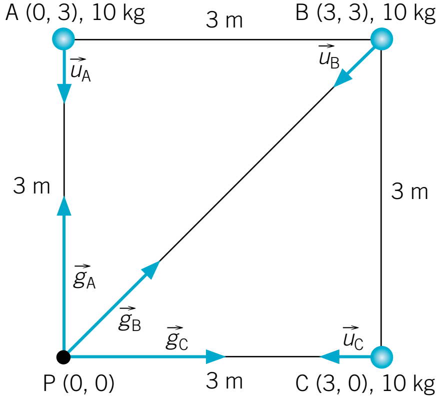
En consecuencia, el trabajo para desplazar una masa de un punto a otro de una superficie equipotencial es nulo:

$$W_{i \to f} = -(E_{P\,f} - E_{P\,i}) = -(m \cdot V_f - m \cdot V_i) = 0$$

21. **En los vértices de un cuadrado de 3 m de lado hay tres masas de 10 kg cada una. Calcula:**

a) La intensidad del campo gravitatorio en el cuarto vértice.

b) El potencial en ese punto.



Hacemos uso del principio de superposición para calcular tanto el campo como el potencial en el cuarto vértice. De acuerdo con nuestro dibujo, se trata del vértice P.

a) $\vec{g}_P = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C$.

Sabemos que $\vec{r}_A$ es un vector con origen en (0, 3) y extremo en (0, 0).

Por tanto:

$$\vec{r}_A = -3 \cdot \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{rA} = \frac{\vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} = \frac{-3 \cdot \vec{j}}{3} = -\vec{j}$$

Queda:

$$\vec{g}_A = -\frac{G \cdot M_A}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3^2} \cdot (-\vec{j}\,) \text{ N/kg} =$$
$$= 74{,}11 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_B$ es un vector con origen en (3, 3) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_B = -3\,\vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{rB} = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|} = \frac{-3\,\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{-3\,\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{18}}$$

Queda:

$$\vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r_B^2} \cdot \vec{u}_{rB} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{18} \cdot \frac{-3\,\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{18}} \text{ N/kg} =$$
$$= 26{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} + 26{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_C$ es un vector con origen en (3, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_C = -3 \cdot \vec{i} \rightarrow \vec{u}_{rC} = \frac{\vec{r}_C}{|\vec{r}_C|} = \frac{-3 \cdot \vec{i}}{3} = -\vec{i}$$

Queda:

$$\vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r_C^2} \cdot \vec{u}_{rC} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3^2} \cdot (-\vec{i}\,) \text{ N/kg} =$$
$$= 74{,}11 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} \text{ N/kg}$$

Por último, tenemos:

$$\vec{g}_P = 74{,}11 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} + 26{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} + 26{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} +$$
$$+ 74{,}11 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} = 100{,}31 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} + 100{,}31 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

b) $V_P = V_A + V_B + V_C$.

- $V_A = -\dfrac{G \cdot M_A}{r_A} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} = -222{,}33 \cdot 10^{-12}$ J/kg
- $V_B = -\dfrac{G \cdot M_B}{r_B} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{18}} = -157{,}21 \cdot 10^{-12}$ J/kg
- $V_C = -\dfrac{G \cdot M_C}{r_C} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} = -222{,}33 \cdot 10^{-12}$ J/kg

Por tanto:

$$V = -222{,}33 \cdot 10^{-12} \text{ J/kg} - 157{,}21 \cdot 10^{-12} \text{ J/kg} +$$
$$- 222{,}33 \cdot 10^{-12} \text{ J/kg} = -601{,}87 \cdot 10^{-12} \text{ J/kg}$$

22. **En tres de los cuatro vértices de un rectángulo tenemos cuerpos puntuales cuya masa es, respectivamente, 0,5, 2 y 3 kg. Los lados del rectángulo miden 30 y 40 m. Calcula:**

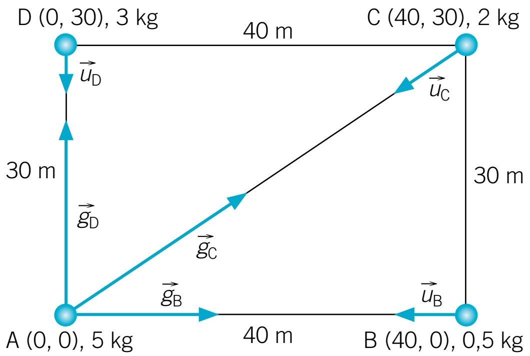
a) El valor del campo gravitatorio en el cuarto vértice.

b) La fuerza que se ejercerá sobre un cuerpo de 5 kg de masa que se sitúe en el cuarto vértice.

c) El trabajo que realiza el campo para llevar ese cuerpo desde el cuarto vértice hasta el centro del rectángulo. Interpreta el signo del resultado.

d) La energía del sistema formado por las tres masas iniciales.

NOTA: Los resultados numéricos van a depender del punto donde se coloque cada masa.



Hacemos uso del principio de superposición para calcular tanto el campo como el potencial en el cuarto vértice. De acuerdo con nuestro dibujo, se trata del vértice A.

a) $\vec{g}_A = \vec{g}_B + \vec{g}_C + \vec{g}_D$.

Sabemos que $\vec{r}_B$ es un vector con origen en (40, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_B = -40 \cdot \vec{i} \rightarrow \vec{u}_{rB} = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|} = \frac{-40 \cdot \vec{i}}{40} = -\vec{i}$$

Queda:

$$\vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r_B^2} \cdot \vec{u}_{rB} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5}{40^2} \cdot (-\vec{i}\,) \text{ N/kg} =$$

$$= 2{,}0844 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} \text{ N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_C$ es un vector con origen en (40, 30) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_C = -40 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rC} = \frac{\vec{r}_C}{|\vec{r}_C|} = \frac{-40 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}}{\sqrt{40^2 + 30^2}} = \frac{-40 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}}{50}$$

Queda:

$$\vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r_C^2} \cdot \vec{u}_{rC} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{50^2} \cdot \frac{-40 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}}{50} \text{ N/kg}$$
$$= 4{,}2688 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} + 3{,}2016 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Sabemos que $\vec{r}_D$ es un vector con origen en (0, 30) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_D = -30 \cdot \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{rD} = \frac{\vec{r}_D}{|\vec{r}_D|} = \frac{-30 \cdot \vec{j}}{30} = -\vec{j}$$

Queda:

$$\vec{g}_D = -\frac{G \cdot M_D}{r_D^2} \cdot \vec{u}_{rD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{30^2} \cdot (-\vec{j}) \text{ N/kg} =$$
$$= 2{,}2333 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Finalmente obtenemos:

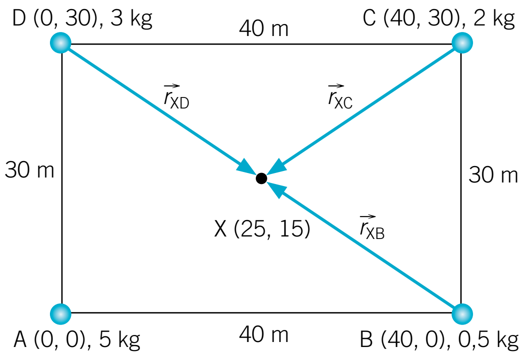
$$\vec{g}_A = \vec{g}_B + \vec{g}_C + \vec{g}_D = 2{,}0844 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} + (4{,}2688 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} +$$
$$+ 3{,}2016 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{j}) + 2{,}22333 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{j} \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{g}_A = 6{,}5532 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} + 2{,}54349 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

b) La fuerza será:

$$\vec{F}_A = m \cdot \vec{g}_A = 5 \cdot (6{,}5532 \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} + 2{,}54349 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{j}) =$$
$$= 3{,}28 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{i} + 1{,}27 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

c) Calculamos el trabajo como la variación de la energía potencial entre ambos puntos:

$$W_{A \rightarrow X} = -\Delta E_P = -E_{P\,X} + E_{P\,A}$$



La E_P es un escalar. Por tanto, la energía potencial debido a las tres masas es la suma de la que produce cada una de ellas de forma independiente.

$$E_{P\,A} = E_{P\,AD} + E_{P\,AB} + E_{P\,AC} =$$
$$= -\frac{G \cdot m_A \cdot M_D}{r_D} - \frac{G \cdot m_A \cdot M_B}{r_B} - \frac{G \cdot m_A \cdot M_C}{r_C}$$

$$E_{P\,X} = E_{P\,XD} + E_{P\,XB} + E_{P\,XC} =$$
$$= -\frac{G \cdot m_A \cdot M_D}{r_{XD}} - \frac{G \cdot m_A \cdot M_B}{r_{XB}} - \frac{G \cdot m_A \cdot M_C}{r_{XC}}$$

La distancia de cada una de las masas a X coincide con la mitad de la diagonal del rectángulo:

$$r_{XD} = r_{XB} = r_{XC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40^2 + 30^2} = 25 \text{ m}$$

- $E_{P\,A} = E_{P\,AD} + E_{P\,AB} + E_{P\,AC} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 3}{30} +$
  $-\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 0{,}5}{40} - \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 2}{50} = -5{,}086 \cdot 10^{-11}\text{ J}$

- $E_{P\,X} = E_{P\,XD} + E_{P\,XB} + E_{P\,XC} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 3}{25} +$
  $-\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 0{,}5}{25} - \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 2}{25} = -7{,}337 \cdot 10^{-11}\text{ J}$

Así pues:

$$W_{A\rightarrow X} = -\Delta E_P = E_{P\,A} - E_{P\,X} =$$
$$= -5{,}086 \cdot 10^{-11}\text{ J} - (-7{,}337 \cdot 10^{-11}\text{ J}) = 2{,}251 \cdot 10^{-11}\text{ J}$$

Como el signo es positivo, el trabajo lo realizan las fuerzas del campo. La masa se desplaza espontáneamente de A al centro.

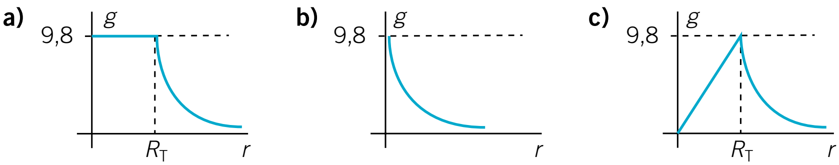
d) La energía del sistema formado por las tres masas iniciales es la energía potencial de todas las parejas de masas que se puedan formar:

$$E_{P\,T} = E_{P\,CD} + E_{P\,CB} + E_{P\,BD} =$$
$$= -\frac{G \cdot M_C \cdot M_D}{r_{CD}} - \frac{G \cdot M_C \cdot M_B}{r_{CB}} - \frac{G \cdot M_B \cdot M_D}{r_{BD}}$$

$r_{CD} = 40$; $r_{CB} = 30$; $r_{BD} = 50$. Por tanto:

$$E_{P\,T} = E_{P\,CD} + E_{P\,CB} + E_{P\,BD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 3}{40} +$$
$$-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 0{,}5}{30} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5 \cdot 3}{50} = -1{,}423 \cdot 10^{-11}\text{ J}$$

23. **Suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta, homogénea, de radio *R*. ¿Cuál es la gráfica que mejor representa la variación de la gravedad (*g*) con la distancia al centro de la Tierra?**



(Galicia. Septiembre, 2007)

De acuerdo con el teorema de Gauss, la opción correcta es la c). (Ver la demostración en este mismo tema del libro del alumno.)

24. **¿Cómo varía *g* al profundizar hacia el interior de la Tierra?**

a) Aumenta.

b) Disminuye.

c) No varía.

De acuerdo con el teorema de Gauss, en el interior de la Tierra:

$$g = g_0 \cdot \frac{r}{R_T}$$

Al profundizar en el interior de la Tierra, *r* disminuye, por lo que *g* disminuye también.

La opción correcta es la b).

25. **Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre, respectivamente, determina, en función del radio de la Tierra:**

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es $g_0/2$.

b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

(C. Madrid. Junio, 2006)

a) De acuerdo con el teorema de Gauss, para puntos sobre la superficie terrestre, $r > R_T$. Por tanto:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{g_0}{2} = \frac{\cancel{G \cdot M_T}}{2 \cdot R_T^2} = \frac{\cancel{G \cdot M_T}}{r^2} \rightarrow r^2 = 2 \cdot R_T^2 \rightarrow r = \sqrt{2} \cdot R_T$$

$$r = R_T + h = \sqrt{2} \cdot R_T \rightarrow h = R_T \cdot (\sqrt{2} - 1) = 0{,}414 \cdot R_T$$

b) $V = -\frac{G \cdot M_T}{r}$

En la superficie terrestre:

$$V_0 = -\frac{G \cdot M_T}{R_T}$$

Por tanto:

$$\frac{V_0}{2} = -\frac{\cancel{G \cdot M_T}}{2 \cdot R_T} = -\frac{\cancel{G \cdot M_T}}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 2 \cdot R_T \rightarrow r = (R_T + h) = 2 \cdot R_T \rightarrow h = R_T$$

26. **a) Escribe y comenta la ley de gravitación universal.**

b) Dos planetas esféricos tienen la misma masa, $M_1 = M_2$, pero la aceleración de la gravedad en la superficie del primero es cuatro veces mayor que en la del segundo, $g_1 = 4g_2$. Calcula la relación entre los radios de los dos planetas, R_1/R_2, y entre sus densidades medias, d_1/d_2.

(Aragón. Septiembre, 2006)

a) Ver libro del alumno (página 18).

b) En las superficies de los planetas:

$$g_1 = \frac{G \cdot M_1}{R_1^2};\ g_2 = \frac{G \cdot M_2}{R_2^2}$$

$$g_1 = 4 \cdot g_2 \rightarrow \frac{\cancel{G \cdot M_1}}{R_1^2} = 4 \cdot \frac{\cancel{G \cdot M_1}}{R_2^2} \rightarrow \frac{1}{R_1^2} = \frac{4}{R_2^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_2^2 = 4 \cdot R_1^2 \rightarrow R_2 = 2 \cdot R_1 \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

La densidad se obtiene así:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

Por tanto, para los planetas tenemos:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi \cdot {R_1}^3} \\ d_2 &= \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi \cdot (2 \cdot R_1)^3} \end{aligned}\right\} \frac{d_1}{d_2} = \frac{\dfrac{\cancel{M_1}}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi \cdot {R_1}^3}}{\dfrac{\cancel{M_1}}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi \cdot (2 \cdot R_1)^3}} = \frac{\cancel{R_1^3} \cdot 2^3}{\cancel{R_1^3}} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 8$$

27. **Calcula la masa y el peso que tendrá un cuerpo en la Luna si en la Tierra pesa 980 N. ¿Coincidirá el resultado con lo que mide la balanza en ambos lugares?**

Datos: $g_{0\ \text{Tierra}} = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_L = 0{,}0112 \cdot M_T$ **y** $R_L = R_T/4$.

$\vec{F} = m \cdot g$. Para la fuerza peso, en la Tierra: $P_T = m \cdot g_0$.

$$980\ \text{N} = m_T \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \rightarrow m_T = 100\ \text{kg} = m_L$$

La masa es una propiedad intrínseca de los cuerpos; es constante en la Tierra y la Luna. Obtenemos el valor de la gravedad en la Luna:

$$g_L = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2} = \frac{G \cdot 0{,}0112 \cdot M_T}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \cdot 0{,}0112 \cdot 4^2 = 0{,}179 \cdot g_0$$

Por tanto:

$$P_L = m_L \cdot g_L = m_T \cdot 0{,}179 \cdot g_0 = 0{,}179 \cdot P_T = 17{,}9\ \text{N}$$

Si la balanza es de platos, el peso será el mismo que en la Tierra. Si la balanza es de resorte, pesará 17,9 N.

28. **Determina desde qué altura habrá que dejar caer el cuerpo del ejercicio anterior en la Luna si queremos que llegue a su superficie con la misma velocidad con la que llega cuando cae desde una altura de 10 m sobre la superficie de la Tierra. ¿Y si fuese un cuerpo de masa 10 veces mayor?**

Datos: $g_{0\ \text{Tierra}} = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_L = 0{,}0112 \cdot M_T$; $R_L = R_T/4$.

Primero debemos calcular el tiempo que tarda en llegar a la superficie un cuerpo que cae desde una altura de 10 m en la Tierra. Como la distancia es muy pequeña, podemos suponer que su movimiento es uniformemente acelerado (g constante):

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow -10 = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 \rightarrow t = 3{,}2\ \text{s} \rightarrow$$
$$\rightarrow v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v = -9{,}8 \cdot 3{,}2 = -31{,}36\ \text{m/s}$$

(El signo «–» indica velocidad de caída.)

Suponiendo que el movimiento de caída libre en la Luna también es uniformemente acelerado, $g_L = 0{,}179 \cdot g_0$, calculamos el tiempo que debe caer para que su velocidad sea de 31,36 m/s:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow -31{,}36 = -0{,}179 \cdot 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 17{,}88\ \text{s}$$

El espacio que recorre en ese tiempo es:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}179 \cdot 9{,}8 \cdot 17{,}88^2 = -280{,}4\ \text{m}$$

(El signo «–» indica que el cuerpo ha caído.)

29. **a) Un astronauta de $m = 80$ kg está en la estación espacial orbital girando entorno a la Tierra. Al intentar pesarse, la balanza marca cero. Explica por qué marca cero y si actúa o no la gravedad terrestre en ese punto.**

b) Si este mismo astronauta aterriza en un planeta que tiene la misma densidad que la Tierra, pero su radio es 10 veces mayor, ¿cuál sería el peso en ese planeta en comparación con el peso en la Tierra?

(Cantabria. Junio, 2006)

a) Porque su movimiento de rotación le hace estar en caída libre permanente.

b) En la Tierra $P_T = m_T \cdot g_T$; y en el planeta, $P_P = m_T \cdot g_P$, siendo $g_P = \dfrac{G \cdot M_P}{R_P^2}$.

$$d_P = \frac{M}{V} = \frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_P^3} = \frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi \cdot (10 \cdot R_T)^3};\ d_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_T^3}$$

Por tanto:

$$d_T = d_P \rightarrow \frac{M_T}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot R_T^3} = \frac{M_P}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot (10 \cdot R_T)^3} \rightarrow M_P = 1000 \cdot M_T$$

Calculamos g_P:

$$g_P = \frac{G \cdot 1000 \cdot M_T}{(10 \cdot R_T)^2} = 10 \cdot g_T \rightarrow$$

$$\rightarrow P_P = m_T \cdot 10 \cdot g_T = 10 \cdot P_T = 10 \cdot 80 \cdot 9{,}8 = 7840 \text{ N}$$

30. **Dos satélites de comunicación, A y B, con diferentes masas ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio, siendo $r_A < r_B$.**

a) A gira con mayor velocidad lineal.

b) B tiene menor periodo de revolución.

c) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(Galicia. Junio, 2007)

Para el satélite que gira alrededor de la Tierra:

$$F_C = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s} \cdot v^2}{r}$$

a) La expresión $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{r}}$ indica que la velocidad no depende de la masa del satélite, solo del radio de su órbita.
Si r aumenta, v disminuye $\rightarrow v_B < v_A$.
La afirmación es cierta.

b) Transformando la expresión anterior para relacionarla con la velocidad angular y esta con el periodo vemos que el periodo de revolución tampoco depende de la masa del satélite, sino solo del radio:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

$r_A < r_B \rightarrow T_A < T_B$.

Si r aumenta, T aumenta también $\rightarrow T_A < T_B$.

La afirmación es falsa.

c) $E_M = -\frac{GM_T \cdot m}{r}$. En general, es falso. La energía mecánica del planeta en su órbita depende de la masa y el radio de giro, que es diferente en cada caso.

31. Cuando un objeto gira alrededor de la Tierra, se cumple:

a) La energía mecánica del objeto en su órbita es positiva.

b) Su velocidad en la órbita será $\sqrt{2\,g_T\,R_T}$.

c) La fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta son iguales.

a) Falso: para que la energía mecánica fuera positiva, la órbita tendría que ser abierta y, por tanto, no estaría girando alrededor de la Tierra. En una órbita cerrada, $E_M = -\frac{GM_T \cdot m}{r}$.

b) Falso: la expresión correcta es $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$.

c) Verdadero: es condición para que un cuerpo orbite alrededor de otro.

32. Un satélite de masa *m* describe una trayectoria circular de radio *R* en torno a un planeta de masa *M*. La energía mecánica del satélite es numéricamente:

a) Igual a la mitad de su energía potencial.

b) Igual a su energía potencial.

c) Igual al doble de su energía potencial.

La opción correcta es la a):

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para el satélite que orbita, $F_C = F_G$, de donde se deduce:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Esto nos permite obtener una forma más simplificada para su energía mecánica:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Como $E_P = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = \dfrac{1}{2} \cdot E_P$.

33. El radio de la órbita de un satélite geoestacionario viene dado por la expresión:

a) $\boldsymbol{R = \left(\dfrac{T^2 GM}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$ **b)** $\boldsymbol{R = \left(\dfrac{T^2 g_0 \cdot R_T}{4\pi^2}\right)^{1/2}}$ **c)** $\boldsymbol{R = \left(\dfrac{TGM^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$

Un satélite geoestacionario tiene el mismo periodo de rotación que la Tierra: $T = 24$ h. La expresión correcta se corresponde con la opción a) (ver el libro del alumno).

34. Calcula el trabajo necesario para mover un satélite terrestre de masa *m* de una órbita de radio $2R_T$ a una de radio $3R_T$. Exprésalo de forma general.

El trabajo equivale a la diferencia de energía entre las órbitas.

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow \begin{cases} E_{M1} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot R_T} \\ E_{M2} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{G \cdot M \cdot m}{3 \cdot R_T} \end{cases}$$

Por tanto:

$$W = \Delta E_M = E_{M2} - E_{M1} = 0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{3 \cdot R_T} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot R_T} =$$

$$= \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T}$$

35. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre; y su masa, la mitad. Calcule la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta, en función de sus correspondientes valores terrestres.

(Castilla y León. Septiembre, 2007)

La aceleración de la gravedad será:

$$g_P = \frac{G \cdot M_P}{R_P^2} = \frac{G \cdot \dfrac{M_T}{2}}{\left(\dfrac{R_T}{3}\right)^2} = \frac{9}{2} \cdot g_T$$

Y la velocidad de escape será:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot \frac{M_T}{2}}{\frac{R_T}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_{\text{escape (Tierra)}}$$

36. **Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble de la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

(C. Madrid, 2005)

a) Falso: La velocidad de escape no depende de la masa del satélite, sino de la masa que crea el campo.

b) El trabajo es la diferencia entre las energías mecánica del satélite en cada una de las órbitas.

- $E_{\text{M suelo}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$
- $E_{\text{M órbita}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$

Por tanto:

$$W = \Delta E_M = E_{\text{M órbita}} - E_{\text{M suelo}} =$$

$$= -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot (R_T + h)} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2R_T} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Es directamente proporcional a la masa del cuerpo, por lo que la afirmación es correcta.

37. **Dos satélites artificiales, A y B, de masas m_A y m_B ($m_A = 2m_B$) giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio R. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:**

a) Tienen la misma velocidad de escape.

b) Tienen diferente periodo de rotación.

c) Tienen la misma energía mecánica.

a) La expresión para calcular la velocidad de escape es:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}}$$

Por lo tanto, la velocidad de escape es función del radio de órbita (que es igual para ambos satélites) y no de la masa de los satélites, así que la afirmación es cierta.

b) $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$. Nuevamente, el radio de órbita es el mismo en ambos satélites y el periodo de rotación no es función de la masa de los satélites. Por tanto, la afirmación es falsa.

c) Es falso. La energía mecánica se mantiene en la órbita de cada planeta, pero es diferente para cada planeta en su órbita de giro, y depende de la masa. Si la masa de los satélites es diferente, también lo será su energía mecánica.

38. La velocidad que se debe comunicar a un cuerpo inicialmente en reposo en la superficie de la Tierra, de masa M_T y radio R_T, para que «escape» fuera de su atracción gravitacional es:

a) Mayor que $(2GM_T/R_T)^{1/2}$.

b) Menor que $(2GM_T/R_T)^{1/2}$.

c) Igual a $(g_0/R_T)^{1/2}$.

La energía total de un satélite que está orbitando es:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

El satélite saldrá del campo gravitatorio cuando $r \to \infty$, lo que determina que $E_M = 0$.

En el punto de lanzamiento habrá que comunicarle una velocidad tal que:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot mv^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \geq 0$$

Reordenando la expresión, la velocidad de lanzamiento debe ser igual o mayor que:

$$v_{escape} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}}$$

Si se encuentra en reposo sobre la superficie de la Tierra, será $r = R_T$, por lo que la afirmación correcta es la a).

39. Si para un cuerpo situado en un campo gravitatorio, su energía cinética es igual a su energía potencial (en valor absoluto), significa:

a) Que el cuerpo puede escapar al infinito.

b) Que el cuerpo acabará cayendo sobre la masa que crea el campo.

c) Que seguirá en una órbita circular.

La respuesta correcta es la a).

Si la energía cinética es igual a su energía potencial en valor absoluto, significa que $E_M = 0$ y $E_C = -E_P$, que se corresponde con una órbita abierta parabólica.

2 El campo gravitatorio

40. **Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 3815 km. Calcular:**

a) La velocidad de traslación del satélite.

b) Su periodo de revolución.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; $R_T = 6370$ km;
$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

Para el satélite que gira alrededor de la Tierra:

$$F_C = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^2} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{r}$$

Trabajaremos con unidades del SI.

a) La velocidad de traslación es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3 + 3815 \cdot 10^3}} =$$
$$= 6{,}26 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) Y el periodo es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 3815 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} =$$
$$= 10{,}23 \cdot 10^3 \text{ s}$$

41. **El primer satélite español *Minisat*, que fue lanzado en 1997 desde las Islas Canarias, se encuentra actualmente en una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de revolución de 10,5 horas.**

a) Calcula el radio de la órbita.

b) Calcula la energía mecánica del satélite.

c) Calcula el radio de la órbita que debería tener el satélite para que su periodo de revolución fuera el doble que el actual.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg;
$m_{\text{satélite}} = 100$ kg.

(Canarias. Junio, 2006)

a) El periodo es:

$$T = 10{,}5\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 37{,}8 \cdot 10^3 \text{ s} = 10 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Por tanto:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{(37{,}8 \cdot 10^3)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} \rightarrow r = 24{,}336 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) La velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{24,336 \cdot 10^6}} = 4,04 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

La energía mecánica será:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot mv^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_M = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (4,04 \cdot 10^3)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{24,336 \cdot 10^6}$$
$$= -8,2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

También se podría calcular mediante la expresión:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{24,336 \cdot 10^6} =$$
$$= -8,18 \cdot 10^8 \text{ J}$$

c) El periodo es:

$$T_2 = 2 \cdot 10,5 \cancel{h} \cdot \frac{60 \cancel{min}}{1 \cancel{h}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{min}} = 75,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 21 \text{ h}$$

Y queda:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T_2^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(75,6 \cdot 10^3)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} =$$
$$= 38,63 \cdot 10^6 \text{ m}$$

42. **Un satélite de masa 350 kg describe órbitas circulares alrededor de la Tierra a una altura de 630 km.**

a) ¿Cuánto vale la intensidad del campo gravitatorio creado por la Tierra a esta altura?

b) ¿Cuánto vale la aceleración centrípeta del satélite?

c) ¿Cuánto vale la energía mecánica del satélite?

Datos: $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2}.

(Cataluña. Septiembre, 2007)

a) Tenemos:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3 + 630 \cdot 10^3)^2} = 8,126 \text{ m/s}^2$$

b) En un satélite en órbita, $F_C = F_G$. Como $F = m \cdot a \rightarrow g = a_C$.

c) En un satélite en órbita:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 350}{6370 \cdot 10^3 + 630 \cdot 10^3} = -9{,}95 \cdot 10^9 \text{ J}$$

43. **Plutón recorre una órbita elíptica en torno al Sol situándose a una distancia $r_p = 4{,}4 \cdot 10^{12}$ m en el punto más próximo (perihelio) y $r_a = 7{,}4 \cdot 10^{12}$ m en el punto más alejado (afelio).**

a) Obtener el valor de la energía potencial gravitatoria de Plutón en el perihelio y en el afelio.

b) ¿En cuál de esos dos puntos será mayor la velocidad de Plutón? Razona tu respuesta.

Datos: considerar que la energía potencial tiende a cero cuando la distancia tiende a infinito, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; M (Sol) = $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg; M (Plutón) = $1{,}27 \cdot 10^{22}$ kg.

(P. Asturias. Junio, 2007)

a) Dado que $E_P = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r}$:

- En el afelio:

$$E_{P\,a} = -\frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{22}}{7{,}4 \cdot 10^{12}} =$$

$$= -2{,}27 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

- Y en el perihelio:

$$E_{P\,p} = -\frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r_P} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{22}}{4{,}4 \cdot 10^{12}} =$$

$$= -3{,}81 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

b) De acuerdo con la segunda ley de Kepler, los planetas se mueven con velocidad areolar constante, lo que implica que su momento angular permanece constante en todo el recorrido:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{periheio}} \rightarrow \cancel{m} \cdot v_{\text{afelio}} \cdot r_{\text{afelio}} = \cancel{m} \cdot v_{\text{perihelio}} \cdot r_{\text{perihelio}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{afelio}} = v_{\text{perihelio}} \cdot \frac{r_{\text{perihelio}}}{r_{\text{afelio}}} = v_{\text{perihelio}} \cdot \frac{4{,}4 \cdot 10^{12}}{7{,}4 \cdot 10^{12}} = 0{,}594 \cdot v_{\text{perihelio}}$$

Por tanto, la velocidad será mayor en el perihelio.

44. **Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.**

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.

b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.

c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.

d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario?
Justifique la respuesta.

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²;
masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;
radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

(C. Madrid, 2008)

Dada la condición del enunciado:

$$v_{\text{e sup}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T}}\ ;\ v_{\text{e órbita}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2} \cdot v_{\text{e sup}}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{R_T + h}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_T}} \rightarrow 2 \cdot \sqrt{R_T} = \sqrt{R_T + h} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \cdot R_T = R_T + h = r \rightarrow h = 3 \cdot R_T$$

a) Trabajando en unidades del SI:

$$F_G = m \cdot g = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{(4 \cdot R_T)^2} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{(4 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6)^2} = -122{,}873 \text{ N}$$

b) Ahora:

$$V = -\frac{G \cdot M_T}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = -1{,}565 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

c) La energía mecánica es:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{4 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = -1{,}565 \cdot 10^9 \text{ J}$$

d) Sabiendo que la órbita de un satélite geoestacionario debe ser tal que su periodo de rotación sea el mismo que el de la Tierra (1 día), resulta que tendría que ser:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m} \neq 4 \cdot R_T = 2{,}5 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Por tanto, no se trata de un satélite geoestacionario.

45. Un satélite artificial de 200 kg de masa describe una órbita circular a 400 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

a) La energía mecánica.

b) La velocidad que se le comunica en la superficie de la Tierra para colocarlo en esa órbita.

Datos: $R_T = 6370$ km; $g_{0\ \text{Tierra}} = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Como en otros problemas, empleamos unidades del SI.

a) La energía mecánica es:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{R_T + h} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot 200}{6370 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3} = -5{,}87 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Para calcular la velocidad de lanzamiento para ponerlo en esa órbita debemos tener en cuenta el principio de conservación de la energía mecánica. La energía mecánica en el punto de lanzamiento debe coincidir con la energía mecánica en la órbita. Considerando el punto 1 el de lanzamiento y el punto 2 la órbita de radio r.

En 2:

$$F_G = F_C \rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \frac{\cancel{m} \cdot v_2^2}{r} \rightarrow v_2^2 = \frac{GM}{r}$$

Podemos escribir:

$$E_{M\,1} = E_{M\,2} \rightarrow E_{C\,1} + E_{P\,1} = E_{C\,2} + E_{P\,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_T}\cancel{m} = \frac{1}{2}\cancel{m}\overbrace{\frac{G \cdot M}{r}}^{v_2^2} - \frac{GM}{r}\cancel{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M}{r}\cancel{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{lanzamiento}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + h)}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3)}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{lanzamiento}} = 8{,}13 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

46. **Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg de masa a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra.**

Si el lanzamiento del satélite se ha realizado desde el nivel del mar, calcula:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite.

b) Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ kg · m²/kg²; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) Sobre la superficie de la Tierra:

$$E_{P\,1} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 600}{6370 \cdot 10^3} = -3{,}769 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Repetimos los cálculos para el satélite en órbita:

$$E_{P\,2} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 600}{6370 \cdot 10^3 + 1200 \cdot 10^3} = -3{,}172 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Con lo que ya podemos obtener el aumento de energía potencial:

$$\Delta E_P = E_{P\,2} - E_{P\,1} = -3{,}172 \cdot 10^{10}\ \text{J} + 3{,}769 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 5{,}97 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

b) Para que se escape de la órbita debe tener $E_M = 0$ para que $r \rightarrow \infty$:

$$E_M = E_P + E_C = 0 \rightarrow E_C = -E_P$$

La E_M del satélite en la órbita de radio r es:

$$E_{M\,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = -\frac{3{,}172 \cdot 10^{10}}{2}\ \text{J} = -1{,}590 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

La energía que hay que comunicarle es, pues, $E_{\text{adicional}} = 1{,}590 \cdot 10^{10}$ J.

Otro modo de resolverlo. Conocemos la energía potencial que tiene el satélite en la órbita. Calculamos la energía cinética que tiene el satélite en la órbita:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Necesitamos conocer la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3 + 1200 \cdot 10^3}} =$$

$$= 7{,}27 \cdot 10^3\ \text{m/s} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot (7{,}27 \cdot 10^3)^2 = 1{,}585 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Calculamos ahora la energía cinética adicional que es necesario comunicar para que la energía cinética total sea igual (de signo contrario) que la energía potencial:

$$E_C + E_{C\,\text{adicional}} = -E_P \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{C\,\text{adicional}} = -E_P - E_C = 3{,}172 \cdot 10^{10}\ \text{J} - 1{,}585 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 1{,}587 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

47. Se lanza un satélite con el propósito de situarlo en una órbita circular situada en el plano ecuatorial y que sea geoestacionaria. El satélite describe su trayectoria con una velocidad de módulo constante *v*. Calcula:

a) El valor de la altura *h* a la que orbita el satélite.

b) El módulo de la velocidad.

c) La fuerza que mantiene su movimiento.

Datos: $g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$; $R_T = 6370$ km.

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2.$$

a) Si el satélite es geoestacionario, debe orbitar la Tierra con un periodo igual al de la Tierra (1 día). Conociendo este dato, podemos calcular el radio de la órbita mediante la expresión que hemos deducido en otras ocasiones:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo los datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = 4{,}23 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = 4{,}23 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = 3{,}59 \cdot 10^7\ \text{m}$$

b) La velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{4{,}23 \cdot 10^7}} = 3{,}07 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

c) La fuerza es:

$$F = m_s \cdot g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{r^2} =$$

$$= \frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot m_s}{(4{,}23 \cdot 10^7)^2} = 0{,}22 \cdot m_s\ \text{N}$$

48. La astronauta Sunita Williams participó desde el espacio en la maratón de Boston de 2007 recorriendo la distancia de la prueba en una cinta de correr dentro de la Estación Espacial Internacional. Sunita completó la maratón en 4 horas, 23 minutos y 46 segundos. La Estación Espacial orbitaba, el día de la carrera, a 338 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:

a) El valor de la gravedad terrestre en la Estación Espacial.

b) La energía potencial y la energía total de Sunita sabiendo que su masa es de 45 kg.

c) Cuántas vueltas a la Tierra dio la astronauta mientras estuvo corriendo.

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²;
masa de la Tierra: $M_T = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg;
radio de la Tierra $R_T = 6371$ km.

(R. Murcia. Junio, 2007)

a) La aceleración de la gravedad vale:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3 + 338 \cdot 10^3)^2} = 8{,}83 \text{ N/kg}$$

b) La energía potencial es:

$$E_P = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 45}{6371 \cdot 10^3 + 338 \cdot 10^3} = -2{,}66 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P = -\frac{1}{2} \cdot 2{,}66 \cdot 10^9 = -1{,}33 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) Veamos cuál es el periodo de rotación que ha tenido Sunita:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6371 \cdot 10^3 + 338 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}}} = 5{,}48 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Y el tiempo que Sunita ha estado corriendo ha sido:

$$t = 4 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} + 23 \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} + 46 \text{ s} = 15\,826 \text{ s}$$

Así que ha dado:

$$\text{N.º vueltas} = \frac{t}{T} = \frac{15\,826 \text{ s}}{5{,}48 \cdot 10^3 \text{ s}} = 2{,}89 \text{ vueltas}$$

49. a) Calcula la velocidad de escape desde la superficie de la Luna.

b) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna, con velocidad inicial igual a la de escape. ¿A qué distancia del centro de la Luna se reduce su velocidad a la mitad de la inicial?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²;
masa y radio de la Luna: $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

(Aragón. Junio, 2005)

a) La velocidad de escape en la Luna es:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M_L}{R_L}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^{6}}} = 2{,}37 \cdot 10^{3} \text{ m/s}$$

b) Suponiendo que la única interacción a la que está sometido el objeto es la atracción gravitatoria que ejerce la Luna, se conservará su energía mecánica. Llamando punto 1 al punto de lanzamiento y punto 2 al punto en el que su velocidad es la mitad de la inicial:

$$E_{M\,1} = E_{M\,2} \rightarrow E_{C\,1} + E_{P\,1} = E_{C\,2} + E_{P\,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G \cdot M_L \cdot \cancel{m}}{R_L} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot \left(\frac{v_{\text{escape}}}{2}\right)^2 - \frac{G \cdot M_L \cdot \cancel{m}}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G \cdot M_L}{R_L} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_{\text{escape}}}{2}\right)^2 - \frac{G \cdot M_L}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{G \cdot M_L}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_{\text{escape}}}{2}\right)^2 + \frac{G \cdot M_L}{R_L} - \frac{1}{2} \cdot v^2_{\text{escape}} \rightarrow$$

Sustituyendo los datos y los valores que hemos obtenido con anterioridad:

$$\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2{,}37 \cdot 10^{3}}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^{6}} - \frac{1}{2} \cdot \left(2{,}37 \cdot 10^{3}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4{,}90 \cdot 10^{12}}{r} = 7{,}02 \cdot 10^{5} + \cancel{2{,}81 \cdot 10^{6}} - \cancel{2{,}81 \cdot 10^{6}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \frac{4{,}90 \cdot 10^{12}}{7{,}02 \cdot 10^{5}} = 6{,}9 \cdot 10^{6} \text{ m}$$

NOTA: Puede ser una ocasión interesante para que los alumnos comprueben el error que resultaría si considerásemos un movimiento de caída libre con el valor de g constante e igual a su valor en la superficie de la Luna.

Obtenemos la aceleración de la gravedad en la Luna:

$$g = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^{6})^2} = 1{,}617 \text{ N/kg}$$

Por las ecuaciones del movimiento:

- $x = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
- $v = v_0 - g \cdot t$

Además, $v_0 = v_{escape}$, $x_0 = 0$ y $v = \frac{1}{2} \cdot v_{escape}$:

$$\frac{1}{2} \cdot v_e = v_e - g \cdot t \rightarrow t = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_e}{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = v_e \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v_e}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{v_e^2}{g^2} =$$

$$= 2{,}37 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{2{,}37 \cdot 10^3}{1{,}617} - 0{,}5 \cdot 1{,}617 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{(2{,}37 \cdot 10^3)^2}{1{,}617^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1{,}3 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Este valor (erróneo) es distinto al que obtuvimos antes ($6{,}9 \cdot 10^6$ m, correcto).

50. Suponiendo que la Luna gira alrededor de la Tierra con un periodo de 27 días, a una distancia de $3{,}8 \cdot 10^8$ m, calcula:

a) La masa de la Tierra.

b) La energía que se necesita para separar la Luna de la Tierra a una distancia infinita.

Dato: masa de la Luna, $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg.

a) El periodo es:

$$T = 27 \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} = 2{,}333 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Conociendo que:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_T = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3{,}8 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (2{,}333 \cdot 10^6)^2} = 5{,}967 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

b) La Luna escapará del campo gravitatorio terrestre cuando su energía mecánica sea 0. Calculamos el valor de la energía mecánica de la Luna en su órbita (unidades del SI):

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_L}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{3{,}8 \cdot 10^8} = -3{,}84 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

Para que la Luna abandone el campo gravitatorio terrestre debemos comunicarle una energía de $3{,}84 \cdot 10^{28}$ J.

51. Calcula el radio que debería tener la Tierra, conservando su masa, para que su velocidad de escape fuese igual a la velocidad de la luz en el vacío, c = 300 000 km/s. Ante un colapso de este tipo, ¿variará el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra?

Dato: masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Ahora tenemos:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_T = \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{v^2_{\text{escape}}} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(300\,000 \cdot 10^3)^2} = 8{,}89 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

El periodo de traslación de la Luna viene dado por la expresión:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

donde r es el radio de la órbita de la Luna. T no depende del radio de la Tierra; por tanto, aunque sucediese el colapso terrestre, el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra no cambiaría.

52. Un cometa de 10^{12} kg de masa se acerca al Sol desde un punto muy alejado del Sistema Solar, pudiéndose considerar que su velocidad inicial es nula. Calcula:

a) La velocidad en el perihelio, sabiendo que se produce a una distancia de 10^8 km del Sol. (Masa del Sol = $2 \cdot 10^{30}$ kg.)

b) La energía potencial cuando cruce la órbita de la Tierra.

Dato: distancia Tierra-Sol = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.

a) Un punto muy alejado del Sistema Solar será un punto en el que el cometa está fuera del campo gravitatorio del Sol; por tanto, su $E_P = 0$. Si, además, su velocidad es nula, la E_C en ese punto también es nula. En consecuencia, la E_M del cometa es 0.

Suponiendo que el cometa está sometido únicamente a la atracción gravitatoria del Sol, su E_M en cualquier otro punto de su movimiento será 0 (principio de conservación de la energía mecánica):

$$E_{M\,\text{perihelio}} = 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r_{\text{perihelio}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot 2}{r_{\text{perihelio}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 2}{10^{11}}} = 5{,}165 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

(Hemos expresado las magnitudes en unidades del SI.)

b) Cuando cruza la órbita de la Tierra, el cometa se encuentra a la misma distancia del Sol que la Tierra.

$$E_P = -\frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{12}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} = -8{,}92 \cdot 10^{20} \text{ J}$$

3 El campo electrostático

PRESENTACIÓN

- Con una metodología similar a la empleada en el tema anterior para el estudio del campo gravitatorio, abordamos aquí el estudio del campo electrostático, haciendo especial hincapié en las analogías y diferencias entre ambos. Es especialmente importante hacer ver al alumnado las dos diferencias capitales entre ambas: la primera relacionada con los aspectos cuantitativos de cada una de estas interacciones cuando se establecen entre partículas de masa o de carga unidad, separadas una distancia unidad; y la segunda, referida a los aspectos cualitativos que derivan de la existencia cargas del distinto signo, circunstancia que no se presenta en la interacción gravitatoria.
- Aunque en el tema anterior ya se produjo una aproximación al teorema de Gauss como herramienta para calcular el campo creado por distribuciones continuas, es ahora donde ese recurso se emplea en mayor extensión, a fin de deducir la expresión del campo y el potencial eléctrico creado por conductores cargados en distintos puntos significativos del espacio.

OBJETIVOS

- Utilizar el concepto de campo como un recurso adecuado para estudiar la interacción electrostática a distancia.
- Separar conceptualmente la perturbación provocada por un cuerpo cargado en el espacio que le rodea de la interacción que sufre otro cuerpo cargado que penetra en el campo.
- Manejar con soltura la función intensidad de campo y la función potencial para el estudio cuantitativo de la interacción electrostática.
- Interpretar correctamente las representaciones gráficas relativas a las funciones campo y potencial electrostático en función de la distancia.
- Predecir la interacción que sufrirá otro cuerpo cargado cuando se desplaza en un campo electrostático, teniendo en cuenta el signo de su carga.
- Comprender la interacción electrostática como una interacción conservativa.
- Utilizar el principio de superposición para determinar el valor del campo creado por un conjunto de cargas puntuales.
- Conocer el alcance del teorema de Gauss y utilizarlo con soltura para determinar el campo y el potencial creados por conductores cargados (distribuciones continuas de carga) en distintos puntos del espacio.
- Ser capaz de predecir el movimiento de un cuerpo cargado en el seno de un campo electrostático.
- Analizar la situación dinámica de cuerpos sometidos, a la vez, a interacción electrostática y gravitatoria. Evaluar la importancia relativa de cada una.

3 El campo electrostático

CONTENIDOS

Conceptos	• El concepto de campo como recurso para estudiar la perturbación que crea un cuerpo cargado en reposo. • Definición del vector intensidad de campo electrostático creado por una carga puntual. Interpretación de su módulo, dirección y sentido en función del signo de su carga. • Estudio de la fuerza de interacción entre dos cuerpos cargados. Relación con la intensidad del campo que uno de ellos crea en el punto donde se encuentra el otro. • Demostración del carácter conservativo del campo electrostático y análisis de las consecuencias que se derivan de ello. • Definición de potencial eléctrico en un punto y su relación con la energía potencial que adquiere un cuerpo cargado en dicho punto. • Estudio de la variación de energía potencial que experimenta un cuerpo que se desplaza de un punto a otro de un campo y su relación con el trabajo que realizan las fuerzas del campo. Interpretación del signo y valoración en función del signo relativo de ambas cargas. • Conservación de la energía mecánica y sus consecuencias para estudiar el movimiento de cuerpos cargados en un campo electrostático. • Estudio del campo y el potencial eléctricos creado por varias cargas puntuales. Principio de superposición. • Representación gráfica de la interacción electrostática: líneas de campo y superficies equipotenciales. • Estudio de la función campo y de la función potencial debidas a distribuciones continuas de carga (conductores en equilibrio). Aplicación del teorema de Gauss. • Dinámica de cuerpos cargados en un campo electrostático uniforme.
Procedimientos, destrezas y habilidades	• Adquirir soltura en el manejo de cantidades de muy distinto orden de magnitud. Utilización de submúltiplos de las unidades del Sistema Internacional. • Mostrar destreza en el manejo de magnitudes escalares y vectoriales. • Interpretar representaciones gráficas de funciones matemáticas escalares y vectoriales. • Representar gráficamente los problemas a estudiar. Manejar el lenguaje simbólico. • Adquirir capacidad para valorar e interpretar los resultados de un estudio cuantitativo.
Actitudes	• Mostrar interés por conocer los principios que rigen una interacción que está presente en muchos dispositivos que manejamos de forma habitual. • Comprender que el funcionamiento de muchos objetos cotidianos se basa en estudios teóricos laboriosos y encontrar en ello una motivación para seguir estudiando.

EDUCACIÓN EN VALORES

A pesar de ser este un tema de amplio contenido teórico, advertimos elementos susceptibles de ser aprovechados para una educación en valores.

1. **Educación para la salud**

   Comprender la importancia de las interacciones electrostáticas nos hará ser respetuosos con el manejo de una serie de dispositivos. Lejos de presentar la electricidad como un peligro, debemos insistir en la necesidad de mantener los cables de nuestros aparatos eléctricos en perfecto estado y los enchufes fuera del alcance de los niños.

2. **Educación del consumidor**

   En este tema se utilizan magnitudes y conceptos que podemos encontrar cuando compramos un ordenador u otros dispositivos eléctricos. Es importante que los alumnos y alumnas sepan valorar el alcance de cada uno a fin de reconocer, por ejemplo, su repercusión en el precio del producto o si es posible sustituir uno por otro similar y de menor precio.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Calcular el campo y el potencial eléctricos que una carga puntual crea en un punto del espacio. Relacionarlos con el signo de la carga.
2. Calcular el campo y el potencial que un conjunto de cargas puntuales crea en un punto del espacio. Analizar de forma especial si hay puntos donde el campo y/o el potencial sean nulos.
3. Hallar la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado situado en un punto del campo creado por una o más cargas puntuales.
4. Calcular e interpretar el signo del trabajo y/o la energía que se requiere para que un cuerpo cargado se desplace de un punto a otro de un campo electrostático.
5. Determinar la velocidad de un cuerpo cargado en un punto de un campo electrostático a partir de sus características de movimiento en otro punto del mismo.
6. Representar gráficamente el campo y/o el potencial creados por cargas puntuales o distribuciones continuas de carga.
7. Calcular e interpretar el campo y el potencial creados por conductores cargados en equilibrio en distintos puntos del espacio.
8. Relacionar el campo con la diferencia de potencial entre dos puntos de una región donde existe un campo eléctrico uniforme.
9. Calcular distintas magnitudes relacionadas con el movimiento de cuerpos cargados en regiones donde exista un campo eléctrico uniforme.

3 El campo electrostático

1. **En el átomo de hidrógeno el electrón se encuentra a una distancia aproximada de $5{,}2 \cdot 10^{-11}$ m del núcleo, donde está localizado el protón. Calcula la fuerza electrostática con que se atraen ambas partículas y compárala con la fuerza gravitatoria entre ellas.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²;
$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²;
$q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(Canarias. Junio, 2007)

Trabajaremos, salvo que se indique lo contrario, en unidades del SI.

El módulo de la fuerza electrostática es:

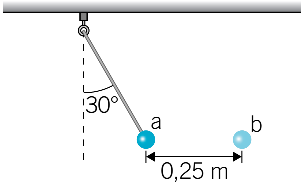
$$F_E = K \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(5{,}2 \cdot 10^{-11})^2} = 8{,}5207 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

Obtendremos la fuerza gravitatoria entre ellas con la expresión:

$$F_G = G \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{(5{,}2 \cdot 10^{-11})^2} =$$
$$= 3{,}7489 \cdot 10^{-47}\ \text{N}$$

Aunque ambas fuerzas tienen la misma dirección y sentido (protón y electrón se atraen), el módulo de la fuerza electrostática es mucho mayor que en el caso de la fuerza gravitatoria.

2. **Dos partículas, a y b, tienen masas iguales de 1,6 g y cargas de igual valor, pero de signos contrarios. La partícula b está fija en el espacio y la partícula a está colgada del techo por un hilo de masa despreciable (ver la figura). Cuando ambas partículas están separadas una distancia de 0,25 m, la partícula a se halla en equilibrio y el hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcula:**



a) La tensión del hilo.

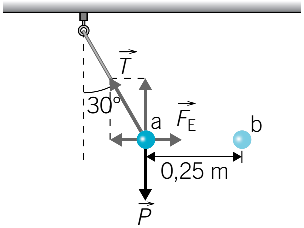
b) La fuerza de atracción entre las partículas.

c) El valor absoluto de la carga de las partículas.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; $g = 9{,}8$ m · s⁻².

(Castilla-La Mancha, 2007)

Planteamos el balance de fuerzas de la masa suspendida.
Despreciamos la fuerza de atracción gravitatoria entre las dos partículas porque, como se deduce de la actividad anterior, será mucho menor que la fuerza electrostática.



Observa que la tensión debe descomponerse en sus componentes vertical y horizontal, que se calculan relacionando T con el ángulo que forma con la vertical (30°):

- Eje vertical:

$$T \cdot \cos 30° = P = m \cdot g = 0{,}0016 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}015\,68 \text{ N}$$

- Eje horizontal:

$$T \cdot \text{sen } 30° = F_E = K \cdot \frac{q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q^2}{0{,}25^2}$$

a) Obtenemos la tensión del hilo, T, a partir del balance correspondiente al eje vertical:

$$T = \frac{15{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{\cos 30°} = 0{,}018\,106 \text{ N}$$

b) Conociendo el valor de la tensión T podemos obtener el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas a partir del balance correspondiente al eje horizontal:

$$F_E = T \cdot \text{sen } 30° = 18{,}106 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{sen } 30° = 9{,}053 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

c) Conociendo el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas y sabiendo que su carga es idéntica, podemos obtener su valor:

$$F_E = K \cdot \frac{q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q^2}{0{,}25^2} \rightarrow$$

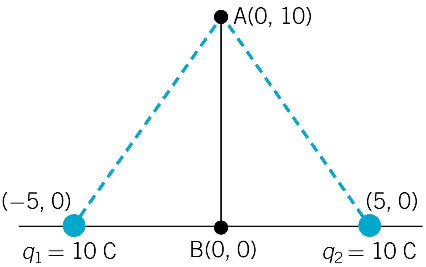
$$\rightarrow q = \sqrt{\frac{F_E \cdot 0{,}25^2}{9 \cdot 10^9}} = \sqrt{\frac{9{,}053 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25^2}{9 \cdot 10^9}} = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

3. Dos cargas puntuales de 10 C cada una están en las posiciones (5, 0) y (−5, 0). Una tercera carga de 0,1 C y 2 kg de masa se deja en libertad y con velocidad nula en el punto (0, 10). Calcula:

a) La aceleración que actúa sobre la tercera carga en las posiciones A (0, 10) y B (0, 0).

b) La velocidad de la tercera carga en (0, 0).

a) Calcularemos la aceleración en cada punto por medio de la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Como conocemos su masa, basta con calcular la fuerza que resulta de la interacción electrostática de las otras dos cargas sobre ella en cada punto.



La fuerza se calculará en cada caso haciendo uso del principio de superposición: $\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

La fuerza eléctrica existente entre cada par de cargas es:

$$\vec{F}_E = K \cdot \frac{q \cdot q_0}{d^2} \cdot \vec{u}_r$$

Cálculo de la fuerza en el punto A(0, 10).

El vector $\vec{r}_{1A}$ tiene origen en (−5, 0) y extremo en (0, 10).
Por tanto:

$$\vec{r}_{1A} = 5\vec{i} + 10\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{1A} = \frac{\vec{r}_{1A}}{|\vec{r}_{1A}|} = \frac{5\vec{i} + 10\vec{j}}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{5\vec{i} + 10\vec{j}}{\sqrt{125}}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{1A} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_0}{r_{1A}^2} \cdot \vec{u}_{1A} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{125} \cdot \frac{5\vec{i} + 10\vec{j}}{\sqrt{125}} =$$
$$= -3{,}22 \cdot 10^7\,\vec{i} - 6{,}44 \cdot 10^7\,\vec{j}\text{ N}$$

El vector $\vec{r}_{2A}$ tiene origen en (5, 0) y extremo en (0, 10).
Por tanto:

$$\vec{r}_{2A} = 5\vec{i} + 10\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{2A} = \frac{\vec{r}_{2A}}{|\vec{r}_{2A}|} = \frac{-5\vec{i} + 10\vec{j}}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{-5\vec{i} + 10\vec{j}}{\sqrt{125}}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{2A} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_0}{r_{2A}^2} \cdot \vec{u}_{2A} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{125} \cdot \frac{(-5\vec{i} + 10\vec{j})}{\sqrt{125}} =$$
$$= 3{,}22 \cdot 10^7\,\vec{i} - 6{,}44 \cdot 10^7\,\vec{j}\text{ N}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{EA} = \vec{F}_{1A} + \vec{F}_{2A} = (-3{,}22 \cdot 10^7\,\vec{i} - 6{,}44 \cdot 10^7\,\vec{j}) +$$
$$+ (3{,}22 \cdot 10^7\,\vec{i} - 6{,}44 \cdot 10^7\,\vec{j}) = -1{,}288 \cdot 10^8\,\vec{j}\text{ N}$$

Y la aceleración será:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{EA}}{m} = \frac{-128{,}8 \cdot 10^6\,\vec{j}}{2} = -64{,}4 \cdot 10^6\,\vec{j}\text{ m/s}^2$$

Repetimos los cálculos para el punto B(0, 0).

El vector $\vec{r}_{1B}$ tiene origen en (−5, 0) y extremo en (0, 0).
Por tanto:

$$\vec{r}_{1B} = 5\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{1B} = \frac{\vec{r}_{1B}}{|\vec{r}_{1B}|} = \frac{5\vec{i}}{\sqrt{5^2}} = \vec{i}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{1B} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_0}{r_{1B}^2} \cdot \vec{u}_{1B} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{25} \cdot \vec{i} = -3{,}60 \cdot 10^8\,\vec{i}\text{ N}$$

El vector $\vec{r}_{2B}$ tiene origen en (5, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{2B} = -5\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{2B} = \frac{\vec{r}_{2B}}{|\vec{r}_{2B}|} = \frac{-5\vec{i}}{\sqrt{5^2}} = -\vec{i}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{2B} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_0}{r_{2B}^2} \cdot \vec{u}_{2B} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{25} \cdot (-\vec{i}) = 3{,}60 \cdot 10^8 \,\vec{i}\ \mathrm{N}$$

Finalmente:

$$\vec{F}_{EB} = \vec{F}_{1B} + \vec{F}_{2B} = 0\,\mathrm{N} \rightarrow \vec{a}_B = \frac{\vec{F}_{EB}}{m} = 0\ \mathrm{m/s^2}$$

Lógico, puesto que el punto B está justo entre q_1 y q_2.

b) Admitiendo que la única interacción es la electrostática, se puede obtener la velocidad en el punto B(0, 0) a partir del teorema de conservación de la energía mecánica:

$$E_{CB} + E_{PB} = E_{CA} + E_{PA} = E_M \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q_0}{r_{1A}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_0}{r_{2A}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q_0}{r_{1B}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_0}{r_{2B}}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{\sqrt{125}} + 9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{\sqrt{125}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_B^2 + \left(9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot (-0{,}1)}{5}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow -1{,}61 \cdot 10^9 = v_B^2 + (-3{,}6 \cdot 10^9) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{3{,}6 \cdot 10^9 - 1{,}61 \cdot 10^9} = 4{,}46 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$$

4. En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado se disponen cargas de +10 μC. Calcula:

a) El vector intensidad de campo eléctrico en el cuarto vértice.

b) El potencial eléctrico en dicho vértice.

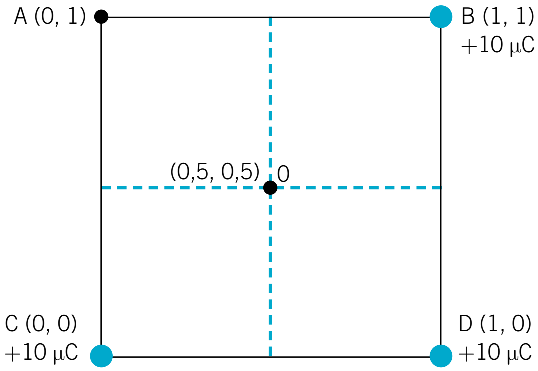
c) El trabajo necesario para llevar una carga de +5 μC desde el centro del cuadrado hasta el cuarto vértice.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻².

(Cantabria. Septiembre, 2007)

a) En virtud del principio de superposición, podemos obtener el vector intensidad de campo en el cuarto vértice a partir de los vectores intensidad de campo que genera cada carga por separado:

$$\vec{E}_{TA} = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{AD}$$



El vector $\vec{r}_{AB}$ tiene origen en (1, 1) y extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_{AB} = -\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{-\vec{i}}{\sqrt{1^2}} = -\vec{i}$$

Obtenemos el campo generado en A por la carga situada en B con la expresión:

$$\vec{E}_{AB} = K \cdot \frac{Q_B}{r_{AB}^2} \cdot \vec{u}_{AB} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1} \cdot (-\vec{i}) = -9 \cdot 10^4\, \vec{i} \text{ N/C}$$

El vector $\vec{r}_{AC}$ tiene origen en (0, 0) y extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_{AC} = \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{\vec{j}}{\sqrt{1^2}} = \vec{j}$$

Obtenemos el campo generado en A por la carga situada en C con la expresión:

$$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{Q_C}{r_{AC}^2} \cdot \vec{u}_{AC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^4\, \vec{j} \text{ N/C}$$

El vector $\vec{r}_{AD}$ tiene origen en (1, 0) y extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_{AD} = -\vec{i} + \vec{j} \rightarrow \vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

Obtenemos el campo generado en A por la carga situada en D con la expresión:

$$\vec{E}_{AD} = K \cdot \frac{Q_D}{r_{AD}^2} \cdot \vec{u}_{AD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} =$$
$$= -3{,}182 \cdot 10^4\, \vec{i} + 3{,}182 \cdot 10^4\, \vec{j} \text{ N/C}$$

Finalmente:

$$\vec{E}_{TA} = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{AD} =$$
$$= -9 \cdot 10^4\, \vec{i} + 9 \cdot 10^4\, \vec{j} + (-3{,}182 \cdot 10^4\, \vec{i} + 3{,}182 \cdot 10^4\, \vec{j}) =$$
$$= -1{,}2182 \cdot 10^5\, \vec{i} + 1{,}2182 \cdot 10^5\, \vec{j} \text{ N/C}$$

b) También en virtud del principio de superposición hallaremos el potencial creado en A por las cargas en los restantes vértices, sabiendo que:

$$V_A = V_{BA} + V_{CA} + V_{DA}$$

Además, conocemos los vectores correspondientes a cada vértice, ya que para el potencial creado en A coinciden con los obtenidos en el apartado anterior.

- $V_{AB} = K \cdot \dfrac{Q_B}{r_{AB}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{10 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^4$ V
- $V_{AC} = K \cdot \dfrac{Q_C}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{10 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^4$ V
- $V_{AD} = K \cdot \dfrac{Q_D}{r_{AD}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{10 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 6{,}364 \cdot 10^4$ V

Sumando:

$$V_A = V_{AB} + V_{AC} + V_{AD} =$$
$$= 9 \cdot 10^4 \text{ V} + 9 \cdot 10^4 \text{ V} + 6{,}364 \cdot 10^4 \text{ V} = 2{,}4364 \cdot 10^5 \text{ V}$$

c) Sabemos que:

$$W_{O \to A} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_A - V_O)$$

Hemos obtenido el valor del potencial creado en el vértice A en el apartado anterior, por lo que basta con repetir los cálculos para el centro del cuadrado definido en el enunciado.

Como se trata de un cuadrado, la distancia a la que se encuentra cada una de las cargas que están en B, C o D del centro es la misma, y coincide con la mitad de la diagonal:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 0{,}71 \text{ m}$$

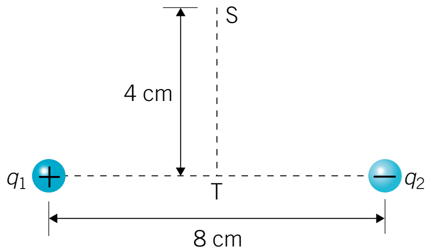
Como las tres cargas son iguales y las tres distancias son iguales, el potencial que crea cada una de las cargas en el centro del cuadrado también es igual:

$$V_O = V_{OB} + V_{OC} + V_{OD} \rightarrow$$
$$\rightarrow V_O = 3 \cdot V_{OB} = 3 \cdot K \cdot \frac{Q_B}{r_{OB}} =$$
$$= 3 \cdot \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{0{,}71} \rightarrow V_O = 3{,}8184 \cdot 10^5 \text{ V}$$

De acuerdo con lo expuesto al principio del apartado:

$$W_{O \to A} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_A - V_O) =$$
$$= -5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot (2{,}4364 \cdot 10^5 \text{ V} - 3{,}8184 \cdot 10^5 \text{ V}) = 0{,}7 \text{ J}$$

5. **Dos cargas puntuales $q_1 = +2{,}0$ nC y $q_2 = -1{,}0$ nC están fijas y separadas una distancia de 8 cm. Calcular:**



a) El campo eléctrico en el punto T situado en el punto medio entre las cargas.

b) El potencial eléctrico en los puntos S y T.

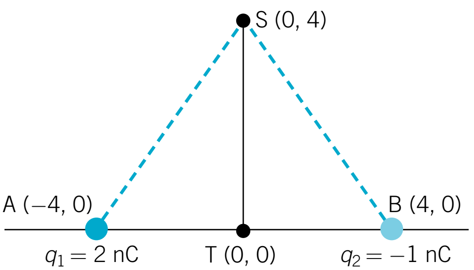
c) El trabajo necesario para trasladar otra carga, q', de $+3{,}0$ nC desde el punto S hasta el punto T.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; 1 nC = 10^{-9} C.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

a) Obtenemos el campo total que las dos cargas crean en el punto T haciendo uso del principio de superposición:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{TA} + \vec{E}_{TB}$$



- Campo generado en T por la carga situada en A (q_1).
  El vector $\vec{r}_{TA}$ tiene origen en (−4, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{TA} = 4\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{TA} = \frac{\vec{r}_{TA}}{|\vec{r}_{TA}|} = \frac{4\vec{i}}{4} = \vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{TA} = K \cdot \frac{q_1}{r_{TA}^2} \cdot \vec{u}_{TA} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4^2} \cdot \vec{i} = 1{,}125\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

- Campo generado en T por la carga situada en B (q_2).
  El vector $\vec{r}_{TB}$ tiene origen en (4, 0) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{TB} = -4\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{TB} = \frac{\vec{r}_{TB}}{|\vec{r}_{TB}|} = \frac{-4\vec{i}}{4} = -\vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{TB} = K \cdot \frac{q_2}{r_{TB}^2} \cdot \vec{u}_{TB} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}}{4^2} \cdot (-\vec{i}) = 0{,}5625\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

Sumando:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{TA} + \vec{E}_{TB} = 1{,}125\,\vec{i} + 0{,}5625\,\vec{i} = 1{,}69\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

b) También utilizaremos el principio de superposición para calcular el potencial creado en T y en S por las cargas situadas en A y B.

- $V_{TA} = K \cdot \dfrac{q_1}{r_{TA}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^{-9}}{4} = 4{,}5\ \text{V}$
- $V_{TB} = K \cdot \dfrac{q_2}{r_{TB}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-1 \cdot 10^{-9})}{4} = -2{,}25\ \text{V}$

Por tanto:

$$V_T = V_{TA} + V_{TB} = 4{,}5\ \text{V} - 2{,}25\ \text{V} = 2{,}25\ \text{V}$$

La distancia a la que se encuentra cada una de las cargas del punto S es:

$$r_{SA} = r_{SB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}\ \text{m}$$

- $V_{SA} = K \cdot \dfrac{q_1}{r_{SA}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{32}} = 3{,}18\ \text{V}$
- $V_{SB} = K \cdot \dfrac{q_2}{r_{SB}} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot (-1 \cdot 10^{-9})}{\sqrt{32}} = -1{,}59\ \text{V}$

Por tanto:

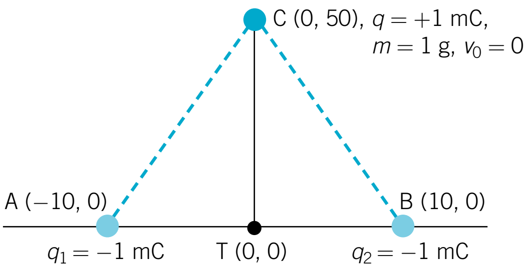
$$V_S = V_{SA} + V_{SB} = 3{,}18\ \text{V} - 1{,}59\ \text{V} = 1{,}59\ \text{V}$$

c) Sabemos que:

$$W_{S \rightarrow T} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_T - V_S) =$$
$$= -3 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot (2{,}25\ \text{V} - 1{,}59\ \text{V}) = -1{,}98 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

El trabajo es negativo, es decir, hay que realizarlo en contra de las fuerzas del campo.

6. **Dos cargas negativas iguales, de 1 mC, se encuentran sobre el eje de abscisas, separadas una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm sobre la vertical que pasa por el punto medio de la línea que las une se abandona una carga positiva de 1 mC y masa 1 g, inicialmente en reposo. Calcula la velocidad que tendrá al pasar por el punto medio de la línea que las une.**



Las distancias serán:

$$d_{AC} = d_{BC} = \sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{2600} = 51 \text{ cm}$$

Como la interacción electrostática es conservativa, la energía mecánica del sistema permanecerá constante:

$$E_{CO} + E_{PO} = E_{CC} + E_{PC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_O^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{d_{AO}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{d_{BO}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{d_{AC}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{d_{BC}}\right)$$

Expresando todas las magnitudes en unidades del SI:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot v_O^2 + \left(2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (-1 \cdot 10^{-3})}{0{,}1}\right) =$$

$$= \left(2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (-1 \cdot 10^{-3})}{0{,}51}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_O = \sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot (-3{,}53 \cdot 10^4 + 18 \cdot 10^4)} = 1{,}7 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

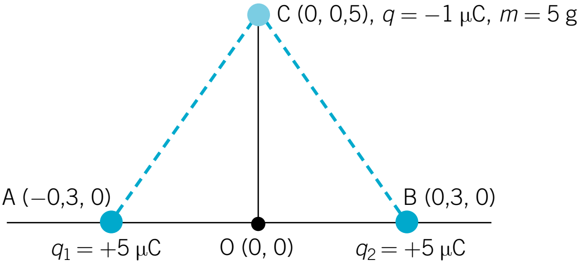
7. Una partícula de masa 5 g y carga −2 μC se deja en libertad y en reposo a 0,5 m de dos cargas fijas de 5 μC separadas 0,6 m.
Suponiendo que solo intervienen fuerzas eléctricas, determina:

a) El campo eléctrico en el punto donde se ha dejado la partícula.

b) El potencial en ese punto.

b) La velocidad que tendrá la partícula cuando llegue al punto medio de las dos cargas.

(Islas Baleares. Septiembre, 2006)



a) En virtud del teorema de superposición, podemos obtener el vector intensidad de campo en el punto inicial a partir de los vectores intensidad de campo que genera cada carga por separado en el mismo:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC}$$

- Campo generado en C por la carga situada en A.

  El vector $\vec{r}_{AC}$ tiene origen en (–0,3, 0) y extremo en (0, 0,5). Por tanto:

$$\vec{r}_{AC} = 0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}5^2}} = \frac{0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}34}}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{q_1}{r_{AC}^2} \cdot \vec{u}_{AC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}34} \cdot \frac{0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}34}} =$$

$$= 6{,}81 \cdot 10^4\,\vec{i} + 1{,}135 \cdot 10^5\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

- Campo generado en C por la carga situada en B.

  El vector $\vec{r}_{BC}$ tiene origen en (0,3, 0) y extremo en (0, 0,5). Por tanto:

$$\vec{r}_{BC} = -0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{BC} = \frac{\vec{r}_{BC}}{|\vec{r}_{BC}|} = \frac{-0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}5^2}} = \frac{-0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}34}}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{BC} = K \cdot \frac{q_2}{r_{BC}^2} \cdot \vec{u}_{BC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}34} \cdot \frac{-0{,}3\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}34}} =$$

$$= -6{,}81 \cdot 10^4\,\vec{i} + 1{,}135 \cdot 10^5\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

  Sumando:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC} = (6{,}81 \cdot 10^4\,\vec{i} + 1{,}135 \cdot 10^5\,\vec{j}) +$$

$$+ (-6{,}81 \cdot 10^4\,\vec{i} + 1{,}135 \cdot 10^5\,\vec{j}) = 2{,}27 \cdot 10^5\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

b) También en virtud del principio de superposición hallaremos el potencial creado en C por las dos cargas.

- $V_{AC} = K \cdot \dfrac{q_1}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}34}} = 7{,}7174 \cdot 10^4\ \text{V}$

- $V_{BC} = K \cdot \dfrac{q_2}{r_{BC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}34}} = 7{,}7174 \cdot 10^4\ \text{V}$

  Sumando:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = 2 \cdot 7{,}7174 \cdot 10^4\ \text{V} = 1{,}5435 \cdot 10^5\ \text{V}$$

c) Calculamos las distancias:

$$d_{AC} = d_{BC} = \sqrt{0{,}34}\ \text{m};\ d_{A0} = d_{B0} = 0{,}3\ \text{m}$$

De acuerdo con el teorema de conservación de la energía:

$$E_{CO} + E_{PO} = E_{CC} + E_{PC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_O^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{d_{AO}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{d_{BO}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + \left(K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{d_{AC}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{d_{BC}} \right)$$

Utilizamos todas las magnitudes en unidades del SI y sustituimos:

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot v_O^2 + \left(9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{0,3} \cdot 2 \right) =$$

$$= \left(9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{0,34}} \cdot 2 \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_O = \sqrt{\frac{2 \cdot (-0,31 + 0,6)}{5 \cdot 10^{-3}}} = 10,77 \text{ m/s}$$

8. **a) Un campo electrostático que obedece a la expresión $\vec{E} = 10^4\, \vec{j}$ N/C está dirigido en el sentido positivo del eje Y.**

a1) Calcular la fuerza que ejerce este campo sobre un electrón y comparar el resultado con el peso del electrón. ¿Qué conclusión se puede derivar de esta comparación?

a2) Hallar la energía cinética adquirida por el electrón cuando haya recorrido 1 cm, partiendo del reposo, y el tiempo que necesita para recorrer dicha distancia.

Datos: masa del electrón: $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

(P. Asturias. Junio, 2005)

a1) Obtenemos el valor de la fuerza electrostática que ejerce el campo descrito en el enunciado:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4\, \vec{j} = -1,6 \cdot 10^{-15}\, \vec{j} \text{ N}$$

Su peso es:

$$\vec{P} = m \cdot a \cdot (-\vec{j}) = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8 \cdot (-\vec{j}) = -8,92 \cdot 10^{-30}\, \vec{j} \text{ N}$$

Ambas fuerzas tienen la misma dirección y sentido, si bien el módulo del peso es despreciable frente al de la fuerza electrostática.

a2) En una región donde el campo electrostático es constante se cumple: $E \cdot d = \Delta V$.

Además, en función del teorema de conservación de la energía mecánica:

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \rightarrow E_{Pi} - E_{Pf} = E_{Cf} = \Delta E_P$$

Y además:

$$V = \frac{E_P}{q} \rightarrow \Delta E_P = q \cdot \Delta V$$

Utilizando todas las magnitudes en unidades del SI:

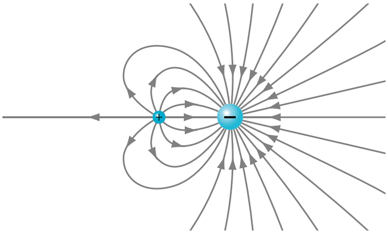
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot E \cdot d \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot E \cdot d}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

9. Dibuja aproximadamente las líneas del campo eléctrico contenidas en un plano en el que hay dos cargas eléctricas, una *Q* y otra, −2*Q*.

(Islas Baleares. Junio, 2005)

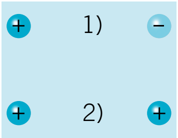
El número de líneas de campo debe ser proporcional al campo en cada punto; en consecuencia, el número de líneas de campo eléctrico entrantes en la carga negativa debería de ser el doble de las salientes de la carga positiva.



10. Tenemos dos cargas iguales separadas una cierta distancia, en un caso de signos contrarios y en el otro del mismo signo, tal como se muestra en las figuras 1) y 2).

a) Representa las líneas del campo eléctrico en los dos casos.

b) Representa las superficies equipotenciales para los dos casos.

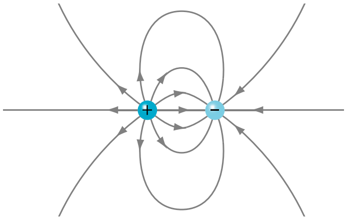


Nota: haz las representaciones en el plano que contiene ambas cargas.

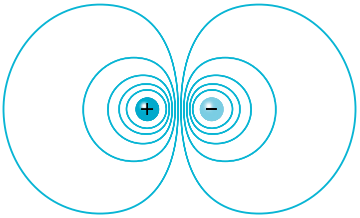
(Cantabria. Septiembre, 2005)

Caso 1: cargas de signo opuesto.

a) Líneas de campo:

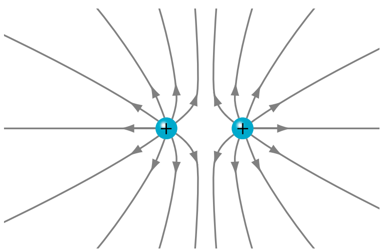


b) Superficies equipotenciales:

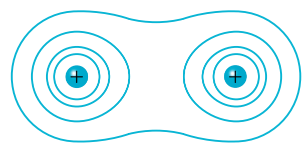


Caso 2: dos cargas positivas.

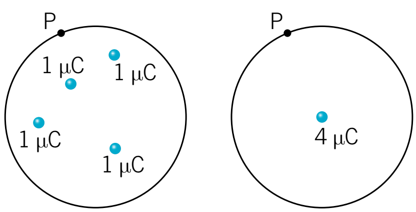
a) Líneas de campo:



b) Superficies equipotenciales:



11. **Defina la magnitud flujo del vector campo eléctrico. Enuncie el teorema de Gauss. Considere las dos situaciones de la figura. ¿El flujo que atraviesa la esfera es el mismo en ambas situaciones? ¿El campo eléctrico en el mismo punto P es igual en ambas situaciones? Razone en todo caso su respuesta.**



(Castilla y León. Junio, 2007)

Se llama flujo, ϕ, el número de líneas de campo que atraviesan una superficie. Se representa de tal manera que el número de líneas de campo por unidad de superficie perpendicular a las mismas indica la intensidad del campo.

El teorema de Gauss para el campo electrostático dice que el flujo neto que atraviesa una superficie que se sitúa en el interior de un campo depende de la carga encerrada por dicha superficie.

El flujo eléctrico es independiente del radio de la superficie gaussiana; solo depende de la carga encerrada por esa superficie y de la constante dieléctrica del medio, pero no de otros factores, como la forma de la superficie o la posición de la carga en su interior.

$\phi = \dfrac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon}$. Esta es la definición del teorema de Gauss para el campo electrostático.

En relación con las situaciones mostradas en la figura, el flujo eléctrico será el mismo para ambos casos, ya que, de acuerdo con el teorema de Gauss, este únicamente depende de la carga encerrada, y esta es la misma en ambos casos. Sin embargo, esto no es así para el valor del campo eléctrico en P, ya que este sí depende de los vectores de posición de la distribución de carga, que en este caso es diferente, pues la distribución de carga es diferente.

12. **Si el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ¿pueden existir cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razone la respuesta.**

(Castilla y León, 2008)

Pueden existir cargas eléctricas dentro siempre y cuando el balance de cargas positivas y negativas sea igual, de forma que la carga positiva se iguale con la negativa y la suma de todas sea nula.

13. **Dos pequeñas esferas conductoras de radios $r_1 = 1{,}00$ cm y $r_2 = 2{,}00$ cm se encuentran cargadas con cargas $q_1 = 2{,}0$ nC y $q_2 = -5{,}0$ nC, respectivamente. Si la distancia que separa sus centros es 2,6 m, determina:**

a) El módulo de la fuerza electrostática que ejerce una esfera sobre la otra.

b) Si las esferas se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable, calcula la carga y el potencial que adquiere cada esfera.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m^2 · C^{-2}; 1 nC = 10^{-9} C.

(Castilla-La Mancha, 2006)

a) A una distancia mucho mayor que sus radios, de acuerdo con el teorema de Gauss, las esferas se comportarán como una carga puntual de valor igual a la carga de toda la esfera y situada en su centro. Obtenemos, por tanto, la fuerza electrostática que ejercen entre sí considerándolas como cargas puntuales separadas una distancia igual a la separación de sus centros.

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot (-5 \cdot 10^{-9})}{2{,}6^2} = -13{,}31 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

Y puesto que las cargas son de signos opuestos, es una fuerza atractiva.

b) Al unir a las esferas con un hilo conductor alcanzarán el equilibrio electrostático, de manera que sus potenciales se igualarán.

$$V_1 = V_2 \rightarrow \cancel{K} \cdot \frac{q_1}{r_1} = \cancel{K} \cdot \frac{q_2}{r_2} \rightarrow \frac{q_1}{1 \cdot \cancel{10^{-2}\ \text{m}}} = \frac{q_2}{2 \cdot \cancel{10^{-2}\ \text{m}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{q_1}{1} = \frac{q_2}{2} \rightarrow q_1 = \frac{q_2}{2}$$

Como la carga del sistema se conserva:

$$q_1 + q_2 = -3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Relacionando las expresiones anteriores:

$$q_1 + \underbrace{2 \cdot q_1}_{q_2} = -3 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \rightarrow q_1 = \frac{-3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3} = -1 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Y entonces:

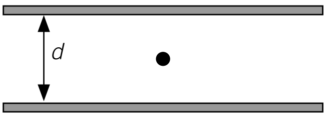
$$q_2 = 2 \cdot q_1 = 2 \cdot (-1 \cdot 10^{-9}\ \text{C}) = -2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

De acuerdo con lo deducido por medio del teorema de Gauss, el potencial dentro de cada esfera coincide con el que hay en su superficie:

- $V_1 = K \cdot \dfrac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \dfrac{-1 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = -900\ \text{V}$
- $V_2 = K \cdot \dfrac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \dfrac{-2 \cdot 10^{-9}\text{C}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = -900\ \text{V}$

Se comprueba que el potencial de las dos esferas es el mismo.

14. **Dos placas metálicas cargadas eléctricamente están dispuestas horizontalmente separadas una distancia $d = 20 \cdot 10^{-2}$ m, creando en su interior un campo eléctrico de $E = 2{,}50 \cdot 10^4$ N/C. Una microgota de aceite de $5{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg de masa, cargada negativamente, está en equilibrio suspendida en un punto equidistante de ambas placas. Determinar:**



a) ¿Cuál de las placas está cargada negativamente?

b) ¿Cuánto vale la diferencia de potencial entre las placas?

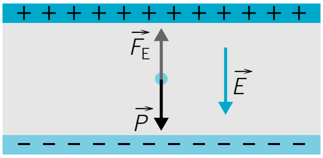
c) La carga de la gota.

d) La magnitud de la fuerza eléctrica que se ejercería sobre la gota si estuviera solo 1 cm por encima de la placa inferior.

Dato: $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

(Cantabria. Junio, 2005)

a) Para que la gota esté en equilibrio, la fuerza electrostática debe ser igual y de sentido contrario al peso, es decir, vertical y hacia arriba. La carga de la gota es negativa, lo que determina que la fuerza electrostática tendrá la misma dirección, pero sentido opuesto al campo. En consecuencia, el vector campo electrostático debe tener dirección vertical y sentido hacia abajo. Dado que el sentido de las líneas de campo va de las cargas positivas a las negativas, la placa positiva debe ser la superior.



b) Para dos placas cargadas, planas y paralelas se cumple, con un campo constante:

$$\Delta V = E \cdot d = 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{V/m} \cdot 20 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 5 \cdot 10^3\ \text{V}$$

c) Si está en equilibrio, será que el módulo de su peso es el mismo que el de la fuerza electrostática, de forma que, al tener sentidos contrarios, la gota se mantiene en equilibrio.

$$P = m \cdot g = F_E = E \cdot |q| \rightarrow$$

$$\rightarrow |q| = \frac{m \cdot g}{E} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{-14}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg}}{2{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C}} = 2 \cdot 10^{-17}\ \text{C}$$

d) Como el campo es constante, será el mismo en cualquier punto entre las dos placas. Conociendo la carga de la gota de aceite podemos obtener la fuerza electrostática que se ejerce sobre ella de acuerdo con esta expresión:

$$F_E = |q| \cdot E = 2 \cdot 10^{-17}\ \text{C} \cdot 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C} = 5 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

15. **Un electrón se mueve con una velocidad de $5 \cdot 10^5$ m · s^{-1} y penetra en un campo eléctrico de 50 N · C^{-1} de igual dirección y sentido que la velocidad.**

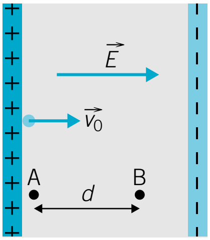
a) Haga un análisis energético del problema y calcule la distancia que recorre el electrón antes de detenerse.

b) Razone qué ocurriría si la partícula incidente fuera un protón.

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg.

(Andalucía, 2006)

a) La interacción electrostática es conservativa. En consecuencia, la energía mecánica del electrón permanece constante. Supongamos que inicia su movimiento en A y se detiene cuando llega a B:



$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{CA} = E_{PB} - E_{PA} = q \cdot (V_B - V_A) = q \cdot \Delta V \quad [1]$$

Como el campo entre las placas es constante, se cumple que:

$$\Delta V = -E \cdot d \qquad [2]$$

Relacionando las ecuaciones [1] y [2]:

$$\frac{1}{2} m_E \cdot v_0^2 = q \cdot (-E \cdot d)$$

Sustituimos los datos teniendo en cuenta que la carga del electrón es negativa:

$$\frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^5)^2 = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-50 \cdot d) \rightarrow$$

$$\rightarrow d = 14{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Llegamos al mismo resultado haciendo un estudio dinámico del problema.

Puesto que el electrón tiene carga negativa, estará sometido a una fuerza electrostática de la misma dirección que $\vec{E}$ y sentido contrario. Por tanto, de la misma dirección y sentido opuesto a su velocidad inicial. Tendrá, por tanto, un movimiento decelerado:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_x$$

Sustituimos los datos expresándolos en unidades del SI:

$$1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (50\vec{i}\,) = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = -8{,}79 \cdot 10^{12}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

Conociendo su velocidad inicial y su aceleración podemos conocer el tiempo que tardará en detenerse a partir de:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{-v_0}{a} = \frac{-5 \cdot 10^5}{-8{,}79 \cdot 10^{12}} = 5{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{s} = 56{,}883\ \text{ns}$$

Y conociendo este tiempo podemos ya obtener la distancia recorrida en este intervalo:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 5 \cdot 10^5 \cdot 56{,}883 \cdot 10^{-9} +$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 8{,}79 \cdot 10^{12} \cdot (56{,}883 \cdot 10^{-9})^2 = 0{,}014\,22\ \text{m} = 14{,}22\ \text{mm}$$

b) Si la partícula incidente fuera un protón, su aceleración sería positiva y, por tanto, no se detendría por la acción del campo eléctrico, sino que su movimiento se aceleraría.

16. Una partícula de masa *m* y carga -10^{-6} C se encuentra en reposo al estar sometida al campo gravitatorio terrestre y a un campo eléctrico uniforme *E* = 100 N · C^{-1} de la misma dirección.

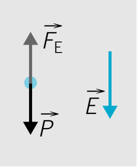
a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y calcule su masa.

b) Analice el movimiento de la partícula si el campo eléctrico aumentara a 120 N · C^{-1} y determine su aceleración.

***g* = 10 m · s^{-2}.**

(Andalucía, 2007)

a) Si la partícula se encuentra en reposo, significa que el módulo de la fuerza gravitatoria y el de la fuerza electrostática que actúan sobre ella son idénticos. Las fuerzas tendrán asimismo la misma dirección y sentidos opuestos, de manera que mantienen a la carga en equilibrio y en reposo. Observa que, como la carga es negativa, la fuerza tiene sentido opuesto al campo:



$$P = m \cdot g = F_E = E \cdot |q| \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{E \cdot |q|}{g} = \frac{100\ \text{N/C} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{10\ \text{m/s}^2} = 1 \cdot 1$$

b) Puesto que tiene carga negativa, estará sometido a una fuerza electrostática de la misma dirección que $\vec{E}$ y sentido contrario; por tanto, de la misma dirección y sentido opuesto a la fuerza gravitatoria. El cuerpo dejará de estar en equilibrio y se moverá hacia arriba con un movimiento acelerado:

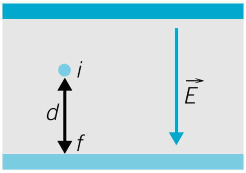
$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_G = q \cdot \vec{E} + \vec{P} =$$
$$= (-10^{-6}) \cdot (-120\,\vec{j}\,) - 10^{-5} \cdot 10\,\vec{j} = 2 \cdot 10^{-5}\,\vec{j}\text{ N}$$

Y queda:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-5}\text{ N}}{10^{-5}\text{ kg}} = 2\text{ m/s}^2$$

17. **Sea una partícula de masa 1 g, cargada positivamente y que se mueve en el seno de un campo eléctrico uniforme $E = 1 \cdot 10^4$ N/C cuyas líneas de campo son perpendiculares al suelo. Inicialmente la partícula está en reposo y a una altura de 5 m del suelo. Si se la deja libre, la partícula toca el suelo con una velocidad de 20 m/s. Determinar el sentido de las líneas de campo y la carga de la partícula.**
Dato: tomar $g = 10$ m/s².
(P. Asturias. Junio, 2006)

Dado que la partícula tiene carga positiva, se verá sometida a una fuerza en la dirección y sentido del campo. La dirección será vertical, y el sentido, hacia los valores de Y negativos, ya que la partícula desciende 5 m desde la posición inicial.



Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica a las posiciones inicial y final del movimiento de la partícula:

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \rightarrow E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \rightarrow$$
$$\rightarrow E_{Cf} = E_{Pi} - E_{Pf} = -\Delta E_P = q \cdot (-\Delta V)$$

En el seno de un campo eléctrico uniforme: $\Delta V = -E \cdot d$.
Relacionando las dos expresiones anteriores:

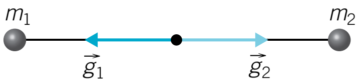
$$E_{Cf} = q \cdot E \cdot d \rightarrow q \cdot d \cdot E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow q = \frac{m \cdot v_f^2}{2 \cdot d \cdot E} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^4} = 4 \cdot 10^{-6}\text{ C}$$

18. **a) Explique las analogías y diferencias entre el campo eléctrico creado por una carga puntual y el campo gravitatorio creado por una masa puntual, en relación con su origen, intensidad relativa, dirección y sentido.**
b) ¿Puede anularse el campo gravitatorio y/o el campo eléctrico en un punto del segmento que une a dos partículas cargadas? Razone la respuesta.
(Andalucía, 2007)

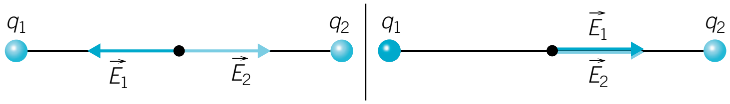
a) Las analogías y las diferencias se deducen de las siguientes expresiones:

Campo gravitatorio	Campo electrostático
$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_G}{m} = -G \cdot \dfrac{M}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}_E}{q} = K \cdot \dfrac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Las líneas de campo tienen dirección radial y siempre mueren en el cuerpo que crea el campo.	Las líneas de campo tienen dirección radial y salen del cuerpo que crea el campo si tiene carga positiva y mueren en él si tiene carga negativa.
La constante G es universal y su valor en el SI es del orden de 10^{-11}.	La constante K depende del medio en que se estudia el campo. Su valor en el vacío, medido en unidades del SI, es del orden de 10^9.

b) Dadas dos partículas, siempre habrá un punto en el segmento que las une donde el campo gravitatorio se anula.



Si las partículas tienen carga del mismo signo, habrá un punto del segmento que las une donde el campo electrostático se anule; si tienen carga de signo contrario, el campo nunca será nulo en el segmento que las une:

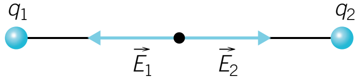


El punto donde se anula el campo, en su caso, estará en el punto medio del segmento si ambos cuerpos tienen la misma masa o la misma carga; en otro caso, el punto donde se anula estará más próximo al cuerpo de menor masa o menor carga.

19. En una región del espacio el campo es nulo. ¿Debe ser nulo también el potencial eléctrico en dicha región? Razona la respuesta.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

No. Dados dos cuerpos con carga del mismo signo, habrá un punto en el segmento que los une donde el campo es nulo, pero no es nulo el potencial, que es una magnitud escalar y tendrá el signo de las cargas.



De acuerdo con el teorema de Gauss:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta V$$

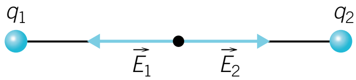
En el interior de un conductor esférico en equilibrio, el campo es nulo. De ello se deriva que el potencial es constante, lo que no indica que sea necesariamente nulo.

20. **Dos cargas eléctricas puntuales, positivas y en reposo, están situadas en dos puntos A y B de una recta. Conteste razonadamente:**

a) ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto del espacio que rodea a ambas cargas? ¿Y el potencial eléctrico?

(Andalucía, 2006)

Para dos cargas eléctricas puntuales positivas y en reposo habrá algún punto en la línea que las une donde el campo será nulo. El punto estará en el centro del segmento si las dos cargas son iguales; en caso contrario, estará más próximo a la carga menor.



El potencial es una magnitud escalar cuyo valor depende del signo de las cargas; si las dos son positivas, el potencial siempre será positivo.

21. **Si el campo electroestático es constante en una determinada región del espacio, ¿también lo es el potencial en esa misma región?**

En una región del espacio donde el campo electrostático sea constante:

$$\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -\Delta V \rightarrow \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta V$$

De acuerdo con esto, cuando el campo electrostático es constante, el potencial depende del valor del campo y de la posición que se considere, por lo que no será constante en esa región, sino que su valor dependerá de cada punto de la región.

22. **¿Qué relación hay entre el potencial y el campo eléctricos? ¿Cómo se expresa matemáticamente esa relación en el caso de un campo eléctrico uniforme?**

(C. Valenciana. Junio, 2006)

El potencial y el campo eléctrico se relacionan según:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta V$$

Además, si el campo eléctrico es uniforme (no depende de la posición) podremos decir que:

$$\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -\Delta V \rightarrow \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta V$$

23. Si una carga puntual produce, a una cierta distancia *r* un potencial eléctrico de 10 V y un campo de módulo *E*, ¿cuánto vale el potencial en otro punto en el cual el campo es *E*/4?

(R. Murcia. Junio, 2007)

Comparamos el módulo de $\vec{E}$ con el valor del potencial en un mismo punto:

- $E = K \cdot \dfrac{Q}{r^2}$
- $V = K \cdot \dfrac{Q}{r}$

Tenemos:

$$E' = K \cdot \frac{Q}{r'^2} = \frac{1}{4}E \rightarrow \cancel{K} \cdot \frac{\cancel{Q}}{r'^2} = \frac{1}{4} \cdot \cancel{K} \cdot \frac{\cancel{Q}}{r^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow r'^2 = 4r^2 \rightarrow r' = 2r$$

Y entonces:

$$V' = K \cdot \frac{Q}{r'} = K \cdot \frac{Q}{2r} = \frac{V}{2} = 5 \text{ V}$$

24. Una partícula cargada que se deja en libertad en un punto de un campo eléctrico se va a mover:

a) En el sentido de los potenciales crecientes.

b) En el sentido de los potenciales decrecientes.

c) La partícula no se mueve a menos que sobre ella se aplique una fuerza.

Nota: haz el estudio tanto para una partícula con carga positiva como con carga negativa.

Si la partícula tiene carga positiva se moverá en la dirección y sentido del campo. Por tanto, en el sentido de los potenciales decrecientes. Por el contrario, si la partícula tiene carga negativa, el movimiento será contrario al campo y se moverá en el sentido de los potenciales crecientes.

25. Una carga $q > 0$ se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Si la carga se desplaza en la misma dirección y sentido que el campo eléctrico, ¿qué ocurre con su energía potencial eléctrica? ¿Y si movemos la carga en dirección perpendicular al campo? Justifica ambas respuestas.

(C. Valenciana. Junio, 2007)

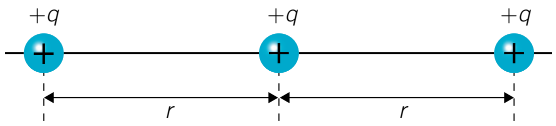
Cuando una carga se mueve en un campo eléctrico, el trabajo que realizan las fuerzas del campo es igual y de signo contrario a la variación de la energía potencial:

$$W_{A\to B} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P$$

Si una carga positiva se mueve en la misma dirección y sentido que el campo eléctrico, se aleja de la carga que genera el campo (también positiva). El trabajo que realizan las fuerzas del campo es positivo (el movimiento se realiza de forma espontánea) y la carga que se mueve pierde energía potencial.

Si la carga se mueve de forma perpendicular al campo, la fuerza es perpendicular al desplazamiento, por lo que el trabajo que realizan las fuerzas del campo es nulo y la energía potencial permanece constante.

26. **Se dispone un sistema de cargas eléctricas positivas, puntuales, del mismo valor y alineadas tal como indica la figura:**



1. **La energía potencial electrostática del sistema es:**

   a) $\mathbf{2K\dfrac{q^2}{r}}$ b) $\mathbf{3K\dfrac{q^2}{2r}}$ c) $\mathbf{5K\dfrac{q^2}{2r}}$

2. **Si la carga del centro se acercase a uno de los extremos, la energía potencial electrostática del sistema:**
   a) Aumentaría.
   b) Disminuiría.
   c) No cambiaría, porque el sistema sería el mismo.

(Cataluña. Septiembre, 2007)

1. La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial de todas las parejas de cargas que se puedan establecer:

$$E_P = K \cdot \frac{q \cdot q}{r} + K \cdot \frac{q \cdot q}{r} + K \cdot \frac{q \cdot q}{2r} = 5K \cdot \frac{q \cdot q}{2r}$$

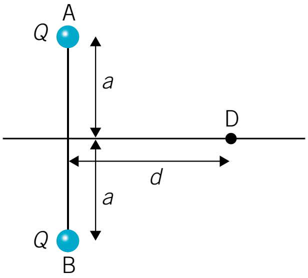
   La respuesta correcta es la c).

2. Aumentaría. En la expresión que permite el cálculo hay un término que no cambia (el que se refiere a la energía potencial de las cargas que están en los extremos). De los otros dos, la energía potencial de las cargas que se aproximan aumenta más de lo que disminuye la energía de las cargas que se alejan, porque la energía potencial varía con el inverso de la distancia.

27. **Dos cargas positivas e iguales están situadas en el eje Y; una está situada en $y = a$, y la otra, en $y = -a$. Calcular el campo y el potencial eléctrico en un punto situado sobre el eje X y a una distancia d del origen. ¿Cómo varía el resultado si $a >> d$? ¿Y si es $d >> a$?**

(La Rioja. Septiembre, 2005)

Obtenemos el campo eléctrico creado en el punto D (d, 0) por las cargas de valor Q situadas en A(0, a) y B(0, $-a$). Para ello, en virtud del principio de superposición:



$$\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

- Campo generado en D por la carga situada en A.

  El vector $\vec{r}_A$ tiene origen en (0, a) y extremo en (d, 0).

  Por tanto:

$$\vec{r}_A = d\vec{i} - a\vec{j} \rightarrow \vec{u}_A = \frac{\vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} = \frac{d\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_A = K \cdot \frac{Q}{r_A^2}\vec{u}_A = K \cdot \frac{Q}{d^2 + a^2} \cdot \frac{d\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \text{ N/C}$$

- Obtenemos el campo generado en D por la carga situada en B.

  El vector $\vec{r}_B$ tiene origen en (0, $-a$) y extremo en (d, 0).

  Por tanto:

$$\vec{r}_B = d\vec{i} - a\vec{j} \rightarrow \vec{u}_B = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|} = \frac{d\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_B = K \cdot \frac{Q}{r_B^2}\vec{u}_B = K \cdot \frac{Q}{d^2 + a^2} \cdot \frac{d\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \text{ N/C}$$

  Sumando:

$$\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{E}_B = K \cdot \frac{Q}{d^2 + a^2} \cdot \frac{d\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}} +$$

$$+ K \cdot \frac{Q}{d^2 + a^2} \cdot \frac{d\vec{i} + a\vec{j}}{\sqrt{d^2 + a^2}} = \frac{2 \cdot K \cdot Q \cdot d}{(d^2 + a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

  (Las componentes verticales se anulan.)

También en virtud del principio de superposición hallaremos el potencial creado en D por las dos cargas.

$$V_A = V_B = K \cdot \frac{Q}{r_A} = K \cdot \frac{Q}{\sqrt{d^2 + a^2}} \rightarrow V_D = V_A + V_B = 2K \cdot \frac{Q}{\sqrt{d^2 + a^2}}$$

- Si $a >> d$, $(d^2 + a^2)^{3/2} \simeq a^3$ y $\sqrt{d^2 + a^2} \simeq a$:

$$\vec{E}_D = 2 \cdot K \cdot \frac{Q \cdot d}{a^3} \vec{i}\ ; \quad V_D = 2 \cdot V_A = 2 \cdot K \cdot \frac{Q}{a}$$

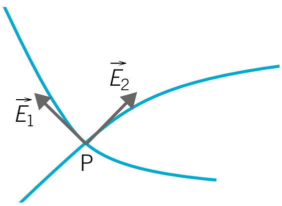
- Si $d >> a$, $(d^2 + a^2)^{3/2} \simeq d^3$ y $\sqrt{d^2 + a^2} \simeq d$:

$$\vec{E}_D = 2 \cdot K \cdot \frac{Q}{d^2} \vec{i}\ ; \quad V_D = 2 \cdot V_A = 2 \cdot K \cdot \frac{Q}{d}$$

28. Explica qué son las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales. Razona si es posible que se puedan cortar dos líneas de campo. Dibuja esquemáticamente las líneas de campo y las superficies equipotenciales correspondientes a una carga puntual positiva.

(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2007)

Las líneas de campo son líneas tangentes, en cada punto, al vector intensidad de campo en ese punto. Se dibujan de tal manera que el número de líneas de campo que atraviesan una unidad de superficie perpendicular a las líneas es proporcional a la intensidad del campo en el punto.



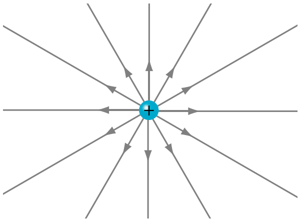
Las líneas de campo no se pueden cortar porque, si lo hiciesen, en el punto de corte habría dos valores distintos para el campo (dos tangentes distintas) y el campo tiene un valor único en cada punto del espacio.

Las superficies equipotenciales son regiones del espacio para las cuales el potencial eléctrico tiene el mismo valor. En consecuencia, el trabajo para desplazar una carga de un punto a otro de una superficie equipotencial es nulo:

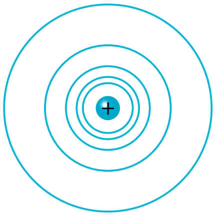
$$W_{i \to f} = -(E_{Pf} - E_{Pi}) = -(q \cdot V_f - q \cdot V_i) = 0$$

Para una carga puntual positiva:

Líneas de campo:



Superficies equipotenciales:

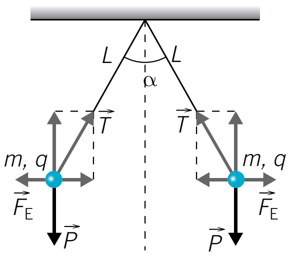


29. **Dos pequeñas esferas, de masa $m = 5$ g y con carga q, cada una, se suspenden del mismo punto mediante hilos iguales, de masa despreciable y longitud $L = 0{,}5$ m, en presencia del campo gravitatorio terrestre. ¿Cuál debe ser el valor de la carga q para que, en equilibrio, los hilos formen un ángulo $\alpha = 60°$?**

Considera $g = 10$ N/kg; $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$.

(Aragón. Junio, 2007)

Planteamos el balance de fuerzas para cada una de las cargas suspendidas y en equilibrio.



- Eje vertical:

$$T \cdot \cos\theta = P = m \cdot g$$

- Eje horizontal:

$$T \cdot \text{sen}\,\theta = F_E = K \cdot \frac{q \cdot q}{d^2}$$

La separación entre las cargas es $d = 2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta$. El ángulo es:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = 30°$$

Para calcular la carga, dividimos miembro a miembro y sustituimos los datos que tenemos, expresando las magnitudes en unidades del SI:

$$\frac{\cancel{T} \cdot \cos\theta}{\cancel{T} \cdot \text{sen}\theta} = \frac{m \cdot g}{K \cdot \dfrac{q^2}{(2 \cdot L \cdot \text{sen}\,\theta)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{q^2}{(2 \cdot 0{,}5 \cdot \text{sen}\,30°)^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot \text{sen}\,30°}{9 \cdot 10^9 \cdot \cos 30°} \rightarrow$$

$$\rightarrow q = 89{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

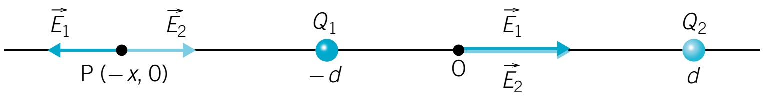
30. **Sean dos cargas Q_1 y Q_2 colocadas en los puntos del plano XY dados por $(-d, 0)$ y $(d, 0)$, respectivamente. Si $Q_1 > 0$ y $Q_2 < 0$ y se cumple $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$, averiguar en qué puntos del plano XY el campo eléctrico es nulo.**

(P. Asturias. Junio, 2005)

En cualquier punto entre las dos cargas el campo creado por cada una de ellas tendrá la misma dirección y sentido; por tanto, no será nulo. El campo se anulará en un punto en el que el campo creado por una de las cargas tenga la misma dirección y sentido contrario que el que crea la otra (un punto fuera del segmento

que las une) y ambos campos tengan el mismo módulo.
En consecuencia, el punto estará fuera del segmento que las une y más próximo a la carga de menor valor (Q_1):

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Buscamos un punto a la izquierda de Q_1 donde $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$.

$$\cancel{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{Q_1}{(x-d)^2} = \cancel{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{Q_2}{(x+d)^2}$$

Teniendo en cuenta que $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$:

$$\frac{4 \cdot \cancel{Q_2}}{(x-d)^2} = \frac{\cancel{Q_2}}{(x+d)^2} \rightarrow (x-d)^2 = (x+d)^2 \cdot 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-d) = (x+d) \cdot 2 \rightarrow 2x + 2d = x - d \rightarrow x = -3d$$

31. **Una carga puntual de 5 nC está situada en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano. Otra carga puntual de −15 nC está situada en el eje OY a 30 cm del origen del mismo sistema.**

Calcula:

a) La intensidad de campo electrostático en un punto A, situado en el eje OX, a 40 cm del origen.

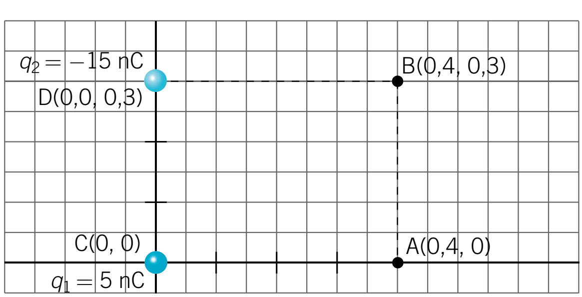
b) El valor del potencial electrostático en el punto A.

c) El trabajo realizado por el campo de fuerzas eléctricas cuando una carga de 10 nC se desplaza desde el punto A a otro punto B de coordenadas (40 cm, 30 cm).

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m^2 · C^{-2}; 1 nC = 10^{-9} C.

(Castilla-La Mancha, 2007)

Trabajamos en unidades del SI.



a) Para obtener el campo creado en el punto A(0,4, 0) por las cargas situadas en D(0, 0,3) y C(0, 0) utilizamos el principio de superposición:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_D + \vec{E}_C$$

Para cada carga:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2}\,\vec{u}$$

- Calculamos el campo que la carga que está en D crea en A. $\vec{r}_D$ tiene origen en (0, 0,3) y extremo en (0,4, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_D = 0{,}4\vec{i} - 0{,}3\vec{j} \rightarrow u_D = \frac{\vec{r}_D}{|\vec{r}_D|} = \frac{0{,}4\vec{i} - 0{,}3\vec{j}}{\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}3^2}} = \frac{0{,}4\vec{i} - 0{,}3\vec{j}}{0{,}5}$$

Entonces:

$$\vec{E}_D = K \cdot \frac{Q_2}{r_D^2}\,\vec{u}_D = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-15 \cdot 10^{-9})}{0{,}5^2} \cdot \frac{0{,}4\vec{i} - 0{,}3\vec{j}}{0{,}5} =$$

$$= -432\vec{i} + 324\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

- Calculamos el campo que la carga que está en C crea en A: $\vec{r}_C$ tiene origen en (0, 0) y extremo en (0,4, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_C = 0{,}4\vec{i} \rightarrow \vec{u}_C = \frac{\vec{r}_C}{|\vec{r}_C|} = \vec{i}$$

Entonces:

$$\vec{E}_C = K \cdot \frac{Q_1}{r_C^2}\,\vec{u}_C = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{0{,}4^2}\,\vec{i} = 281{,}25\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Obtenemos el campo total originado por las dos cargas en el punto A:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_D + \vec{E}_C =$$

$$= (-432\,\vec{i} + 324\,\vec{j}\,) + 281{,}25\,\vec{i} = -150{,}75\,\vec{i} + 324\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

b) También calculamos el potencial creado en A por las cargas situadas en B y C haciendo uso del principio de superposición: $V_A = V_D + V_C$.
Además, conocemos los vectores correspondientes a cada carga, ya que para el potencial creado en A coinciden con los obtenidos en el apartado anterior.

- $V_D = K \cdot \dfrac{Q_2}{r_D} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-15 \cdot 10^{-9})}{0{,}5} = -270\ \text{V}$

- $V_C = K \cdot \dfrac{Q_1}{r_C} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-9}}{0{,}4} = 112{,}5\ \text{V}$

Sumando:

$$V_A = V_D + V_C = -270\ \text{V} + 112{,}5\ \text{V} = -157{,}5\ \text{V}$$

c) Calculamos el trabajo en ese desplazamiento por la relación:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_B - V_A)$$

Hemos obtenido el valor del potencial en A. De forma similar obtenemos el potencial que las dos cargas iniciales crean en B: $V_B = V'_D + V'_C$.

- $V'_D = K \cdot \dfrac{Q_2}{r'_D} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-15 \cdot 10^{-9})}{0{,}4} = -337{,}5\ \text{V}$
- $V'_C = K \cdot \dfrac{q_1}{r'_C} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-9}}{0{,}5} = 90\ \text{V}$

Sumando:

$$V_B = V'_D + V'_C = -337{,}5\ \text{V} + 90\ \text{V} = -247{,}5\ \text{V}$$

De acuerdo con lo expuesto al principio del apartado:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_B - V_A) =$$
$$= -10 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot (-247{,}5\ \text{V} + 157{,}5\ \text{V}) = 9 \cdot 10^{-7}\ \text{J}$$

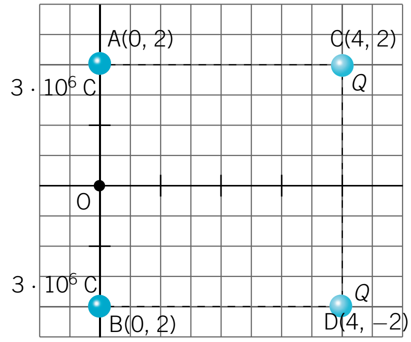
32. **Dos cargas puntuales de $3 \cdot 10^6$ C están localizadas en los puntos (0, 2) y (0, −2), respectivamente. Otras dos cargas *Q* están localizadas en (4, 2) y (4, −2). Sabiendo que el campo eléctrico en el origen de coordenadas es $3 \cdot 10^6$ N/C $\vec{i}$, determinar el valor de *Q*.**

(La Rioja. Junio, 2006)

Se calcula el campo eléctrico que todas estas cargas crean en el origen de coordenadas haciendo uso del principio de superposición:

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{OA} + \vec{E}_{OB} + \vec{E}_{OC} + \vec{E}_{OD}$$

Consideramos que los puntos citados se corresponden con A(0, 2), B(0, −2), C(4, 2) y D(4, −2) y que las coordenadas se expresan en metros.



- Campo creado por la carga situada en A.

  El vector $\vec{r}_{OA}$ tiene origen en (0, 2) y extremo en (0, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{OA} = -2\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{|\vec{r}_{OA}|} = \frac{-2\vec{j}}{2} = -\vec{j}$$

Entonces:

$$\vec{E}_{OA} = K \cdot \frac{q_A}{r_{OA}^2}\,\vec{u}_{OA} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^6}{4} \cdot (-\vec{j}\,) = -6{,}75 \cdot 10^{15}\,\vec{j}$$

- Campo creado por la carga situada en B.

  El vector $\vec{r}_{OB}$ tiene origen en (0, −2) y extremo en (0, 0).
  Por tanto:

$$\vec{r}_{OB} = 2\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{OB} = \frac{\vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OB}|} = \frac{2\vec{j}}{2} = -\vec{j}$$

Entonces:

$$\vec{E}_{OB} = K \cdot \frac{q_B}{r_{OB}^2}\,\vec{u}_{OB} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^6}{4} \cdot \vec{j} = 6{,}75 \cdot 10^{15}\,\vec{j}$$

- Campo creado por la carga situada en C.

  El vector $\vec{r}_{OC}$ tiene origen en (4, 2) y extremo en (0, 0).
  Por tanto:

$$\vec{r}_{OC} = -2\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{OC} = \frac{\vec{r}_{OC}}{|\vec{r}_{OC}|} = \frac{-4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{-4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{20}}$$

Entonces:

$$\vec{E}_{OC} = K \cdot \frac{q_C}{r_{OC}^2}\,\vec{u}_{OC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{20} \cdot \frac{-4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{20}} =$$
$$= -4{,}025 \cdot 10^8 \cdot Q\,\vec{i} - 2{,}0125 \cdot 10^8 \cdot Q\,\vec{j}$$

- Campo creado por la carga situada en D.

  El vector $\vec{r}_{OD}$ tiene origen en (4, −2) y extremo en (0, 0).
  Por tanto:

$$\vec{r}_{OC} = -4\vec{i} + 2\vec{j} \rightarrow \vec{u}_{OD} = \frac{\vec{r}_{OD}}{|\vec{r}_{OD}|} = \frac{-4\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{-4\vec{i} + 2\vec{i}}{\sqrt{20}}$$

Entonces:

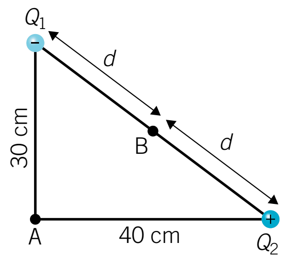
$$\vec{E}_{OD} = K \cdot \frac{q_D}{r_{OD}^2}\,\vec{u}_{OD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{20} \cdot \frac{-4\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{20}} =$$
$$= -4{,}025 \cdot 10^8 \cdot Q\,\vec{i} + 2{,}0125 \cdot 10^8 \cdot Q\,\vec{j}$$

Sumando los cuatro vectores de campo comprobamos que se anulan las componentes en dirección del eje Y y solo quedan las componentes en la dirección de X correspondientes al campo que crean las cargas C y D:

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{OA} + \vec{E}_{OB} + \vec{E}_{OC} + \vec{E}_{OD} = -2 \cdot 4{,}025 \cdot 10^8 \cdot Q\,\vec{i} = 3 \cdot 10^6\,\vec{i} \rightarrow$$

$$\rightarrow Q = -\frac{3 \cdot 10^6}{2 \cdot 4{,}025 \cdot 10^8} = -3{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

33. **a) Explica el concepto de potencial eléctrico. ¿Tiene sentido este concepto si la fuerza electrostática no fuese conservativa?**



b) Dos cargas eléctricas puntuales de valor $Q_1 = -9\ \mu C$ y $Q_2 = +16\ \mu C$ están fijas en el espacio ocupando dos vértices de un triángulo rectángulo (ver figura). Calcula el potencial eléctrico en los puntos A y B. ¿Qué trabajo realizará el campo eléctrico para llevar una carga puntual de 2 μC desde el punto B al punto A?

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2};\ 1\ \mu\text{C} = 10^{-6}\ \text{C}.$$

(Aragón. Septiembre, 2007)

a) Se denomina potencial en un punto (V) a la energía potencial de la unidad positiva de carga en ese punto:

$$V = \frac{E_P}{q} = K \cdot \frac{Q}{r}$$

El potencial es una magnitud escalar y, en el Sistema Internacional, se mide en voltios, V. 1 V = 1 J/C.

Desde el punto de vista físico, se define el potencial en un punto como el trabajo que realizan las fuerzas del campo para llevar la unidad de carga desde ese punto hasta fuera del campo, con velocidad constante.

$$\frac{W_{i \to \infty}}{q} = \int_i^\infty \frac{\vec{F}_E}{q} \cdot d\vec{r} = K \cdot Q \cdot \int_i^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr = K \cdot Q \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_i^\infty =$$

$$= -\frac{K \cdot Q}{r_\infty} + \frac{K \cdot Q}{r_i} \rightarrow \frac{W_{i \to \infty}}{q} = \frac{K \cdot Q}{r_i} = V_i$$

No tendría sentido la definición de potencial si el campo electrostático no fuera conservativo, ya que para su cálculo únicamente se considera su valor en el punto inicial y el final, y no la trayectoria seguida, lo que únicamente tiene sentido para campos conservativos (el trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático depende solo del punto inicial y final del desplazamiento, y no de la trayectoria seguida).

b) Sabemos que:

$$W_{A \to B} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_B - V_A)$$

Haciendo uso del principio de superposición, calcularemos el potencial que las dos cargas crean en A como la suma del potencial que cada una de ellas crea en ese punto. De forma similar, calcularemos el potencial que ambas cargas crean en B.

En las expresiones que utilicemos empleamos unidades del SI para todas las magnitudes.

Cálculo del potencial en A. $V_A = V_{A1} + V_{A2}$.

- $V_{A1} = K \cdot \dfrac{Q_1}{r_{A1}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-9 \cdot 10^{-6})}{0,3} = -2,7 \cdot 10^5$ V
- $V_{A2} = K \cdot \dfrac{Q_2}{r_{A2}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{16 \cdot 10^{-6}}{0,4} = 3,6 \cdot 10^5$ V

Sumando:

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = -2,7 \cdot 10^5 \text{ V} + 3,6 \cdot 10^5 \text{ V} = 9 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Cálculo del potencial en B. $V_B = V_{B1} + V_{B2}$.

Para obtener la distancia de cada carga al punto, calculamos el valor de la hipotenusa:

$$h = 2 \cdot d = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,5 \text{ m} \rightarrow d = 0,25 \text{ m}$$

- $V_{B1} = K \cdot \dfrac{Q_1}{r_{B1}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-9 \cdot 10^{-6})}{0,25} = -3,24 \cdot 10^5$ V
- $V_{B2} = K \cdot \dfrac{Q_2}{r_{B2}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{16 \cdot 10^{-6}}{0,25} = 5,76 \cdot 10^5$ V

Sumando:

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = -3,24 \cdot 10^5 \text{ V} + 5,76 \cdot 10^5 \text{ V} = 2,52 \cdot 10^5 \text{ V}$$

De acuerdo con lo expuesto al principio del apartado:

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_B - V_A) =$$
$$= -2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot (2,52 \cdot 10^5 \text{ V} - 9 \cdot 10^4 \text{ V}) = -0,324 \text{ J}$$

El trabajo es negativo, lo que implica que las fuerzas del campo no desplazarán a la partícula desde A hasta B. Para que se realice ese desplazamiento hay que aplicar una fuerza externa.

34. Tres partículas cargadas $Q_1 = +2$ μC, $Q_2 = +2$ μC y Q_3 de valor desconocido están situadas en el plano XY. Las coordenadas de los puntos en los que se encuentran las cargas son Q_1: (1, 0), Q_2: (−1, 0) y Q_3: (0, 2). Si todas las coordenadas están expresadas en metros:

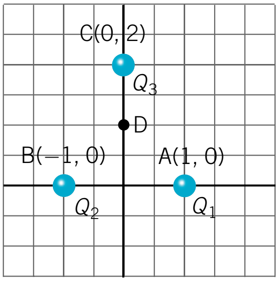
a) ¿Qué valor debe tener la carga Q_3 para que una carga situada en el punto (0, 1) no experimente ninguna fuerza neta?

b) En el caso anterior, ¿cuánto vale el potencial eléctrico resultante en el punto (0, 1) debido a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3?

$K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$; 1 μC = 10^{-6} C.

(C. Madrid. Junio, 2005)

a) Haciendo uso del principio de superposición, calculamos la fuerza que las tres cargas ejercen sobre la que se encuentra en el punto D(0, 1); estará en reposo cuando la fuerza total que actúe sobre ella sea cero:



$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Para cada carga:

$$\vec{F}_E = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

- Fuerza ejercida por la carga Q_1 que se encuentra en A(1, 0). El vector $\vec{r}_A$ tiene el origen en (1, 0) y el extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_A = -\vec{i} + \vec{j} \rightarrow \vec{u}_A = \frac{\vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

Entonces:

$$\vec{F}_1 = K \cdot \frac{Q_1 \cdot q}{r_A^2}\,\vec{u}_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot q}{2} \cdot \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} =$$
$$= -6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q \cdot \vec{i} + 6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q \cdot \vec{j}$$

- Fuerza ejercida por la carga Q_2 que se encuentra en B(−1, 0). El vector $\vec{r}_B$ tiene origen en (−1, 0) y extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_B = -\vec{i} + \vec{j} \rightarrow \vec{u}_B = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

Entonces:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{Q_2 \cdot q}{r_B^2}\,\vec{u}_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot q}{2} \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} =$$
$$= 6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q \cdot \vec{i} + 6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q\,\vec{j}$$

- Fuerza ejercida por la carga Q_3 que se encuentra en C(0, 2). El vector $\vec{r}_C$ tiene origen en (0, 2) y extremo en (0, 1). Por tanto:

$$\vec{r}_C = -\vec{j} \rightarrow \vec{u}_C = \frac{\vec{r}_C}{|\vec{r}_C|} = \frac{-\vec{j}}{\sqrt{1^2}} = -\vec{j}$$

Entonces:

$$\vec{F}_3 = K \cdot \frac{Q_3 \cdot q}{r_C^2}\,\vec{u}_C = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_3 \cdot q}{1} \cdot (-\vec{j}\,) = -9 \cdot 10^9 \cdot Q_3 \cdot q\,\vec{j}$$

Sumando:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 = (-6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q \cdot \vec{i} + 6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q \cdot \vec{j}) +$$
$$+ (6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q\,\vec{i} + 6{,}364 \cdot 10^3 \cdot q\,\vec{j}) - 9 \cdot 10^9 \cdot Q_3 \cdot q\,\vec{j} \rightarrow$$
$$\rightarrow 1{,}2728 \cdot 10^4 \cdot \cancel{q}\,\vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot Q_3 \cdot \cancel{q}\,\vec{j} \rightarrow$$
$$\rightarrow Q_3 = \frac{1{,}2728 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^9} = 1{,}414 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 1{,}414\ \mu\text{C}$$

b) De nuevo, haciendo uso del principio de superposición podemos obtener el potencial total en un punto a partir de los potenciales que cada una de las cargas individuales crea en ese punto: $V_T = V_1 + V_2 + V_3$.

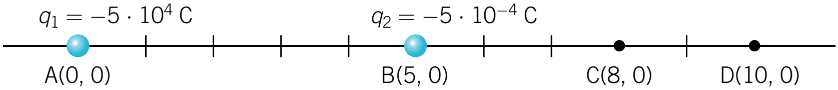
- $V_1 = K \cdot \dfrac{Q_1}{r_A} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 1{,}2728 \cdot 10^4\ \text{V}$
- $V_2 = K \cdot \dfrac{Q_2}{r_B} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 1{,}2728 \cdot 10^4\ \text{V}$
- $V_3 = K \cdot \dfrac{Q_3}{r_C} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{1{,}414 \cdot 10^{-6}}{1} \simeq 1{,}2728 \cdot 10^4\ \text{V}$

Sumando:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 3 \cdot 1{,}2728 \cdot 10^4\ \text{V} = 3{,}8184 \cdot 10^4\ \text{V}$$

35. Dos cargas puntuales de $-5 \cdot 10^{-4}$ C están fijas en los puntos $x = 0$ y $x = 5$ cm del eje OX. Calcular el módulo, la dirección y el sentido de la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$, además del potencial electrostático V, en los puntos $x = 8$ cm y $x = 10$ cm. Si se abandona en reposo una partícula de masa $m = 5$ mg y carga positiva $q = +10^{-9}$ C en el punto $x = 10$ cm, ¿cuál será su velocidad al pasar por $x = 8$ cm?

(País Vasco. Junio, 2007)



a) Podemos determinar la expresión del campo eléctrico en cualquiera de los dos puntos C(8, 0) y D(10, 0) en virtud del principio de superposición:

- $\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC}$
- $\vec{E}_D = \vec{E}_{AD} + \vec{E}_{BD}$

Consideramos que las cargas se encuentran en A(0, 0) y B(5, 0) y hacemos todos los cálculos en el SI de unidades.

- Campo creado por q_1 y q_2 en C.
  El vector $\vec{r}_{AC}$ tiene origen en (0, 0) y extremo en (0,08, 0). Por tanto:
  $$\vec{r}_{AC} = 0{,}08\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{AC} = \vec{i}$$
  Entonces:
  $$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AC}^2} \cdot \vec{u}_{AC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}08^2}\vec{i} = -7{,}03 \cdot 10^8\vec{i}\ \text{N/C}$$
  El vector $\vec{r}_{BC}$ tiene origen en (0,05, 0) y extremo en (0,08, 0).
  Por tanto:
  $$\vec{r}_{BC} = 0{,}03\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{BC} = \vec{i}$$
  Entonces:
  $$\vec{E}_{BC} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BC}^2}\vec{u}_{BC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}03^2}\vec{i} = -5 \cdot 10^9\vec{i}\ \text{N/C}$$
  Sumando:
  $$\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC} = -7{,}03 \cdot 10^8\vec{i} - 5 \cdot 10^9\vec{i} = -5{,}703 \cdot 10^9\vec{i}\ \text{N/C}$$
- Campo creado por q_1 y q_2 en D.
  El vector $\vec{r}_{AD}$ tiene origen en (0, 0) y extremo en (0,1, 0). Por tanto:
  $$\vec{r}_{AD} = 0{,}1\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{AD} = \vec{i}$$
  Entonces:
  $$\vec{E}_{AD} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AD}^2}\vec{u}_{AD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}1^2} \cdot \vec{i} = -4{,}5 \cdot 10^8\vec{i}\ \text{N/C}$$
  El vector $\vec{r}_{BD}$ tiene origen en (0,05, 0) y extremo en (0,1, 0).
  Por tanto:
  $$\vec{r}_{BD} = 0{,}05\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{BD} = \vec{i}$$
  Entonces:
  $$\vec{E}_{BD} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BD}^2}\vec{u}_{BD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}05^2}\vec{i} = -1{,}8 \cdot 10^9\vec{i}\ \text{N/C}$$
  Sumando:
  $$\vec{E}_D = \vec{E}_{AD} + \vec{E}_{BD} = -4{,}5 \cdot 10^8\vec{i} - 1{,}8 \cdot 10^9\vec{i} = -2{,}25 \cdot 10^9\vec{i}\ \text{N/C}$$

También utilizamos el principio de superposición para calcular el potencial que ambas cargas crean en los puntos C y D.

- Potencial creado por q_1 y q_2 en C.
  $$V_{AC} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}08} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V}$$
  $$V_{BC} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0{,}03} = -1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V}$$
  Sumando:
  $$V_C = V_{AC} + V_{BC} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V} - 1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V} = -2{,}0625 \cdot 10^8\ \text{V}$$

- Potencial creado por q_1 y q_2 en D:

$$V_{AD} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AD}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0,1} = -4,5 \cdot 10^7\ \text{V}$$

$$V_{BD} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BD}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4})}{0,05} = -9 \cdot 10^7\ \text{V}$$

Sumando:

$$V_D = V_{AD} + V_{BD} = -4,5 \cdot 10^7\ \text{V} - 9 \cdot 10^7\ \text{V} = -1,35 \cdot 10^8\ \text{V}$$

b) Dado que la interacción electrostática es conservativa, haremos uso del principio de conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad que alcanza la partícula al pasar por el punto C cuando es liberada en D en reposo ($v_D = 0$):

$$E_{CD} + E_{PD} = E_{CC} + E_{PC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_D^2 + q \cdot V_D = \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + q \cdot V_C \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \cdot 10^{-9} \cdot (-1,35 \cdot 10^8) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot v_C^2 + 1 \cdot 10^{-9} \cdot (-2,0625 \cdot 10^8) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot (-0,135 + 0,206\,25)}{5 \cdot 10^{-3}}} = 5,34\ \text{m/s}$$

36. **En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme vertical, de manera que la diferencia de potencial entre dos puntos situados uno encima del otro y distantes 2 cm es de 100 V.**

a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre un electrón situado en esa región del espacio?

b) Si el electrón se abandona en reposo en el punto de menor potencial, ¿con qué velocidad llegará al otro punto?

c) Representar gráficamente el vector campo eléctrico, la fuerza ejercida sobre el electrón, el punto de menor potencial y el punto de mayor potencial.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m^2 · C^{-2}; masa del electrón: $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

(C. F. Navarra. Septiembre, 2006)

a) Si el campo eléctrico es uniforme, se cumple que:

$$\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -\Delta V \rightarrow \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = -\Delta V \rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{100\ \text{V}}{2\ \text{m}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Conociendo la carga del electrón y el campo eléctrico uniforme existente podemos obtener la fuerza que ejerce sobre el electrón:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} \rightarrow F_E = q \cdot E = -1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 50\ \text{N/C} = -8 \cdot 10^{-18}\ \text{N}$$

b) Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son las fuerzas electrostáticas:

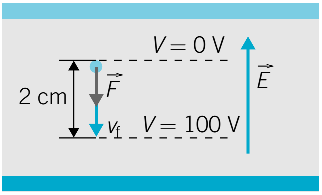
$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \rightarrow -E_{Pf} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Ci} \rightarrow$$

$$-\Delta E_P = E_{Cf} \rightarrow -q \cdot \Delta V = E_{Cf} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot v_f^2 = (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-100) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_f = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

c) Como el electrón es una partícula con carga negativa, la fuerza que actúa sobre él tiene el sentido opuesto al del campo eléctrico. Su movimiento es desde el punto de menor potencial al punto de mayor potencial. De ahí que su movimiento en este campo sea el que se indica por la flecha azul que está entre las dos líneas que marcan la zona entre la que existe la diferencia de potencial de 100 V.



37. **Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas eléctricas de valor 1 nC de signo contrario y separadas una distancia de 6 cm.**

a) Dibujar las líneas de fuerza del campo eléctrico de la distribución.

b) Calcular el valor del campo eléctrico en un punto situado a 2 cm de la carga positiva y en otro situado a 2 cm de la negativa.

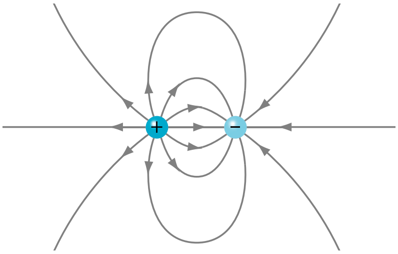
c) Calcular el valor del potencial eléctrico en esos puntos.

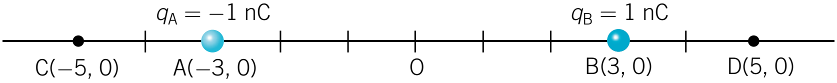
d) Si se abandona un electrón en reposo en el punto de menor potencial, calcular la velocidad que alcanzará cuando pase por el punto de mayor potencial.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; masa del electrón: $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(C. F. Navarra. Septiembre, 2007)

a) Son líneas que salen de la carga positiva y entran en la carga negativa.





b) Suponemos que las cargas se encuentran en los puntos de coordenadas A(−3, 0) y B(3, 0).

En ambos casos utilizaremos el principio de superposición para obtener el valor del campo eléctrico que ambas cargas crean en los puntos C(−5, 0) y D(5, 0).

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC};\ \vec{E}_D = \vec{E}_{AD} + \vec{E}_{BD}$$

- Campo total que las cargas que se encuentran en A y B crean en el punto C(−5, 0).

  En los cálculos tendremos en cuenta que las coordenadas están dadas en centímetros; debemos expresarlas en metros.

  El vector $\vec{r}_{AC}$ tiene origen en (−3, 0) y extremo en (−5, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{AC} = -0{,}02\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{AC} = \vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AC}^2}\, \vec{u}_{AC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}02^2} \cdot (-\vec{i}\,) = 2{,}25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ N/C}$$

  El vector $\vec{r}_{BC}$ tiene origen en (3, 0) y extremo en (−5, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{BC} = -0{,}08\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{BC} = \vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{BC} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BC}^2}\, \vec{u}_{BC} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}08^2} \cdot (-\vec{i}\,) = 1{,}406 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ N/C}$$

  Sumando:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC} = 2{,}25 \cdot 10^4 \vec{i} + 1{,}406 \cdot 10^3 \vec{i} = 2{,}391 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ N/C}$$

- Campo total que las cargas que se encuentran en A y B crean en el punto D(5, 0).

  El vector $\vec{r}_{AD}$ tiene origen en (−3, 0) y extremo en (5, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{AD} = 0{,}08\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{AD} = \vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{AD} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AD}^2}\, \vec{u}_{AD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}08^2}\, \vec{i} = -1{,}406 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ N/C}$$

  El vector $\vec{r}_{BD}$ tiene origen en (3, 0) y extremo en (5, 0). Por tanto:

$$\vec{r}_{BD} = 0{,}02\vec{i} \rightarrow \vec{u}_{BD} = \vec{i}$$

  Entonces:

$$\vec{E}_{BD} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BD}^2}\, \vec{u}_{BD} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}02^2}\, \vec{i} = -2{,}25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ N/C}$$

Sumando:

$$\vec{E}_D = \vec{E}_{AD} + \vec{E}_{BD} = -1{,}406 \cdot 10^3 \vec{i} - 2{,}25 \cdot 10^4 \vec{i} = -2{,}391 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ N/C}$$

Observa que en ambos puntos (C y D) el campo tiene el mismo módulo y dirección, pero sentidos contrarios.

c) Para calcular los potenciales creados en C y D podemos utilizar también el principio de superposición, de manera que:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC};\ V_D = V_{AD} + V_{BD}$$

- Potencial total que las cargas que se encuentran en A y B crean en el punto C(−5, 0).

$$V_{AC} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}02} = -450 \text{ V}$$

$$V_{BC} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BC}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}}{0{,}08} = 112{,}5 \text{ V}$$

Sumando:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = -450 \text{ V} + 112{,}5 \text{ V} = -337{,}5 \text{ V}$$

- Potencial total que las cargas que se encuentran en A y B crean en el punto D(5, 0).

$$V_{AD} = K \cdot \frac{q_A}{r_{AD}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1 \cdot 10^{-9})}{0{,}08} = -112{,}5 \text{ V}$$

$$V_{BD} = K \cdot \frac{q_B}{r_{BD}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}}{0{,}02} = 450 \text{ V}$$

Sumando:

$$V_D = V_{AD} + V_{BD} = -112{,}5 \text{ V} - 450 \text{ V} = 337{,}5 \text{ V}$$

d) El punto de menor potencial donde abandonaremos la carga es C, y obtendremos su velocidad cuando pasa por D.

Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son las fuerzas electrostáticas:

$$E_{CC} + E_{PC} = E_{CD} + E_{PD} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{CC} + E_{PC} = E_{CD} + E_{PD} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 + (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-337{,}5) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot v_D^2 + (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 337{,}5 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-17} \cdot 2)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}54 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

38. **Un modelo eléctrico simple para la molécula de cloruro de sodio consiste en considerar a los átomos de sodio y cloro como sendas cargas eléctricas puntuales de valor $1,6 \cdot 10^{-19}$ C y $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C, respectivamente. Ambas cargas se encuentran separadas una distancia $d = 1,2 \cdot 10^{-10}$ m. Calcula:**

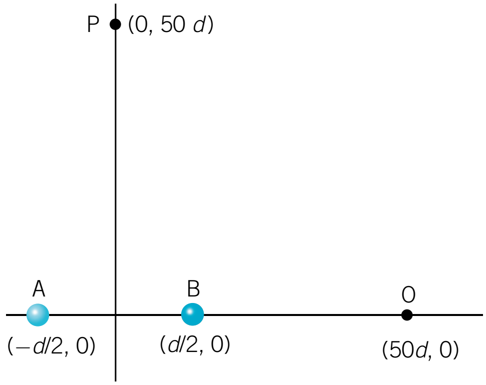
1. **El potencial eléctrico originado por la molécula en un punto O localizado a lo largo de la recta que une ambas cargas a una distancia 50*d* de su punto medio. Considera el caso en que el punto O se encuentra más próximo a la carga positiva.**
2. **El potencial eléctrico originado por la molécula en un punto P localizado a lo largo de la recta mediatriz del segmento que une las cargas y a una distancia 50*d* de su punto medio.**
3. **El trabajo necesario para desplazar a un electrón desde el punto O hasta el punto P.**

Datos: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ **C;** $K_e = 9 \cdot 10^9 \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$**.**

[Nota: donde se indica *molécula* supón que se refiere al dipolo formado por un ion Cl^- y un ion Na^+.]

(C. Valenciana. Septiembre, 2006)

Esquematizamos el problema estableciendo la localización de las cargas y las de los puntos O y P. En el gráfico se expresan sus coordenadas en unidades *d*.



1. Calculamos el potencial en O haciendo uso del principio de superposición:

$$V_O = V_{AO} + V_{BO}$$

- $V_{AO} = K \cdot \dfrac{q_A}{r_{AO}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-1,6 \cdot 10^{-19})}{50,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-10}} = -0,238$ V
- $V_{BO} = K \cdot \dfrac{q_B}{r_{BO}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{1,6 \cdot 10^{-19}}{49,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-10}} = 0,242$ V

Sumando:

$$V_O = V_{AO} + V_{BO} = -0{,}238 \text{ V} + 0{,}242 \text{ V} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

2. Calculamos el potencial en P haciendo uso del principio de superposición:

$$V_P = V_{AP} + V_{BP}$$

La distancia de P a los puntos A y B es:

$$r_{AP} = r_{BP} = \sqrt{(0{,}6 \cdot 10^{-10})^2 + (50 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-10})^2} \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Por tanto:

- $V_{AP} = K \cdot \dfrac{q_A}{r_{AP}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{(-1{,}6 \cdot 10^{-19})}{6 \cdot 10^{-9}} = -0{,}24 \text{ V}$
- $V_{BP} = K \cdot \dfrac{q_B}{r_{BP}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^{-9}} = 0{,}24 \text{ V}$

Sumando:

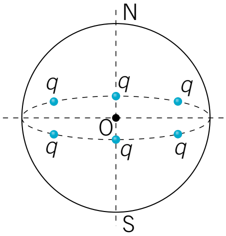
$$V_P = V_{AP} + V_{BP} = 0$$

3. Sabemos que:

$$W_{O \to P} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_P - V_O) =$$
$$= -(-1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0 - 4 \cdot 10^{-3} \text{ V}) = -6{,}4 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

El trabajo es negativo, lo que indica que las fuerzas del campo no desplazarán el electrón desde O hasta P; habrá que aplicar una fuerza externa para lograrlo.

39. Sobre la circunferencia máxima de una esfera de radio *R* = 10 m están colocadas equidistantes entre sí seis cargas positivas iguales y de valor *q* = 2 μC. Calcule:



a) El campo y el potencial debidos al sistema de cargas en uno cualquiera de los polos (puntos N y S).

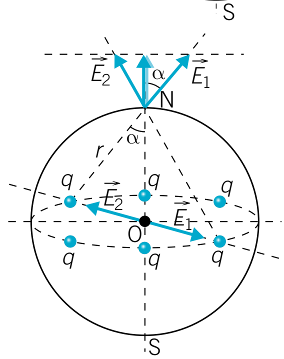
b) El campo y el potencial debidos al sistema de cargas en el centro O de la esfera.

(Castilla y León. Septiembre, 2007)

a) Podemos calcular el campo eléctrico en alguno de los polos, en virtud del principio de superposición de una distribución de cargas como:

$$\vec{E}_T = \sum_i \vec{E}_i$$

siendo $\vec{E}_i$ el campo creado por cualquiera de las cargas en el punto considerado.



$$r^2 = R^2 + R^2 \rightarrow r = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2} \cdot R$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{\cancel{R}}{\sqrt{2} \cdot \cancel{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Su módulo es igual para todas las cargas del sistema y se corresponde con:

$$E_i = K \cdot \frac{q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{R^2 + R^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{10^2 + 10^2} = 90 \text{ N/C}$$

Si descomponemos el campo que crea cada partícula en su componente vertical y horizontal, vemos que cada partícula tiene otra colocada de forma simétrica, de modo que las componentes horizontales de ambas se anulan. En consecuencia, al hacer la suma vectorial del campo creado por las seis partículas se anulan las componentes horizontales, quedando solo una componente vertical que es igual a seis veces la componente vertical del campo que crea una de ellas:

$$\vec{E}_i = \sum_i \vec{E}_i = 6 \cdot 90 \cdot \cos\alpha\, \vec{i} = 6 \cdot 90 \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\cos\alpha}\, \vec{i} = 381{,}84 \cdot \vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

También por el principio de superposición obtenemos el potencial creado por la distribución en el centro:

$$V_T = 6 \cdot V$$

siendo V el potencial que crea una carga en el polo, que es igual para todas las cargas.

$$V = K \cdot \frac{q}{\sqrt{2} \cdot R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2} \cdot 10} = 1{,}27 \cdot 10^3 \text{ V} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_T = 6 \cdot 1{,}27 \cdot 10^3 \text{ V} = 7{,}62 \cdot 10^3 \text{ V}$$

b) El centro de la circunferencia corresponde al punto medio de cada pareja de dos cargas del mismo signo. Sabemos que en el punto medio de la línea que une a dos cargas iguales el campo es nulo; por tanto, por el principio de superposición, el campo total creado por las tres parejas de cargas en ese punto será también nulo. $E_T = 0$.

También por el principio de superposición obtenemos el potencial creado por la distribución en el centro:

$$V_T = 6 \cdot V$$

siendo V el potencial que crea una carga en el centro, que es igual para todas las cargas.

$$V = K \cdot \frac{q}{R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10} = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ V} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_T = 6 \cdot 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ V} = 1{,}08 \cdot 10^4 \text{ V}$$

40. **¿Qué conclusiones se pueden sacar del hecho de que el flujo neto a través de una superficie gaussiana sea cero?**

a) El campo eléctrico es cero en toda la superficie.

b) No hay cargas eléctricas en el interior.

c) La suma algebraica de las cargas en el interior es cero.

La respuesta correcta es la c). De acuerdo con el teorema de Gauss, el flujo depende de la carga total contenida dentro de la superficie que se considere. Para que la carga total sea nula, puede ser que no existan cargas en el interior, pero únicamente es un caso particular de uno más general en el que se pueden tener cargas positivas y negativas, siempre y cuando el valor total positivo y negativo se iguale, de forma que el total sea nulo.

41. **a) Cargamos una esfera de plomo de 2 mm de radio a un potencial de 500 V. Determina la carga de la esfera.**

b) Introducimos la esfera cargada en una caja de cerillas. Determina el flujo eléctrico a través de la caja.

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$.

(Castilla-La Mancha, 2007)

a) De acuerdo con el teorema de Gauss, se determina el potencial de una esfera cargada de acuerdo con la expresión:

$$V_R = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} K \cdot \frac{Q}{R^2}\,\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -K \cdot \frac{Q}{R^2}\int_{\infty}^{R} dr = K \cdot \frac{Q}{R}$$

Según esto, conociendo el radio R de la esfera y su potencial podemos determinar su carga:

$$Q = \frac{V_R \cdot R}{K} = \frac{500 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} = 1{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{C}$$

b) En virtud del teorema de Gauss, el flujo que atraviesa una superficie es función únicamente de la carga que se encierra con esa superficie y de la constante dieléctrica; no depende del valor de la superficie:

$$\phi = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon}$$

En este caso, la carga encerrada es la carga de la esfera calculada en el apartado anterior, Q:

$$\phi = \frac{1{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{C}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}} = 12{,}55\ \text{Wb}$$

42. **En el interior de un conductor esférico cargado y en equilibrio electrostático se cumple:**

a) El potencial y el campo aumentan desde el centro hasta la superficie de la esfera.

b) El potencial es nulo, y el campo, constante.

c) El potencial es constante, y el campo, nulo.

(Galicia. Junio, 2005)

En un conductor esférico cargado y en equilibrio las cargas totales se distribuyen por la superficie del mismo, de manera que en su interior no existen cargas. En virtud del teorema de Gauss, la respuesta correcta es la c), ya que el campo total será nulo y, por tanto, su potencial será constante.

43. **Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q/ε_0, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:**

a) Cero

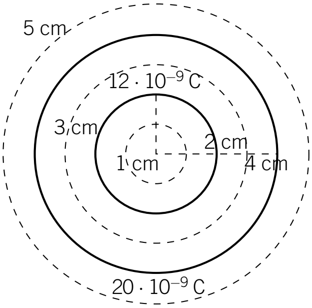
b) $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$

c) Q/ε_0

(Galicia. Septiembre, 2005)

Dado que, por definición de flujo de campo eléctrico, se verifica que $E = \frac{\phi}{S}$, las respuestas a) y c) con incorrectas, siendo la b) la expresión que se corresponde al campo eléctrico en el exterior de la superficie de una esfera.

44. **Dos conductores esféricos concéntricos y huecos tienen de radios 2 y 4 cm. La esfera interior lleva una carga de $12 \cdot 10^{-9}$ C, y la exterior, $20 \cdot 10^{-9}$ C. Determinar el campo eléctrico y el potencial a estas distancias del centro: 1, 3 y 5 cm.**



- Distancia de 1 cm:
  La carga encerrada por una superficie gaussiana de radio 1 cm no contiene ninguna carga, por lo que su flujo será nulo. Dado que $E = \frac{\phi}{S}$, será nulo también el campo eléctrico. Por otra parte, para puntos interiores a la esfera cargada, $E = 0 \rightarrow V =$ constante.

Su valor coincide con el de V_R cuando $R = 2$ cm + el valor de V_R cuando $R = 4$ cm:

$$V_T = V_R(2\text{ cm}) + V_R(4\text{ cm}) = K \cdot \frac{Q}{R(2\text{ cm})} + K \cdot \frac{Q}{R(4\text{ cm})} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = 9{,}9 \cdot 10^3 \text{ V}$$

- Distancia de 3 cm:

  A esta distancia la carga encerrada por la superficie gaussiana es la de la primera esfera cargada de radio 2 cm.

  Para cualquier superficie de Gauss fuera de la esfera:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon}$$

  El conductor esférico se comporta como un punto material situado en el centro de la esfera y que contenga toda la carga de la misma.

$$E = K \cdot \frac{Q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} = 1{,}20 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

  El potencial en ese punto será el debido al conductor interior más el debido al conductor exterior.

  – Potencial debido al conductor esférico interior en un punto exterior:

$$V_r = K \cdot \frac{Q_1}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-2}} = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

  – Potencial debido al conductor esférico exterior en un punto interior al mismo, V_R cuando $R = 4$ cm:

$$V_R = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ V}$$

  Sumando:

$$V_T = V_r + V_R = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ V} + 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ V} = 8{,}1 \cdot 10^3 \text{ V}$$

- Distancia de 5 cm:

  En este caso, la carga total encerrada por la superficie de Gauss es la suma de las cargas de los dos conductores esféricos.
  El razonamiento es cualitativamente igual al del apartado anterior.

  Para cualquier superficie de Gauss fuera de la esfera:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon}$$

  Los conductores esféricos se comportan como un punto material situado en el centro de la esfera y que contenga toda la carga.

$$E = K \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-9} + 20 \cdot 10^{-9}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} = 1{,}152 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

De forma parecida podemos obtener el potencial en un punto exterior al conductor esférico:

$$V_r = K \cdot \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-9} + 20 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} = 5{,}76 \cdot 10^3 \text{ V}$$

45. Tres pequeñas esferas conductoras, A, B y C, todas ellas de igual radio y con cargas $Q_A = 1\ \mu C$, $Q_B = 4\ \mu C$ y $Q_C = 7\ \mu C$ se disponen horizontalmente. Las bolitas A y B están fijas a una distancia de 60 cm entre sí, mientras que la C puede desplazarse libremente a lo largo de la línea que une A y B.

a) Calcule la posición de equilibrio de la bolita C.

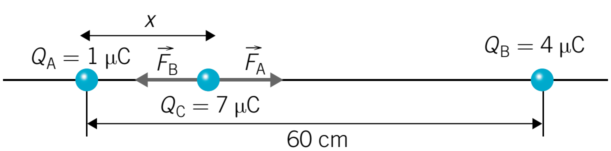
b) Si con unas pinzas aislantes se coge la esfera C y se le pone en contacto con la A dejándola posteriormente libre, ¿cuál será ahora la posición de equilibrio de esta esfera C?

Nota: es imprescindible incluir en la resolución los diagramas de fuerzas oportunos.

(Castilla y León. Junio, 2006)

a) La posición de equilibrio de la esfera C será aquella para la que las fuerzas electrostáticas que actúan sobre ella fruto de las cargas A y B se igualen en módulo. Sus sentidos son opuestos para ambos casos, ya que todas las cargas son positivas, por lo que todas las fuerzas son repulsivas.

- $F_A = K \cdot \frac{Q_A \cdot Q_C}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{63 \cdot 10^{-3}}{x^2}$
- $F_B = K \cdot \frac{Q_B \cdot Q_C}{(0{,}6 - x)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{(0{,}6 - x)^2} = \frac{252 \cdot 10^{-3}}{(0{,}6 - x)^2}$



Y como deben ser iguales:

$$\frac{63 \cdot 10^{-3}}{x^2} = \frac{252 \cdot 10^{-3}}{(0{,}6 - x)^2} \rightarrow (0{,}6 - x)^2 = x^2 \cdot 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}6 - x = x \cdot 2 \rightarrow x = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

La posición de equilibrio está 20 cm a la derecha de la carga A.

b) Al unir a las esferas con un hilo conductor alcanzarán el equilibrio electrostático, de manera que sus potenciales se igualarán.

Como las esferas son de igual radio, la carga total de ambas se repartirá a partes iguales entre las dos, de manera que la nueva distribución de carga será tal que:

$$Q_A = Q_C = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C} + 7 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2} = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Repetimos los cálculos para la posición de equilibrio con esta nueva distribución de carga:

- $F_A = K \cdot \dfrac{Q_A \cdot Q_C}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \dfrac{144 \cdot 10^{-3}}{x^2}$

- $F_B = K \cdot \dfrac{Q_B \cdot Q_C}{(0{,}6 - x)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{(0{,}6 - x)^2} = \dfrac{144 \cdot 10^{-3}}{(0{,}6 - x)^2}$

En este caso, como todas las cargas del sistema son iguales, ($Q_A = Q_B = Q_C = 4\ \mu$C) la fuerza generada por cada una de las cargas A y B sobre C será igual en el punto medio entre las dos cargas A y B: $x = 30$ cm será la posición de equilibrio para la carga C.

46. **Dos esferas metálicas de 5 cm y 10 cm de radio se cargan a 1000 V y −1000 V, respectivamente. Una vez cargadas se alejan hasta una distancia de 10 m, que se puede considerar muy grande comparada con los radios. Estas esferas ¿se atraen o se repelen? ¿Con qué fuerza? Las dos esferas se ponen en contacto mediante un hilo metálico. Al cabo de un rato se corta el hilo. En esta nueva situación, ¿con qué fuerza se atraen o se repelen? ¿Cuál ha sido la variación de energía del sistema entre la situación inicial y la final? Dato: $K = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.**

(Cataluña, 1994)

a) Calculamos la carga de las esferas metálicas conociendo el potencial en su superficie:

- $Q_A = \dfrac{V_A \cdot R_A}{K} = \dfrac{1000 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 5{,}556 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = 5{,}556\ \text{nC}$

- $Q_B = \dfrac{V_B \cdot R_B}{K} =$
$$= \frac{-1000 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = -11{,}112 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = -11{,}112\ \text{nC}$$

Las esferas se atraerán, puesto que su carga es de diferente signo.

A una distancia mucho mayor que su radio se comportan como cargas puntuales situadas en el centro de la esfera.

Podemos calcular el módulo de la fuerza con la que se atraen a partir de:

$$F = K \cdot \frac{Q_A \cdot Q_B}{R^2} =$$

$$= -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5{,}556 \cdot 10^{-9} \cdot 11{,}112 \cdot 10^{-9}}{10^2} = -5{,}556 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

b) Al unir a las esferas con un hilo conductor, alcanzarán el equilibrio electrostático, de manera que sus potenciales se igualarán.

$$V_A = V_B \rightarrow \cancel{K} \cdot \frac{Q_A}{R_A} = \cancel{K} \cdot \frac{Q_B}{R_B} \rightarrow \frac{Q_A}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{Q_B}{10 \cdot 10^{-2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{Q_A}{5} = \frac{Q_B}{10} \rightarrow Q_A = \frac{Q_B}{2}$$

Como la carga del sistema se conserva:

$$Q_A + Q_B = -5{,}556 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Relacionando las expresiones anteriores:

$$Q_A + \underbrace{2 \cdot Q_A}_{Q_B} = -5{,}556 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \rightarrow$$

$$\rightarrow Q_A = \frac{-5{,}556 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3} = -1{,}852 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Y tenemos entonces:

$$Q_B = 2 \cdot Q_A = -2 \cdot 1{,}852 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = -3{,}704 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Calculamos la fuerza con la que se repelen (por ser cargas del mismo signo) en esta ocasión:

$$F = K \cdot \frac{Q_A \cdot Q_B}{R^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-1{,}852 \cdot 10^{-9} \cdot (-3{,}704 \cdot 10^{-9})}{10^2} = 6{,}1738 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

47. Un electrón, con una velocidad de $6 \cdot 10^6$ m · s^{-1}, penetra en un campo eléctrico uniforme y su velocidad se anula a una distancia de 20 cm desde su entrada en la región del campo.

a) Razone cuáles son la dirección y el sentido del campo eléctrico.

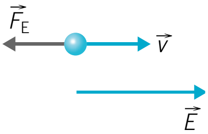
b) Calcule su módulo.

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

(Andalucía, 2008)

a) Como se aprecia en el esquema de la página siguiente, para que su movimiento sea decelerado (su velocidad se anula tras entrar en el campo), el campo eléctrico debe tener la misma dirección

y sentido que la velocidad del electrón.
El electrón es una partícula de carga negativa, y la fuerza que el campo ejerce sobre ella es de sentido opuesto al del propio campo. Esto es, si el electrón se mueve en la dirección y sentido de $\vec{i}$, el campo eléctrico tendrá dirección y sentido de $\vec{i}$, puesto que su carga es negativa.



b) $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_x$. Sustituimos los datos expresándolos en unidades del SI:

$$-1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \vec{E} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a} \qquad [1]$$

Como el campo es constante, la fuerza que actúa sobre el electrón también lo es. Por tanto, tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Utilizamos sus ecuaciones para estudiar el movimiento del electrón.

Se detiene a 20 cm del inicio; es decir, a esa distancia su velocidad se hace 0:

$$v = v_0 \rightarrow 0 = 6 \cdot 10^6 + a \cdot t \rightarrow -\frac{6 \cdot 10^6}{t} = a$$

Por otra parte:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 20 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^6 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot t \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

Por tanto:

$$a = -\frac{6 \cdot 10^6}{t} = -\frac{6 \cdot 10^6\ \text{m/s}}{6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{s}} = -8{,}995 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2$$

Y retomando la ecuación anterior [1]:

$$-1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \vec{E} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{E} = -\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$
$$= -\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (-8{,}995 \cdot 10^{13})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ \vec{i} \rightarrow \vec{E} = 551{,}59\ \vec{i}\ \text{N/C}$$

48. Un protón se acelera desde el reposo bajo la acción de un campo eléctrico uniforme E = 640 N/C. Calcular el tiempo que tarda en alcanzar una velocidad de 1,2 · 10⁶ m/s.

Datos: $Q_{\text{protón}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_{\text{protón}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

(P. Asturias. Septiembre, 2007)

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_x \rightarrow$$
$$\rightarrow a = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 640}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 6{,}131 \cdot 10^{10}\ \text{m/s}^2$$

Como el campo es constante, el protón tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Calculamos el tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad con la ecuación correspondiente:

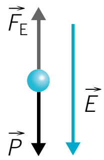
$$v = v_0 + at \rightarrow 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 0 + 6{,}131 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{10} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{6{,}131 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2} = 1{,}957 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 19{,}57 \text{ µs}$$

49. Una pequeña esfera cargada de masa *m* se encuentra en equilibrio en el seno del campo gravitatorio terrestre y de un campo electrostático de módulos *g* y *E*, respectivamente, teniendo ambos la misma dirección y sentido. Determina la carga de la esfera en función de *m*, *g* y *E*, e indica su signo.

(Canarias. Septiembre, 2006)

Para que la carga esté en equilibrio, la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática que actúan sobre ella deben ser iguales en módulo y opuestas. Como los campos $\vec{g}$ y $\vec{E}$ tienen la misma dirección y sentido, la carga debe ser negativa, a fin de que la fuerza eléctrica tenga sentido puesto al campo. Su valor será:



$$P = m \cdot g = F_E = E \cdot |q| \rightarrow |q| = \frac{m \cdot g}{E}$$

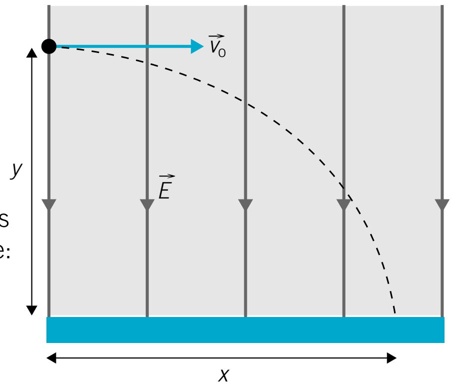
50. Una partícula, de 0,1 g de masa y 1 µC de carga se mueve a la velocidad de 1 m/s en dirección horizontal cuando entra en una zona donde existe un campo eléctrico uniforme de 200 N/C en la dirección vertical. Calcula:

a) El punto en que incidirá con una pantalla perpendicular situada a 1 m del lugar donde aparece el campo eléctrico.

b) La energía cinética que tiene la partícula en ese instante.

a) La partícula sigue un movimiento parabólico; su movimiento es uniforme en el eje X y uniformemente acelerado en el eje Y. Su posición en cada instante viene dada por las coordenadas (x, y), donde:

- $x = v_0 \cdot t$
- $y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$



Calculamos la aceleración:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_y$$

sustituyendo los datos expresados en unidades del SI:

$$a_y = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{0{,}1 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ m/s}^2$$

Cuando alcanza la pantalla perpendicular al campo, la partícula ha recorrido 1 m en la dirección vertical:

$$y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \rightarrow 1 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = 1 \text{ s}$$

El desplazamiento horizontal que se ha producido en ese tiempo es:

$$x = v_0 \cdot t = 1 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ m}$$

b) Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son las electrostáticas, se conserva la energía mecánica porque son fuerzas conservativas.

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} - E_{Pf} = E_{Cf} \rightarrow E_{Ci} - \Delta E_P = E_{Cf} \quad [1]$$

Como el campo es uniforme, podemos considerar la diferencia de potencial a una cierta distancia del mismo por medio de la expresión: $\Delta V = -d \cdot E$.

$$\Delta E_P = q \cdot \Delta V = -q \cdot d \cdot E$$

Retomando la ecuación [1]:

$$E_{Ci} - \Delta E_P = E_{Cf} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 + q \cdot d \cdot E = E_{Cf}$$

Sustituyendo los datos expresados en unidades del SI:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 1^2 + 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 200 = E_{Cf} \rightarrow E_{Cf} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

51. Cada uno de los electrones que componen un haz tiene una energía cinética de $1{,}6 \cdot 10^{-17}$ J.

a) Calcula su velocidad.

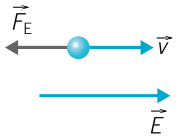
b) ¿Cuál será la dirección, sentido y módulo de un campo eléctrico que haga que los electrones se detengan a una distancia de 10 cm, desde su entrada en la región ocupada por el campo?
(Carga del electrón: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)

(C. Madrid, 1993)

a) La energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-17}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b) Como se aprecia en el esquema, para que su movimiento sea decelerado (su velocidad se anula tras entrar en el campo), el campo eléctrico debe tener la misma dirección y sentido que la velocidad del electrón.



El electrón es una partícula con carga negativa, y la fuerza que el campo ejerce sobre ella es de sentido opuesto al del propio campo.
Esto es, si el electrón se mueve en la dirección y sentido de $\vec{i}$, el campo eléctrico tendrá dirección y sentido de $\vec{i}$, puesto que su carga es negativa.

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_x$$

Sustituimos los datos expresándolos en unidades del SI:

$$-1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \vec{E} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a} \qquad [1]$$

Como el campo es constante, la fuerza que actúa sobre el electrón también lo es; por tanto, tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Utilizamos sus ecuaciones para estudiar el movimiento del electrón.

Sabiendo que se detiene a 10 cm del inicio:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 10 \cdot 10^{-2} = 5{,}93 \cdot 10^6 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad [2]$$

Por otra parte:

$$v = v_0 + at \rightarrow 0 = 5{,}93 \cdot 10^6 + a \cdot t \rightarrow -\frac{5{,}93 \cdot 10^6}{t} = a$$

Sustituyendo en la ecuación [2]:

$$10 \cdot 10^{-2} = 5{,}93 \cdot 10^6 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{5{,}93 \cdot 10^6}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} \rightarrow t = 3{,}373 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Y entonces nos queda:

$$-\frac{5{,}93 \cdot 10^6}{t} = a \rightarrow a = -\frac{5{,}93 \cdot 10^6}{3{,}373 \cdot 10^{-8}} = -1{,}76 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$$

El signo menos indica que la aceleración se opone a la velocidad (sentido opuesto a $\vec{i}$).

Y retomando la ecuación [1]:

$$-1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \vec{E} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{E} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \vec{a}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$

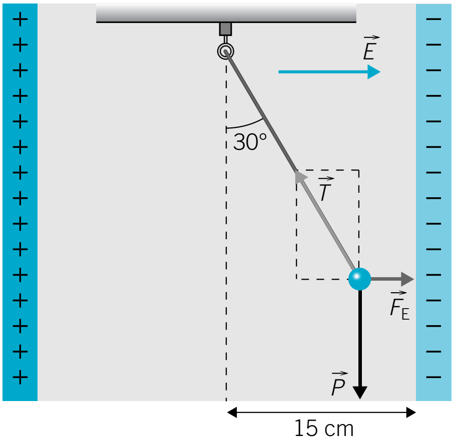
$$= \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (-1{,}76 \cdot 10^{14} \vec{i})}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}} \rightarrow \vec{E} = 1000 \, \vec{i} \text{ N/C}$$

52. **A 15 cm de una placa cargada tenemos una esfera metálica de 12 g de masa colgada de un hilo. Se carga la esfera con 3 mC y sufre una atracción por parte de la placa que hace que el hilo forme un ángulo de 30° con la vertical.**

a) Representa gráficamente esta situación y haz un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre la esfera.

b) Calcula el valor del campo eléctrico en el punto donde está la esfera metálica. Evalúa el signo de la carga de la placa.

a) Representación gráfica:



b) El signo de la carga de la placa que atrae a una carga positiva tiene que ser negativo. Una placa cargada crea un campo eléctrico constante; por tanto, la fuerza eléctrica es constante.

Después de representar gráficamente el problema hacemos el balance de las fuerzas.

Para el sistema en equilibrio: $\sum \vec{F} = 0$.

- En el eje horizontal:

$$T \cdot \text{sen}\,\theta = F_E = E \cdot q$$

- En el eje vertical:

$$T \cdot \cos\theta = P = m \cdot g$$

Sustituimos los datos expresándolos en unidades del SI.

$$T \cdot \text{sen}\,30° = E \cdot 3 \cdot 10^{-3} \qquad [1]$$

$$T \cdot \cos 30° = 12 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \qquad [2]$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2]:

$$\frac{\cancel{T} \cdot \text{sen}\,30°}{\cancel{T} \cdot \cos 30°} = \frac{E \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = \frac{\text{tg}\,30° \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{3 \cdot 10^{-3}} = 22{,}63 \text{ N/C}$$

NOTAS

4

El campo magnético

PRESENTACIÓN

- Para muchos alumnos, por primera vez en la enseñanza secundaria se aborda el estudio del magnetismo. Es importante hacerles ver que se trata de un aspecto de la interacción electromagnética, idea que contrastará con su experiencia previa.
- En el desarrollo del tema se ofrecen las deducciones matemáticas que se requieren para comprender los fenómenos que se estudian. Hemos tratado de ajustarnos a los conocimientos matemáticos de este nivel de estudio. No obstante, cada profesor o profesora decidirá hasta qué punto le interesa incidir en la justificación matemática, dado el alumnado con el que trabaje y los objetivos que espera alcanzar. Consideramos que también es factible trabajar con las expresiones matemáticas finales y analizar todos los detalles de su significado.

OBJETIVOS

- Conocer la evolución histórica de los conocimientos en el campo del magnetismo y el electromagnetismo.
- Comprender la electricidad y el magnetismo como dos aspectos de una misma interacción: la electromagnética.
- Explorar la estructura microscópica que justifica el comportamiento magnético o no de los materiales.
- Identificar las fuentes de interacción magnética.
- Representar el campo magnético mediante líneas de campo y poner de manifiesto sus diferencias con el campo eléctrico.
- Relacionar la brújula con el campo magnético terrestre.
- Analizar los distintos aspectos de la fuerza magnética que actúa sobre cargas eléctricas en movimiento o hilos de corriente en el seno de un campo magnético.
- Estudiar el movimiento de partículas cargadas en presencia de campos magnéticos y/o eléctricos. Explorar las diferencias que produce cada una de esas interacciones.
- Utilizar la interacción electromagnética sobre cargas en movimiento para explicar el funcionamiento de algunos dispositivos, como el espectrógrafo de masas o los aceleradores de partículas.
- Analizar la expresión matemática que permite conocer el campo magnético creado por distintos elementos discretos: cargas en movimiento, hilos de corriente, espiras o bobinas.
- Analizar las diferencias entre el vector intensidad de campo eléctrico y el vector inducción magnética, especialmente las relacionadas con su carácter conservativo o no.
- Estudiar el campo magnético que resulta de la presencia de varios hilos de corriente paralelos.

4 El campo magnético

CONTENIDOS

Conceptos

- Experiencias que demuestran la existencia de la interacción magnética. El campo magnético terrestre.
- Fuentes del campo magnético y líneas del campo que crea cada tipo.
- Efecto de un campo magnético sobre una carga en movimiento. Ley de Lorentz.
- Movimiento de partículas cargadas en presencia de un campo magnético.
- Efecto de un campo magnético sobre un hilo de corriente.
- Campo magnético creado por elementos discretos: una carga en movimiento, un hilo de corriente, una espira.
- Campo magnético creado por agrupaciones de corriente: varios hilos de corriente o una bobina. Ley de Ampère.
- Comportamiento magnético de una espira y de una bobina: líneas de campo, localización de su cara norte y cara sur.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Manejar con soltura las operaciones producto escalar y producto vectorial de vectores y comprender el significado de cada uno.
- Habituarse al manejo de reglas nemotécnicas (regla de la mano derecha o del tornillo) para facilitar las operaciones con magnitudes vectoriales.
- Lograr destreza en el estudio del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético y aplicarlo al estudio de dispositivos reales, como el selector de velocidades, el espectrógrafo de masas o el ciclotrón.
- Adquirir soltura en la comprensión de las expresiones matemáticas que permiten calcular el campo magnético creado por distintos elementos, más allá de conocer al detalle las deducciones de tales expresiones.
- Ser capaz de relacionar el comportamiento magnético de un dispositivo con su comportamiento eléctrico. Predecir el sentido del campo magnético que resulta de que una corriente eléctrica circule en un sentido o en otro.

Actitudes

- Comprender el largo camino que deben seguir en ocasiones los conocimientos científicos (como los relacionados con el magnetismo) hasta que se puede formular una teoría completa sobre los mismos (teoría electromagnética).
- Mostrar interés por explorar conceptualmente el alcance de las expresiones matemáticas que cuantifican los fenómenos magnéticos.

EDUCACIÓN EN VALORES

En ocasiones, los fenómenos magnéticos han estado rodeados de un cierto misterio, lo que fue aprovechado por algunos desaprensivos para aprovecharse de gentes necesitadas o incautas. Puede ser adecuado emplear este tema para plantear en el aula debates interesantes.

1. **Educación para la salud**

   Se puede pedir a los alumnos y alumnas que busquen información sobre remedios milagrosos relacionados con efectos magnéticos de elementos como el agua, una pulsera, un colchón, etc. Con la información obtenida se puede abrir un debate destinado a evaluar cuantitativamente el efecto magnético de esos elementos y su inutilidad con respecto al fin que anuncian.

2. **Educación cívica**

   No es extraño que los medios de información den cuenta de la protesta de algunos vecinos por el establecimiento de líneas de alta tensión. Al hilo de una información de este tipo o planteando una situación posible, se pueden realizar algunos cálculos que permitan comprender el alcance del campo magnético creado por los hilos de la conducción de corriente eléctrica.

   Comparando con el valor de otros campos magnéticos, el alumnado puede establecer sus propias conclusiones acerca de los peligros de dichas conducciones y hasta dónde puede ser necesario tomar precauciones.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Obtener la expresión vectorial de la fuerza que aparece sobre una partícula cargada que se mueve en presencia de un campo magnético.
2. Estudiar el movimiento de una partícula cargada en el seno de un campo magnético uniforme. Determinar la trayectoria, sentido en que se recorre, radio, periodo, etc.
3. Realizar cálculos que relacionen la energía con que salen las partículas de un acelerador con sus características físicas: radio de la órbita, periodo del ciclotrón e intensidad del campo magnético.
4. Determinar el campo eléctrico (intensidad, dirección y sentido) que anule el efecto de un campo magnético sobre una partícula en movimiento.
5. Calcular el campo magnético creado por uno o más hilos de corriente paralelos en determinados puntos del espacio.
6. Distinguir y calcular la fuerza magnética que se establece entre hilos de corriente paralela.
7. Calcular el vector campo magnético creado por una espira en su centro. Relacionarlo con el sentido en que circula la corriente.
8. Hallar el vector campo magnético creado por una bobina en su eje. Relacionarlo con el sentido en que circula la corriente.

4 El campo magnético

1. **Una partícula con carga q y velocidad v penetra en un campo magnético perpendicular a la dirección de movimiento.**

a) Analice el trabajo realizado por la fuerza magnética y la variación de energía cinética de la partícula.

b) Repita el apartado anterior en el caso de que la partícula se mueva en dirección paralela al campo y explique las diferencias entre ambos casos.

(Andalucía, 2006)

La partícula se ve sometida a una fuerza magnética que, de acuerdo con la ley de Lorentz, es $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

a) $\vec{F}_B$ es perpendicular a $\vec{v}$, lo que determina que la partícula se desplaza en un plano perpendicular a $\vec{F}_B$. En consecuencia, el trabajo de la fuerza magnética es nulo:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ya que $\vec{F}$ es perpendicular a $d\vec{r}$ ($\vec{F} \perp d\vec{r}$).

La energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Dado que $\vec{F}_B \perp \vec{v}$, la fuerza no cambia el módulo de la velocidad. Por tanto, la energía cinética de la partícula no varía: $\Delta E_C = 0$.

b) En este caso, como los vectores de velocidad y campo magnético son paralelos, tenemos:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 0° = 0$$

No existe ninguna fuerza magnética, lo que determina que la partícula se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. No existe trabajo debido a la fuerza magnética, y tampoco existe variación de la energía cinética de la partícula cargada.

2. **Un protón entra en un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, con una determinada velocidad, $\vec{v}$. Describa el tipo de movimiento que efectuará dentro del campo si:**

a) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

b) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

(Cataluña. Junio, 2007)

De acuerdo con la expresión de la ley de Lorentz, una partícula que se mueve dentro de un campo magnético se ve afectada por una fuerza:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Por definición de producto vectorial, $|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Según esta expresión:

a) Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,0° = q \cdot v \cdot B \cdot 0 = 0$$

Por tanto, dado que la fuerza es nula, el protón se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme.

b) Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, sobre el protón actuará una fuerza con estas características:

- Módulo:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,90° = q \cdot v \cdot B \cdot 1 = q \cdot v \cdot B$$

- Dirección: perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$.
- Sentido: el determinado por la regla del tornillo. El vector $\vec{v}$ gira hacia $\vec{B}$ por el camino más corto.

El protón se ve sometido de forma permanente a una fuerza en dirección perpendicular a su velocidad, por lo que tendrá un movimiento circular uniforme. Describe una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo $\vec{B}$.

3. Una partícula con velocidad constante $\vec{v}$, masa *m* y carga *q* entra en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular a su velocidad. Realiza un dibujo de la trayectoria que seguirá la partícula. ¿Cómo se ve afectada la trayectoria si en las mismas condiciones cambiamos únicamente el signo de la carga?

(C. Valenciana. Junio, 2007)

De acuerdo con la ley de Lorentz, la partícula se ve sometida a una fuerza: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

- Módulo:

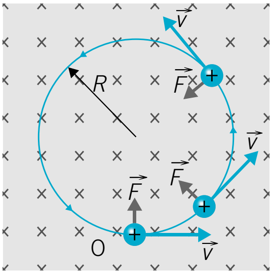
$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,90° = |q| \cdot v \cdot B \cdot 1 = |q| \cdot v \cdot B$$

- Dirección: perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$.
- Sentido: el determinado por la regla del tornillo. El vector $\vec{v}$ gira hacia $\vec{B}$ por el camino más corto.

La fuerza $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{v}$. Por tanto, solo modifica su trayectoria obligando a curvarla. Si el campo magnético es constante, permanentemente habrá una $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{v}$ que obliga a la partícula a seguir una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo $\vec{B}$.

El sentido en que gira la partícula depende del signo de la carga y del sentido de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

En el dibujo se muestra el giro de una partícula con carga positiva que entra con velocidad horizontal hacia la derecha en una zona donde existe un campo magnético que entra en el plano del dibujo (punto O); el resultado es un giro antihorario.



Si bajo las mismas condiciones se cambiase el signo de la carga por una negativa, únicamente cambiaría el sentido de giro de la misma y pasaría a ser horario.

4. **Un electrón penetra dentro de un campo magnético uniforme, de intensidad 0,001 T, perpendicular a su velocidad. Si el radio de la trayectoria que describe el electrón es de 5 cm, halle:**

a) La velocidad.

b) El periodo del movimiento de la órbita que describe.

Datos: masa del electrón: $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(Extremadura. Junio, 2006)

a) La fuerza magnética es igual a la fuerza centrípeta responsable de su movimiento (ver la justificación en los ejercicios anteriores). Usaremos unidades del SI.

$$|q| \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{r \cdot |q| \cdot B}{m} = \frac{0{,}05 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}001}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 8{,}79 \cdot 10^{6} \text{ m/s}$$

b) Dado que:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot m}{|q| \cdot B} = \frac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}001} = 3{,}57 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

5. **Un protón penetra perpendicularmente en una región donde existe un campo magnético uniforme de valor 10^{-3} T y describe una trayectoria circular de 10 cm de radio. Realiza un esquema de la situación y calcula:**

a) La fuerza que ejerce el campo magnético sobre el protón e indica su dirección y sentido ayudándote de un diagrama.

b) La energía cinética del protón.

c) El número de vueltas que da el protón en 10 segundos.

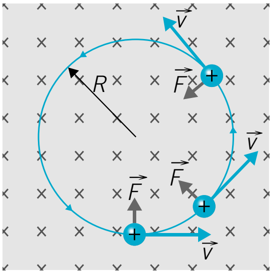
Datos: $q_p = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

(Canarias. Septiembre, 2006)

a) Cuando un cuerpo cargado penetra en una región del espacio donde existe un campo magnético $\vec{B}$ con una velocidad $\vec{v}$, se ve sometido a una fuerza magnética $\vec{F}_B$ cuyo valor viene dado por la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

- $\vec{F}_B$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$.
- Si $q > 0$, el sentido de $\vec{F}_B$ coincide con el de un tornillo que gira desde $\vec{v}$ hasta $\vec{B}$ por el camino más corto. Si $q < 0$, su sentido es el opuesto.
- Su módulo es: $|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.



La fuerza $\vec{F}_B$ es perpendicular a $\vec{v}$. Por tanto, solo modifica su trayectoria obligando a curvarla. Si el campo magnético es constante, permanentemente habrá una $\vec{F}_B$ perpendicular a $\vec{v}$ que obliga a la partícula a seguir una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo $\vec{B}$.

El sentido en que gira la partícula depende del signo de la carga y del sentido de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. En este caso se trata de una partícula positiva que entra con velocidad horizontal hacia la derecha en una zona donde existe un campo magnético que entra en el plano del dibujo; el resultado es un giro antihorario.

b) La energía cinética es: $E_C = \dfrac{1}{2} m \cdot v^2$.

Calculamos la velocidad teniendo en cuenta que la fuerza magnética es la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de la partícula:

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{r \cdot q \cdot B}{m} = \frac{0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 9,58 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

De acuerdo con esto:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot (9{,}58 \cdot 10^3)^2 = 7{,}66 \cdot 10^{-20}\ \text{J}$$

c) El periodo representa el número de vueltas que da en un segundo. En la actividad 4 hemos deducido que:

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B} = \frac{2\pi \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 6{,}56 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$$

En 10 segundos se darán:

$$\text{N.}^\text{o}\ \text{de vueltas} = \frac{1}{T} \cdot t = \frac{10\ \text{s}}{6{,}56 \cdot 10^{-5}\ \text{s}} = 1{,}52 \cdot 10^5\ \text{vueltas}$$

6. Un haz de electrones penetra en una zona del espacio en la que existe un campo eléctrico y otro magnético.

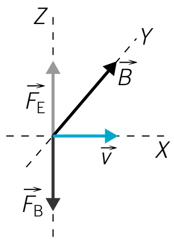
a) Indique, ayudándose de un esquema si lo necesita, qué fuerzas se ejercen sobre los electrones del haz.

b) Si el haz de electrones no se desvía, ¿se puede afirmar que tanto el campo eléctrico como el magnético son nulos? Razone la respuesta.

(Andalucía, 2007)

a) Supongamos el haz de electrones que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en una zona en la que existe un campo magnético como se indica en el esquema. De acuerdo con la ley de Lorentz, sobre los electrones existirá una fuerza magnética en la dirección y sentido que se indica, ya que son partículas con carga negativa: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Si además existe un campo eléctrico, sobre los electrones actuará una fuerza eléctrica en la misma dirección que el campo y en sentido opuesto: $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$.



b) Para que el haz de electrones no se desvíe, es necesario que la fuerza neta que actúe sobre él sea nula. Esto se verifica cuando ambas fuerzas son nulas y también cuando ambas tienen el mismo módulo y dirección y sentidos opuestos.

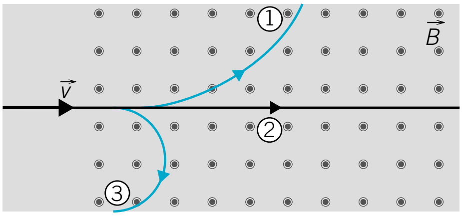
Si $\vec{E}$ tiene la dirección y sentido opuesto a $\vec{F}_B$, es posible que las fuerzas eléctrica y magnética se anulen. Será cuando:

$$|\vec{F}_B| = |\vec{F}_E|$$

Suponiendo que $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$\cancel{q} \cdot v \cdot B = \cancel{q} \cdot E \rightarrow v \cdot B = E$$

7. **La figura representa una región en la que existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$, cuyas líneas de campo son perpendiculares al plano del papel y saliendo hacia fuera del mismo. Si entran sucesivamente tres partículas con la misma velocidad *v*, y describe cada una de ellas la trayectoria que se muestra en la figura (cada partícula está numerada):**

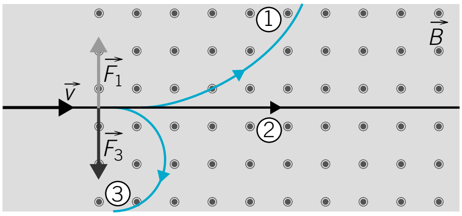


a) ¿Cuál es el signo de la carga de cada una de las partículas?

b) ¿En cuál de ellas es mayor el valor absoluto de la relación carga-masa (*q*/*m*)?

(C. Madrid, 2006)

a) Las partículas 1 y 3 deben estar cargadas, ya que describen una trayectoria circular, lo que indica que sufren el efecto de una fuerza magnética perpendicular a su vector velocidad.



De acuerdo con la ley de Lorentz, $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, la partícula 3 debe tener una carga positiva, ya que su trayectoria tiene sentido horario. Por una razón similar, la partícula 1 debe tener una carga negativa (trayectoria circular en sentido antihorario).

La partícula 2 no tiene carga, ya que no sufre el efecto de una fuerza magnética.

b) Para las partículas que describen una trayectoria circular (1 y 3), la fuerza magnética es la fuerza centrípeta:

$$F_B = F_C \rightarrow |q| \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Reordenando:

$$r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

Es decir, el radio y la relación (q/m) son inversamente proporcionales.

De acuerdo con esto, será mayor la relación q/m en el caso de la partícula 3, ya que su radio de giro es el más cerrado (menor).

8. **Un protón inicialmente en reposo se acelera bajo una diferencia de potencial de 10^5 voltios. A continuación entra en un campo magnético uniforme, perpendicular a la velocidad, y describe una trayectoria circular de 0,3 m de radio. Calcular el valor de la intensidad del campo magnético. Si se duplica el valor de esta intensidad, ¿cuál será el radio de la trayectoria?**

Datos: carga del protón $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del protón, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

(País Vasco. Julio, 2006)

En los ejercicios anteriores hemos deducido que cuando una partícula penetra en un campo magnético con velocidad perpendicular al campo actúa sobre ella una fuerza magnética que la obliga a describir una trayectoria circular:

$$q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Se puede obtener el valor de la intensidad de campo magnético B conociendo el radio de la trayectoria:

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r}$$

Dado que la interacción electrostática es conservativa, la energía potencial que adquiere el protón se convierte en energía cinética. Esto nos permite calcular su velocidad:

$$|\Delta E_P| = |\Delta E_C| \rightarrow q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 4{,}38 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Y ahora ya podemos obtener B:

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 4{,}38 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}3} = 0{,}15 \text{ T}$$

Si varía la intensidad de campo B, podemos obtener el radio de la nueva trayectoria de acuerdo con:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot 2 \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 4{,}38 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 0{,}15} = 0{,}15 \text{ m}$$

9. **Contesta:**

a) ¿Qué frecuencia debe tener un ciclotrón para acelerar electrones si su campo magnético es de 3 T?

b) ¿Cuál debe ser el radio de ese ciclotrón para que los electrones salgan con una energía de 1 MeV?

Valor absoluto de la carga eléctrica del electrón $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón $= 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

De acuerdo con lo que se ha deducido en el tema, la polaridad del ciclotrón debe cambiar cuando la partícula cambia de «D». La frecuencia del ciclotrón debe ser el doble que la de la partícula. En consecuencia, su periodo debe ser la mitad:

$$T_C = \frac{T}{2} = \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

Sabemos que la frecuencia es $f = \dfrac{1}{T_C}$:

$$f = \frac{q \cdot B}{\pi \cdot m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3}{\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}68 \cdot 10^{11}\ \text{Hz}$$

Podemos obtener la energía cinética con la que las partículas salen del ciclotrón de acuerdo con:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{|q| \cdot r \cdot B}{m}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{|q|^2 \cdot B^2}{m} \cdot r^2$$

De donde se deduce lo siguiente:

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C \cdot m}{|q|^2 \cdot B^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2\ \text{C}^2 \cdot 3^2\ \text{T}^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 1{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

10. Sabiendo que la Tierra ejerce un campo magnético de intensidad $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T, calcula la fuerza a la que se ve sometido un tramo de cable de alta tensión que, en dirección suroeste-noreste y formando un ángulo de 60° con el ecuador, se extiende entre dos torres separadas 150 m si transporta una corriente de 1 kA. ¿Influye en algo el sentido en que circula la corriente? (Nota: supón que el campo magnético va de norte a sur.)

La orientación de una brújula sobre la Tierra muestra que el polo norte del campo magnético terrestre coincide prácticamente con el Polo Sur geográfico, y viceversa.

Prescindiendo de la declinación magnética, podemos representar el campo magnético terrestre por un vector que va del Polo Sur geográfico al norte y es perpendicular al ecuador. Si el cable forma un ángulo de 60° con el ecuador, formará un ángulo de 30° con el vector $\vec{B}$.

Cuando un cable que transporta corriente se sitúa en la zona donde hay un campo magnético, se ve sometido a una fuerza magnética que, de acuerdo con la ley de Lorentz, es:

$$\vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

- $\vec{F}_B$ es perpendicular al plano definido por $\vec{l}$ y $\vec{B}$. Su sentido viene determinado por la regla de la mano derecha.
- $\vec{l}$ es un vector que tiene el sentido de la corriente. Por tanto, dependiendo de que circule en uno u otro, la fuerza magnética tendrá un sentido u otro.

Calculamos el módulo de la fuerza magnética:

$$|\vec{F}_B| = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 10^3 \text{ A} \cdot 150 \text{ m} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{sen}\,30° = 3{,}75 \text{ N}$$

11. Discute si hay alguna posibilidad de que el cable de alta tensión no sufra el efecto del campo magnético terrestre.

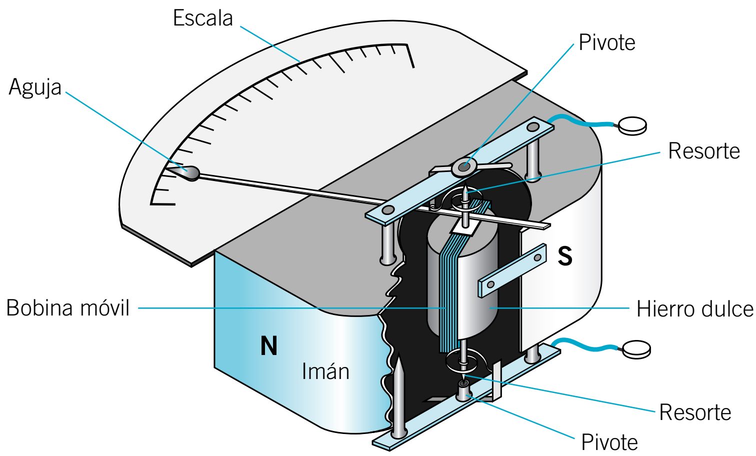
Para que el cable no sufra efecto del campo magnético debe tener dirección paralela a la del vector $\vec{B}$. De ese modo:

$$|\vec{F}_B| = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 10^3 \text{ A} \cdot 150 \text{ m} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{sen}\,0° = 0 \text{ N}$$

12. El galvanómetro y el amperímetro son aparatos empleados para medir el paso de una corriente eléctrica. En ellos, una espira gira en un campo magnético cuando por ella circula una corriente. A partir de la figura 4.48, busca información que te permita justificar su funcionamiento.

El galvanómetro consta de una espira que puede girar en el seno de un campo magnético uniforme. Cuando se hace llegar a la espira la corriente cuya intensidad queremos medir, aparece un par de fuerzas que la hacen girar; el momento del par es proporcional a la intensidad que circula por la espira:

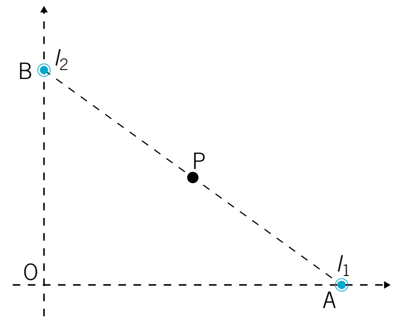
$$\vec{M}_B = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$



La espira rodea un núcleo de hierro dulce con un eje que le permite girar. Ligado al eje hay un resorte que termina en una aguja que marca en una escala el valor de la intensidad que ha provocado el giro de la espira.

Un amperímetro no es más que un galvanómetro cuya escala está expresada en amperios.

13. **Dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos, perpendiculares al plano XY, pasan por los puntos A (80, 0) y B (0, 60) según indica la figura, estando las coordenadas expresadas en centímetros. Las corrientes circulan por ambos conductores en el mismo sentido, hacia fuera del plano del papel, siendo el valor de la corriente I_1 de 6 A. Sabiendo que $I_2 > I_1$ y que el valor del campo magnético en el punto P, punto medio de la recta que une ambos conductores, es de $B = 12 \cdot 10^{-7}$ T, determine:**



a) El valor de la corriente I_2.

b) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético en el origen de coordenadas O, utilizando el valor de I_2 obtenido anteriormente.

Datos: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.

(C. Madrid, 2006)

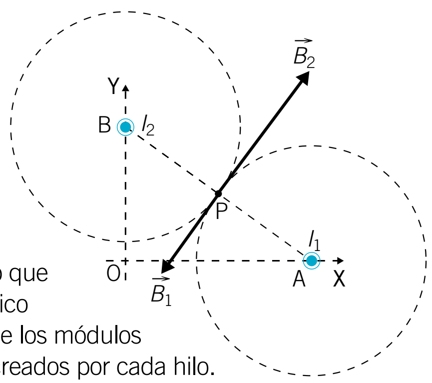
a) Podemos obtener el módulo del campo magnético creado por cada uno de los dos hilos de corriente sobre el punto P de acuerdo con:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x}$$

Donde x se corresponde con la distancia d de cada hilo al punto P y que será en ambos casos la misma:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80^2 \text{ cm}^2 + 60^2 \text{ cm}^2} = 50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m}$$

En el punto P considerado, teniendo en cuenta la regla de la mano derecha y según el sentido de las corrientes, se tienen campos magnéticos en la misma dirección (tangente a las circunferencias en P) y de sentidos opuestos, por lo que el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de cada uno de los campos creados por cada hilo.



Obtenemos estos campos:

- $B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{6}{0,5} = 2,4 \cdot 10^{-6}$ T
- $B_2 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{0,5} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot I_2$ T

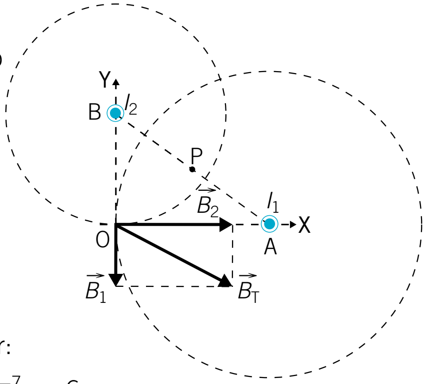
Sabiendo que $I_2 > I_1$:

$$B = B_2 - B_1 = 4 \cdot 10^{-7} \cdot I_2 - 2,4 \cdot 10^{-6} = 12 \cdot 10^{-7} \rightarrow$$

$$\rightarrow I_2 = \frac{12 \cdot 10^{-7} + 2,4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-7}} = 9 \text{ A}$$

b) Nuevamente se puede calcular el campo magnético creado en el origen de coordenadas a partir de los campos magnéticos creados por cada hilo de corriente en ese punto.

Como conocemos el valor de las intensidades correspondientes a cada conductor, podemos calcular:



- $B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{d_A} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{6}{0,8} = 1,5 \cdot 10^{-6}$ T
- $B_2 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{d_B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{9}{0,6} = 3 \cdot 10^{-6}$ T

En el origen de coordenadas la dirección y el sentido de cada campo creado por un conductor es tangente a la circunferencia que pasa por ese punto y tiene centro en el conductor. El sentido será el determinado por la regla de la mano derecha.

Los campos resultantes en este caso son perpendiculares entre sí, como se muestra en el esquema.

Calculamos el módulo del campo resultante:

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{(1,5 \cdot 10^{-6})^2 + (3 \cdot 10^{-6})^2} = 3,35 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

14. Sean dos conductores rectilíneos paralelos por los que circulan corrientes eléctricas de igual intensidad y sentido.

a) Explique qué fuerzas se ejercen entre sí ambos conductores.

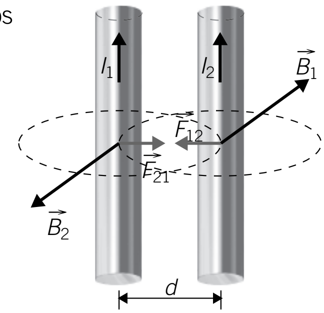
b) Represente gráficamente la situación en la que las fuerzas son repulsivas, dibujando el campo magnético y la fuerza sobre cada conductor.

(Andalucía, 2006)

a) Cada uno de los conductores rectilíneos creará sobre el otro conductor un campo magnético que se puede calcular a partir de:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}$$

Donde I es la intensidad que circula por el conductor y d es la distancia que los separa.



Siendo los dos hilos paralelos y con las corrientes del mismo sentido, la situación será como la que se muestra en el esquema.

- B_1 es el campo que el conductor I_1 crea en un punto a una distancia d.

$$B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{d}$$

- De forma similar, B_2 es el campo que el conductor I_2 crea en un punto a una distancia d.

$$B_2 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{d}$$

En cada caso, el vector campo magnético es perpendicular al hilo, y la regla de la mano derecha permite conocer el sentido.

Cada hilo de corriente está sometido a la acción de un campo magnético. En consecuencia, sobre cada hilo actúa una fuerza magnética determinada por la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$.

En cada caso, $\vec{l} \perp \vec{B}$, lo que indica que $\vec{F}_B$ es perpendicular a ambos. Entre los hilos de corriente paralelos se establecen fuerzas de atracción cuyo módulo es:

- $F_{12} = I_2 \cdot B_1 \cdot L$
- $F_{21} = I_1 \cdot B_2 \cdot L$

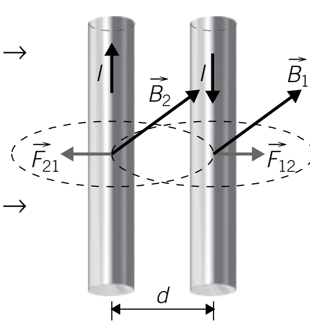
Donde L es la longitud total de los hilos de corriente. Sustituyendo la expresión del campo magnético en cada caso:

- $F_{12} = I_2 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{d} \cdot L = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} \cdot L \rightarrow$

  $\rightarrow \frac{F_{12}}{L} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d}$

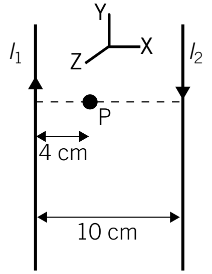
- $F_{21} = I_1 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{d} \cdot L = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2 \cdot I_1}{d} \cdot L \rightarrow$

  $\rightarrow \frac{F_{21}}{L} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2 \cdot I_1}{d}$



b) Para que las fuerzas sean repulsivas, las intensidades que recorren los conductores deben ser de sentidos opuestos.

15. **Dos conductores rectilíneos, paralelos y de gran longitud, están separados por una distancia de 10 cm. Por cada uno de ellos circula una corriente eléctrica en sentidos opuestos, como se indica en la figura, de valores $I_1 = 8$ A e $I_2 = 6$ A.**



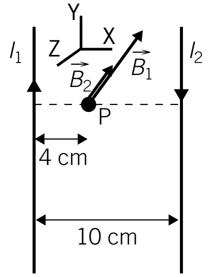
a) Determina la expresión vectorial del campo magnético en el punto P situado entre los dos conductores a 4 cm del primero.

b) Determina la fuerza que por unidad de longitud ejerce el primer conductor sobre el segundo. Para ello haz un dibujo en el que figuren la fuerza y los vectores cuyo producto vectorial te permiten determinar la dirección y sentido de dicha fuerza. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A.

(Castilla-La Mancha, 2007)

a) La regla de la mano derecha determina que el campo creado por cada hilo en el punto P es perpendicular al plano del papel y entrante (sentido negativo de Z).



Calculamos el módulo del campo creado por cada hilo en P; el campo total tendrá la misma dirección y sentido, y su módulo será la suma de ambos.

- $B_1 = \dfrac{\mu}{2\pi} \cdot \dfrac{I_1}{d_1} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \dfrac{8}{0{,}04} = 4 \cdot 10^{-5}$ T

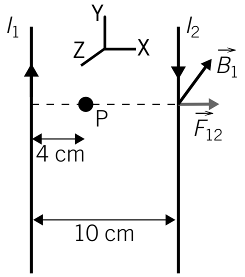
- $B_2 = \dfrac{\mu}{2\pi} \cdot \dfrac{I_2}{d_2} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \dfrac{6}{0{,}06} = 2 \cdot 10^{-5}$ T

Por tanto:

$$|B_T| = |B_1| + |B_2| = 4 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

b) Veamos los vectores sobre el siguiente esquema.

$\vec{B}_1$ es perpendicular al plano del papel y entrante (sentido negativo de Z) y $\vec{F}_{12}$ tiene dirección horizontal hacia la derecha (sentido positivo de X).



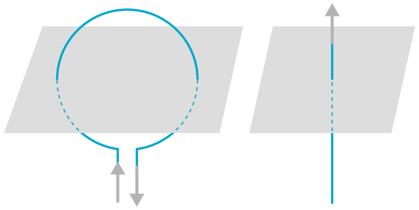
Para obtener la fuerza del primer conductor sobre el segundo es necesario calcular primero el campo magnético que el primer conductor crea en un punto que coincide con la posición del segundo conductor:

$$B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{8}{0{,}1} = 1{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Calculamos ahora la fuerza haciendo uso de la ley de Lorentz:

$$F_{12} = I_2 \cdot B_1 \cdot L \rightarrow \frac{F_{12}}{L} = I_2 \cdot B_1 = 6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5} = 9{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$

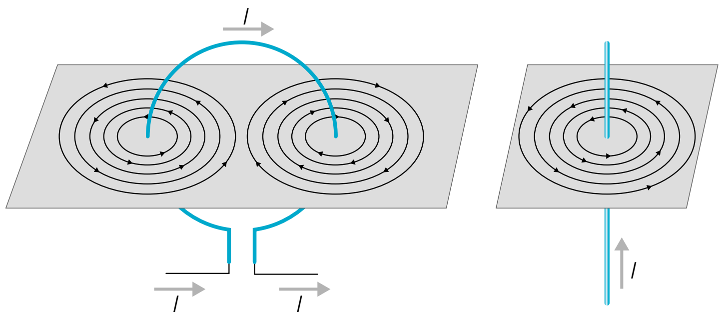
16. **Dibuje las líneas de campo magnético que generan las dos distribuciones de corriente de la figura en el plano perpendicular que está dibujado. Justifique brevemente la respuesta.**



(Cataluña. Septiembre, 2007)

Para la espira serán líneas con centro en cada uno de los puntos donde la espira atraviesa el plano. En el lado en que la corriente sube, las líneas tienen sentido antihorario; y en el que baja, horario.

Para el hilo conductor de la derecha serán líneas concéntricas con el hilo. Si la corriente es ascendente, la regla de la mano derecha determina que su sentido es antihorario.



17. **Un solenoide de 5 cm de longitud está formado por 200 espiras. Calcula el campo magnético en el eje del solenoide cuando le llega una corriente de 0,5 A en los casos siguientes:**

a) En el eje del solenoide hay aire.

b) En el eje del solenoide se introduce un núcleo de hierro dulce cuya permeabilidad relativa es 5000.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N · A^{-2}.

a) De acuerdo con la ley de Ampère, se puede obtener el campo magnético en el eje de un solenoide por medio de la expresión:

$$B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{200 \cdot 0{,}5}{0{,}05} = 2{,}51 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

b) Con el mismo razonamiento que en el apartado anterior, pero teniendo en cuenta que esta vez se tiene un núcleo con una cierta permeabilidad relativa:

$$B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{L} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{L} =$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000 \cdot \frac{200 \cdot 0{,}5}{0{,}05} = 12{,}56\ \text{T}$$

18. **Un toroide de 5 cm de radio está formado por 500 espiras. Calcula la corriente que le debe llegar para que el campo en el círculo central del toroide sea de 1,5 mT. ¿Y si el núcleo del toroide fuese de hierro dulce? Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N · A^{-2}; $\mu_{r\ \text{hierro dulce}} = 5000$.**

De acuerdo con la ley de Ampère, el campo magnético en el círculo central de un toroide viene dado por la expresión:

$$B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R}$$

Si el toroide está vacío:

$$1{,}5 \cdot 10^{-3} = \underbrace{4\pi \cdot 10^{-7}}_{\mu_0} \cdot \frac{500 \cdot I}{2\pi \cdot 0{,}05} \rightarrow I = 0{,}75\ \text{A}$$

En caso de que el toroide tuviese un núcleo de hierro dulce:

$$1{,}5 \cdot 10^{-3} = \underbrace{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000}_{\mu} \cdot \frac{500 \cdot I}{2\pi \cdot 0{,}05} \rightarrow I = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

19. **Explica qué quiere decir que el campo magnético es no conservativo.**

a) Que la energía no se conserva.

b) Que no existe un potencial escalar del que se derive el campo.

c) Que no existe un potencial vectorial del que se derive el campo.

Respuesta correcta: b). No existe un potencial escalar del que se derive el campo.

20. **¿En qué se diferencian las líneas del campo eléctrico y las líneas del campo magnético?**

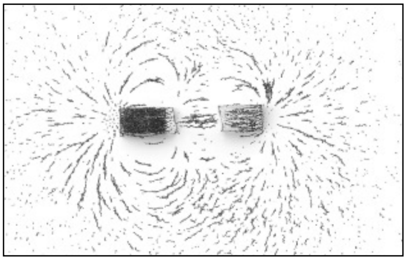
a) En que unas nacen en las cargas eléctricas y otras, no.

b) En que las líneas del campo eléctrico son abiertas y las del campo magnético son cerradas.

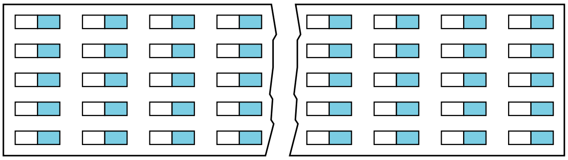
c) En que las líneas del campo eléctrico son tangentes al campo y las del campo magnético son perpendiculares al campo.

Respuestas correctas: a) y b). Las líneas del campo eléctrico nacen en las cargas eléctricas. Las líneas del campo eléctrico son abiertas y las del campo magnético son cerradas.

21. **Habitualmente los imanes tienen pintado el polo norte con un color y el polo sur con otro. Si se rompe un imán justo por la zona que separa los colores, ¿habremos separado el polo norte del polo sur del imán? Justifica tu respuesta.**



No, el imán es el resultado de muchos imanes microscópicos con la misma orientación. Si rompemos un imán, cualquier fragmento tendrá sus imanes microscópicos orientados de la misma manera. Por tanto, será un imán con los dos polos, norte y sur. Es imposible separar los polos de un imán.

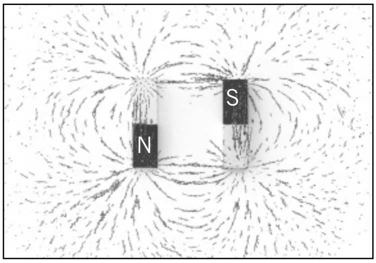


22. **Si frotamos una aguja de hierro con un imán siempre en el mismo sentido, la aguja adquiere propiedades magnéticas. Esas propiedades desaparecen con el tiempo y muy rápidamente si ponemos la aguja en una llama. Explica estos fenómenos.**

El hierro es un material ferromagnético. Sus microimanes, en principio orientados al azar, pueden adoptar una orientación única si se frotan con un imán siempre en el mismo sentido. Entonces, toda la aguja de hierro se comporta como un imán.

Si calentamos la aguja imantada, sus partículas se moverán, lo que provoca la pérdida del ordenamiento de sus microimanes y deja de estar imantado.

23. **¿Por qué se utilizan las limaduras de hierro para visualizar el campo magnético? ¿Se podrían usar las de cualquier otro metal?**



El hierro es un material ferromagnético que se imanta por acción de un campo magnético externo. Una vez que las limaduras están imantadas, se orientan con respecto al campo magnético. Se podrían utilizar limaduras de otro material con propiedades magnéticas similares a las del hierro.

24. **Las líneas del campo electrostático creado por una única carga son líneas abiertas. ¿Sucede lo mismo con las líneas del campo magnético creado por un único imán?**

A diferencia de lo que sucede con los campos gravitatorio y electrostático, las líneas de campo magnético siempre son cerradas, aunque se trate del campo creado por un solo imán o hilo de corriente.

25. **Además de los imanes, las cargas eléctricas también producen campos magnéticos. ¿En qué condiciones?**

Las cargas eléctricas producen campos magnéticos si se encuentran en movimiento. Es especialmente significativo el campo magnético producido por una corriente eléctrica.

26. **Supongamos un campo eléctrico producido por una carga puntual. ¿Es posible que su valor en un punto que diste una distancia *x* de la carga sea nulo y en otro punto que diste la misma distancia no sea nulo? Haz el mismo estudio para el campo magnético creado por una carga puntual.**

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual en un punto depende de la distancia al punto; todos los puntos que se encuentren a la misma distancia estarán sometidos a un campo eléctrico con el mismo módulo: $E = K \cdot \dfrac{Q}{r^2}$.

El campo magnético creado por una carga en movimiento en un punto no solo depende de la distancia al punto, sino de la dirección que forme el vector velocidad de la carga con el vector de posición del punto con respecto a la carga.

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Si $\vec{v}$ tiene la dirección de $\vec{r}$, $|\vec{B}| = 0$.

En consecuencia, puntos que se encuentren a la misma distancia de la carga tendrán distinto valor del campo, dependiendo del ángulo que formen $\vec{v}$ y $\vec{r}$.

27. **¿Es posible que una partícula cargada sometida a la acción de un campo electrostático tenga movimiento uniforme? ¿Y si la partícula está sometida a la acción de un campo magnético?**

Una partícula cargada, sometida a la acción de un campo electrostático, soportará una fuerza constante $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$. La partícula tendrá un movimiento uniformemente acelerado que será rectilíneo si $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, y parabólico en caso contrario.

Una carga en movimiento, sometida a la acción de un campo magnético, soportará una fuerza que, de acuerdo con la ley de Lorentz, será: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Si $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{B}$:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 0° = 0$$

28. **Una partícula, con carga *q*, penetra en una región en la que existe un campo magnético perpendicular a la dirección del movimiento. Analice el trabajo realizado por la fuerza magnética y la variación de energía cinética de la partícula.**

(Andalucía, 2007)

El trabajo realizado por la fuerza magnética es nulo, ya que esta es siempre perpendicular al vector velocidad y normal a la trayectoria de la partícula cargada:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0;\ \vec{F} \perp d\vec{l}$$

De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas: $\Delta E_C = W_{A \rightarrow B}$. En consecuencia, la energía cinética del sistema permanece constante.

La fuerza magnética provoca una variación permanente en la dirección de la velocidad de la partícula (que describe un movimiento circular), pero no modifica su módulo. En consecuencia, se conserva su energía cinética: $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

29. **Justifica la expresión: el campo magnético es un campo *no conservativo*.**

El campo magnético es no conservativo, ya que, a diferencia de los campos electrostático y gravitatorio, su circulación en una trayectoria cerrada no es nula.

De acuerdo con la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = \oint \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot dl = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \oint dl =$$

$$= \frac{\mu}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{I}{\cancel{r}} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \cancel{r} = \mu \cdot I \neq 0$$

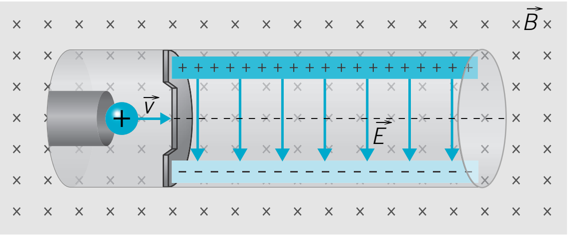
30. **Un haz de electrones atraviesa una región del espacio sin desviarse. Razona la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:**

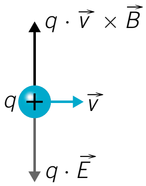
a) En la zona no hay un campo electrostático.

b) En la zona no hay campo magnético.

c) En la zona hay un campo electrostático y un campo magnético.

a) No necesariamente. Puede haber un campo electrostático siempre que haya también un campo magnético cuya fuerza magnética contrarreste la fuerza electrostática (misma dirección y magnitud, sentido opuesto). Observa en el dibujo que el campo eléctrico tiene que ser perpendicular al magnético.





b) Si solo hay un campo eléctrico, la partícula no se desvía (mantiene su trayectoria rectilínea) si la dirección del campo coincide con la de su velocidad.

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}$$

c) Si solo hay campo magnético, la partícula no se desvía y continúa moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme si su velocidad tiene la dirección del campo magnético.

$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Si $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{B}$:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 0° = 0$$

31. Busca información y explica por qué no es aconsejable jugar con imanes cerca de un ordenador.

Al jugar con imanes y ponerlos en movimiento se generan campos electromagnéticos que pueden alterar el funcionamiento de los elementos electrónicos del ordenador, que son muy sensibles a la variación de los campos eléctricos y magnéticos en su entorno.

32. a) Explique el efecto de un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento.

b) Explique con ayuda de un esquema la dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga positiva que se mueve paralelamente a una corriente eléctrica rectilínea. ¿Y si se mueve perpendicularmente al conductor, alejándose de él?

(Andalucía, 2007)

a) Una partícula que entre en un campo magnético con una determinada $\vec{v}$ se verá sometida a una fuerza que, de acuerdo con la ley de Lorentz, es: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

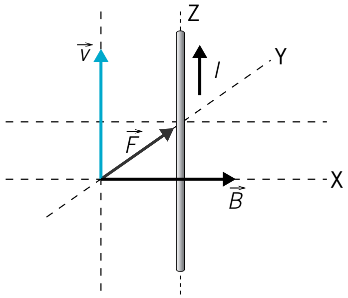
Si $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{B}$:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 0° = 0$$

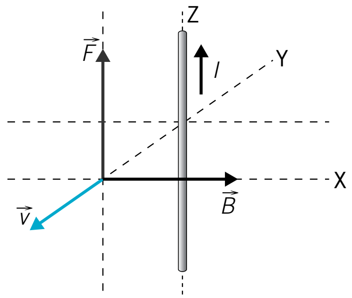
La partícula tendrá un movimiento rectilíneo uniforme.

En caso contrario, $\vec{F}_B$ será perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$, lo que determina que la partícula tenga un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular al campo (si $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$) o describa una trayectoria helicoidal.

b) Supongamos que el conductor (corriente eléctrica) está dispuesto según el eje Z y su sentido es hacia arriba; de acuerdo con la regla de la mano derecha, sobre la partícula actuará un campo magnético en la dirección y sentido que se indica en el dibujo. La ley de Lorentz permite calcular la fuerza magnética que actuará sobre la partícula cargada en cada caso: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.



Si la partícula se mueve con velocidad paralela a la corriente y en su sentido de avance, será atraída hacia el conductor.



Si la partícula se mueve en dirección perpendicular al hilo conductor, alejándose, se verá sometida a una fuerza paralela al conductor y en el sentido en que avanza la corriente.

33. **Un protón que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ entra en una región en la que existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme. Explique cómo es la trayectoria que seguirá el protón:**

a) Si la velocidad del protón $\vec{v}$ es paralela a $\vec{B}$.

b) Si la velocidad del protón $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$.

(C. Madrid. Septiembre, 2006)

De acuerdo con la expresión de la ley de Lorentz, una partícula que se mueve bajo la acción de un campo magnético se ve afectada por una fuerza: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Por definición de producto vectorial:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$$

Siendo θ el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

a) Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos:

$$F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,0° = 0$$

El protón no se ve sometido a la acción de ninguna fuerza, por lo que se moverá con movimiento rectilíneo uniforme.

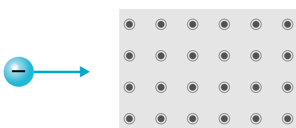
b) Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, el protón se verá sometido a la acción de una fuerza magnética cuyo módulo es:

$$F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\, 90° = q \cdot v \cdot B$$

La fuerza $\vec{F}_B$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{B}$. Por tanto, modifica la trayectoria del protón, curvándola. Como el campo magnético es constante, permanentemente habrá una $\vec{F}_B$ perpendicular a $\vec{v}$, lo que determina que el protón describa una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo $\vec{B}$.

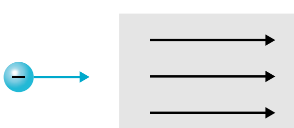
34. Indica en qué dirección se desviarán las partículas que penetran en los siguientes campos magnéticos. El recuadro grande representa el campo magnético, y la flecha azul, la dirección y sentido de la velocidad de la partícula cargada.

a)

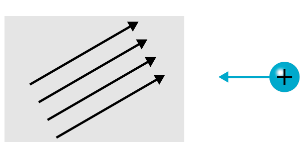


b)

c)



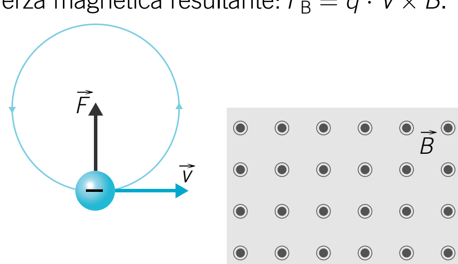
d)



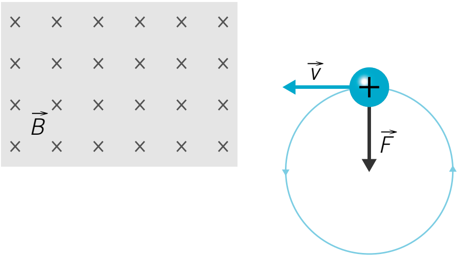
En cada caso se evalúa la fuerza magnética resultante: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

a) Como la partícula tiene carga negativa, la fuerza será vertical y hacia arriba.

Describe una trayectoria circular en el plano del papel en sentido antihorario.

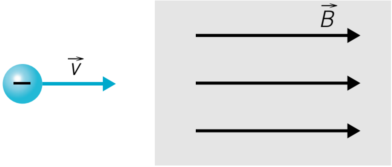


b) La partícula está sometida a una fuerza vertical y hacia abajo. Describe una trayectoria circular en el plano del papel en sentido antihorario.



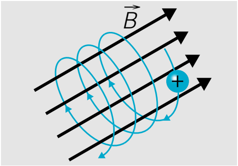
c) $F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 0° = 0$.

La partícula no se desvía, ya que la fuerza resultante es nula.



d) La partícula tendrá un movimiento helicoidal. La fuerza magnética responsable de su trayectoria circular tendrá de módulo:

$$F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 30°$$



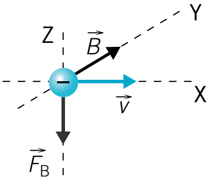
35. **Una carga $q = -3{,}64 \cdot 10^{-9}$ C se mueve con una velocidad de $2{,}75 \cdot 10^{-6}$ m/s $\vec{i}$. ¿Qué fuerza actúa sobre ella si el campo magnético es de 0,38 T $\vec{j}$?**

(La Rioja. Septiembre, 2005)

De acuerdo con la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Sustituyendo:

$$\vec{F}_B = -3{,}64 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-6}\ \vec{i}\ \text{m/s} \times 0{,}38\ \vec{j}\ \text{T} = -3{,}8 \cdot 10^{-15}\ \vec{k}\ \text{N}$$

Observa que, por tratarse de una carga negativa, el sentido de la fuerza es el opuesto al que se deduce aplicando la regla de la mano derecha sobre los vectores de la ley de Lorentz.



36. **Una cámara de niebla es un dispositivo para observar trayectorias de partículas cargadas. Al aplicar un campo magnético uniforme, se observa que las trayectorias seguidas por un protón y un electrón son circunferencias.**

a) Explique por qué las trayectorias son circulares y represente en un esquema el campo y las trayectorias de ambas partículas.

b) Si la velocidad angular del protón es $\omega_p = 10^6$ rad $\cdot$ s^{-1}, determine la velocidad angular del electrón y la intensidad del campo magnético.

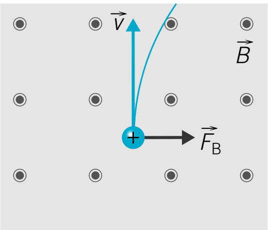
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg.

(Andalucía, 2007)

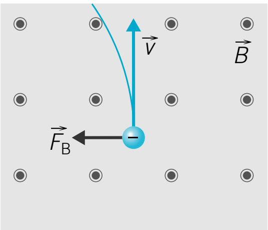
a) Si a la partícula (protón o electrón) se le aplica un campo magnético uniforme perpendicular a su velocidad, sufrirá la acción de una fuerza cuyo valor, de acuerdo con la ley de Lorentz, es: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. La fuerza magnética será perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ y su módulo será:

$$F = |q| \cdot v \cdot B \qquad (|q| = e)$$

Como $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{v}$ en todo momento, curva permanentemente la trayectoria de la partícula, que acabará describiendo una circunferencia en el plano perpendicular al campo $\vec{B}$. Si tanto el protón como el electrón tienen la misma velocidad, $\vec{v}$, y el mismo $\vec{B}$, el sentido de $\vec{F}$ y, en consecuencia, el sentido en que gira cada una, depende del signo de la carga.



Movimiento del protón en un campo magnético uniforme saliente. Describe una trayectoria circular girando en sentido horario.



Movimiento del electrón en un campo magnético uniforme saliente. Describe una trayectoria circular girando en sentido antihorario.

b) Para ambas partículas, la fuerza magnética es la fuerza centrípeta responsable de su giro:

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r}$$

Como disponemos del dato de la velocidad angular, transformamos la expresión:

$$v = \omega \cdot r \rightarrow B = \frac{m \cdot \omega \cdot \cancel{r}}{q \cdot \cancel{r}}$$

Haciendo uso de los datos del protón:

$$B = \frac{m_p \cdot \omega_p}{q} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

Y a partir de esta misma expresión se puede obtener la velocidad angular con la que se mueve el electrón:

$$\omega_e = \frac{q \cdot B}{m_e} = \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = -1{,}86 \cdot 10^9\ \text{rad/s}$$

(El signo menos indica que la partícula gira en el sentido opuesto.)

37. **En una región del espacio, donde existe un campo magnético uniforme, se observa la existencia de un electrón y un protón que tienen trayectorias circulares con el mismo radio. ¿Serán también iguales los módulos de sus velocidades lineales? ¿Recorrerán sus trayectorias con el mismo sentido de giro? Razona tus respuestas.**

Datos: $Q_{protón} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C;** $Q_{electrón} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C;** $m_{protón} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ **kg;** $m_{electrón} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ **kg.**

(P. Asturias. Septiembre, 2007)

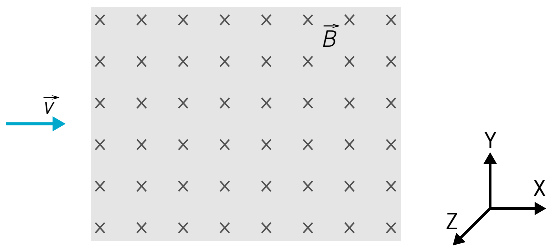
La trayectoria circular de ambas partículas indica que están sometidos a una fuerza magnética que hace de fuerza centrípeta:

$$F_B = F_C \rightarrow |q| \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow |q| \cdot r \cdot B = m \cdot v \qquad [1]$$

En la situación que se describe en el enunciado, el primer término de esta expresión es idéntico para el protón y el electrón, pero la masa de ambas partículas es distinta. Por tanto, también será diferente el módulo de su velocidad lineal.

La ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ determina el valor de la fuerza magnética que actúa sobre cada partícula. Suponiendo que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y sentido para ambas partículas, como la carga del protón y del electrón tienen signos opuestos, las fuerzas magnéticas que actúan sobre ambos tendrán sentidos opuestos. Esto determina que recorrerán sus trayectorias girando en sentido opuesto.

38. **Un núcleo de ^{16}O, de carga +8 *e* y masa $m = 2{,}657 \cdot 10^{-26}$ kg, penetra horizontalmente desde la izquierda con una velocidad de $5{,}00 \cdot 10^5$ m/s en un campo magnético uniforme de 0,04 T perpendicular a su dirección y hacia dentro del papel, como se indica en la figura.**



Determina:

a) La expresión vectorial de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el núcleo en el instante en que este penetra en el campo magnético.

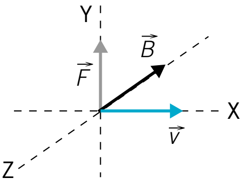
b) El radio de la trayectoria que describe.

c) El periodo de revolución.

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ **C.**

(Castilla-La Mancha, 2006)

a) Se puede obtener la fuerza ejercida sobre la partícula de acuerdo con la ley de Lorentz:



$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Su módulo, teniendo en cuenta que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, se corresponde con:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \theta = q \cdot v \cdot B =$$
$$= 8 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 = 2{,}56 \cdot 10^{-14} \text{ N}$$

Su dirección será perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, y su sentido, determinado con la regla de la mano derecha (partícula con carga positiva), será hacia arriba. Para el sistema de referencia indicado:

$$\vec{F}_B = 2{,}56 \cdot 10^{-14}\ \vec{j}\ \text{N}$$

b) Para obtener el radio de la trayectoria circular tendremos en cuenta que la fuerza magnética actúa de fuerza centrípeta:

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v \rightarrow$$
$$\rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{2{,}657 \cdot 10^{-26} \cdot 5 \cdot 10^5}{8 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}04} = 0{,}259 \text{ m} = 25{,}9 \text{ cm}$$

c) Para calcular el periodo de revolución relacionamos la velocidad lineal con la angular:

$$q \cdot \cancel{r} \cdot B = m \cdot \omega \cdot \cancel{r} \rightarrow q \cdot B = m \cdot \frac{2\pi}{T} \rightarrow$$
$$\rightarrow T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B} = \frac{2\pi \cdot 2{,}657 \cdot 10^{-26}}{8 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}04} = 3{,}26 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

39. Una partícula de carga q y masa m tiene una cantidad de movimiento $p = mv$ y una energía cinética $E_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$.
Si se mueve en una órbita circular de radio r perpendicular a un campo magnético uniforme B, demostrar que:

a) $p = B\,q\,r$ b) $E_C = \frac{B^2 \cdot q^2 \cdot r^2}{2m}$

(La Rioja. Junio, 2006)

a) Por la descripción del enunciado, la partícula está sometida a una fuerza magnética que hace de fuerza centrípeta:

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v = p$$

b) $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{m} = \frac{B^2 \cdot q^2 \cdot r^2}{2 \cdot m}$

40. **a) Un haz de electrones atraviesa una región del espacio sin desviarse. ¿Se puede afirmar que en esa región no hay campo magnético? De existir, ¿cómo tiene que ser?**

b) En una región existe un campo magnético uniforme dirigido verticalmente hacia abajo. Se disparan dos protones horizontalmente en sentidos opuestos. Razone qué trayectorias describen, en qué plano están y qué sentidos tienen sus movimientos.

(Andalucía, 2008)

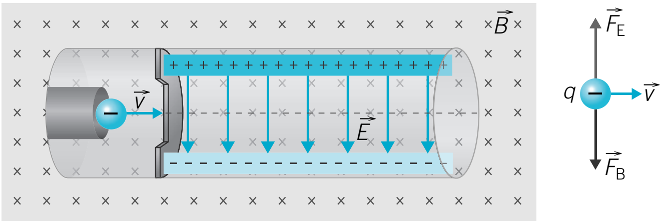
a) No se puede afirmar que no exista campo magnético en la zona. Se pueden describir dos situaciones que explican esa circunstancia:

- Si los electrones se desplazan con una velocidad paralela al campo. De acuerdo con la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow |\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$$

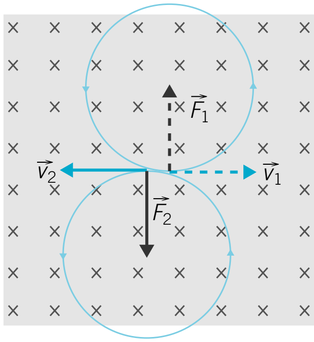
Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos, $|\vec{F}_B| = 0$.

- El haz de electrones continuará sin desviarse si en la misma región del espacio existe un campo eléctrico que genere una fuerza eléctrica del mismo módulo, en la misma dirección y sentido contrario a la fuerza magnética creada por el campo magnético.



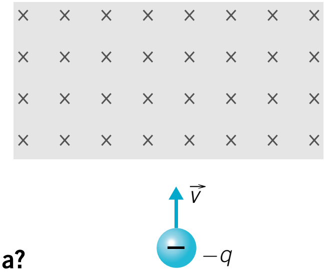
b) Sobre cada protón actuará una fuerza magnética determinada por la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Suponiendo que el campo tiene la dirección entrante en el papel y los protones se mueven con velocidad horizontal, uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda, el primero se verá sometido a la acción de una fuerza vertical hacia arriba, y el segundo, a una fuerza idéntica hacia abajo. Ambos protones se mueven describiendo circunferencias tangentes en sentido horario.



La circunferencia que describen los protones está en un plano perpendicular al campo magnético. Según el enunciado, este tiene dirección vertical; por tanto, los protones se mueven en el plano horizontal.

41. **Una partícula negativa ($-q$) se mueve hacia arriba en el plano del papel con velocidad constante. Al entrar en una región del espacio en la que hay un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular que entra al papel, ver figura:**



a) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula: dirección, sentido, ecuación?

b) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula?

c) ¿Qué dirección y sentido tendría que llevar un campo eléctrico aplicado en la misma región para que la carga mantuviera su trayectoria sin desviarse? Explícalo.

Nota: despreciar los efectos de la gravedad.

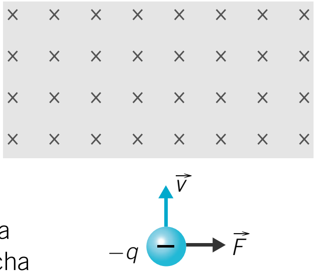
(Cantabria. Septiembre, 2007)

a) La fuerza magnética que actúa es:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$$

$$\rightarrow |\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta = |q| \cdot v \cdot B$$

Ya que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

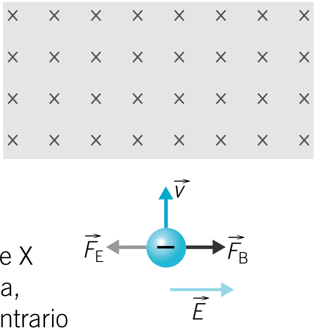


De acuerdo con la regla de la mano derecha y el signo de la carga, la fuerza será horizontal y dirigida hacia la derecha (sentido positivo de X). La ecuación resultante será:

$$\vec{F}_B = |q| \cdot v \cdot B\,\vec{i}$$

b) El efecto de la fuerza magnética resultante consiste en curvar la trayectoria de la carga, por lo que su movimiento pasará a ser circular y en sentido antihorario.

c) Para que la carga mantenga su trayectoria sin desviarse, es necesario aplicar un campo eléctrico tal que genere una fuerza que se oponga en sentido y tenga la misma dirección y magnitud que la fuerza magnética obtenida. Para esto es necesario que la fuerza eléctrica tenga sentido de los valores de X negativos. Como la partícula es negativa, el campo eléctrico tendrá el sentido contrario a la fuerza eléctrica y, por tanto, el mismo que la fuerza magnética.



42. **Indique el tipo de trayectoria descrita por una partícula cargada positivamente que posee inicialmente una velocidad $\vec{v} = v\,\vec{i}$ al penetrar en cada una de las siguientes regiones:**

a) Región con un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\,\vec{i}$.
b) Región con un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E\,\vec{i}$.
c) Región con un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\,\vec{j}$.
d) Región con un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E\,\vec{j}$.
Nota: los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son los vectores unitarios según los ejes X e Y, respectivamente.
(C. Madrid, 2007)

a) Cuando la partícula penetra en una región donde existe un campo magnético, se ve sometida a una fuerza que podemos calcular por medio de la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos:

$$|\vec{F}_B| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\ \theta = 0$$

Sobre esta partícula cargada no actúa ninguna fuerza, por lo que mantiene su trayectoria inicial.

Se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

b) En este caso aparece una fuerza electrostática en el mismo sentido que el campo eléctrico propuesto.

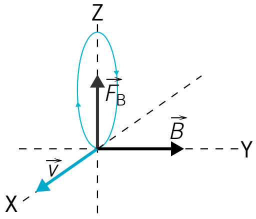
$$\vec{F}_E = q \cdot E\,\vec{i} = m \cdot \vec{a}_E$$

La partícula se verá sometida a una aceleración en la misma dirección y sentido que su velocidad inicial.

Tendrá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

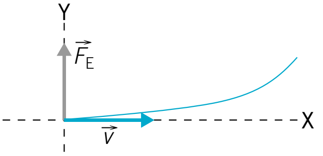
c) En este caso, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que aparecerá una fuerza magnética perpendicular al plano que los contiene y cuyo sentido se determina en función de la regla de la mano derecha.

Como se muestra en el dibujo, la trayectoria de la partícula se curva y se convierte en un movimiento circular en sentido horario en el plano XZ.



d) En este caso, sobre la partícula aparecerá una fuerza eléctrica, perpendicular a $\vec{v}$.

Su movimiento pasa a ser parabólico, dirigido en el sentido del campo eléctrico existente.



$$\vec{F}_E = q \cdot E\,\vec{j} = m \cdot \vec{a}_E$$

43. **Una partícula con carga $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ C se mueve con $\vec{v} = 4 \cdot 10^6\ \vec{j}$ m/s y entra en una zona donde existe un campo magnético $\vec{B} = 0{,}5\ \vec{i}$ T:**

a) ¿Qué campo eléctrico $\vec{E}$ hay que aplicar para que la carga no sufra ninguna desviación?

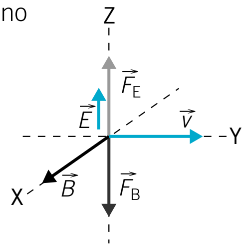
b) En ausencia de campo eléctrico, calcula la masa si el radio de la órbita es 10^{-7} m.

c) Razona si la fuerza magnética realiza algún trabajo sobre la carga cuando esta describe una órbita circular.

(Galicia. Septiembre, 2007)

a) Una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético se verá sometida a la fuerza de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Para que la carga no se desvíe de su trayectoria es necesario aplicar un campo eléctrico que genere una fuerza eléctrica del mismo módulo y dirección, y de sentido contrario que la fuerza magnética.



$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot 4 \cdot 10^6\ \vec{j} \times 0{,}5\ \vec{i} = -10^{-3}\ \vec{k}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = -\vec{F}_B \rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{F}_B}{q} = \frac{10^{-3}\ \vec{k}\ \text{N}}{0{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}} = 2 \cdot 10^6\ \vec{k}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

b) En ausencia de campo eléctrico la partícula describe una trayectoria circular, ya que la fuerza magnética actúa de fuerza centrípeta. A partir de esta idea calculamos la masa de la partícula:

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{r \cdot q \cdot B}{v} = \frac{10^{-7} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}5}{4 \cdot 10^6} = 6{,}25 \cdot 10^{-24}\ \text{kg}$$

c) La fuerza magnética que actúa sobre la partícula es siempre perpendicular a su vector velocidad y a la trayectoria que describe. En consecuencia, esa fuerza no realiza ningún trabajo.

$\vec{F}_B \perp \vec{v}$, lo que determina que la partícula se desplaza en un plano perpendicular a $\vec{F}_B$. Así, el trabajo de la fuerza magnética es nulo:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0\ \text{, ya que } \vec{F} \perp d\vec{r}$$

44. **Necesitamos diseñar un ciclotrón capaz de acelerar protones hasta que su energía cinética alcance 30 MeV. ¿Cuál ha de ser su radio si el campo magnético que podemos emplear es de 5 T? Calcula su frecuencia.**

Datos: $Q_{\text{protón}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_{\text{protón}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

En el ciclotrón las partículas se mueven bajo la acción de un campo magnético perpendicular a su velocidad y describiendo una órbita circular. La fuerza magnética actúa de fuerza centrípeta.

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v \rightarrow \qquad [1]$$

$$\rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Obtenemos la velocidad con el dato de la energía de los protones:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 10^6\ \cancel{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{eV}}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 7{,}58 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Despreciamos los efectos relativistas, aunque a estas velocidades (la velocidad calculada es una cuarta parte de la velocidad de la luz) deberían tenerse en cuenta, algo que haremos en el tema 10.

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 7{,}58 \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5\ \text{T}} = 0{,}158\ \text{m} = 15{,}8\ \text{cm}$$

La frecuencia del ciclotrón debe ser el doble de la frecuencia con que giran las partículas. Calculamos el periodo de las partículas y, a partir de él, su frecuencia (f). De la expresión [1]:

$$q \cdot \cancel{r} \cdot B = m \cdot \omega \cdot \cancel{r} \rightarrow q \cdot B = m \cdot \frac{2\pi}{T} = m \cdot 2\pi \cdot f$$

Frecuencia de las partículas:

$$f = \frac{q \cdot B}{m \cdot 2\pi} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5\ \text{T}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 2\pi} = 7{,}62 \cdot 10^7\ \text{Hz}$$

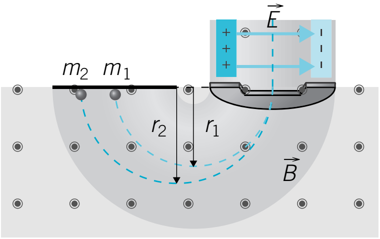
La frecuencia del ciclotrón debe ser:

$$2 \cdot f \rightarrow 2 \cdot 7{,}62 \cdot 10^7\ \text{Hz} = 1{,}524 \cdot 10^8\ \text{Hz}$$

45. Se utiliza un espectrómetro de masas para analizar el contenido isotópico de una muestra de uranio. Se excita la muestra hasta que todos los átomos se convierten en iones con carga +1. A continuación, se aceleran con una diferencia de potencial de 2 kV y se les hace entrar en una región donde hay un campo magnético de 1,5 T perpendicular a la dirección en la que se desplazan los iones.

Para detectarlos se utiliza una placa fotográfica que recoge el impacto después de que las cargas hayan recorrido una semicircunferencia (recuerda la figura de la página 128). Calcula a qué distancia del punto de entrada en la cámara se detectarán los isótopos U-235 y U-238.

Datos: $Q_{\text{protón}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; 1 u $= 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.



Se trata de determinar el diámetro de la circunferencia que describe la muestra.

Las partículas cargadas que penetran en el espectrómetro de masas van a estar sometidas a la acción de una fuerza magnética que actúa de fuerza centrípeta obligándoles a describir una trayectoria circular.

$$F_B = F_C \rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = m \cdot \frac{v^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v \rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

La energía potencial que se comunica a las cargas se transforma en energía cinética. Esto nos permite calcular la velocidad de las partículas:

$$|\Delta E_P| = |\Delta E_C| \rightarrow q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}$$

Para el caso del isótopo U-235, su masa será 235 u y su carga será igual a la del protón:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m\ (\text{U-235})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{235 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 4{,}04 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Por tanto:

$$r_1 = \frac{m\ (\text{U-235}) \cdot v_1}{q \cdot B} = \frac{235 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 4{,}04 \cdot 10^4}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5} = 0{,}0660\ \text{m} = 66{,}0\ \text{mm}$$

Y para el caso del isótopo U-238, su masa será 238 u y su carga será igual a la del protón:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m\ (\text{u-238})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{238 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 4{,}01 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Por tanto:

$$r_2 = \frac{m\ (\text{U-238}) \cdot v_2}{q \cdot B} = \frac{238 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 4{,}01 \cdot 10^4}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5} = 0{,}0664\ \text{m} = 66{,}4\ \text{mm}$$

Si la imagen se recoge tras recorrer una semicircunferencia, será a una distancia igual al diámetro del punto de entrada; es decir, que para cada isótopo será:

- U-235 $\rightarrow d_1 = 2 \cdot r_1 = 2 \cdot 66{,}0\ \text{mm} = 132\ \text{mm}$
- U-238 $\rightarrow d_2 = 2 \cdot r_2 = 2 \cdot 66{,}4\ \text{mm} = 132{,}8\ \text{mm}$

46. **Un cable recto de longitud l y corriente i está colocado en un campo magnético uniforme B formando con el un ángulo θ. El módulo de la fuerza ejercida sobre dicho cable es:**

a) $i \cdot l \cdot B \cdot \text{tg}\ \theta$ b) $i \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\ \theta$ c) $i \cdot l \cdot B \cdot \cos\theta$

(Galicia. Septiembre, 2005)

La fuerza ejercida sobre el cable será:

$$\vec{F}_B = i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Por lo que el módulo se corresponderá con $|\vec{F}_B| = i \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\ \theta$.
La respuesta correcta es la b).

47. **¿Qué campo magnético es mayor en módulo: el que existe en un punto situado a una distancia R de una corriente rectilínea de intensidad I, o el que hay en un punto a una distancia $2R$ de otra corriente rectilínea de intensidad $2I$? Justifique la respuesta.**

(R. Murcia. Junio, 2005)

El campo magnético creado por un hilo de corriente en un punto que se encuentra a una distancia x del mismo se puede obtener por medio de la expresión: $B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x}$.

- En un punto A situado a una distancia R y con una intensidad I, se tendrá:

$$B_A = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}$$

- En un punto B situado a una distancia $2R$ y con intensidad $2I$, se tendrá:

$$B_B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{2I}{2R} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{R} = B_A$$

Así que el campo creado en ambos casos es igual.

48. **Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de 12 A. El hilo define el eje Z de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje Y a una distancia del hilo de 1 cm. Calcule el vector aceleración instantánea que experimenta dicho electrón si:**

a) Se encuentra en reposo.

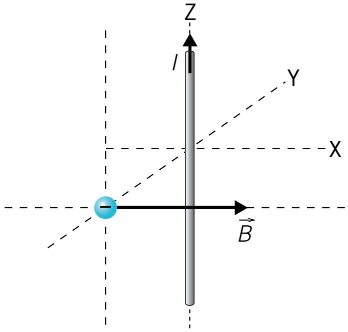
b) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Y.

c) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Z.

d) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje X.

Datos: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2; masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(C. Madrid. Junio, 2005)



Calculamos el campo magnético que crea el hilo de corriente en la posición donde se encuentra el electrón a partir de:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{12}{0{,}01} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

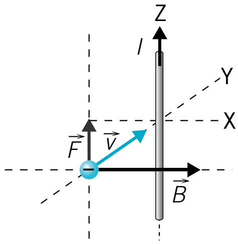
De acuerdo con la regla de la mano derecha, el campo en el punto donde se encuentra el electrón está dirigido según el sentido positivo de X.

Una carga en movimiento que penetre en el campo se verá sometida a una fuerza, de acuerdo con la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Conocida la fuerza determinaremos la aceleración instantánea que experimenta: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

a) Electrón en reposo.

Su velocidad es nula, por lo que también lo será la fuerza resultante. No actúa sobre ella ninguna aceleración.

b) Velocidad en la dirección positiva del eje Y.



Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que podemos calcular:

$$F_B = |q| \cdot v \cdot B =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4} = 3{,}84 \cdot 10^{-23}\ \text{N}$$

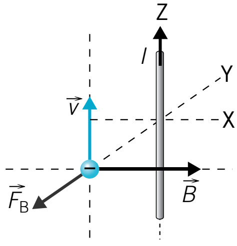
Con la masa del electrón podemos calcular la aceleración correspondiente:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}84 \cdot 10^{-23}\ \text{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 4{,}22 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tendrá la misma dirección y sentido que la de la fuerza ejercida. Como la carga es negativa, su sentido es el opuesto al que se deduce con la regla de la mano derecha; tendrá el sentido positivo de Z:

$$\vec{a} = 4{,}22 \cdot 10^{7}\ \vec{k}\ \text{m/s}^2$$

c) Velocidad en la dirección positiva del eje Z.



Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que podemos calcular:

$$F_B = |q| \cdot v \cdot B =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4} = 3{,}84 \cdot 10^{-23}\ \text{N}$$

Con la masa del electrón podemos calcular la aceleración correspondiente:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}84 \cdot 10^{-23}\ \text{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 4{,}22 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tendrá la misma dirección y sentido que la de la fuerza ejercida. Como la carga es negativa, su sentido es el opuesto al que se deduce con la regla de la mano derecha; tendrá el sentido negativo de las Y:

$$\vec{a} = -4{,}22 \cdot 10^{7}\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

d) Velocidad en la dirección positiva del eje X.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos. Por tanto, la fuerza resultante es nula:

$$|F_{\text{B}}| = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\ 0°$$

Nuevamente no actúa sobre ella ninguna fuerza. No sufre ninguna aceleración.

49. **Por un conductor rectilíneo situado sobre el eje OZ circula una corriente de 25 A en el sentido positivo de dicho eje. Un electrón pasa a 5 cm del conductor con una velocidad de $10^6 \cdot$ m s^{-1}. Calcule la fuerza que actúa sobre el electrón e indique con ayuda de un esquema su dirección y sentido, en los siguientes casos:**

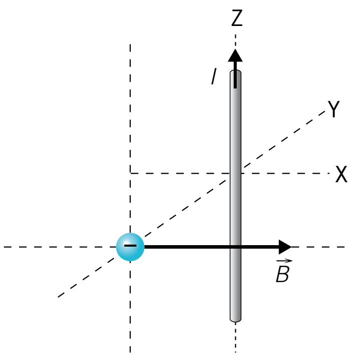
a) Si el electrón se mueve en el sentido negativo del eje OY.

b) Si se mueve paralelamente al eje OX. ¿Y si se mueve paralelamente al eje OZ?

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C;** $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ **N** $\cdot$ **A**$^{-2}$**.**

(Andalucía, 2006)

Podemos obtener el campo magnético que crea el conductor rectilíneo en la posición donde se encuentra el electrón a partir de:



$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{25}{0{,}05} = 1 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

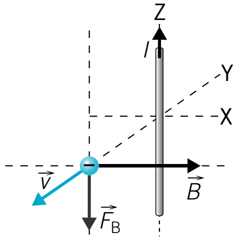
La dirección es, en cada punto del espacio, tangente a la circunferencia centrada en el conductor y que pasa por el punto considerado.
El sentido se determina de acuerdo con la regla de la mano derecha.
Si suponemos que el electrón en su movimiento pasa a 5 cm sobre el eje Y, el sentido de $\vec{B}$ será en el sentido paralelo al eje X positivo.

Utilizamos la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ para calcular la fuerza magnética que el campo ejerce sobre la carga. Como el electrón tiene carga negativa, el sentido de la fuerza es el opuesto al que se deduce aplicando la regla de la mano derecha.

a) Si el electrón se mueve en el sentido negativo del eje Y, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que:

$$F_B = |q| \cdot v \cdot B =$$
$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{N}$$

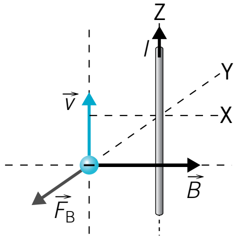
Tendrá la dirección del eje Z y el sentido de los valores negativos:



$$\vec{F}_B = -16 \cdot 10^{-18}\ \vec{k}\ \text{N}$$

b) Si el electrón se mueve paralelamente al eje X, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos. En estas circunstancias, el producto vectorial es nulo y, por tanto, no se ejerce ninguna fuerza sobre el electrón.

c) Si el electrón se mueve paralelamente al eje Z, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que podemos obtener el módulo de la fuerza como se ha hecho en el apartado a). Su dirección será la del eje Y, pero su sentido dependerá de si el electrón se mueve en el sentido positivo o negativo del eje Z.



Como se aprecia en la ilustración, si el electrón se desplaza en el sentido de los valores positivos de Z, la fuerza tiene el sentido de los valores negativos de Y:

$$\vec{F}_B = -16 \cdot 10^{-18}\ \vec{j}\ \text{N}$$

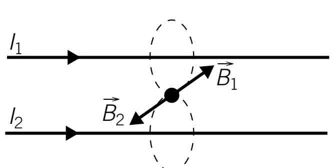
50. Por dos conductores rectilíneos y de gran longitud, dispuestos paralelamente, circulan corrientes eléctricas de la misma intensidad y sentido.

a) Dibuje un esquema, indicando la dirección y el sentido del campo magnético debido a cada corriente y del campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores y coméntelo.

b) Razone cómo cambiaría la situación al duplicar una de las intensidades y cambiar su sentido.

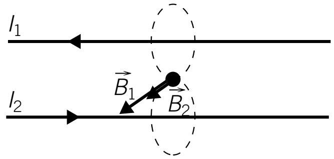
(Andalucía, 2007)

a) Respuesta gráfica:



En ambos hilos de corriente el campo magnético creado por un hilo en el punto considerado es tangente a la circunferencia centrada en el hilo que pasa por ese punto. Para ambos, la dirección del campo magnético es perpendicular a la dirección de los conductores (suponiendo que estén dispuestos según el eje X, será paralelo al eje Y). Los sentidos de cada campo, sin embargo, de acuerdo con la regla de la mano derecha, son opuestos. Para nuestro esquema, el campo creado por la intensidad I_1 tiene el sentido de entrada al papel, mientras que el campo creado por I_2 tiene el sentido de salida del papel. Como las intensidades son de la misma magnitud, la suma vectorial de estos campos resulta nula y el campo magnético total en el punto medio es nulo.

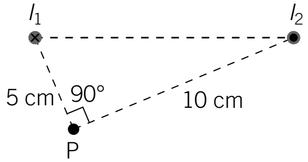
b) Si se modifica el sentido de una de las corrientes, el campo en el punto medio generado por los dos hilos tendría la misma dirección y sentido.



Si además se duplica una de las intensidades, resulta que el campo total creado sería el triple que el creado por el hilo de menor intensidad, ya que el campo magnético creado por cada hilo puede obtenerse como:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \to B_T = \underbrace{\frac{\mu_0 \cdot 2I}{2\pi \cdot r}}_{B_1} + \underbrace{\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}}_{B_2} = 3 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

51. **Por los hilos de la figura circulan corrientes en sentidos opuestos: $I_1 = 2$ A e $I_2 = 4$ A.**

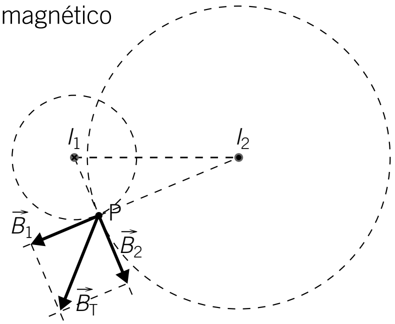


a) Determina el módulo del campo magnético en el punto P y dibuja su dirección y sentido.

b) Suponiendo que $I_1 = 2$ A y circula en el sentido que se indica, ¿cuál debe ser el valor y el sentido de I_2 para que el campo magnético en P sea nulo?

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N · A^{-2}.

a) Se puede determinar el campo magnético que cada hilo de corriente crea en el punto P. Su dirección será tangente a la circunferencia con centro en el hilo y que pase por P; su sentido, el indicado por la regla de la mano derecha, y su módulo:



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

- $I_1 \rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}05} = 8 \cdot 10^{-6}$ T
- $I_2 \rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2\pi \cdot 0{,}1} = 8 \cdot 10^{-6}$ T

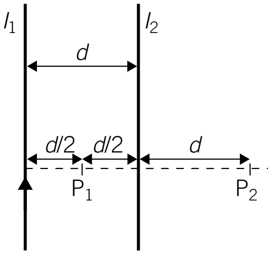
Para esta disposición, los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ forman un ángulo de 90°, lo que nos permite calcular el módulo del campo resultante:

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2 \cdot (8 \cdot 10^{-6})^2} = 1{,}13 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

b) Como se observa en el esquema, el campo total en P no se anulará a menos que se anulen las dos corrientes, I_1 e I_2. Para una disposición como la que se recoge en este problema, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ serán mutuamente perpendiculares, aunque su sentido pueda cambiar al hacerlo la corriente que circula por cada hilo.

Solo es posible que se anule el campo en un punto en la línea que une los dos conductores; el punto estará entre ambos si la corriente que circula por los dos tiene el mismo sentido; y en el exterior si son corrientes antiparalelas. En cualquier caso, se podría calcular el punto exacto en que se anula el campo conociendo la distancia que separa ambos conductores. (Ver una situación similar en el problema resuelto 7 del libro.)

52. Se tienen dos hilos conductores rectos, paralelos e indefinidos, separados una distancia *d*. Por el conductor 1 circula una intensidad $I_1 = 2$ A hacia arriba (ver figura).



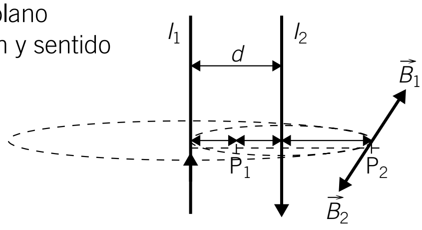
a) ¿Qué intensidad I_2, y en qué sentido, debe circular por el conductor 2 para que se anule el campo magnético en el punto P_2?

b) La distancia que separa los conductores es $d = 20$ cm. Calcula el campo magnético en los puntos P_1 y P_2 cuando $I_2 = I_1 = 2$ A (hacia arriba).

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.

(Aragón. Septiembre, 2007)

a) Los dos hilos de corriente crearán un campo magnético en el plano perpendicular cuya dirección y sentido vienen dadas por la regla de la mano derecha; y su módulo se obtiene por medio de la expresión:



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

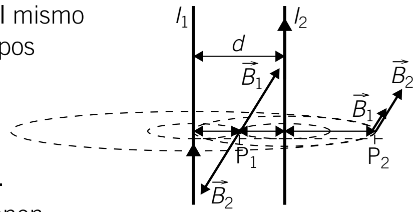
La dirección en que circula la corriente I_1 determina que el campo magnético que crea en el punto P_2 tiene la dirección y el sentido que se muestran en el esquema. Para que el campo total se anule en ese punto, I_2 debe circular en sentido opuesto y su valor debe ser tal que el campo que origina en P_2 coincida en módulo con B_1:

- $B_1 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} = \dfrac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot 2 \cdot d} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{4\pi \cdot d} = \dfrac{2 \cdot 10^{-7}}{d}$
- $B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot I_2}{2\pi \cdot d} = \dfrac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2}{d}$

$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2}{\cancel{d}} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{\cancel{d}} \rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

El resultado es independiente del valor de d.

b) Si ambas corrientes tienen el mismo sentido, resulta que los campos magnéticos que crean:



- Se suman en el exterior (tienen la misma dirección y sentido en P_2).
- Se restan en el interior (tienen la misma dirección y sentidos opuestos en P_1).

Punto P_1. Es el punto medio entre ambos hilos de corriente. Como la distancia y la intensidad que circula por cada uno es la misma, el campo resultante será nulo.

Punto P_2:

- $B_1 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2 \cdot d} = \dfrac{2 \cdot 10^{-7}}{0{,}2} = 1 \cdot 10^{-6}$ T
- $B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot d} = \dfrac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2}{0{,}2} = 2 \cdot 10^{-6}$ T

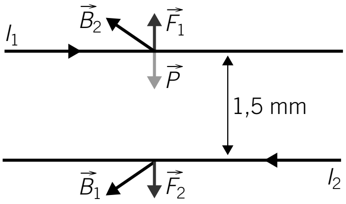
El campo total tendrá la misma dirección y sentido que los anteriores, y su módulo será:

$$B_T = B_1 + B_2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ T} + 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

53. Dos barras rectilíneas de 50 cm de longitud y separadas 1,5 mm situadas en un plano vertical transportan corrientes de 15 A de intensidad de sentidos opuestos. ¿Qué masa debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

(La Rioja. Junio, 2006)

Como se ha razonado en el apartado *Acciones entre corrientes*, entre dos barras que transportan corrientes antiparalelas aparecen fuerzas magnéticas de repulsión.
Para equilibrar la barra superior habrá que colocar una masa cuyo peso coincida con el módulo de esa fuerza magnética. Hay que tener en cuenta que el peso tendrá dirección vertical y sentido hacia abajo.



Para calcular la fuerza magnética que aparece sobre la barra superior debemos conocer el valor del campo magnético que crea en ella la barra inferior.

$$B_2 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{15}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

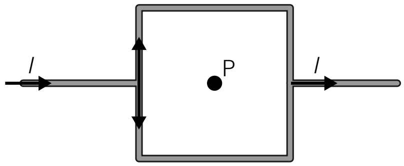
La ley de Lorentz permite conocer la fuerza magnética que actúa sobre I_1. Teniendo en cuenta que el campo es perpendicular a la barra:

$$F_1 = I_1 \cdot B_2 \cdot L = 15 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

La masa que debemos aplicar tiene que tener un peso de la misma magnitud que la F_1 calculada.

$$P = m \cdot g \rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{F_1}{g} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}}{9,8 \text{ N/kg}} = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

54. La corriente que penetra por la izquierda en el conductor de la figura se bifurca. Determina el valor del campo magnético en el punto P en función del valor de la intensidad *I* y de cualquier otro parámetro que necesites conocer.



La situación del enunciado implica que se tienen dos líneas paralelas por cada una de las cuales discurre una corriente $I/2$ y ambas en el mismo sentido. En este caso, el campo magnético en el punto medio de las dos líneas es 0. [Ver el apartado b) del problema 52.]

5

La inducción electromagnética

PRESENTACIÓN

- En este tema las alumnas y alumnos van a comprender el fundamento de la generación de corriente alterna. Será de gran interés hacer una reflexión sobre la importancia social de este hecho; puede ayudar tratar de imaginar nuestro mundo sin electricidad.
- También tendremos ocasión de utilizar los conocimientos adquiridos para comprender el funcionamiento de dispositivos que han aparecido o cobrado especial relevancia en los últimos años, como las cocinas y los hornos de inducción, la guitarra eléctrica o el detector de metales.

5 La inducción electromagnética

OBJETIVOS

- Comprender el fenómeno de la inducción electromagnética desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.
- Reconocer los distintos modos de obtener corrientes inducidas.
- Comprender el mecanismo de producción de corriente eléctrica alterna y continua haciendo uso de los fenómenos de inducción.
- Estudiar otros dispositivos basados en el fenómeno de inducción: el motor eléctrico, el transformador, etc.
- Conocer el mecanismo de transporte de la energía eléctrica desde la central donde se genera hasta el punto de utilización.
- Ser capaz de hacer un análisis crítico (ventajas e inconvenientes, incluido el impacto ambiental) de una central de producción de energía eléctrica concreta o de una determinada red de distribución.
- Obtener una visión global de la interacción electromagnética a partir de la síntesis de Maxwell.

CONTENIDOS

Conceptos

- El fenómeno de inducción eléctrica. Experiencias de Faraday y Henry. Leyes de Lenz y Faraday.
- Concepto de flujo magnético.
- Procedimientos que pueden hacer que varíe con el tiempo el flujo magnético a través de un conductor cerrado.
- Otros fenómenos de inducción: autoinducción e inducción mutua.
- Mecanismos de producción de corrientes inducidas (continuas y alternas) de forma permanente.
- Conocimiento de dispositivos basados en la inducción de corriente: alternador, motor, transformador, cocinas, altavoz, timbre, etc.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Evaluar situaciones en las que se pueda producir o no una corriente inducida.
- Modificar un alternador y convertirlo en una dinamo, o viceversa.
- Comprender los cambios de voltaje que se producen en las distintas fases del transporte de una corriente eléctrica.
- Manejar dispositivos que transformen el voltaje de la corriente con el fin de poder utilizar sencillos aparatos eléctricos en países con diferente voltaje doméstico.
- Realizar montajes de sencillos dispositivos eléctricos que permitan comprobar la existencia de corrientes inducidas.

Actitudes

- Reconocer la importancia de algunos avances científicos y tecnológicos en la evolución social.
- Aprender a tener presente el principio de precaución cuando se analicen los pros y los contras de una instalación de generación o transporte de energía eléctrica.

EDUCACIÓN EN VALORES

En este tema el alumnado se familiariza con fenómenos tecnológicos de importantes consecuencias sociales. Se puede aprovechar para fomentar una educación en valores en diferentes aspectos.

1. **Educación cívica**

   Como miembros de una sociedad, los alumnos y alumnas se pueden ver implicados en discusiones relacionadas con la instalación de elementos destinados a producir o transportar energía eléctrica. Es importante que se ensayen debates donde, bajo el principio de precaución, puedan llegar a conformar una postura coherente al respecto.

2. **Educación medioambiental**

   En los debates a los que se hace referencia en el apartado anterior debe estar presente el impacto ambiental de las instalaciones. Hay que tener en cuenta impactos negativos y positivos; por ejemplo, los relacionados con la aparición de nuevos hábitats en torno a embalses, etc.

3. **Educación para el consumidor**

   En este tema se explica el funcionamiento de algunos dispositivos que pueden emplear los alumnos y alumnas. Su conocimiento les ayudará en la correcta utilización y en la adquisición del modelo más adecuado a sus necesidades.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Evaluar si en una situación se va a producir o no una corriente inducida, y cómo va a ser esta.
2. Calcular el valor de la fuerza electromotriz inducida que se genera en una situación.
3. Relacionar algunos hechos observables con fenómenos de autoinducción.
4. Determinar las características de un transformador en función del cambio que se desea en el voltaje o la intensidad de las corrientes de entrada y salida.
5. Explicar el funcionamiento de algún dispositivo relacionado con la inducción de corriente.
6. Evaluar, desde el punto de vista tecnológico y ambiental, una instalación para la generación o transporte de corriente eléctrica.

5 La inducción electromagnética

1. **Imagina una espira en un campo magnético. Estudia cuál debe ser su orientación para que:**
a) Tenga un flujo positivo.
b) Tenga un flujo negativo.
c) Tenga un flujo nulo.

El flujo del campo magnético a través de la espira se determina por medio de la expresión:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta$$

Hay que recordar que $\vec{S}$ es un vector cuyo módulo coincide con el valor de S y su dirección es perpendicular a la espira. Para superficies planas, como la de la espira, el sentido es arbitrario.

a) Para que el flujo sea positivo tendrá que cumplirse la condición $\cos\theta > 0$. Se cumple para ángulos tales que $-90° < \theta < 90°$.

b) Para que el flujo sea negativo tendrá que cumplirse la condición $\cos\theta < 0$. Se cumple para ángulos tales que $90° < \theta < 270°$.

c) Para que el flujo sea nulo tendrá que cumplirse la condición $\cos\theta = 0$. Se cumple para $\theta = 90°$ y $\theta = -90° = 270°$. Se da esta circunstancia cuando $\vec{B}$ es paralelo al plano de la espira, ya que entonces $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{S}$.

El flujo es máximo cuando $\vec{B}$ es perpendicular a la espira, ya que entonces $\vec{B}$ es paralelo a $\vec{S}$.

2. **En un campo magnético uniforme de 1,5 T se introduce una bobina de 50 espiras de 4 cm de diámetro. Determina el flujo que la atraviesa si:**
a) El campo tiene la dirección del eje de la bobina.
b) El campo forma un ángulo de 30° con el eje de la bobina.
c) El campo forma un ángulo de 30° con la superficie de la primera espira de la bobina.

Calculamos el flujo que atraviesa una bobina por medio de la expresión:

$$\phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta$$

a) Si el campo tiene la misma dirección que el eje de la bobina, será $\theta = 0°$, ya que el eje coincide con el vector $\vec{S}$ (perpendicular a la superficie de la espira). En este caso:

$$\phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S = N \cdot B \cdot \pi r^2 =$$
$$= 50 \cdot 1{,}5\ \text{T} \cdot \pi \cdot 0{,}02^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 0° = 9{,}42 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb}$$

b) En este caso, será $\theta = 30°$:

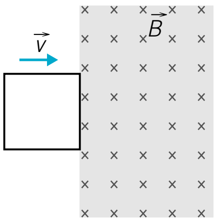
$$\phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S = N \cdot B \cdot \pi r^2 =$$
$$= 50 \cdot 1{,}5\ \text{T} \cdot \pi \cdot 0{,}02^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 30° = 8{,}16 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb}$$

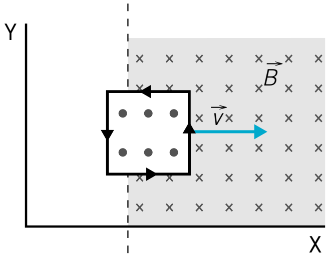
c) De acuerdo con lo expuesto en el apartado a), el vector $\vec{S}$ es perpendicular a la superficie de la espira. Si el campo forma un ángulo de 30° con la superficie de la espira, el ángulo que forma con el eje de la bobina (o con el vector $\vec{S}$) será $\theta = 90° - 30° = 60°$.

$$\phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S = N \cdot B \cdot \pi r^2 =$$
$$= 50 \cdot 1{,}5\ \text{T} \cdot \pi \cdot 0{,}02^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 60° = 4{,}71 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb}$$

3. **Una espira cuadrada se desplaza hacia una zona donde hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura. Deduzca de forma razonada el sentido de la corriente inducida en la espira cuando la espira está entrando en la zona del campo magnético.**

(Cataluña. Junio, 2007)





De acuerdo con la ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida en la espira será tal que se oponga a la causa que la origina.

En este caso, la causa es la entrada en un campo magnético dirigido hacia abajo. A medida que la espira penetra en esa zona, aumenta el flujo del campo magnético hacia abajo; en la espira aparecerá entonces una corriente inducida que provoque un campo magnético dirigido hacia arriba.

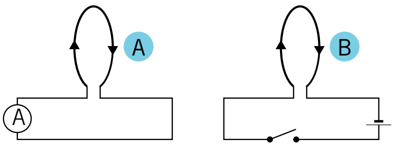
La corriente inducida en la espira mientras entra en el campo magnético será de sentido antihorario.

4. **Supongamos que la espira anterior sigue con su movimiento. Indica cuál es el sentido de la corriente inducida cuando está completamente introducida en el campo magnético y cuando sale por la derecha hasta que está completamente fuera del campo.**

Mientras la espira se mueva estando completamente inmersa en el campo magnético no existe variación en el flujo que la atraviesa y, por tanto, no aparece ninguna corriente inducida. La corriente inducida en este caso es nula.

Cuando la espira se mueve hacia la derecha saliendo del campo magnético, el campo magnético entrante en el plano de la misma va desapareciendo. De acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida que aparece por el cambio del flujo que atraviesa la espira en este caso será tal que se oponga a la desaparición del campo. El sentido de la corriente inducida será horario.

5. **Dos espiras, A y B, definen planos paralelos entre sí. Indica cómo es la corriente inducida en A en los siguientes casos:**



a) Se cierra el interruptor en B.

b) Se mantiene cerrado el interruptor en B, y B se acerca a *A*.

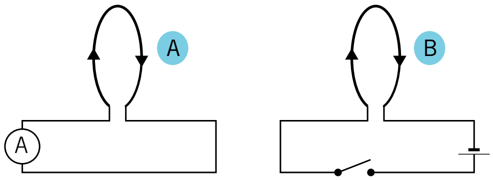
c) Se mantiene cerrado el interruptor en B, y A se acerca a B.

d) Se mantiene cerrado el interruptor en B, y A y B se alejan una de la otra.

e) A y B mantienen su posición y se abre el interruptor en B.

f) Con el interruptor en B abierto, A se acerca a B.

a) Al cerrar el interruptor en B aparece una corriente en sentido horario. Esta corriente produce un campo magnético en la espira B en sentido entrante en B (alejándose de la espira A). Esto hace que varíe el flujo magnético que atraviesa a la espira A, y aparecerá en ella una corriente inducida que se oponga a este cambio. La corriente inducida en A tendrá sentido horario.



b) Si se mantiene el interruptor en B, existe un campo magnético constante en la misma dirección que en el apartado anterior. La variación en este caso consiste en el acercamiento de la espira B a la A. La corriente se inducirá en A de manera que se oponga a este movimiento.

Acercar la espira B equivale a acercar la cara sur de un imán. El efecto en la espira A será que aparecerá una corriente equivalente a una cara sur en la cara situada frente a la espira B que se acerca a ella. El sentido de la corriente correspondiente es horario.

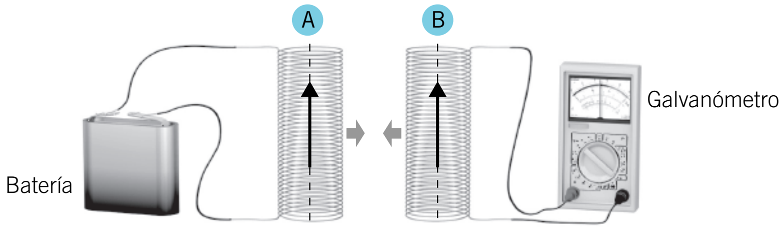
c) Cuando se produce el acercamiento mutuo, es independiente que se mueva una espira o la otra. Igual que en el apartado anterior, la corriente inducida en A será también de sentido horario.

d) Con un razonamiento similar al de los apartados anteriores, se aleja la espira B (equivalente a una cara sur en su superficie más próxima a la espira A). En este caso, la corriente inducida será tal que se oponga a este alejamiento, por lo que su resultado tendrá que ser una cara norte en la cara más próxima a la espira B. Para ello, es necesario que la corriente inducida tenga sentido antihorario.

e) En este caso la variación consiste en un cambio del flujo que atraviesa la espira debido a un campo magnético que desaparece. Para oponerse a la desaparición del campo magnético, se inducirá en la espira A una corriente en sentido antihorario que generaría un campo igual al que está desapareciendo al abrir el interruptor.

f) Con el interruptor de B abierto, no existe ninguna corriente que genere campo magnético. Por tanto, no existe tampoco ningún efecto que contrarrestar y no aparecerá corriente inducida de ningún tipo.

6. Imagina que las dos bobinas de la experiencia de Faraday se acercan o se alejan en la dirección indicada por las flechas. Explica si aparece corriente inducida en la bobina B y, si es así, di en qué sentido circula.

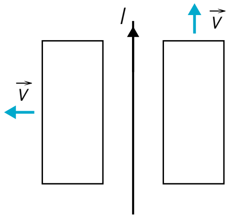


El campo magnético que se origina en la bobina tiene la dirección del eje. (Para un solenoide, $B = \mu \cdot N \cdot I$.) La variación del flujo y, por tanto, la corriente inducida, se produce cuando ambas espiras se mueven una con respecto a la otra en esa dirección. En el esquema se muestra un desplazamiento en la dirección perpendicular al eje, que no provocará corriente inducida en la bobina B. (El campo que crea un solenoide en el exterior es prácticamente nulo.)

7. Por un hilo vertical indefinido circula una corriente eléctrica de intensidad *I*. Si dos espiras se mueven, una con velocidad paralela al hilo y otra con velocidad perpendicular, respectivamente, ¿se inducirá corriente eléctrica en alguna de ellas? Razona la respuesta.

(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2006)

Se inducirá corriente sobre la espira que se mueve en horizontal, ya que con este movimiento se varía el flujo que la atraviesa. Por el contrario, al desplazar la espira paralelamente al hilo no se produce modificación en el flujo que la atraviesa y, por tanto, tampoco se induce ninguna corriente que se oponga a la variación.



8. Una barra metálica de 50 cm se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme con una velocidad de 4 m/s. Se observa que entre los extremos de la barra hay una diferencia de potencial de 0,8 V. Calcula la intensidad del campo magnético en la zona.

De acuerdo con la ley de Henry, cuando un conductor se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme, se induce una fuerza electromotriz que se corresponde con:

$$\Delta V = \varepsilon = v \cdot B \cdot L \rightarrow B = \frac{\Delta V}{v \cdot L} = \frac{0{,}8\ \text{V}}{4\ \text{m/s} \cdot 0{,}5\ \text{m}} = 0{,}4\ \text{T}$$

9. Resuelve el ejercicio anterior suponiendo que la barra metálica se mueve en la misma dirección del campo magnético.

Si la barra metálica se mueve en la misma dirección que el campo magnético, no se induce corriente, ya que no aparecerá ninguna fuerza magnética sobre sus cargas. De acuerdo con la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

10. Un anillo conductor se coloca perpendicularmente a un campo magnético uniforme $\vec{B}$. ¿En qué caso será mayor la fuerza electromotriz inducida en el anillo?

a) Si *B* disminuye linealmente con el tiempo, pasando de 0,5 T a 0 T en 1 ms.

b) Si *B* aumenta linealmente con el tiempo, pasando de 1 T a 1,2 T en 1 ms.

(P. Asturias. Septiembre, 2006)

De acuerdo con la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt}$$

Ya que el anillo está colocado perpendicularmente al campo magnético y, por tanto, los vectores $\vec{S}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

a) En este caso:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -\frac{\Delta(B \cdot S)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{(B_2 - B_1) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{(0 - 0{,}5)\ \text{T} \cdot S}{0{,}001\ \text{s}} = 500 \cdot S\ \text{V}$$

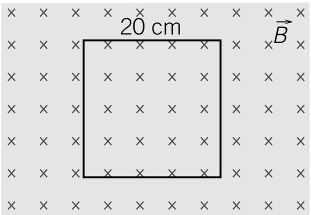
b) Ahora tenemos:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -\frac{\Delta(B \cdot S)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{(B_2 - B_1) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{(1{,}2 - 1)\ \text{T} \cdot S}{0{,}001\ \text{s}} = -200 \cdot S\ \text{V}$$

Así pues, en valor absoluto, será mayor la fem inducida en el primer caso: $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$.

11. **La espira cuadrada de la figura, de 20 cm de lado, es atravesada por un campo magnético uniforme $B = 2$ T, que entra desde arriba en dirección perpendicular al plano del papel.**



Si disminuimos el campo de forma uniforme hasta $B = 0$ en un tiempo de 1 minuto, ¿cuál es la fuerza electromotriz inducida y el sentido de la misma?

(Cantabria. Septiembre, 2007)

De acuerdo con la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt}$$

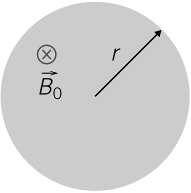
Puesto que la espira es atravesada perpendicularmente por el campo magnético y, por tanto, los vectores $\vec{S}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -\frac{\Delta(B \cdot S)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{(B_2 - B_1) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{(0 - 2)\text{ T} \cdot 0{,}2^2\text{ m}^2}{60\text{ s}} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\text{ V}$$

La desaparición del campo magnético determina una disminución del flujo entrante con el tiempo. La corriente inducida trata de reponer el flujo entrante; por tanto, circulará en sentido horario.

12. **Enuncie la ley de la inducción de Faraday. Una espira circular se coloca en una zona de campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia adentro tal como se muestra en la figura.**



Determine en qué sentido circulará la corriente inducida en la espira en los siguientes casos:

a) Aumentamos progresivamente el radio de la espira manteniendo el valor del campo.

b) Mantenemos el valor del radio de la espira pero vamos aumentando progresivamente el valor del campo.

Razone su respuesta en ambos casos.

(Castilla y León. Junio, 2006)

Cuando se introduce un conductor cerrado en una zona donde hay un campo magnético, podrá aparecer en él una fem si se produce una variación con el tiempo del flujo magnético que atraviesa el conductor.

La corriente inducida por esa variación del flujo circulará en un sentido tal que se oponga a la causa que la produjo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos\theta)}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt}$$

(Porque $\vec{S}$ y $\vec{B}$ son paralelos.)

a) El valor del campo magnético no varía, $B =$ cte.
Al aumentar progresivamente el radio de la espira, aumentará a su vez la superficie que atraviesan las líneas de campo y, con ello, el flujo.

$$\varepsilon = -B \cdot \frac{dS}{dt}$$

El valor de la fem inducida será negativo, por lo que su efecto se opone a la variación del flujo existente. Esto significa que el sentido de la corriente inducida habrá de ser antihorario.

b) En este caso puede obtenerse la fem inducida por medio de la expresión:

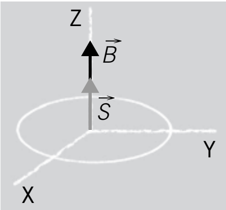
$$\varepsilon = -S \cdot \frac{dB}{dt}$$

Si aumenta progresivamente el valor del campo, el valor de la fem inducida será negativo, por lo que su efecto se opone a la variación del flujo existente.
Esto significa que el sentido de la corriente inducida habrá de ser antihorario de nuevo.

13. Una espira conductora de 10 cm de radio se encuentra en una región del espacio donde existe un campo magnético de dirección paralela a la del eje de la espira y de módulo variable según la expresión $B = 5 \cdot \text{sen}\ 314\ t$ (mT). Calcular la expresión de la fem inducida en la espira.

(C. F. Navarra. Septiembre, 2007)

En las condiciones del enunciado, de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz:



$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} =$$

$$= \pm\frac{d(B \cdot S)}{dt} = \pm\pi \cdot r^2 \cdot \frac{dB}{dt}$$

El sentido del vector $\vec{S}$ puede ser el que se muestra en el dibujo o el contrario, de ahí el signo de la fem.

Conociendo la expresión que rige la variación del campo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = \pm\pi \cdot r^2 \cdot \frac{dB}{dt} = \pm\pi \cdot 0{,}1^2 \cdot \frac{d[5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(314 \cdot t)]}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon = \pm\pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 314 \cdot \cos(314 \cdot t) =$$

$$= \pm 4{,}93 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(314 \cdot t)\ \text{V}$$

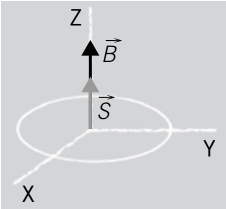
14. Una espira metálica circular, de 1 cm de radio y resistencia 10^{-2} Ω, gira en torno a un eje diametral con una velocidad angular de 2 rad/s en una región donde hay un campo magnético uniforme de 0,5 T dirigido según el sentido positivo del eje Z. Si el eje de giro de la espira tiene la dirección del eje X y en el instante $t = 0$ la espira se encuentra situada en el plano XY, determine:

a) La expresión de la fem inducida en la espira en función del tiempo.

b) El valor máximo de la intensidad de la corriente que recorre la espira.

(C. Madrid. Junio, 2005)

a) De acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida que se crea en la espira viene dada por la expresión:



$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} =$$

$$= -\frac{d[B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)]}{dt} =$$

$$= +B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Prescindimos del signo de la fem porque el vector superficie puede tener el sentido que se indica en el dibujo o el contrario.

$$\varepsilon = 0{,}5 \cdot \pi \cdot 0{,}01^2 \cdot 2\pi \cdot \text{sen}(2\pi t + 0)\ \text{V} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon = 9{,}87 \cdot 10^{-4} \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t)\ \text{V}$$

Su desfase inicial es nulo, ya que cuando la espira se encuentra situada en el plano XY (posición inicial), su vector de superficie es paralelo al vector de campo magnético.

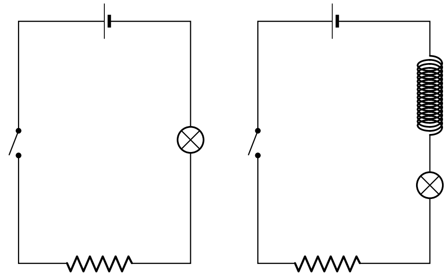
b) De acuerdo con la ley de Ohm: $V = I \cdot R$.

$$\varepsilon = I \cdot R \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_0)}{R}$$

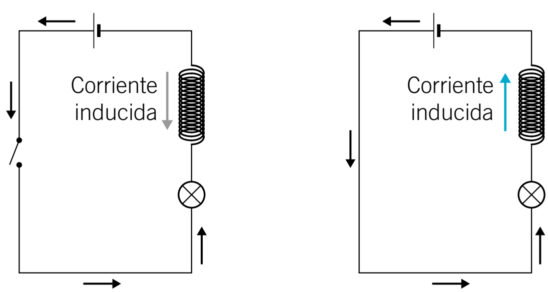
I es una función senoidal. Su valor será máximo cuando el seno del ángulo sea 1:

$$I_{\text{máx.}} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} = \frac{0{,}5\ \text{T} \cdot \pi \cdot 0{,}01\ \text{m}^2 \cdot 2\pi\ \text{rad/s}}{0{,}01\ \text{m}} = 9{,}87 \cdot 10^{-2}\ \text{A}$$

15. Señala las variaciones que se pueden observar en el brillo de la bombilla cuando se cierra y se abre el interruptor en cada uno de los circuitos de la figura.



La diferencia en el brillo de la bombilla en uno y otro circuito radica en que en el segundo caso existe una bobina en el circuito. A causa de esta bobina aparecerá una fem inducida provocará una corriente que se opone a la aparición/desaparición de la corriente del circuito (cierre/apertura interruptor). Hay que recordar que al abrir y cerrar el circuito se provoca un cambio en el flujo magnético que atraviesa las espiras de la bobina.



La corriente inducida provocará que, al cerrar el interruptor, la bombilla tarde más en alcanzar su brillo máximo que si no existiese, ya que la corriente inducida se opone a la circulación de la corriente por el circuito. Análogamente, al abrir el interruptor se apagará antes la bombilla cuyo circuito no tiene bobina porque en el circuito con bobina aparecerá una corriente inducida que se opone al efecto que ha cambiado el flujo magnético; en este caso, a favor de la corriente que circulaba por el circuito y que ahora desaparece.

16. Tenemos dos trozos de 5 m de hilo de cobre de 2 mm de espesor. Enrollamos uno formando espiras de 5 cm de diámetro y otro formando espiras de 10 cm de diámetro. Determina cuál de las dos bobinas obtenidas tendrá mayor autoinducción.

El coeficiente de autoinducción de una bobina viene dado por la expresión:

$$L = \mu \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S$$

- Características de la primera bobina:

  Las espiras tienen 5 cm de diámetro, lo que determina un perímetro de longitud:

$$l_{\text{espira 1}} = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot \left(\frac{0{,}05\ \text{m}}{2}\right) = 0{,}157\ \text{m}$$

  El arrollamiento de los 5 m de cable dará lugar a una bobina con:

$$N_1 = \frac{l}{l_{\text{espira 1}}} = \frac{5\ \text{m}}{0{,}157\ \text{m}} = 31{,}83 \rightarrow 31\ \text{espiras}$$

  Podemos obtener la longitud total de la bobina, ya que conocemos el espesor del hilo de cobre, como:

$$l_{\text{bobina 1}} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot N_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 31 = 0{,}062\ \text{m} = 6{,}2\ \text{cm}$$

  La superficie de las espiras es:

$$S_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}05\ \text{m}}{2}\right)^2 = 1{,}96 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

- Características de la segunda bobina:

  Las espiras tienen 10 cm de diámetro, lo que determina un perímetro de longitud:

$$l_{\text{espira 2}} = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot \left(\frac{0{,}1\ \text{m}}{2}\right) = 0{,}314\ \text{m}$$

  El arrollamiento de los 5 m de cable dará lugar a una bobina con:

$$N_2 = \frac{l}{l_{\text{espira 2}}} = \frac{5\ \text{m}}{0{,}314\ \text{m}} = 15{,}92 \rightarrow 15\ \text{espiras}$$

  Podemos obtener la longitud total de la bobina, ya que conocemos el espesor del hilo de cobre como:

$$l_{\text{bobina 2}} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot N_2 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0{,}03\ \text{m} = 3\ \text{cm}$$

  La superficie de las espiras es:

$$S_2 = \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}1\ \text{m}}{2}\right)^2 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

Obtenemos con todos estos datos el coeficiente de autoinducción de cada una de las bobinas:

- $L_1 = \mu \cdot \dfrac{N_1^2}{l_1} \cdot S_1 = \mu \cdot \dfrac{31^2}{6{,}2 \cdot 10^{-2}} \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-3} = 30{,}38\mu\ \text{H}$

- $L_2 = \mu \cdot \dfrac{N_2^2}{l_2} \cdot S_2 = \mu \cdot \dfrac{15^2}{3 \cdot 10^{-2}} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} = 58{,}87\mu\ \text{H}$

  $L_2 > L_1$. Es decir, es mayor la autoinducción de la segunda bobina.

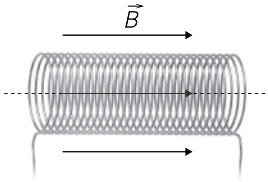
17. **Al abrir un circuito por el que circula una corriente de 12 A se induce una fem de 40 V. Determina el coeficiente de autoinducción del circuito si la corriente tarda 1 ms en anularse.**

La fem autoinducida viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow L = -\varepsilon \cdot \left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)^{-1} = -40 \text{ V} \cdot \left[\frac{(0-12) \text{ A}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ s}}\right]^{-1} = 3{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

18. **Una bobina circular de 4 cm de radio y 30 vueltas se sitúa en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina cuyo módulo en función del tiempo es $B(t) = 0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2$, donde t está en segundos y B, en teslas. Determina:**



a) El flujo magnético en la bobina en función del tiempo.

b) La fuerza electromotriz inducida en el instante $t = 5{,}00$ s.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

a) Para una bobina se puede obtener el flujo a partir de la expresión:

$$\phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S =$$
$$= 30 \cdot (0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2) \cdot \pi \cdot 0{,}04^2 \text{ Wb} =$$
$$= 1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot t + 6{,}04 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 \text{ Wb}$$

b) Ahora:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot t + 6{,}04 \cdot 10^{-3} \cdot t^2)}{dt} =$$
$$= -1{,}51 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 6{,}04 \cdot 10^{-3} \cdot t \text{ V}$$

Entonces:

$$\varepsilon(5 \text{ s}) = -1{,}51 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 6{,}04 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \text{ V} =$$
$$= -0{,}062 \cdot 10^{-2} \text{ V} = -62 \text{ mV}$$

19. **En los transformadores se produce un fenómeno de inducción mutua entre dos bobinas con ejes paralelos. ¿Contradice esto las experiencias de inducción de Faraday?**

No, ya que es necesario que las bobinas estén lo suficientemente próximas como para que la variación de campo magnético causada por la variación de corriente en una de ellas induzca una corriente en la otra, y viceversa. Además, ambas bobinas están arrolladas en torno a un núcleo de hierro dulce común.

20. **Usamos transformadores conectados a aparatos que deben tomar la corriente de la red doméstica, una corriente alterna. ¿Podrían funcionar si recibiesen corriente continua?**

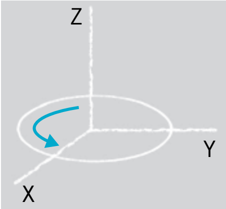
No funcionaría. La entrada del transformador debe ser una corriente alterna, ya que de ese modo la intensidad varía continuamente y el circuito primario del transformador está induciendo corriente en el secundario de manera continua, y viceversa. Si la corriente fuera continua, no aparecería el fenómeno de inducción mutua, ya que no habría variación en la corriente que provocase la necesaria variación en el flujo magnético.

21. **¿Puede girar una espira en un campo magnético sin que se produzca una corriente inducida?**

De acuerdo con Faraday, se producirá una corriente inducida siempre que varíe el flujo de campo magnético que atraviesa la espira. Ese flujo se corresponde con la siguiente expresión:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta$$

Suponiendo que el campo magnético y la superficie de la espira no varían, para que se produzca variación en el flujo es necesario que la espira rote en el campo de forma que varíe con el tiempo el número de líneas de campo que la atraviesan.

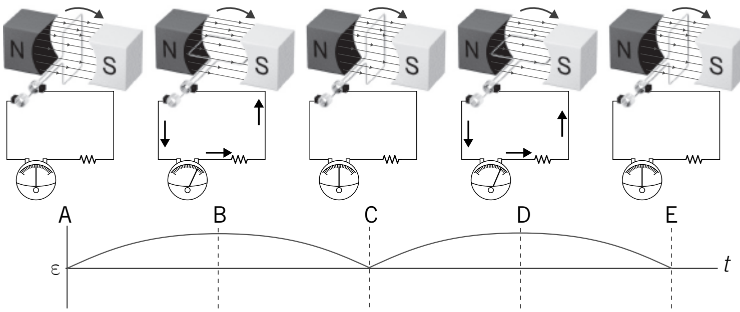


Si tenemos una espira cuyo plano coincide con el que determinan las líneas de campo y rota de manera que no salga de ese plano, no se producirá corriente inducida, ya que no varía el flujo que la atraviesa.

Esto ocurriría, por ejemplo, con una espira situada en el plano XY, un campo magnético paralelo al eje X y la espira girando alrededor del eje Z.

22. **En las bicicletas antiguas podía funcionar un faro cuando se pedaleaba. ¿Por qué la intensidad de luz dependía del ritmo de pedaleo?**

El dispositivo que aporta la corriente que alimenta la bombilla del faro en las bicicletas antiguas es una dinamo. Consta de una espira, conectada a los pedales de la bicicleta, que se hace girar en el seno del campo magnético provocado por un imán permanente. Al girar la espira se produce una variación en el flujo magnético que la atraviesa y aparece en ella una fuerza electromotriz inducida. Los extremos de la espira contactan con dos semianillos que recogen la corriente producida de acuerdo con el esquema de la página siguiente. La corriente que se produce es continua, aunque su intensidad no es constante.



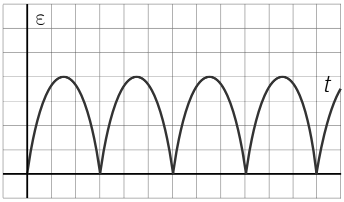
Como se puede observar, la intensidad de la corriente es función del punto de giro en el que se encuentre la dinamo.
Al pedalear muy rápido, se pasará por el punto de máxima intensidad muy a menudo (la frecuencia es alta) y se aprecia mucho brillo en la bombilla porque se le aporta corriente a la máxima intensidad con mucha frecuencia. Al pedalear más despacio se tardará más en pasar por los puntos de máxima intensidad y, por término medio, el valor efectivo de la corriente aportada a la bombilla es menor, por lo que el brillo apreciado es menor.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d[N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)]}{dt} =$$
$$= +N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Con $\varepsilon_{\text{máx.}} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$.

El valor máximo de la fem inducida será mayor cuanto mayor sea la frecuencia de pedaleo, por lo que al pedalear más rápido (aumenta la frecuencia) el valor máximo de la corriente que aparece en el circuito y que alimenta a la bombilla también es más alto.

23. Observa la figura que muestra la corriente que produce una dinamo y explica en qué sentido podemos decir que es una corriente continua y en qué sentido no lo es.



La corriente es continua en el sentido de que su signo es siempre positivo; no tiene ciclos alternos de corriente de signo negativo.

La corriente no es continua en el sentido de que el valor de su intensidad no es siempre el mismo, sino que varía en función del giro de la espira.

24. **La bobina de un alternador tiene 30 espiras cuadradas de 6 cm de lado. Determina el valor de la fem máxima que genera si gira en un campo magnético uniforme de 0,5 T con una frecuencia de 50 Hz.**
Obtén la expresión de la fem en cada instante.

Podemos obtener la fem generada a partir de:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d[N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)]}{dt} =$$
$$= +N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$

Con:

$$\varepsilon_{\text{máx.}} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega = N \cdot B \cdot S \cdot 2\pi\nu =$$
$$= 30 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}06^2 \cdot 2\pi \cdot 50 = 16{,}96 \text{ V}$$

La fem instantánea puede obtenerse a partir de:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \operatorname{sen}(2\pi\nu \cdot t) = 16{,}96 \cdot \operatorname{sen}(100\pi \cdot t)$$

25. **Supón un alternador industrial con un único dipolo magnético en el rotor que gira a 50 Hz. Explica la diferencia que se observaría en la corriente de salida si el rotor tuviese tres dipolos magnéticos manteniendo la misma velocidad de giro.**

Los tres dipolos harán que, en cada vuelta, se experimente tres veces el cambio de polaridad. El efecto será análogo al que produce un solo dipolo girando al triple de frecuencia: 150 Hz.

26. **La energía eléctrica que se produce en las centrales se transporta a través de líneas de alta y media tensión; la transformación de unos valores de tensión en otros se realiza en estaciones transformadoras que funcionan de manera similar a los transformadores.**

Imagina una central que produce corriente con una tensión de 36 kV y la envía a una red de alta tensión de 380 kV. Una vez aquí, pasa a una línea de media tensión de 30 kV, para reducirse finalmente a los 230 V que tenemos en nuestros domicilios. Calcula la relación entre las intensidades de entrada y salida que tiene lugar en las oportunas estaciones de transformación.

Suponemos que la potencia se mantiene constante. De acuerdo con la ley de Ohm:

$$P = I \cdot V$$

Obtenemos la relación entre las intensidades de entrada y salida en los transformadores para cada caso.

- Entrada: 36 kV, salida: 380 kV:

$$P_e = V_e \cdot I_e = P_s = V_s \cdot I_s \rightarrow \frac{V_e}{V_s} = \frac{I_s}{I_e} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I_s}{I_e} = \frac{36 \cdot 10^3 \cancel{V}}{380 \cdot 10^3 \cancel{V}} = 9{,}47 \cdot 10^{-2} \rightarrow I_s = 9{,}47 \cdot 10^{-2} \cdot I_e$$

- Entrada: 380 kV, salida: 30 kV:

$$P_e = V_e \cdot I_e = P_s = V_s \cdot I_s \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I_s}{I_e} = \frac{V_e}{V_s} = \frac{380 \cdot 10^3 \cancel{V}}{30 \cdot 10^3 \cancel{V}} = 12{,}67 \rightarrow I_s = 12{,}67 \cdot I_e$$

- Entrada: 30 kV, salida: 230 V:

$$P_e = V_e \cdot I_e = P_s = V_s \cdot I_s \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I_s}{I_e} = \frac{V_e}{V_s} = \frac{30 \cdot 10^3 \cancel{V}}{230 \cancel{V}} = 130{,}43 \rightarrow I_s = 130{,}43 \cdot I_e$$

27. Si el campo eléctrico de una onda electromagnética viene expresado por el vector:

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)(\vec{i} + \vec{j})$$

indique, justificando la respuesta, en qué dirección oscila el campo magnético.

(R. Murcia. Junio, 2006)

Los vectores de campo eléctrico y campo magnético deben ser perpendiculares entre sí. Por tanto, la oscilación pedida debe ser en un plano perpendicular al correspondiente al vector del enunciado, que oscila en el plano XY. El plano correspondiente al campo magnético debe tener un desfase de 90° con el del enunciado, es decir, que puede oscilar en el plano XZ o en el YZ.

28. Define qué es una corriente inducida y explica en qué se diferencia de una corriente convencional.

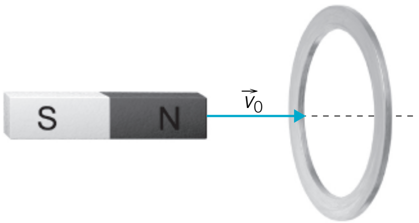
Una corriente inducida aparece como consecuencia de un cambio en el flujo magnético que atraviesa un conductor cerrado. La corriente inducida que se genera es tal que se opone a la causa que produce la modificación del flujo de corriente, y únicamente está presente mientras el flujo está variando.

Su naturaleza es la misma que la de cualquier corriente convencional; solo se diferencia en la causa por la que aparece.

29. **Una corriente eléctrica consiste en un movimiento de cargas a través de un conductor; para que se produzca es necesario que un generador suministre energía a las cargas. Acercando un imán a un hilo de corriente cerrado se puede inducir una corriente sin que exista ningún generador. ¿Es un ejemplo de generación espontánea de energía?**

No, ya que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone al movimiento del imán (que requiere un aporte de energía cinética al sistema). De esta manera se cumple el principio de conservación de la energía: la energía de la corriente inducida es consecuencia de la energía requerida en el movimiento del imán.

30. **Un imán como el de la figura se aproxima a una espira conductora con velocidad $\vec{v}_0$. ¿Aumenta o disminuye el flujo magnético en la espira? ¿Se inducirá una corriente en la espira? ¿En qué dirección, horario o antihorario mirando desde el imán? Justifica tus respuestas.**



(Castilla-La Mancha, 2007)

Al acercar la cara norte del imán a una espira se produce un aumento de las líneas del campo que le llegan, es decir, un aumento del flujo.

En la espira aparece una corriente que origina un campo magnético cuyas líneas de campo circulan en sentido opuesto, a fin de contrarrestar el aumento de flujo experimentado.

En la cara de la espira que se enfrenta a la cara norte del imán que se acerca, las cargas circularán en sentido antihorario; es decir, será una cara norte; la opuesta será la cara sur.

31. **Si se acerca el polo norte de un imán rectilíneo al plano de una espira plana y circular:**

a) Se produce en la espira una corriente inducida que circula en sentido antihorario.

b) Se genera un par de fuerzas que hace rotar a la espira.

c) La espira es atraída por el imán.

(Galicia. Septiembre, 2006)

De acuerdo con lo expuesto en el problema anterior, la respuesta correcta es la a).

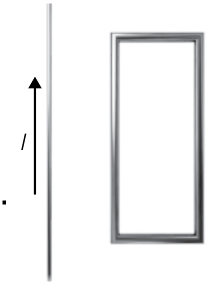
32. **La figura muestra un hilo conductor rectilíneo y una espira conductora. Por el hilo circula una corriente continua. Justifica si se inducirá corriente en la espira en los siguientes casos:**

a) La espira se mueve hacia la derecha.

b) La espira se mueve hacia arriba paralelamente al hilo.

c) La espira se encuentra en reposo.

(C. Valenciana, 2002)



a) Si la espira se mueve hacia la derecha, se modifica el campo magnético que la atraviesa y, por tanto, el flujo. En estas condiciones se produce una corriente inducida en la misma.

b) Moviendo la espira paralelamente al hilo no se produce modificación en el campo magnético. Por tanto, no existe variación en el flujo que la atraviesa y no aparece ninguna corriente inducida.

c) Nuevamente, la corriente inducida es nula porque no existe variación en el flujo que atraviesa la espira.

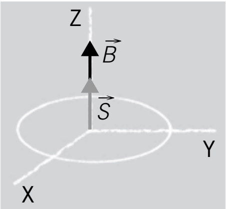
33. **El plano de una espira circular de 15 cm de diámetro está situado perpendicularmente a un campo magnético de 0,05 tesla. ¿Cuánto vale el flujo que lo atraviesa?**

(La Rioja. Junio, 2007)

Podemos obtener el flujo a partir de:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta$$

Como el vector de superficie es perpendicular a la superficie de la espira, será paralelo al vector de intensidad de campo magnético. Por tanto:



$$\phi_B = B \cdot S \cdot \cos 0° = B \cdot S =$$
$$= 0{,}05\ \text{T} \cdot \pi \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 = 8{,}84 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

34. **Una espira circular de 15 cm de diámetro se inserta en un campo magnético uniforme de 0,05 tesla. ¿Cuánto vale el flujo que lo atraviesa si el campo forma un ángulo de 60° con el diámetro de la espira?**

El flujo viene dado por la expresión:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta$$

Si, de acuerdo con el enunciado, el campo forma un ángulo de 60° con la superficie de la espira, y dado que el vector de superficie es perpendicular a la misma, $\theta = 90° - 60° = 30°$.

$$\phi_B = B \cdot S \cdot \cos 30° = 0{,}05\ \text{T} \cdot \pi \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 30° \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi_B = 7{,}66 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

35. **a) Explique el fenómeno de inducción electromagnética y enuncie la ley de Faraday-Henry.**

b) Una espira circular se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme. Razone qué fuerza electromotriz se induce en la espira, al girar con velocidad angular constante en torno a un eje, en los siguientes casos:

i. El eje es un diámetro de la espira.

ii. El eje pasa por el centro de la espira y es perpendicular a su plano.

(Andalucía, 2007)

a) Denominamos inducción electromagnética a la producción de corrientes eléctricas como consecuencia de la variación del flujo magnético que atraviesa una espira. La corriente eléctrica producida será tal que se oponga a la causa que motiva el cambio en el flujo.

En una corriente, se llama fuerza electromotriz (fem, ε) a la energía que se comunica a la unidad de carga.

La ley de Faraday establece que cuando se introduce un conductor cerrado en una zona donde existe un campo magnético, la fem inducida en él es igual y de signo contrario a la rapidez con que varía el flujo magnético que lo atraviesa:

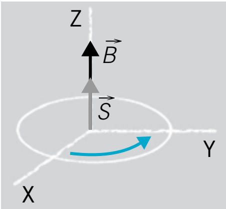
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

b) i) De acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida que se crea en la espira viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d[B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)]}{dt} =$$
$$= +B \cdot S \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Lo que varía en este caso es el ángulo formado entre los vectores de superficie y campo magnético, debido a la velocidad angular de giro, ω. Al variar el ángulo que forman, varía también el flujo que atraviesa a la espira y aparece una fem.

ii) En este caso no varían ni la superficie ni el campo magnético, ni tampoco el ángulo que forman sus vectores, ya que el giro no produce ninguna variación relativa entre ellos; son siempre paralelos. En esta circunstancia, el flujo es constante y no aparece fem.

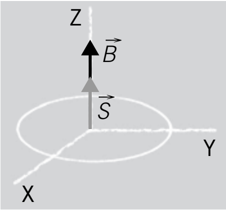


36. **Enrollamos un trozo de alambre a lo largo del ecuador de un globo esférico de 0,13 m de radio, dándole cuarenta vueltas. Además, el globo está en una zona del espacio en la que hay un campo magnético perpendicular al plano de su ecuador y de módulo $B = 0{,}55$ T. Si inflamos el globo hasta que su radio se triplique, tardando 4,5 s, calcula la fuerza electromotriz media que se induce en la espira de alambre.**

Supondremos, para mayor sencillez, que conforme el globo se va hinchando, la longitud del trozo de alambre va variando de tal manera que en todo momento abarca la totalidad del globo por su ecuador y siempre da las cuarenta vueltas completas.

(Castilla-La Mancha, 2000)

El enunciado del problema equivale a decir que se varía la superficie de las espiras de la bobina, mientras todos los demás parámetros del problema permanecen constantes. Además, los vectores campo magnético y superficie de la bobina resultante son siempre paralelos.



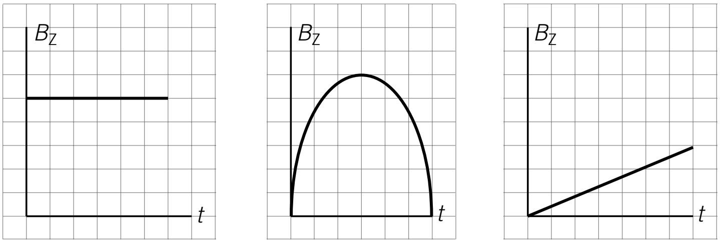
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d(N\cdot B\cdot S\cdot \cos 0°)}{dt} = -N\cdot B\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t} =$$

$$= -40\cdot 0{,}55\cdot\frac{\pi\cdot(3\cdot 0{,}13)^2 - \pi\cdot 0{,}13^2}{4{,}5} = -2{,}08\ \text{V}$$

37. **a) ¿Qué campo magnético de los tres que se representan en las figuras deberemos aplicar a una espira cuadrada que descansa en el plano XY, para que se induzca en esta una fuerza electromotriz constante? Justifica la respuesta.**

b) ¿Qué sentido tendrá la corriente inducida en la espira?

Nota: El campo magnético está dirigido a lo largo del eje Z.

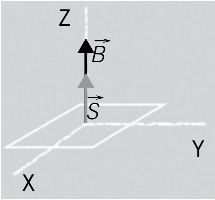


(Cantabria. Junio, 2001)

a) Para una espira se puede obtener la fuerza electromotriz inducida a partir de la siguiente expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$\phi_B = N \cdot B \cdot S$. Para que el resultado de la derivada temporal del flujo sea una constante (fem constante), es necesario que el flujo tenga una variación lineal con respecto al tiempo. Dado que el único parámetro variable es el campo magnético, la respuesta correcta será la correspondiente a una variación lineal con respecto al tiempo: tercera gráfica.



b) El campo crece hacia valores positivos de Z. En consecuencia, la corriente inducida debe provocar un campo magnético que crezca en sentido opuesto. En la cara superior de la espira debe aparecer una corriente en sentido horario (cara sur); y en la cara inferior, antihorario (cara norte).

38. **Una barra de 25 cm de longitud se mueve a 8 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de $6 \cdot 10^{-2}$ T. Su velocidad es perpendicular a la barra.**

a) ¿Cuál será el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza magnética que se ejerce sobre un electrón de la barra? Haz la representación gráfica.

b) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los extremos de la barra?

Dato: carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(País Vasco. Junio, 2001)

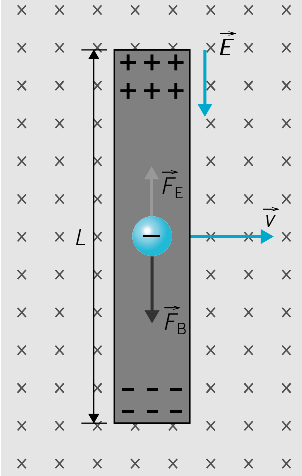
a) Se puede obtener la fuerza magnética ejercida sobre un electrón a partir de:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$$
$$\rightarrow F_B = |q| \cdot v \cdot B =$$
$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 8\ \text{m/s} \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ \text{T} =$$
$$= 7{,}68 \cdot 10^{-20}\ \text{N}$$

Representamos la dirección y sentido de la misma en el dibujo.

b) Se puede obtener la diferencia de potencial entre sus extremos a partir de:

$$\Delta V = E \cdot L = v \cdot B \cdot L =$$
$$= 8\ \text{m/s} \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \cdot 0{,}25\ \text{m} =$$
$$= 0{,}12\ \text{V}$$



39. **Un coche se dirige hacia el este desplazándose en dirección este-oeste a la velocidad de 90 km/h. Calcula la diferencia de potencial entre los extremos de su eje delantero, suponiendo que es una barra metálica de 1,5 m de longitud.**

Dato: supón que los polos geográficos de la Tierra coinciden con sus polos magnéticos y que el campo magnético terrestre es de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T.

En estas condiciones podemos considerar que el eje delantero del coche desempeña el papel de una barra conductora moviéndose de forma perpendicular a un campo magnético. Bajo este supuesto podemos obtener la diferencia de potencial pedida a partir de:

$$\Delta V = E \cdot l = v \cdot B \cdot l =$$

$$= 90 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot 1{,}5 \text{ m} =$$

$$= 1{,}875 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 1{,}875 \text{ mV}$$

40. Explica por qué no se pueden utilizar recipientes de barro en las cocinas de inducción. Explica por qué estas cocinas no queman aunque toquemos su superficie encendida con la mano.

En las cocinas de inducción un campo magnético variable llega al recipiente, que debe ser metálico. Las corrientes de Foucault que se originan en sus paredes calientan lo que hay en su interior sin que se caliente la superficie de la cocina.

Si el recipiente es de barro, material no conductor, no se originan corrientes de Foucault. La mano, que tampoco es un buen conductor, no se calienta al tocar la superficie, que también será de un material aislante. El campo magnético pasará a la siguiente capa conductora que se ponga encima de la misma, pero no afectará a los materiales aislantes que se posen sobre ella.

41. Explica la diferencia entre los fenómenos de autoinducción y de inducción mutua.

El fenómeno de autoinducción consiste en la corriente inducida en un elemento sobre sí mismo, mientras que la inducción mutua consiste en inducir una corriente sobre otro conductor que, a su vez, induce una corriente sobre el primero. Para obtener una corriente por autoinducción basta con un conductor, mientras que en el segundo caso son necesarios dos conductores.

42. Suponiendo que la corriente que circula por una bobina está aumentando, ¿podrá la fem inducida en la bobina producir un aumento mayor de la corriente? Razona la respuesta.

(C. Valenciana, 2000)

Si la corriente que circula por la bobina está aumentando, el efecto de la fem inducida será oponerse a este aumento de corriente, y aparecerá una corriente inducida de sentido contrario cuyo efecto será disminuir la corriente total del circuito.

43. **Una bobina cuadrada, plana, con 100 espiras de lado $L = 5$ cm, está situada en el plano XY. Si aplicamos un campo magnético dirigido a lo largo del eje Z que varía entre 0,5 T y 0,2 T en el intervalo de 0,1 s:**

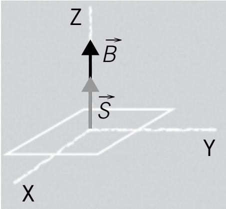
a) ¿Qué fuerza electromotriz (fem) se inducirá en la bobina?

b) Si ahora el campo permanece constante de valor 0,5 T y la bobina gira en 1 s hasta colocarse sobre el plano XZ, ¿cuál será la fem inducida en este caso?

c) Si en el caso b) la bobina se desplaza a lo largo del eje Z sin girar, ¿cuál será la fem inducida?

(Cantabria, 2000)

a) Se puede obtener la fem inducida a partir de:



$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

Ahora:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -N \cdot \frac{\Delta(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} =$$

$$= -N \cdot \frac{\Delta(B \cdot S)}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -N \cdot S \cdot \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} = -100 \cdot 0{,}05^2 \text{ m}^2 \cdot \frac{(0{,}2 - 0{,}5)\text{ T}}{0{,}1 \text{ s}} = 0{,}75 \text{ V}$$

b) Con el movimiento de giro descrito en el enunciado resulta que el vector de superficie de la bobina y el de campo magnético pasan de ser paralelos a ser perpendiculares. El cambio que se produce en el ángulo que forman es de 0° a 90°.

Veamos los cálculos con un razonamiento análogo al apartado anterior, pero modificando la fuente de variación en el flujo, que pasa a ser el ángulo entre los vectores:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -N \cdot \frac{\Delta(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -N \cdot \frac{\Delta(B \cdot S \cdot \cos\theta)}{\Delta t} =$$

$$= -N \cdot S \cdot B \cdot \frac{\Delta(\cos\theta)}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot B \cdot \frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t} =$$

$$= -100 \cdot 0{,}05^2 \text{ m}^2 \cdot 0{,}5 \text{ T} \cdot \frac{\cos 90° - \cos 0°}{1 \text{ s}} = 0{,}125 \text{ V}$$

c) Con el movimiento propuesto en este apartado no se produce variación en el flujo que atraviesa la bobina, por lo que no existe fem inducida.

44. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B \cdot \vec{i}$. En dicha región se introduce una espira metálica circular que rota alrededor de uno de sus diámetros con velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{j}$, de modo que en el instante $t = 0$ su vector de superficie es paralelo al campo $\vec{B}$. ¿Qué fem se induce en la espira si $B = 0{,}1$ T, $\omega = 1$ rad/s y el radio de la espira es de 5 cm?

(C. Madrid, 2000)

De acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida que se crea en la espira viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d\,[B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)]}{dt} =$$
$$= +B \cdot S \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Como en el instante inicial el vector de superficie y el de campo magnético son paralelos, el desfase inicial será nulo ($\theta_0 = 0$).

$$\varepsilon = 0{,}1 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}(1 \cdot t + 0) = 7{,}85 \cdot 10^{-4} \cdot \operatorname{sen} t \ \text{V}$$

45. Un campo de inducción magnética que sigue el sentido positivo del eje X varía con el tiempo según la ecuación $\vec{B} = (0{,}4t - 0{,}3)\,\vec{i}$ T. Hallar la fuerza electromotriz inducida en una espira, cuya superficie es de 50 cm², si el plano de la espira es perpendicular a las líneas de fuerza del campo $\vec{B}$.

(P. Asturias. Junio, 2005)

Sabemos que la fem inducida puede obtenerse a partir de:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos\theta)}{dt}$$

Si el plano de la espira es perpendicular al vector campo magnético, el vector de superficie de la misma es paralelo a las líneas de fuerza.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -S \cdot \frac{dB}{dt} =$$
$$= -50 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{d(0{,}4 \cdot t - 0{,}3)}{dt} = -0{,}005 \cdot 0{,}4 \text{ V} = 2 \text{ mV}$$

46. Sea un solenoide de sección transversal $4 \cdot 10^{-4}$ m² y 100 espiras. En el instante inicial se aplica un campo magnético, perpendicular a su sección transversal, cuya intensidad varía con el tiempo según $B = 2\,t + 1$ T, que se suprime a partir del instante $t = 5$ s.

a) Explique qué ocurre en el solenoide y represente el flujo magnético a través del solenoide en función del tiempo.

b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en el solenoide en los instantes $t = 3$ s y $t = 10$ s.

(Andalucía, 2006)

a) En el solenoide se inducirá una fuerza electromotriz que se opondrá al cambio que produce la variación de flujo a su través.

Como el vector campo magnético y el vector de superficie de la sección transversal de la bobina son paralelos, puede obtenerse el flujo que atraviesa la bobina de la siguiente manera:

$$\phi_B(t) = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta = N \cdot B \cdot S =$$
$$= 100 \cdot (2 \cdot t + 1) \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-2} \cdot t + 4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

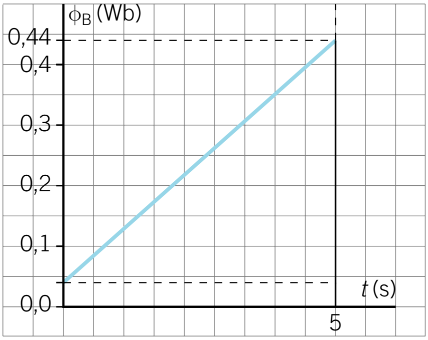
b) Ahora tenemos:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(8 \cdot 10^{-2} \cdot t + 4 \cdot 10^{-2})}{dt} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

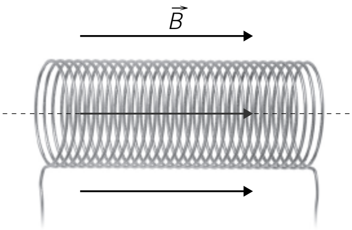
En el instante $t = 3$ s:

$$\varepsilon = 8 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

Instante $t = 10$ s → no existe fuerza electromotriz inducida, pues ya ha desaparecido la fuente de variación de flujo en el instante $t = 5$.



47. **Una bobina circular de 4 cm de radio y 30 vueltas se sitúa en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina cuyo módulo en función del tiempo es $B(t) = 0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2$, donde t está en segundos y B, en teslas. Determina:**



a) El flujo magnético en la bobina en función del tiempo.

b) La fuerza electromotriz inducida en el instante $t = 5{,}00$ s.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

a) Como el vector campo magnético y el vector de superficie del plano de la bobina son paralelos, puede obtenerse el flujo que atraviesa la bobina de la siguiente manera:

$$\phi_B(t) = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta = N \cdot B \cdot S =$$
$$= 30 \cdot (0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2) \cdot \pi \cdot 0{,}04^2 =$$
$$= 1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot t + 6{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 \text{ Wb}$$

b) Calculamos ε:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot t + 6{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot t^2)}{dt} =$$

$$= -1{,}51 \cdot 10^{-3} - 12{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot t \text{ V}$$

Entonces:

$$\varepsilon(t = 5 \text{ s}) = -1{,}51 \cdot 10^{-3} - 12{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = -6{,}18 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

48. **Una bobina cuadrada de 5 cm de lado y 10 vueltas se sitúa en un campo magnético cuya dirección forma un ángulo de 25° con el plano de las espiras que la forman. Su módulo varía en función del tiempo según la expresión $B(t) = 0{,}5 \cdot t^2 - 8$ T, donde t es el tiempo en segundos. Determina:**

a) El flujo magnético en la bobina en función del tiempo.

b) La fuerza electromotriz inducida en la bobina en el instante $t = 8$ s.

c) ¿En qué cambiaría el resultado si el campo magnético formase un ángulo de 25° con el eje de la bobina?

a) El vector de superficie es perpendicular al plano de la sección de las espiras, por lo que el ángulo que forma el vector de campo magnético con él será $\theta = 90° - 25° = 65°$. Se puede obtener el flujo pedido en el enunciado a partir de:

$$\phi_B(t) = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta =$$

$$= 10 \cdot (0{,}5 \cdot t^2 - 8) \cdot 0{,}05^2 \cdot \cos 65° =$$

$$= 5{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 8{,}45 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

b) La expresión que nos permite obtener la fem instantánea es:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(5{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 8{,}45 \cdot 10^{-2})}{dt} =$$

$$= -2 \cdot 5{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot t \rightarrow \varepsilon(t) = -1{,}056 \cdot 10^{-2} \cdot t \text{ V}$$

Por tanto:

$$\varepsilon(t = 8 \text{ s}) = -1{,}056 \cdot 10^{-2} \cdot 8 = -8{,}45 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

c) Variaría el resultado numérico, ya que en este caso el ángulo que forman el vector campo magnético y el vector de superficie no sería 65°, sino 25°:

$$\phi'_B(t) = 10 \cdot (0{,}5 \cdot t^2 - 8) \cdot 0{,}05^2 \cdot \cos 25° =$$

$$= 1{,}13 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 - 18{,}12 \text{ Wb}$$

Así:

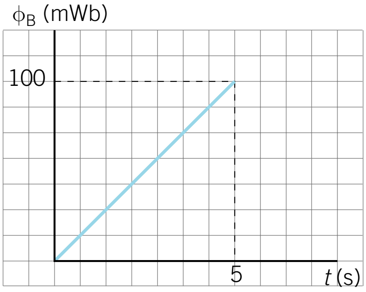
$$\varepsilon'(t) = -\frac{d\phi'_B}{dt} = -\frac{d(1{,}13 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 - 18{,}12)}{dt} =$$

$$= -2 \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-2} \cdot t \rightarrow \varepsilon'(t) = -2{,}26 \cdot 10^{-2} \cdot t \text{ V}$$

Por tanto:

$$\varepsilon'(t = 8 \text{ s}) = -2{,}26 \cdot 10^{-2} \cdot 8 = -18{,}08 \text{ V}$$

49. **La gráfica que se muestra en la figura representa, en función del tiempo, el flujo magnético que atraviesa cada espira de una bobina rectangular con 50 espiras. Se pide:**



a) ¿Cuánto valdrá la fem inducida?

b) Sabiendo que el campo magnético que origina el flujo tiene en todo momento la dirección y sentido del eje Z positivo, ¿podrías indicar el sentido de la corriente inducida?

(Cantabria, 2000)

a) A partir de la gráfica que describe la evolución temporal del flujo podemos obtener la función matemática:

$$\phi_B(t) = \underbrace{\frac{100 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}}{5\ \text{s}}}_{\text{Pendiente de la gráfica}} \cdot t + \phi_{B\,0} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot t\ \text{Wb}$$

Y a partir de esta expresión, se determina la fem inducida:

$$\varepsilon(t) = -50 \cdot \frac{d\phi_B}{dt} = -50 \cdot \frac{d(20 \cdot 10^{-3} \cdot t)}{dt} =$$

$$= -50 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ \text{V} = -1\ \text{V}$$

b) La corriente inducida será tal que se oponga al cambio que produce una variación en el flujo. En este caso, como el cambio es un aumento en el mismo, la corriente inducida se opondrá a la creada por el campo magnético (tendrá sentido contrario).

Para una espira que esté en el plano XY, como el flujo crece hacia los valores positivos de Z, la corriente inducida circulará en sentido horario en la cara que mira hacia arriba. (Ver el problema 37.)

50. **En el plano XY se tiene una espira circular de radio $a = 2$ cm. Simultáneamente se tiene un campo magnético uniforme cuya dirección forma un ángulo de 30° con el semieje Z positivo y cuya intensidad es $B = 3 \cdot e^{-t/2}$ T, donde t es el tiempo, expresado en segundos.**

a) Calcula el flujo del campo magnético en la espira y su valor en $t = 0$ s.

b) Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira en $t = 0$ s.

c) Indica, mediante un dibujo, el sentido de la corriente inducida en la espira. Razona la respuesta.

(C. Valenciana. Junio, 2003)

a) El flujo del campo magnético es:

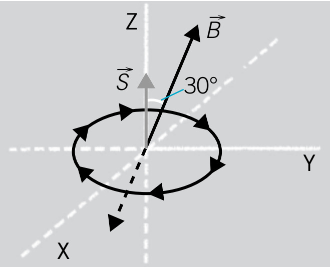
$$\phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta =$$
$$= 3 \cdot e^{-t/2} \cdot \pi \cdot 0{,}02^2 \cdot \cos 30° = 3{,}265 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2} \text{ Wb}$$

Entonces:

$$\phi_B(t = 0) = 3{,}265 \cdot 10^{-3} \cdot e^0 = 3{,}265 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

b) La fem es:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} =$$
$$= -\frac{d(3{,}265 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2})}{dt} =$$
$$= +0{,}5 \cdot 3{,}265 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2} =$$
$$= 1{,}63 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2} \text{ V}$$



Por tanto:

$$\varepsilon(t = 0) = 1{,}63 \cdot 10^{-3} \cdot e^0 = 1{,}63 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

c) A medida que avanza el tiempo, el campo magnético desaparece. La corriente inducida se opondrá a este efecto, por lo cual circulará en sentido antihorario.

51. **Un solenoide de resistencia $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ Ω está formado por 100 espiras de hilo de cobre y se encuentra situado en un campo magnético de expresión $B = 0{,}01 \cdot \cos(100\ t)$ en unidades del SI. El eje del solenoide es paralelo a la dirección del campo magnético y la sección transversal del solenoide es de 25 cm².**
Determine:

a) La expresión de la fem inducida y su valor máximo.

b) La expresión de la intensidad de la corriente que recorre el solenoide y su valor máximo.

(C. Madrid, 2005)

a) Primero calculamos el flujo del campo magnético:

$$\phi_B(t) = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\theta =$$
$$= 100 \cdot 0{,}01 \cdot \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos 0° = \cos(100\pi \cdot t) \text{ Wb}$$

Ahora calculamos la fem:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d[\cos(100\pi \cdot t)]}{dt} = +100\pi \cdot \text{sen}(100\pi \cdot t) \text{ V}$$

Su valor máximo ocurrirá cuando el valor del seno sea máximo; es decir, 1:

$$\varepsilon_{máx.} = 100\pi \text{ V}$$

b) La ley de Ohm nos permite obtener la intensidad de la corriente:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100\pi \cdot \text{sen}(100\pi \cdot t)}{3{,}4 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 9{,}24 \cdot 10^{4} \cdot \text{sen}(100\pi \cdot t) \text{ A} \rightarrow I_{\text{máx.}} = 9{,}24 \cdot 10^{4} \text{ A}$$

52. **Un campo magnético uniforme está confinado en una región cilíndrica del espacio, de sección circular y radio $R = 5$ cm, siendo las líneas del campo paralelas al eje del cilindro (esto puede conseguirse mediante un solenoide cilíndrico por el que pasa una corriente y cuya longitud sea mucho mayor que su diámetro $2 \cdot R$). Si la magnitud del campo varía con el tiempo según la ley $B = 5 + 10 \cdot t$ (dado en unidades del SI), calcula la fuerza electromotriz inducida en un anillo conductor de radio r, cuyo plano es perpendicular a las líneas de campo, en los siguientes casos:**

a) El radio del anillo es $r = 3$ cm y está situado de forma que el eje de simetría de la región cilíndrica, donde el campo es uniforme, pasa por el centro del anillo.

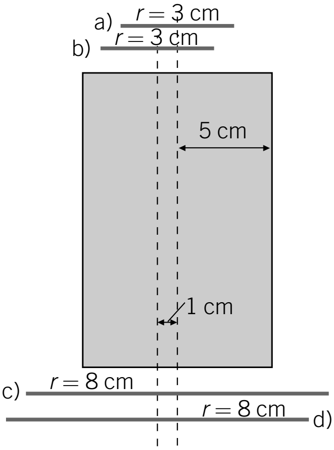
b) $r = 3$ cm y el centro del anillo dista 1 cm de dicho eje.

c) $r = 8$ cm y el eje pasa por el centro del anillo.

d) $r = 8$ cm y el centro del anillo dista 1 cm de dicho eje.

(P. Asturias. Junio, 2001)

En el dibujo se representa la sección de la región cilíndrica en la que está confinado el campo magnético y la del anillo conductor en el que se pretende inducir corriente. En todos los casos el campo es perpendicular a la superficie del anillo; por tanto, $\vec{B}$ es paralelo a $\vec{S}$.



a) Toda la superficie de la espira está atravesada por el campo magnético:

$$\phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta =$$
$$= (5 + 10t) \cdot \pi \cdot 0{,}03^2 \cdot \cos 0° =$$
$$= 1{,}41 \cdot 10^{-2} + 2{,}82 \cdot 10^{-2} \cdot t \text{ Wb}$$

Entonces:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(1{,}41 \cdot 10^{-2} + 2{,}82 \cdot 10^{-2} \cdot t)}{dt} = -2{,}82 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

b) La situación es la misma que en el apartado a):

$$\varepsilon(t) = -2{,}82 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

c) Las líneas de campo solo atraviesan una parte del anillo conductor igual a la sección de la región cilíndrica en la que está confinado el campo:

$$\phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta =$$
$$= (5 + 10\,t) \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot \cos 0° = 3{,}93 \cdot 10^{-2} + 7{,}85 \cdot 10^{-2} \cdot t \text{ Wb}$$

Por tanto:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(3{,}93 \cdot 10^{-2} + 7{,}85 \cdot 10^{-2} \cdot t)}{dt} = -7{,}85 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

d) La situación es la misma que en el apartado c).

$$\varepsilon(t) = -7{,}85 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

53. Tenemos una bobina de 500 espiras por las que circula una corriente de 2,5 A, que desaparece 12 ms después de abrir el interruptor. Determina el flujo magnético que atraviesa cada espira de la bobina cuando el interruptor está cerrado y la fem cuando se abre.
Dato: coeficiente de autoinducción de la bobina: 0,1 H.

Tenemos:

$$\phi_B = L \cdot I = 0{,}1 \text{ H} \cdot 2{,}5 \text{ A} = 0{,}25 \text{ Wb}$$

Y entonces:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L \cdot \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} =$$
$$= -0{,}1 \text{ H} \cdot \frac{(0 - 2{,}5) \text{ A}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 20{,}83 \text{ V}$$

54. a) ¿Qué es un transformador? ¿Por qué son útiles para el transporte de energía eléctrica?
b) Si el primario de un transformador tiene 1200 espiras, y el secundario, 100, ¿qué tensión habrá que aplicar al primario para tener en la salida del secundario 6 V?

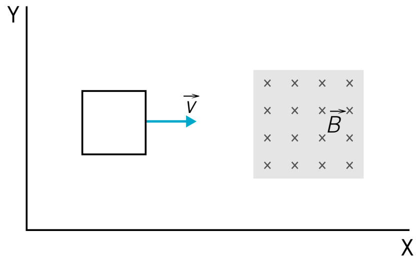
(C. Madrid. Junio, 1999)

a) Un transformador es un dispositivo que se emplea para modificar el voltaje y la intensidad de una corriente alterna sin que se produzcan pérdidas de energía significativas. Al no producir pérdidas en el proceso, los transformadores son útiles para el transporte de energía, realizando modificaciones de voltaje en algún punto del trayecto y manteniendo constante la potencia.

b) En un transformador se cumple que:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \rightarrow \frac{V_1}{1200 \text{ espiras}} = \frac{6 \text{ V}}{100 \text{ espiras}} \rightarrow$$
$$\rightarrow V_1 = \frac{6 \text{ V} \cdot 1200 \cancel{\text{ espiras}}}{100 \cancel{\text{ espiras}}} = 72 \text{ V}$$

55. **Una espira cuadrada de 5 cm de lado situada en el plano XY se desplaza con velocidad $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i}$, penetrando en el instante $t = 0$ en una región del espacio donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = -200 \cdot \vec{k}$ mT, según se indica en la figura:**



a) Determina la fuerza electromotriz inducida y represéntala gráficamente en función del tiempo.

b) Calcula la intensidad de la corriente en la espira si su resistencia es de 10 Ω. Haz un esquema indicando el sentido de la corriente.

(C. Madrid. Junio, 1998)

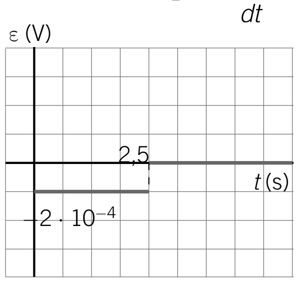
a) Existirá fem inducida mientras esté variando el flujo que atraviesa la espira. Es decir, desde $t = 0$ hasta que la espira esté completamente inmersa en el campo magnético. Podemos conocer la duración de este intervalo, ya que sabemos la velocidad a la que se mueve la espira y su longitud. Debemos calcular el tiempo que tarda en recorrer un espacio equivalente al total de su longitud.

$$t = \frac{L}{v} = \frac{5\ \text{cm}}{2\ \text{cm/s}} = 2{,}5\ \text{s}$$

Calculamos la fem inducida con la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -B \cdot \frac{dS}{dt} =$$

$$= -B \cdot \frac{d(L \cdot x)}{dt} = -B \cdot L \cdot \frac{dx}{dt} = -B \cdot L \cdot v$$



Como el campo es perpendicular al circuito, $\vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S$. Sustituyendo los datos por sus valores en unidades del SI:

$$\varepsilon = -B \cdot L \cdot v =$$
$$= -0{,}2\ \text{T} \cdot 0{,}05\ \text{m} \cdot 0{,}02\ \text{m/s} =$$
$$= -2 \cdot 10^{-4}\ \text{V}$$

b) De acuerdo con la ley de Ohm:

$$V = I \cdot R \rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{-2 \cdot 10^{-4}\ \text{V}}{10\ \Omega} = -2 \cdot 10^{-5}\ \text{A}$$

A medida que la espira penetra en el campo, aumenta el flujo entrante en el papel. En la espira debe inducirse una corriente que provoque un flujo magnético saliente. En consecuencia, la corriente inducida en la espira gira en sentido antihorario.

56. **La bobina de un alternador tiene 50 espiras de 4 cm de radio. Determina el valor de la fem máxima que genera si gira en un campo magnético uniforme de 0,8 T con una frecuencia de 120 Hz. Obtén la expresión que permite conocer la fem que genera en cada instante. ¿Qué sucedería si se duplicase la velocidad de giro de la bobina.**

Podemos obtener la fem generada a partir de:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d[N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)]}{dt} =$$

$$= +N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Con:

$$\varepsilon_{\text{máx.}} = N \cdot B \cdot S \cdot 2\pi\nu = 50 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04^2 \cdot 2\pi \cdot 120 = 48{,}25 \text{ V}$$

La fem instantánea puede obtenerse a partir de:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = \varepsilon_{\text{máx.}} \cdot \text{sen}(2\pi\nu \cdot t) = 48{,}25 \cdot \text{sen}(240\pi \cdot t) \text{ V}$$

Al duplicar la velocidad de giro de la bobina se duplica la frecuencia, por lo que se duplica el valor máximo de la fem obtenida.

57. **Explica por qué un campo magnético variable induce un campo eléctrico variable de dirección perpendicular.**

Las corrientes inducidas muestran que un campo magnético $\vec{B}$ variable origina un campo eléctrico que hace que las cargas se desplacen a lo largo de la espira en un determinado sentido, dependiendo de la variación que experimente $\vec{B}$. En la experiencia de Henry se comprueba que el desplazamiento de las cargas en el conductor provoca un campo eléctrico perpendicular al magnético.

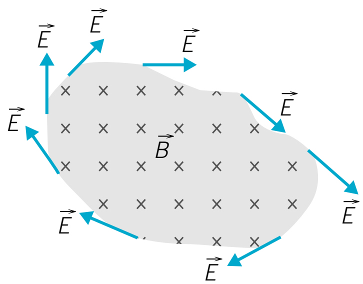
De forma complementaria, cuando un conductor transporta corriente, aparece un campo magnético cuya dirección es perpendicular a aquella en la que avanza la corriente. El valor del campo magnético producido depende de la intensidad de la corriente.

La tercera ecuación de Maxwell establece la relación matemática entre los campos eléctrico y magnético mutuamente inducidos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

La variación con respecto al tiempo del flujo magnético que atraviesa una superficie coincide con la circulación del campo eléctrico resultante en torno a la línea que limita esa superficie.

El campo eléctrico inducido que resulta de un campo magnético variable es no conservativo.



6

El movimiento armónico simple (MAS)

PRESENTACIÓN

- El estudio del movimiento vibratorio armónico simple es un paso imprescindible para abordar el movimiento ondulatorio, que se tratará en el tema siguiente. Es muy importante que el alumnado reconozca sus peculiaridades, tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista físico. Se ejemplificará el estudio del resorte y el del péndulo; el primero como modelo para comprender las consecuencias de una perturbación ondulatoria en los distintos puntos del medio en que se propaga, y el segundo como ejemplo sencillo y próximo a la experiencia del alumnado.
- Dado que en cursos anteriores se ha estudiado el movimiento circular uniforme, puede ser útil emplear como modelo matemático para explicar el movimiento vibratorio armónico simple el que resulta de las proyecciones sobre un diámetro de las posiciones que ocupa un móvil que describe una circunferencia con movimiento circular uniforme. En este caso, debe insistirse en que se trata de dos movimientos diferentes y solo se emplea uno como modelo matemático para la comprensión del otro.

OBJETIVOS

- Conocer las características físicas que identifican el movimiento vibratorio armónico simple.
- Comprender las ecuaciones matemáticas que describen el movimiento armónico simple, tanto desde el punto de vista cinemático como dinámico.
- Ser capaz de elaborar gráficas que identifiquen las características del movimiento vibratorio armónico simple, identificando los puntos donde la elongación, velocidad y aceleración toman valores máximos, mínimos y nulos.
- Comprender las expresiones matemáticas que relacionan la energía de un oscilador armónico con su posición. Reconocer que la energía mecánica total es constante.
- Deducir matemáticamente la expresión que relaciona el periodo de un oscilador con sus características físicas.
- Comprobar de forma experimental la relación entre el periodo del oscilador y sus características físicas, particularizando para el caso del resorte y del péndulo.
- Analizar las situaciones en las que el movimiento de un péndulo se corresponde con el de un oscilador armónico y aquellas en las que se separa de ese modelo.

6 El movimiento armónico simple

CONTENIDOS

Conceptos

- Características físicas del movimiento vibratorio armónico simple. Concepto de elongación, amplitud, longitud de onda, frecuencia, periodo, frecuencia angular y fuerza recuperadora.
- Ecuaciones matemáticas que representan el movimiento vibratorio armónico simple. Relación entre la posición, la velocidad y la aceleración en un punto.
- Representación gráfica de las ecuaciones matemáticas que representan el movimiento armónico simple. Identificación de los puntos donde estas magnitudes alcanzan valores máximo, mínimo y nulo, y relación con la posición real del oscilador.
- Estudio del periodo de un resorte que se mueve con movimiento armónico simple. Relación del periodo con sus magnitudes físicas. Comprobación experimental.
- Análisis del movimiento de un péndulo. Discusión de las condiciones en las que se puede considerar un movimiento armónico simple.
- Estudio del periodo de un péndulo que se mueve con movimiento armónico simple. Relación del periodo con sus magnitudes físicas. Comprobación experimental.
- Estudio energético del oscilador armónico simple. Análisis de su energía cinética, potencial y mecánica en los distintos puntos de su movimiento.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Adquirir soltura en el estudio matemático de un movimiento a partir de las observaciones que de él se pueden realizar.
- Habituarse a relacionar los valores de las funciones matemáticas que indican la posición, velocidad y aceleración de un móvil en función del tiempo con la posición real que ocupa en su trayectoria.
- Manejar con destreza las derivadas e integrales de las funciones trigonométricas simples.
- Ser capaz de idear experiencias que permitan comprobar efectos físicos sencillos, como la dependencia o no del periodo de un oscilador de sus características físicas.
- Interpretar y elaborar gráficas y esquemas que describen un movimiento armónico simple.

Actitudes

- Comprender la necesidad de modelos matemáticos para estudiar ciertos problemas físicos y las limitaciones con las que dichos modelos se pueden aplicar.
- Desarrollar curiosidad científica que lleve a idear experiencias para comprobar las relaciones matemáticas que se deducen de forma teórica.

(MAS)

EDUCACIÓN EN VALORES

A pesar de ser este un tema de profundo contenido teórico, el modo en que se llevan a cabo algunos aprendizajes se puede aprovechar para una educación en valores.

1. **Educación cívica**

   Para el estudio experimental de los factores que influyen o no en el periodo de un oscilador armónico se pueden establecer grupos de discusión que lleven a diseñar las experiencias adecuadas.

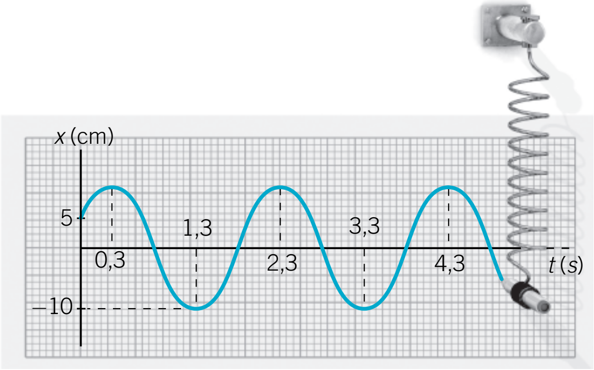
   El grupo debe colaborar en la realización de la misma y en la discusión de los resultados.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Partiendo de una de las ecuaciones de un movimiento armónico simple (posición, velocidad o aceleración en función del tiempo), obtener las demás ecuaciones y sus parámetros característicos.
2. Conociendo los parámetros característicos de un movimiento vibratorio armónico simple, obtener sus ecuaciones del movimiento.
3. Realizar la representación gráfica de alguna de las ecuaciones de un movimiento armónico simple e identificar los puntos de la trayectoria que se relacionan con valores significativos.
4. Obtener el periodo de un péndulo o de un oscilador a partir de sus características físicas, y viceversa.
5. Discutir experiencias que permitan estudiar los factores que determinan o no el periodo de un péndulo o de un oscilador armónico.
6. Comprender la relación de la energía (cinética, potencial o mecánica) de un oscilador con su posición. Utilizar esta relación para deducir las ecuaciones características del movimiento.
7. Realizar un estudio mecánico y energético del movimiento de un péndulo. Llevar a cabo un análisis de las condiciones en las que se comporta como oscilador armónico y aquellas en que se desvía de dicho comportamiento.

6 El movimiento armónico simple

1. Escribe la ecuación senoidal del movimiento del muelle de la figura cuya gráfica posición-tiempo es la que se indica:



La ecuación del movimiento del muelle se corresponde con la expresión:

$$x = A \cdot \text{sen}\,\overbrace{(\omega \cdot t + \phi_0)}^{\text{Fase}}$$

Elongación   Amplitud

Frecuencia angular   Fase inicial

Identificamos términos a partir de la gráfica:

- Amplitud: $A = 10$ cm.
- Frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. El periodo es el tiempo entre dos máximos sucesivos:

$$T = 2{,}3\ \text{s} - 0{,}3\ \text{s} = 2\ \text{s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \text{rad/s}$$

- Fase inicial: $x_0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_0 + \phi_0)$; para $t_0 = 0$, $x_0 = 5$ cm:

$$5 = 10 \cdot \text{sen}(\phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \phi_0 = \text{arc sen}(0{,}5) = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

Por tanto:

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\text{m}$$

2. Se estira un muelle hasta que su longitud aumenta 5 cm. A continuación se suelta y se le deja oscilar libremente, de forma que da 30 oscilaciones completas en 5 segundos.

(MAS)

Determina:

a) La ecuación de su movimiento suponiendo que empezamos a estudiarlo cuando se encuentra en la posición más estirada.

b) La posición en la que se encuentra el muelle a los 10 s de iniciado el movimiento.

c) El tiempo que tarda el muelle en alcanzar la posición de equilibrio desde que está en la posición de máximo estiramiento.

a) Dado que en el enunciado se menciona que la posición inicial de estudio ($t = 0$) coincide con un máximo, utilizaremos la ecuación cosenoidal para describir el movimiento.
De esta manera su desfase inicial será nulo: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$; para $t = 0$, $x = A$.

La amplitud del muelle coincide con su elongación máxima: $A = 5$ cm $= 0{,}05$ m.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{30 \text{ ciclos}}{5 \text{ s}} = 12\pi \text{ rad/s}$$

Sustituyendo:

$$x = 0{,}05 \cdot \cos(12\pi \cdot t) \text{ m}$$

b) $x(t = 10 \text{ s}) = 0{,}05 \cdot \cos(12\pi \cdot 10) = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$.

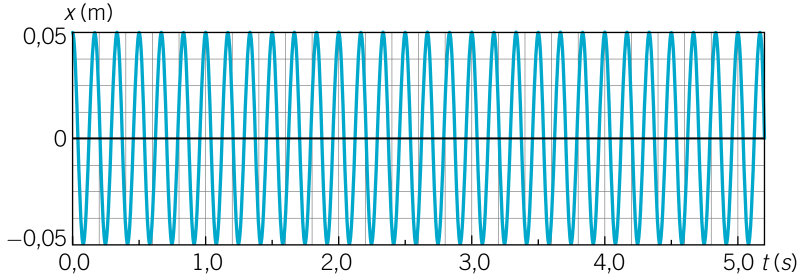
El muelle se encuentra en su posición de elongación máxima positiva (estirado al máximo).

c) En la posición de equilibrio $x = 0$:

$$0 = 0{,}05 \cdot \cos(12\pi \cdot t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{arc}\cos(0) = 12\cancel{\pi} \cdot t = \frac{\cancel{\pi}}{2} \rightarrow t = \frac{1}{2 \cdot 12} = 0{,}042 \text{ s}$$

3. **Representa la gráfica posición-tiempo de un muelle cuyo movimiento se describe en la actividad anterior.**



4. **¿Cuál será la velocidad del móvil del ejemplo 2 cuando se encuentra a 2 cm del punto más bajo?**

En este caso se encuentra en la posición $x = -4$ cm.

Sustituyendo igual que en el ejemplo:

$$v = 2\pi\nu \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = 2\pi \cdot 0{,}25\,\text{Hz} \cdot \sqrt{(6\text{ cm})^2 - (-4\text{ cm})^2} \simeq 7\text{ cm/s}$$

Es decir, el módulo de la velocidad es el mismo que en la posición calculada en el ejemplo. (No confundir la velocidad, v, con la frecuencia, ν.)

5. En el extremo de un muelle colocamos un cuerpo, lo estiramos una longitud de 4 cm y lo dejamos oscilar libremente. Escribe la función que permite conocer su elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo si vibra con una frecuencia de 2 Hz. Representa gráficamente dichas funciones tomando valores del tiempo que permitan conocer lo que sucede en dos oscilaciones completas.

Como la posición inicial considerada se corresponde con su elongación máxima, utilizaremos la ecuación cosenoidal del MAS.

Elongación:

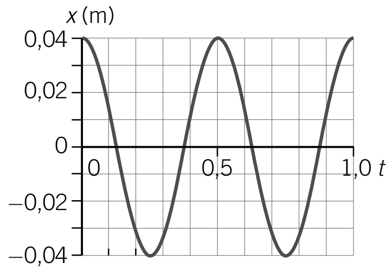
La elongación máxima es precisamente $A = 0{,}04$ m.

Calculamos ω:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 2\,\text{Hz} = 4\pi \text{ rad/s}$$

La ecuación de la elongación será:

$$x = 0{,}04 \cdot \cos(4\pi \cdot t)\text{ m}$$



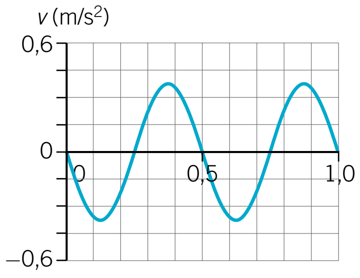
Velocidad:

La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) =$$

$$= -4\pi \cdot 0{,}04 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot t) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = -0{,}16\pi \cdot \text{sen}(4\pi \cdot t)\text{ m/s}$$



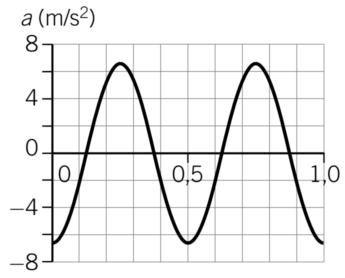
Aceleración:

La aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) =$$

$$= -(4\pi)^2 \cdot 0{,}04 \cdot \cos(4\pi \cdot t) \rightarrow$$

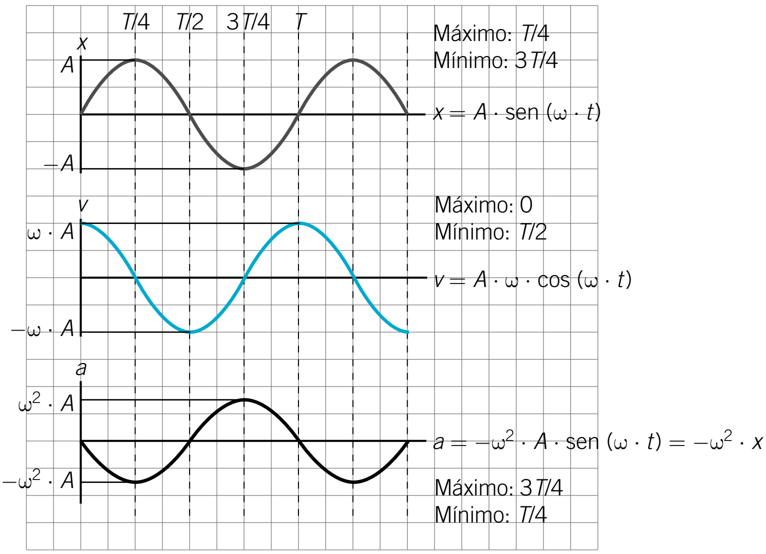
$$\rightarrow a = -0{,}64 \cdot \pi^2 \cdot \cos(4\pi \cdot t)\text{ m/s}^2$$



(MAS)

6. **Haz la representación gráfica de las funciones *x*(*t*), *v*(*t*) y *a*(*t*) para un muelle que oscila apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. De forma similar a la figura 6.23, indica en qué posición las magnitudes *x*, *v* y *a* alcanzan sus valores máximos y mínimos.**

Respuesta gráfica:



7. **Calcula la aceleración y la velocidad en el instante inicial, $t = 0$ s, para un muelle cuyo movimiento viene descrito por la ecuación:**

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)} \quad \textbf{(}\boldsymbol{x}\textbf{ en cm)}$$

La ecuación de la posición es:

$$x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

En el instante $t = 0$:

$$x(t = 0) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}26 \text{ m}$$

La velocidad se obtiene derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi_0) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

En el instante $t = 0$:

$$v(t = 0) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}3 \text{ m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

En el instante $t = 0$:

$$a(t = 0) = -2^2 \cdot \overbrace{0{,}26}^{x(t=0)} = -1{,}04 \text{ m/s}^2$$

8. **Un objeto de 2,5 kg está unido a un muelle horizontal y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determine:**

a) El periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima y la aceleración máxima del objeto.

(C. Madrid. Junio, 2007)

a) El dato de la frecuencia nos permite conocer el periodo, T:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3{,}3 \text{ Hz}} = 0{,}303 \text{ s}$$

b) Calculamos ω a partir del dato del periodo, según:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}303 \text{ s}} = 20{,}73 \text{ rad/s}$$

La velocidad máxima en un MAS es:

$$v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 20{,}73 \text{ rad/s} \cdot 0{,}05 \text{ m} = 1{,}037 \text{ m/s}$$

La aceleración máxima en un MAS es:

$$a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A = 20{,}73^2 \text{ (rad/s)}^2 \cdot 0{,}05 \text{ m} = 21{,}49 \text{ m/s}^2$$

9. **Una partícula puntual realiza un movimiento armónico simple de amplitud 8 m que responde a la ecuación $a = -16x$, donde x indica la posición de la partícula en metros y a es la aceleración del movimiento expresada en m/s^2.**

a) Calcula la frecuencia y el valor máximo de la velocidad.

b) Calcula el tiempo invertido por la partícula para desplazarse desde la posición $x_1 = 2$ m hasta la posición $x_2 = 4$ m.

(C. Valenciana. Septiembre, 2006)

a) A partir de la expresión que determina la aceleración de un cuerpo en un MAS:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

(MAS)

Identificando:

$$-\omega^2 \cdot \cancel{x} = -16 \cdot \cancel{x} \rightarrow \omega^2 = 16 \rightarrow \omega = 4 \text{ rad/s}$$

Calculamos la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4 \text{ rad/s}}{2\pi} = 0{,}64 \text{ Hz}$$

Ahora ya se puede calcular la velocidad:

$$v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) \rightarrow v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 4 \text{ rad/s} \cdot 8 \text{ m} = 32 \text{ m/s}$$

b) Para calcular el tiempo que tarda en trasladarse de un punto al otro obtendremos el valor del tiempo cuando se encuentra en cada una de esas posiciones. Para esto necesitamos conocer la ecuación que rige su movimiento y que, suponiendo que no existe desfase inicial, puede obtenerse como:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = 8 \cdot \text{sen}(4t + \phi_0)$$

En $x = 4$ m:

$$4 = 8 \cdot \text{sen}(4t_2 + \phi_0) \rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}(4t_2 + \phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4t_2 + \phi_0 = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad [1]$$

En $x = 2$ m:

$$2 = 8 \cdot \text{sen}(4t_1 + \phi_0) \rightarrow \frac{1}{4} = \text{sen}(4t_1 + \phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4t_1 + \phi_0 = \text{arc sen}\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}253 \qquad [2]$$

Restando las expresiones [1] y [2]:

$$(4t_2 + \phi_0) - (4t_1 + \phi_0) = \frac{\pi}{6} - 0{,}253 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \cdot (t_2 - t_1) = 0{,}27 \rightarrow t_2 - t_1 = \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675 \text{ s}$$

10. Un punto material pende del extremo de un muelle. Se tira de él y se le hace oscilar de manera que entre el punto más alto y el más bajo este recorre una distancia de 20 cm y tarda 20 s en completar cinco oscilaciones. Determina la velocidad y la aceleración del móvil cuando se encuentra a 6 cm del punto más bajo.

Si la diferencia entre el punto más alto y más bajo del recorrido es 20 cm, la elongación máxima del MAS es $A = 10$ cm $= 0{,}1$ m.

Obtenemos la frecuencia del movimiento:

$$\nu = \frac{5 \text{ ciclos}}{20 \text{ s}} = 0{,}25 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0{,}25 \text{ Hz} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

A 6 cm del punto más bajo el punto se encuentra 4 cm por debajo de su posición de equilibrio, es decir, en $x = -4$ cm.

Se pueden obtener la velocidad y la aceleración instantánea de un MAS con las relaciones:

- $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{0{,}1^2 - 0{,}04^2} = 0{,}144$ m/s
- $a = -\omega^2 \cdot x = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (-0{,}04) = 0{,}098$ m/s^2

11. Diseña una experiencia para comprobar que el periodo de un oscilador armónico no depende de la amplitud de la oscilación.

Material:

- Soporte de laboratorio.
- Muelle.
- Portapesas.
- Una pesa.
- Cronómetro.

Procedimiento:

1. Colocar el muelle en el soporte como se muestra en la figura. Poner un portapesas en su extremo inferior.
2. Colocar en el portapesas la pesa elegida. Estirarla de manera que se desplace un poco de su posición de equilibrio y dejarla oscilar.
3. Cuando oscile de manera uniforme (después de las 3 o 5 primeras oscilaciones), poner el cronómetro en marcha y medir el tiempo que tarda en dar 20 oscilaciones. Anotar el resultado.
4. Repetir los pasos 2 y 3 utilizando siempre la misma masa y variando la amplitud inicial de la oscilación.
5. De acuerdo con la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

al usar siempre la misma masa m y el mismo muelle (misma k), el periodo observado debería de ser constante.

(MAS)

12. **Se dispone de un muelle elástico sujeto por un extremo al techo de una habitación. Si colgamos por el otro extremo un cuerpo de 6 kg de masa, el muelle se alarga 20 cm. Calcule:**

a) La constante elástica del muelle.

b) El periodo de las oscilaciones que realizará si se le aparta de su posición de equilibrio y se le deja libremente para que ejecute un movimiento armónico simple.

(Extremadura. Junio, 2005)

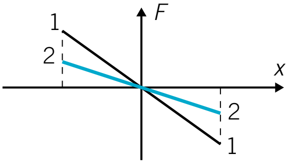
a) Determinaremos la constante de elasticidad estática por medio de la ley de Hooke:

$$P = -m \cdot g = F = -k \cdot x \rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{6 \cdot 9{,}8}{0{,}2} = 294 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) Aunque la constante de elasticidad estática y dinámica no son exactamente iguales, utilizaremos el dato calculado en el apartado anterior para obtener el periodo de la oscilación:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{6}{294}} = 0{,}9 \text{ s}$$

13. **Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2, respectivamente, tal que $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en la figura.**



a) ¿Cuál es el muelle de mayor constante elástica?

b) ¿Cuál de estas masas tendrá mayor periodo de oscilación?

(C. Madrid. Septiembre, 2005)

a) La ley de Hooke indica que $F = -k \cdot x$, donde k es la pendiente de la gráfica en la cual se representa F frente a x. Puesto que la pendiente de la gráfica 1 es mayor que la de la gráfica 2, podemos concluir que $k_1 > k_2$.

b) El periodo de oscilación de un muelle viene dado por la expresión:

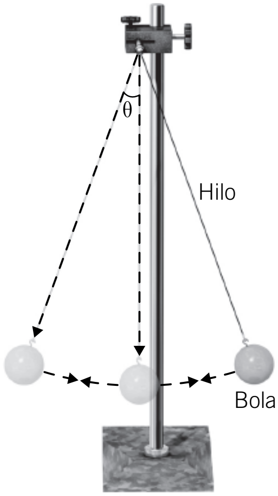
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

El periodo de oscilación de un muelle es mayor cuanto mayor sea su masa y cuanto menor sea su constante elástica. Ambas circunstancias indican que el periodo del segundo oscilador (m_2) es mayor que el del primero.

14. Diseña una experiencia de laboratorio que te permita comprobar que el periodo de un péndulo armónico no depende de la amplitud de la oscilación.

Material:

- Soporte de laboratorio.
- Hilo de nailon.
- Bola con gancho de peso conocido.
- Metro (para medir longitudes).
- Cronómetro.



Procedimiento:

1. Atar un hilo de aproximadamente 1,5 m de longitud al extremo de una bola pequeña de masa conocida.
2. Colocarlo luego en el soporte de manera que pueda oscilar, como se indica en la figura.
3. Medir exactamente la longitud del hilo desde el extremo del soporte hasta la bola. Debe ser siempre exactamente la misma longitud. Separar la bola en el plano vertical de manera que se desplace un poco de su posición de equilibrio y dejarla oscilar.
4. Cuando oscile de manera uniforme (después de las 3 o 5 primeras oscilaciones), poner el cronómetro en marcha y medir el tiempo que tarda en dar 20 oscilaciones. Anotar el resultado.
5. Repetir los pasos 2 y 3, separando la bola diferentes ángulos θ (con ello se consiguen distintas amplitudes). De acuerdo con:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

   si la longitud del hilo es siempre la misma, el periodo obtenido debe ser siempre el mismo.

6. Para calcular el periodo en cada caso hay que tener en cuenta que:

$$T = \frac{\text{Tiempo}}{\text{N.º de ciclos}}$$

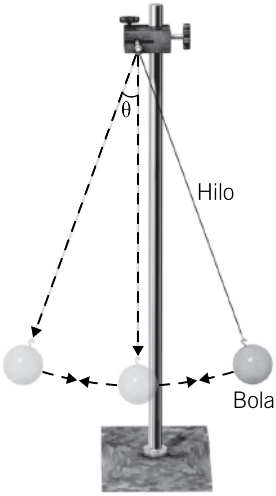
   Si siempre se mide el tiempo que se emplea en completar 20 ciclos, el tiempo que hemos medido debe ser siempre equivalente.

(MAS)

15. Diseña una experiencia de laboratorio que te permita comprobar que el periodo de un péndulo armónico no depende de su masa.

Material:

- Soporte de laboratorio.
- Hilo de nailon.
- Varias bolas con gancho de pesos conocidos.
- Metro (para medir longitudes).
- Cronómetro.



Procedimiento:

1. Atar un hilo de aproximadamente 1,5 m de longitud al extremo de una bola pequeña de masa conocida.
2. Colocarlo luego en el soporte de manera que pueda oscilar, como se indica en la figura.
3. Medir exactamente la longitud del hilo desde el extremo del soporte hasta la bola. Debe ser siempre exactamente la misma longitud. Separarla en el plano vertical de manera que se desplace un poco de su posición de equilibrio y dejarla oscilar.
4. Cuando oscile de manera uniforme (después de las 3 o 5 primeras oscilaciones), poner el cronómetro en marcha y medir el tiempo que tarda en dar 20 oscilaciones. Anotar el resultado.
5. Cambiar la bola por otra de masa diferente y repetir los pasos 2 y 3. De acuerdo con:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

   si la longitud del hilo es siempre la misma, el periodo obtenido debe ser siempre el mismo.

6. Para calcular el periodo en cada caso hay que tener en cuenta que:

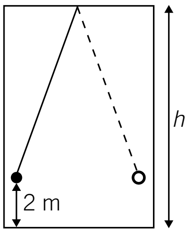
$$T = \frac{\text{Tiempo}}{\text{N.º de ciclos}}$$

   Si siempre se mide el tiempo que se emplea en completar 20 ciclos, el tiempo que hemos medido debe ser siempre equivalente.

16. **En una catedral hay una lámpara que cuelga desde el techo de una nave y que se encuentra a 2 m del suelo. Se observa que oscila levemente con una frecuencia de 0,1 Hz. ¿Cuál es la altura *h* de la nave?**

Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

(P. Asturias. Junio, 2007)



Calculamos el periodo:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}1\ \text{Hz}} = 10\ \text{s}$$

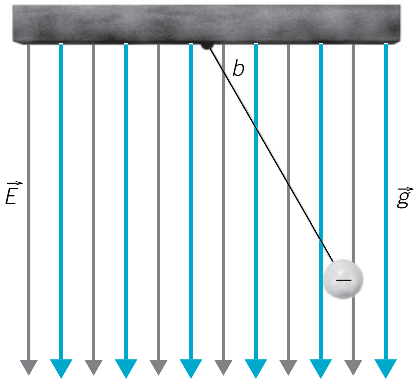
Necesitamos obtener la longitud del hilo del que pende la lámpara. Para ello podemos utilizar la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \rightarrow L = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{10^2\ \text{s}^2}{4\pi^2} = 24{,}82\ \text{m}$$

Si la lámpara se encuentra a 2 m del suelo, la altura total será:

$$h = L + 2\ \text{m} = 26{,}82\ \text{m}$$

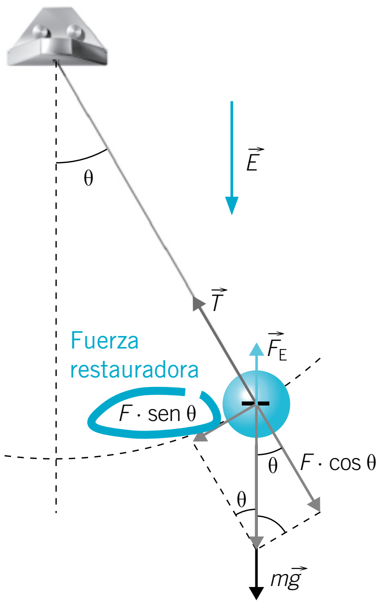
17. **Sea un péndulo electrostático situado en un laboratorio en la superficie de la Tierra, formado por una pequeña esfera atada al extremo de un hilo aislante muy delgado de 20 cm de longitud, estando el otro extremo atado a un punto fijo. La esfera tiene 1 g de masa y es portadora de −2 nC de carga eléctrica de signo negativo y se encuentra sometida a la acción del campo gravitatorio terrestre y también a un campo eléctrico uniforme de módulo $3{,}3 \cdot 10^6$ N/C, dirección vertical y sentido hacia abajo. Calcular el periodo de oscilación del péndulo en esas condiciones.**



Dado que la carga de la esfera es negativa, tendremos una fuerza electrostática de sentido contrario al campo eléctrico descrito en el enunciado.
Esta fuerza electrostática que actúa sobre la esfera tendrá dirección vertical y sentido hacia arriba y, por tanto, opuesto al de la fuerza gravitatoria que también actúa sobre la misma.

El sistema de fuerzas resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{P} = -q \cdot \vec{E} + \vec{P}$$



Como el sentido de las fuerzas es opuesto, el módulo de la resultante será igual a la diferencia de los módulos de cada una de ellas ($P > |F_E|$):

$$F = P - |F_E| =$$
$$= 10^{-3} \cdot 9{,}8 - 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{6} \rightarrow$$
$$\rightarrow F = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

El péndulo tiene un MAS. En consecuencia:

$$F \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot x \rightarrow$$
$$\rightarrow F \cdot \cancel{\text{sen}\,\theta} = m \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot L \cdot \cancel{\text{sen}\,\theta}$$

Nota: suponemos que θ es muy pequeño y hacemos que la cuerda coincida con el arco ($x \simeq \theta$, θ en radianes). Despejamos T:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot L}{F}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m}}{3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{N}}} = 1{,}57\ \text{s}$$

18. **Se quiere medir g a partir del periodo de oscilación de un péndulo formado por una esfera de cierta masa suspendida de un hilo. La esfera tiene una carga q positiva y el péndulo se encuentra en una región con un campo eléctrico dirigido hacia abajo; sin embargo, el experimentador no conoce estos hechos y no los tiene en cuenta. Responda, justificando su respuesta, si el valor de la gravedad que obtiene es mayor o menor que el real.**

(R. Murcia. Junio, 2005)

El valor de la gravedad que obtiene es mayor que el real. Al ser una carga positiva bajo un campo eléctrico dirigido verticalmente hacia abajo,se ve afectada por una fuerza electrostática en la misma dirección y sentido que la fuerza gravitatoria.

Esto significa que la fuerza electrostática se suma a la fuerza gravitatoria que produce el MAS y, por tanto, la fuerza resultante ejercerá una aceleración resultante mayor que la ejercida únicamente por la fuerza gravitatoria, ya que $F = m \cdot a$.

19. **Un oscilador armónico se encuentra en un instante determinado en una posición que es igual a un tercio de su amplitud *A*. Determina para dicho instante la relación existente entre la energía cinética y la energía potencial (E_C/E_P).**

(Canarias. Junio, 2005)

Utilizamos las expresiones:

- $E_P = \frac{1}{2} k x^2$
- $E_C = E_M - E_P = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2)$

Obtenemos la relación entre ambas:

$$\frac{E_C}{E_P} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}k} \cdot (A^2 - x^2)}{\cancel{\frac{1}{2}k}\, x^2} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} = \frac{A^2 - (A/3)^2}{(A/3)^2} = \frac{A^2(1 - 1/9)}{A^2 \cdot 1/9} = 8$$

20. **Una partícula describe un movimiento vibratorio armónico de amplitud *A* y pulsación ω. Si duplicamos a la vez la amplitud y el periodo del movimiento, ¿cambiará la energía cinética de la partícula cuando pase por el punto central de la oscilación? ¿Cambiará su energía potencial en ese punto? Justifique la respuesta.**

(Cataluña. Septiembre, 2007)

En este problema:

- $E_C = E_M - E_P = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2)$
- $E_P = \frac{1}{2} k x^2$

En el punto central de la oscilación, $x = 0$, por lo que la energía potencial será siempre nula.

En ese punto:

$$E_C = \frac{1}{2} k A^2$$

Para el oscilador armónico:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} \overbrace{m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}}^{k} \cdot A^2$$

Si se duplican a la vez la amplitud y el periodo:

$$E'_C = \frac{1}{2} m \cdot \frac{4\pi^2}{(2T)^2} \cdot (2A)^2 = E_C$$

Es decir, la energía cinética no varía.

21. **Una partícula de masa $m = 0{,}1$ kg oscila armónicamente en la forma $x = A \cdot \text{sen}\ \omega t$, con amplitud $A = 0{,}2$ m y frecuencia angular $\omega = 2\pi$ rad/s.**

a) Calcula la energía mecánica de la partícula.

b) Determina y representa gráficamente las energías potencial y cinética de m en función de la elongación x.

(Aragón. Junio, 2005)

a) Se puede obtener la energía mecánica de la partícula a partir de la expresión:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

Para un oscilador armónico:

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}1 \cdot (2\pi)^2 = 3{,}95\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \rightarrow$$

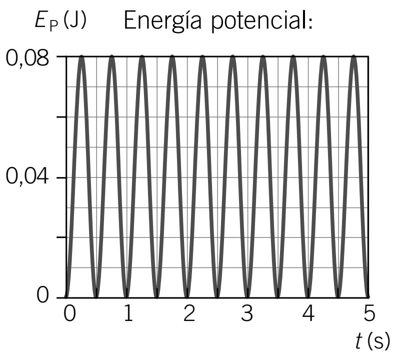
$$\rightarrow E_M = \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}95 \cdot 0{,}2^2 = 7{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

b) En este caso:

- $$E_C = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t + \phi_0)]^2 =$$
  $$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t + \phi_0)]^2 \rightarrow$$
  $$\rightarrow E_C = 0{,}079 \cdot [\cos(2\pi \cdot t)]^2$$

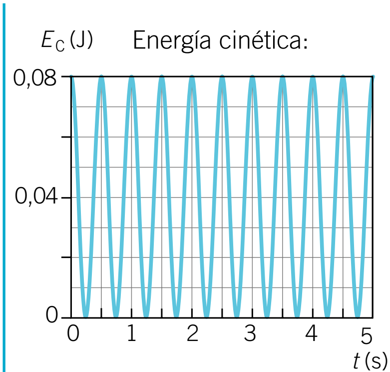
- $$E_P = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)]^2 \rightarrow$$
  $$\rightarrow E_P = 0{,}079 \cdot [\text{sen}(2\pi \cdot t)]^2$$

Energía potencial:



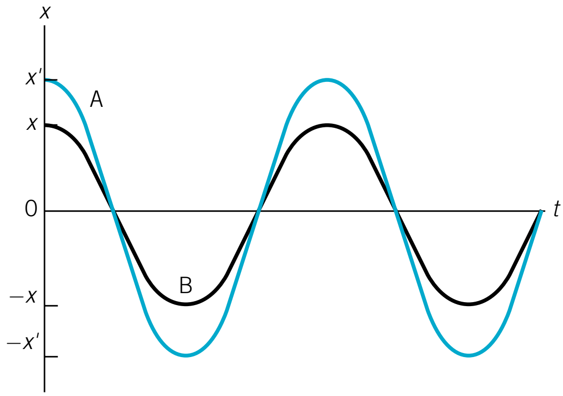
$E_P = 0{,}079 \cdot [\text{sen}(2\pi \cdot t)]^2$

Energía cinética:



$E_C = 0{,}079 \cdot [\cos(2\pi \cdot t)]^2$

22. **Las líneas siguientes representan la posición frente al tiempo para dos móviles con MAS. Obsérvalas y responde:**



a) ¿Cuál de los dos móviles tarda más en completar una oscilación?

b) ¿Cuál de los dos móviles tiene mayor energía mecánica?

c) Suponiendo que los dos móviles tienen la misma masa, ¿cuál de ellos se ve sometido a una mayor fuerza de recuperación?

a) Los dos móviles tardan el mismo tiempo en completar una oscilación. El periodo del MAS se calcula a partir de la separación entre dos máximos sucesivos de la gráfica. Esta separación es idéntica en ambos casos.

b) Como:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

resulta que la energía mecánica es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud del MAS. Dado que la amplitud es mayor en el caso de la gráfica A, también será mayor su energía mecánica.

La energía mecánica también depende de k. Suponemos que se cumple lo que se indica en el apartado c), de donde se deduce que k tiene el mismo valor para ambos móviles.

c) Para un móvil con MAS, la fuerza de recuperación es $F = -k \cdot x$. En este caso:

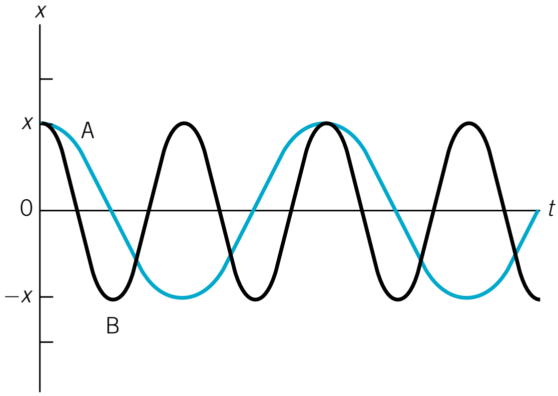
$$k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Si las masas son iguales, ambos móviles tienen la misma constante de elasticidad, ya que, como hemos razonado, tienen el mismo periodo de oscilación.

En la gráfica se muestra que, en un mismo instante, el valor de x del móvil B es menor que el del móvil A, por lo que la fuerza recuperadora del móvil A es mayor que la del B en cada instante.

(MAS)

23. **Las líneas siguientes representan la posición frente al tiempo para dos móviles con MAS. Obsérvalas y responde:**



a) ¿Cuál de los dos móviles tarda más en completar una oscilación?

b) ¿Cuál de los dos móviles tiene mayor energía mecánica?

c) Suponiendo que los dos móviles tienen la misma masa, ¿cuál de ellos se ve sometido a una mayor fuerza de recuperación?

a) El móvil A tarda más en completar una oscilación, ya que la separación entre máximos consecutivos es mayor en este caso que en la gráfica B. Esto significa que su periodo de oscilación es mayor y, por tanto, tarda más en completar una oscilación.

b) Para un móvil con MAS, la energía mecánica es:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \qquad [1]$$

La constante k vale:

$$k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$E_M = \frac{1}{2}m \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot A^2$$

Suponiendo que ambos móviles tienen la misma masa (como se indica en el apartado c), y dado que ambos tienen la misma amplitud (A), la energía mecánica resulta ser inversamente proporcional al cuadrado del periodo. La masa A tiene un periodo de oscilación mayor, lo que indica que tiene una energía mecánica menor que la masa B.

c) Para un móvil con MAS, la fuerza de recuperación es $F = -k \cdot x$:

$$k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Si suponemos que las masas son iguales, la constante de elasticidad será inversamente proporcional al cuadrado del periodo de oscilación. Esto significa que la constante recuperadora de la masa A es menor que la de la masa B, ya que tiene un periodo mayor.

Para un mismo x, la fuerza recuperadora de la masa A es menor que la de la masa B. Observando la gráfica vemos que, dependiendo del instante considerado, la x de la masa B puede ser mayor, menor o igual que la de la masa A. Por tanto, no se puede predecir, con carácter general, qué masa tendrá mayor fuerza de recuperación.

24. Dos partículas tienen un MAS con la misma frecuencia y amplitud y se mueven en la misma trayectoria. Si se cruzan en el centro de la trayectoria, la diferencia de fase entre ellas será:

a) $\pi/2$ radianes.
b) π radianes.
c) $3\pi/2$ radianes.
d) $\pi/4$ radianes.
e) $\pi/3$ radianes.

La respuesta correcta es la b), ya que en un movimiento gobernado por una función senoidal esto equivale a un desfase de 180° (invertir el signo) y, por tanto, se cruzarán en los mismos puntos con sentido de avance opuesto.

25. Una partícula de masa m, que solo puede moverse a lo largo del eje OX, se sitúa inicialmente ($t = 0$) en la posición $x = x_0$ y se libera con velocidad nula. Sobre ella actúa una fuerza, dirigida según el eje OX, $F = -kx$, donde k es una constante positiva.

a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula? Describe analítica y gráficamente cómo dependen del tiempo su posición, $x(t)$, y su velocidad, $v(t)$.

b) Para $m = 0{,}1$ kg, $k = 30$ N/m y $x_0 = 0{,}5$ cm, calcula las energías cinética y potencial de la partícula cuando pasa por $x = 0$.

(Aragón. Junio, 2006)

a) Describirá un MAS, un movimiento oscilatorio a ambos lados de la posición de equilibrio ($x = 0$). La fuerza recuperadora será la que produzca la oscilación, oponiéndose al avance de la partícula. El movimiento es siempre en la dirección del eje X, ya que tanto el movimiento de la partícula como la fuerza recuperadora actúan en este eje.

Las ecuaciones que determinan la posición y la velocidad de un móvil con MAS son:

- $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$
- $v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$

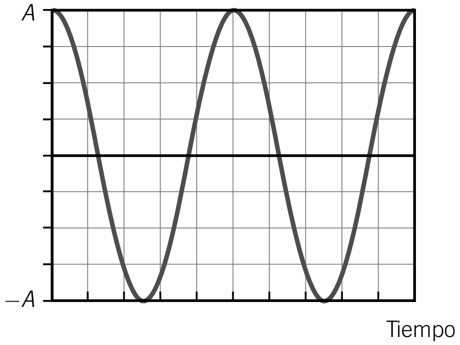
(MAS)

El enunciado especifica que para $t = 0$, $v = 0$.

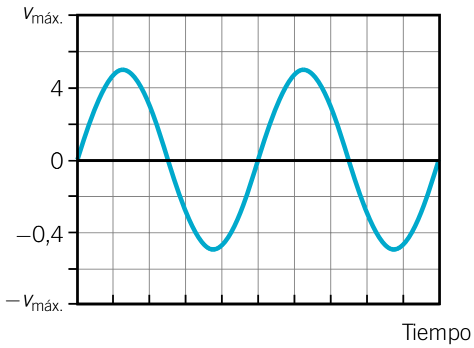
Por tanto:

$$0 = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(0 + \phi_0) \rightarrow 0 = \text{sen}\,\phi_0 \rightarrow \phi_0 = 0$$

Elongación:



Velocidad:



Ambas gráficas son funciones sinusoidales con el mismo periodo. Las dos gráficas están desfasadas $\pi/2$.

b) La energía potencial es:

$$E_P = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 0 = 0$$

Para $t = 0$, $x = 0{,}5$ cm:

$$0{,}5\ \text{cm} = A \cdot \underbrace{\cos(\omega \cdot 0)}_{1} \rightarrow A = 0{,}5\ \text{cm}$$

Por tanto:

$$E_C = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (0{,}005^2 - 0) = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

26. **Estiramos un resorte 5 cm y lo dejamos oscilar libremente, resultando que completa una oscilación cada 0,2 s.**

Determina:

a) La ecuación que nos permite conocer su posición en función del tiempo.

b) La velocidad y la aceleración a la que estará sometido su extremo libre a los 15 s de iniciado el movimiento. Interpreta el resultado.

a) El movimiento empieza en el punto de máxima elongación: $A = 0{,}05$ m.

A partir del periodo calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

Con todos estos datos podemos expresar la posición en función del tiempo como:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Para $t = 0$, $x = A$:

$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \phi_0) \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$x = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = 10\pi \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}$$

Para $t = 15$ s:

$$v\,(t = 15\ \text{s}) = 1{,}571 \cdot \cos\left(10\pi \cdot 15 + \frac{\pi}{2}\right) = 0\ \text{m/s}$$

La aceleración se calcula derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow a = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 15$ s:

$$a\,(t = 15\ \text{s}) = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot 15 + \frac{\pi}{2}\right) = -49{,}35\ \text{m/s}^2$$

(MAS)

El valor de la velocidad es cero, por lo que el cuerpo estará en alguno de los extremos (elongación máxima). El valor de la aceleración correspondiente es el máximo. Como la aceleración es de valor negativo, resulta que el resorte estará próximo a su compresión máxima.

27. **Una masa de 20 g realiza un movimiento vibratorio armónico simple en el extremo de un muelle que realiza dos oscilaciones por segundo, siendo la amplitud del movimiento 5 cm.**

Calcula:

a) La velocidad máxima que llega a alcanzar la masa que oscila.

b) La aceleración de la masa en el extremo del movimiento vibratorio armónico.

c) La constante del muelle.

(Cantabria. Septiembre, 2007)

a) Calculamos la frecuencia angular a partir de la frecuencia de oscilación determinada en el enunciado.

$$\nu = \frac{2\ \text{ciclos}}{1\ \text{s}} = 2\ \text{Hz} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi \cdot 2\ \text{Hz} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = 4\pi\ \text{rad/s}$$

La velocidad máxima a la que se mueve la masa puede obtenerse a partir de:

$$v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 4\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}05\ \text{m} = 0{,}63\ \text{m/s}$$

b) La aceleración a la que se mueve el MAS se calcula así:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -\omega^2 \cdot A = -(4\pi)^2\ (\text{rad/s})^2 \cdot 0{,}05\ \text{m} = -7{,}9\ \text{m/s}^2$$

c) Obtenemos la constante del muelle:

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}02 \cdot (4\pi)^2 = 3{,}16\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

28. **Un objeto realiza un MAS. ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales entre sí?:**

a) La elongación y la velocidad.

b) La fuerza recuperadora y la velocidad.

c) La aceleración y la elongación.

(Galicia. Septiembre, 2006)

a) La expresión de la velocidad en un MAS es:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Por tanto, v y x no son directamente proporcionales.

b) La expresión de la fuerza recuperadora del MAS es:

$$F = m \cdot a = m \cdot (-\omega^2 \cdot x)$$

Por tanto, la fuerza recuperadora y la velocidad no son proporcionales entre sí.

c) La expresión de la aceleración de un MAS es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Por tanto, la aceleración y la elongación son magnitudes directamente proporcionales.

29. **Una partícula que describe un movimiento armónico simple recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento, y su aceleración máxima es de 48 m/s^2. Calcule:**

a) La frecuencia y el periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima de la partícula.

(C. Madrid. Septiembre, 2006)

a) La aceleración máxima de un MAS se puede obtener a partir de: $a = \omega^2 \cdot A$.

Si en cada ciclo recorre 16 cm, su elongación máxima es $A = 8$ cm. Con esto podemos obtener la frecuencia angular del MAS:

$$a = \omega^2 \cdot A \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{A}} = \sqrt{\frac{48 \text{ m/s}}{0{,}08 \text{ m}}} = 24{,}5 \text{ rad/s}$$

Como:

$$\omega = 2\pi\nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{24{,}5 \text{ rad/s}}{2\pi} = 3{,}9 \text{ Hz}$$

El periodo es:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3{,}9 \text{ Hz}} = 0{,}26 \text{ s}$$

b) La velocidad máxima de una partícula es:

$$v = \omega \cdot A = 24{,}5 \text{ rad/s} \cdot 0{,}08 \text{ m} = 1{,}96 \text{ m/s}$$

30. **Una partícula oscila según un movimiento armónico simple de 8 cm de amplitud y 4 s de periodo. Calcula su velocidad y aceleración en los siguientes casos:**

a) Cuando la partícula pase por el centro de oscilación.

b) Medio segundo después de que la partícula haya pasado por uno de los extremos de la trayectoria.

(P. Asturias. Junio, 2003)

(MAS)

Podemos obtener la frecuencia angular del MAS con el dato del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\text{ s}} = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$$

a) Cuando la partícula pasa por el centro de oscilación, la elongación es nula ($x = 0$):

- $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{0{,}08^2 - 0} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{0{,}08^2} = 0{,}126\text{ m/s}$
- $a = -\omega^2 \cdot x = -\omega^2 \cdot 0 = 0$

b) Necesitamos conocer las expresiones de x, v y a en función del tiempo:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$

Obtengamos la fase inicial. Suponiendo que comienza su movimiento en la posición de equilibrio: $t = 0$, $x = 0$:

$$0 = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \phi_0) \rightarrow 0 = \cos\phi_0 \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Entonces:

$$x = 0{,}08 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{ m}$$

Derivando la posición:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)]}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0) =$$
$$= -0{,}08 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{ m/s}$$

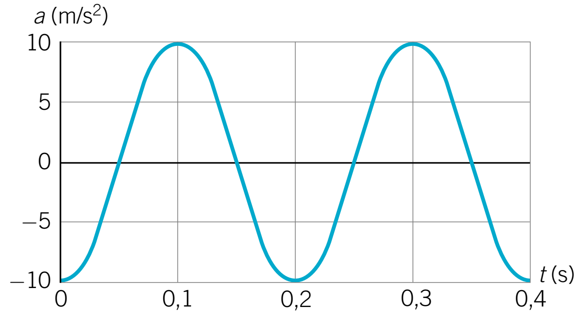
Y la aceleración es:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0{,}08 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{ m/s}^2$$

Teniendo en cuenta el valor del periodo, la partícula tarda 1 s en llegar desde la posición de equilibrio a un extremo. Tenemos que calcular x, v y a en el instante $t = 1{,}5$ s:

- $x(t = 1{,}5\text{ s}) = 0{,}08 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}057\text{ m}$
- $v(t = 1{,}5\text{ s}) = -0{,}08 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}089\text{ m/s}$
- $a(t = 1{,}5\text{ s}) = -\omega^2 \cdot x(t = 1{,}5\text{ s}) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (-0{,}057) = 0{,}141\text{ m/s}^2$

31. **Un cuerpo de masa $M = 0{,}1$ kg oscila armónicamente en torno al origen O de un eje OX. En la figura se representa la aceleración de M en función del tiempo.**



a) Determina la frecuencia y la amplitud de oscilación de M.

b) Determina y representa gráficamente la energía cinética de M en función del tiempo.

(Aragón. Junio, 2007)

a) La frecuencia de oscilación de la masa será la misma que la frecuencia de oscilación de su aceleración. Sus periodos y frecuencias angulares también son coincidentes: $T = 0{,}2$ s. Por tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s} \rightarrow \omega = 2\pi\nu \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi\ \text{rad/s}}{2\pi} = 5\ \text{Hz}$$

Calculamos la amplitud con el dato de la aceleración máxima del MAS:

$$a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A = 10\ \text{m/s}^2 \rightarrow 10 = (10\pi)^2 \cdot A \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{10}{(10\pi)^2} = 1{,}013 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}013\ \text{cm}$$

b) La energía cinética instantánea en un MAS se corresponde con la siguiente expresión:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t)]^2$$

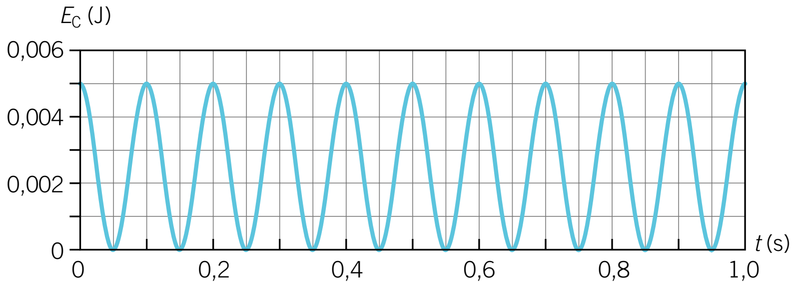
Identificando los términos con los datos que tenemos se obtiene la expresión:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot (10\pi)^2 \cdot (1{,}013 \cdot 10^{-2})^2 \cdot [\cos(10\pi \cdot t)]^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow E_C = 5{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot [\cos(10\pi \cdot t)]^2\ \text{J}$$

(MAS)

Representación gráfica:



32. **a) En un movimiento armónico simple, ¿cuál es la relación entre la energía total y la amplitud?**

b) Un oscilador armónico se encuentra en un momento dado en una posición igual a la mitad de su amplitud ($x = A/2$). ¿Cuál es la relación entre la energía cinética y potencial en ese momento?

(Cantabria. Junio, 2003)

a) En un MAS la energía mecánica total en cada punto se puede obtener a partir de:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

Por tanto, la energía mecánica total es función del cuadrado de la amplitud.

b) Las energías cinética y potencial en un MAS se pueden calcular a partir de:

- $E_P = \dfrac{1}{2}k\,x^2$
- $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2) = \dfrac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2)$

Calculamos la relación entre ambas:

$$\frac{E_C}{E_P} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}k} \cdot (A^2 - x^2)}{\cancel{\frac{1}{2}k}\,x^2} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{E_C}{E_P} = \frac{A^2 - \left(\dfrac{A}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{A}{2}\right)^2} = \frac{A^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)}{A^2 \cdot \dfrac{1}{4}} = 3$$

33. Supón un móvil que describe un MAS con una amplitud igual a 10 cm y con una frecuencia de 0,2 Hz. ¿En qué punto de su trayectoria las energías cinética y potencial coinciden?

Veamos las expresiones de la energía cinética y potencial en función de la posición del MAS:

- $E_P = \frac{1}{2} k x^2$
- $E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2)$

Queremos determinar en qué punto se igualan:

$$E_P = E_C \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k} x^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k} \cdot (A^2 - x^2) \rightarrow x^2 = (A^2 - x^2) \rightarrow 2x^2 = A^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}1 \text{ m}}{\sqrt{2}} = 7{,}07 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7{,}07 \text{ cm}$$

34. De dos resortes con la misma constante elástica *k* se cuelgan sendos cuerpos con la misma masa. Uno de los resortes tiene el doble de longitud que el otro. ¿El cuerpo vibrará con la misma frecuencia? Razone su respuesta.

(Castilla y León. Junio, 2006)

Tenemos:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi\nu)^2 \rightarrow \nu = \sqrt{\frac{k}{m \cdot 4\pi^2}}$$

Se deduce que la frecuencia depende de la constante elástica y la masa, pero no de la longitud del muelle. Como la constante k y la masa de los cuerpos es la misma, la vibración tendrá la misma frecuencia aunque varíe la longitud del resorte.

35. A un muelle de constante elástica *k* le colocamos una masa m_0. Al estirarlo un valor *A*, comienza a oscilar con una frecuencia angular o pulsación ω_0, teniendo una energía cinética máxima E_0 y una velocidad máxima v_0. Si al mismo muelle en lugar de m_0 le colocamos una masa $4m_0$ y lo estiramos el mismo valor *A*, en función de ω_0, E_0 y v_0, determinar:

a) La nueva frecuencia angular.

b) La nueva energía cinética máxima.

c) La nueva velocidad máxima.

(Cantabria. Junio, 2005)

La expresión que permite determinar el valor de la constante elástica k en función de los parámetros dados en el enunciado es: $k = m \cdot \omega^2$.

(MAS)

La velocidad máxima es $v = \omega \cdot A$, y la energía cinética de un MAS se obtiene como $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, por lo que la energía cinética máxima será:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot (\omega \cdot A)^2$$

a) Definimos la frecuencia angular en función de la constante k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

Llamamos ω' a la nueva frecuencia angular:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{k}{4m_0}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_0}} = \frac{1}{2} \cdot \omega_0$$

b) Llamamos E'_C a la nueva energía cinética:

$$E'_C = \frac{1}{2}m' \cdot (\omega' \cdot A)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\omega_0 \cdot A\right)^2 = \frac{1}{2}m_0 \cdot (\omega_0 \cdot A)^2 = E_{C0}$$

Así, la energía cinética máxima no ha variado.

c) Llamamos v' a la nueva velocidad máxima, que será:

$$v' = \omega' \cdot A = \frac{1}{2}\omega_0 \cdot A = \frac{1}{2}v_0$$

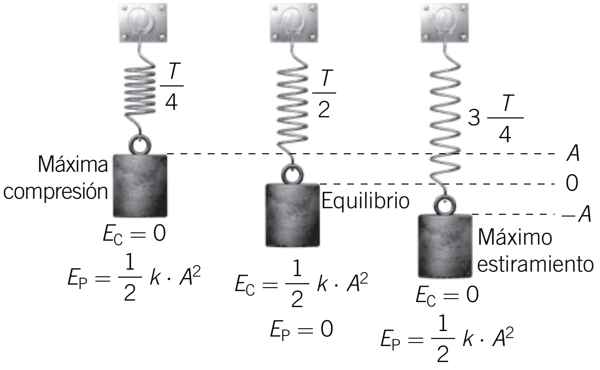
36. Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica $k = 72$ N · m^{-1}. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m · s^{-1}.

a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso.

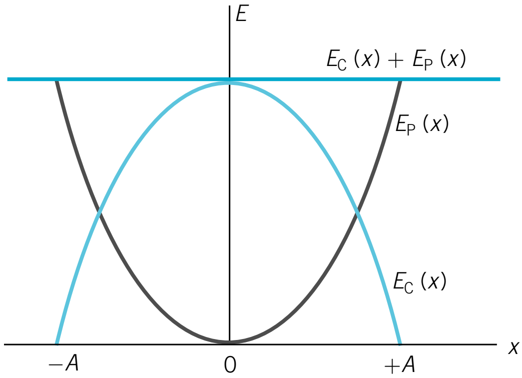
b) Determine la amplitud y la frecuencia de oscilación.

(Andalucía, 2006)

a) Observamos los cambios energéticos producidos en la oscilación de un MAS producida por un resorte, tal y como se plantea en el enunciado:



Así pues, la energía mecánica total es constante, de acuerdo con el teorema de conservación de la energía mecánica.



En el punto de equilibrio del oscilador la energía potencial será nula, y la energía cinética será máxima e igual a la energía mecánica total. En los extremos de la oscilación la energía cinética será nula y la energía potencial será igual a la energía mecánica total.

b) Como se puede observar en el gráfico del apartado anterior, al pasar por el punto de equilibrio se tiene la velocidad máxima del MAS, $v = \omega \cdot A$. Por otra parte, conocemos el valor de la constante de elasticidad del resorte, que en función de la frecuencia angular puede expresarse como $k = m \cdot \omega^2$. A partir de este último dato obtendremos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\ \text{N/m}}{0{,}5\ \text{kg}}} = 12\ \text{rad/s}$$

Por tanto:

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{6\ \text{m/s}}{12\ \text{rad/s}} = 0{,}5\ \text{m}$$

37. Un muelle se deforma 12 cm cuando se cuelga de él una partícula de 2 kg de masa.

a) Determina la constante elástica *k* del muelle.

b) A continuación se separa otros 10 cm de la posición de equilibrio y se deja oscilar en libertad. ¿Cuáles son la frecuencia angular y el periodo de oscilación en estas condiciones?

c) Escribe la ecuación de la posición de la partícula en función del tiempo.

($g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.)

(Castilla-La Mancha, 2006)

a) A partir del peso:

$$P = -m \cdot g = F = -k \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{2\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2}{0{,}12\,\text{m}} = 163{,}33\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) Calculamos la frecuencia:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{163{,}33\,\text{N/m}}{2\,\text{kg}}} = 9{,}04\,\text{rad/s}$$

Y el periodo:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2\,\text{kg}}{163{,}33\,\text{N/m}}} = 0{,}695\,\text{s}$$

Tanto la frecuencia angular como el periodo de la oscilación son independientes de la amplitud del MAS.

c) Consideramos que el movimiento se inicia en su posición de elongación máxima. Utilizamos la ecuación cosenoidal del MAS, ya que la función coseno es máxima en $t = 0$.

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0{,}1 \cdot \cos(9{,}04 \cdot t)\,\text{m}$$

38. Un cuerpo de 200 g de masa está en reposo y colgado de un muelle cuya constante elástica es de 5 N/m. Se tira de dicho cuerpo con una fuerza de 0,3 N y se le abandona libremente. Suponiendo ausencia de rozamiento:

a) Calcular la amplitud y la pulsación del movimiento vibratorio.
Proporcionar la expresión matemática de la ecuación del movimiento vibratorio armónico simple (suponer que en $t = 0$ la constante de fase es $3\pi/2$).

b) Determinar los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de dicho movimiento vibratorio.

(P. Asturias. Junio, 2005)

a) La expresión de la fuerza en función de la elongación es: $F = -kx$. Cuando se tira del cuerpo para luego liberarlo, se le lleva a su elongación máxima. Conociendo la constante del resorte y la fuerza que se ha aplicado (la fuerza de recuperación será equivalente, pero de sentido contrario), se puede obtener la amplitud resultante:

$$F = k \cdot A \rightarrow A = \frac{F}{k} = \frac{0{,}3\,\text{N}}{5\,\text{N/m}} = 0{,}06\,\text{m} = 6\,\text{cm}$$

Teniendo en cuenta que:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5\,\text{N/m}}{0{,}2\,\text{kg}}} = 5\,\text{rad/s}$$

Con los resultados obtenidos:

$$x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

b) Se calculan los valores solicitados:

- $v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 5 \text{ rad/s} \cdot 0{,}06 \text{ m} = 0{,}3 \text{ m/s}$
- $a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A = 25 \text{ rad/s} \cdot 0{,}06 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m/s}^2$

39. De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta.

Obtener:

a) La constante del resorte.

b) La ecuación del MAS que describe el movimiento.

c) Deduce la ecuación de la energía potencial elástica.

($g = 9{,}8$ m/s^2.)

(Galicia. Septiembre, 2007)

a) Como al colgar la masa el conjunto se ha estirado de 40 a 45 cm, resulta que la masa ha producido una elongación de 5 cm. Conocida esta, obtendremos la constante k a partir del peso:

$$P = -m \cdot g = F = -k \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0{,}05 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg}}{0{,}05 \text{ m}} = 9{,}8 \text{ N/m}$$

b) Consideramos que el movimiento se inicia en su posición de máxima elongación. Describiremos el movimiento mediante una función cosenoidal, ya que la función coseno es máxima en $t = 0$:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

De acuerdo con el enunciado, la elongación máxima será $A = 6$ cm. Calculamos la frecuencia angular:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ N/m}}{0{,}05 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$x = 0{,}06 \cdot \cos(14 \cdot t) \text{ m}$$

c) La energía potencial es:

$$E_P = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t)]^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}06^2 \cdot [\cos(14 \cdot t)]^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow E_P = 1{,}76 \cdot 10^{-2} \cdot [\cos(14 \cdot t)]^2 \text{ J}$$

(MAS)

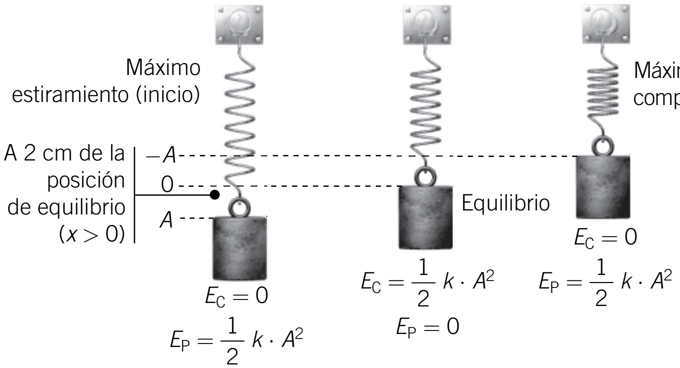
40. **Para el resorte del ejercicio anterior, determina el valor de la velocidad y la aceleración cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio. Haz un estudio del signo que tendrán estas magnitudes.**

Suponemos $x > 0$ por debajo de la posición de equilibrio (inicio: muelle estirado). A 2 cm de la posición de equilibrio (por debajo), $x > 0$.
Velocidad:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = 14\ \text{rad/s} \cdot \sqrt{0{,}06^2\ \text{m}^2 - 0{,}02^2\ \text{m}^2} = 0{,}79\ \text{m/s}$$

Aceleración:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -(14\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = -3{,}92\ \text{m/s}^2$$



El signo de la velocidad será positivo mientras el muelle se esté estirando, y negativo mientras se esté comprimiendo. El signo de la aceleración será el contrario: negativo cuando se está estirando y positivo cuando se está comprimiendo.

41. **Para medir el tiempo construimos un reloj de péndulo formado por una bola metálica unida a una cuerda. Lo hacemos oscilar de manera que en los extremos toque unas láminas metálicas.**

a) ¿Cuál debe ser la longitud de la cuerda si queremos que de un toque al siguiente haya un intervalo de tiempo de 1 s?

b) Con el tiempo, es muy probable que la cuerda se estire. ¿Significa esto que nuestro reloj va más rápido o más lento?

Dato: suponemos que el péndulo es ideal y que estamos en un lugar en que $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Si queremos que dé un toque cada segundo y las láminas se colocan a ambos lados, el periodo total de oscilación del péndulo será $T = 2$ s.

En el libro del alumno se ha deducido que para un péndulo:

$$\frac{g}{L} = \omega^2 \rightarrow L = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{\left(\frac{2\pi}{2\ \text{s}}\right)^2} = \frac{9{,}8}{\pi^2}\ \text{m} = 0{,}993\ \text{m}$$

La relación entre la longitud del hilo y el periodo de oscilación del péndulo viene dada por la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

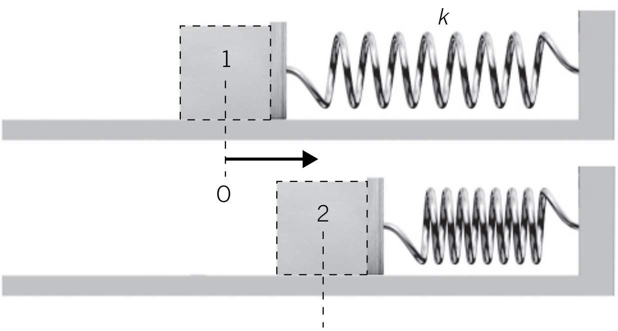
Si L aumenta, aumentará también T y, con esto, será mayor la separación entre toques sucesivos. Esto significa que la velocidad disminuye y el reloj va más lento.

42. Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie sin rozamiento a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante $k = 750$ N/m, determina:

a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.

b) La velocidad del oscilador cuando se encuentre a la mitad de la compresión máxima.

a) La energía cinética del cuerpo que se desliza se transforma en energía potencial elástica del resorte. La energía cinética inicial coincide con la energía potencial del resorte en estado de compresión máxima.



De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{P2} \rightarrow E_{C1} = E_{P2}$$

Calculamos la energía cinética que tenía el cuerpo en su movimiento:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\text{ kg} \cdot 3^2\text{ (m/s)}^2 = 22{,}5\text{ J}$$

Esta energía coincide con la energía potencial máxima del resorte:

$$E_{P\,\text{máx.}} = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{P\,\text{máx.}}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22{,}5\text{ J}}{750\text{ N/m}}} = 0{,}245\text{ m}$$

La máxima compresión que puede alcanzar el muelle es $A = 0{,}245$ m.

(MAS)

b) La velocidad se puede expresar así: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$. A partir de k:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{750 \text{ N/m}}{5 \text{ kg}}} = 12{,}25 \text{ rad/s}$$

Entonces:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} =$$

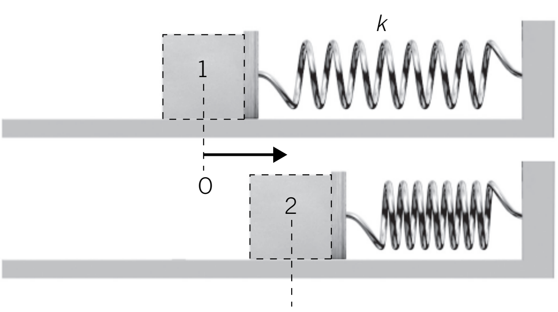
$$= 12{,}25 \text{ rad/s} \cdot \sqrt{(0{,}245 \text{ m})^2 - \left(\frac{0{,}245 \text{ m}}{2}\right)^2} = 2{,}6 \text{ m/s}$$

43. **Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie cuyo coeficiente de rozamiento es 0,2 a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante *k* = 750 N/m, determina:**

a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.

b) La distancia que recorre el oscilador hasta pararse.

a) En este caso, la energía cinética del cuerpo que se desliza se invierte en energía potencial elástica y en vencer el trabajo de rozamiento mientras se alcanza la compresión máxima.



El balance es el siguiente:

$$E_C = E_{P\,\text{elástica}} + F_R \cdot A \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 + \mu \cdot mg \cdot A \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot A^2 + 0{,}2 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot A \rightarrow$$

$$\rightarrow 22{,}5 = 375 \cdot A^2 + 9{,}8 \cdot A \rightarrow A = 0{,}232 \text{ m}$$

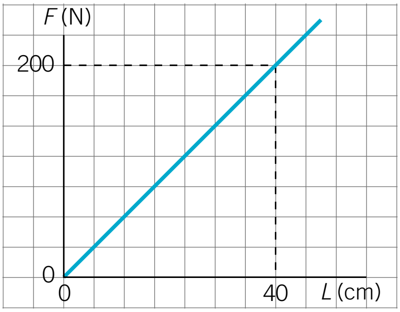
Como vemos, debido al rozamiento la amplitud es menor que en la actividad anterior.

b) El resorte estará oscilando hasta que toda la energía cinética inicial se haya transformado en trabajo de rozamiento. Calculamos el espacio que ha recorrido el cuerpo:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \mu \cdot mg \cdot s \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3^2 = 0{,}2 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot s \rightarrow s = 2{,}3 \text{ m}$$

44. **La gráfica representa la fuerza que debe hacerse para estirar un muelle en función de su alargamiento. ¿Cuánto vale la constante recuperadora del muelle? ¿Cuánto trabajo hay que hacer para estirar el muelle 30 cm a partir de su longitud natural?**

(Cataluña. Septiembre, 2007)



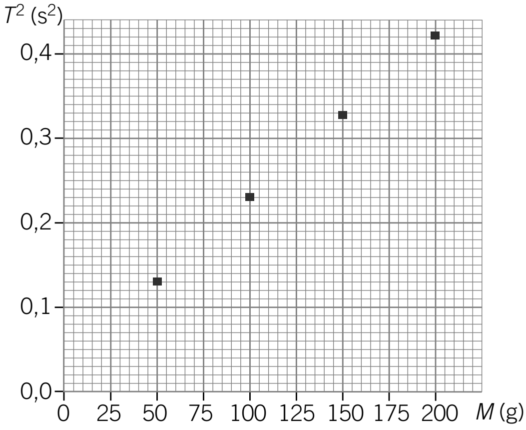
Dado que $F = kx$, si identificamos $x = L$ en la gráfica, resulta que la constante recuperadora será la pendiente de la misma:

$$k = \frac{200\,\text{N}}{0{,}4\,\text{m}} = 500\,\text{N/m}$$

Podemos calcular el trabajo como la diferencia de energía potencial entre ambos puntos. En su longitud natural, la energía potencial es nula. A 30 cm de la posición de equilibrio:

$$E_P = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\,\text{N/m}\cdot(0{,}3\,\text{m})^2 = 22{,}5\ \text{J} = W$$

45. **Un estudiante dispone de un muelle y de cuatro masas (*M*), las cuales suspende sucesivamente del primero y realiza experimentos de pequeñas oscilaciones, midiendo en cada caso el periodo de oscilación (*T*). El estudiante representa los resultados experimentales según se muestra en la figura.**



Se pide:

a) Determinar la constante elástica del muelle.

b) Justificar físicamente el comportamiento observado.

(P. Asturias. Junio, 2006)

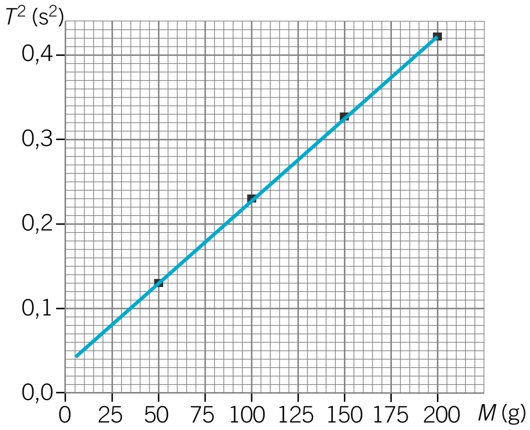
a) Necesitamos determinar la pendiente de la recta resultante de las observaciones.

Para ello, tomamos dos puntos de la misma, expresando las cantidades en unidades del SI:

- A(0,05, 0,13).
- B(0,2, 0,42).

La pendiente será:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}42 - 0{,}13}{0{,}2 - 0{,}05} = 1{,}933$$



Tenemos en cuenta que:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$y = ax + b$$

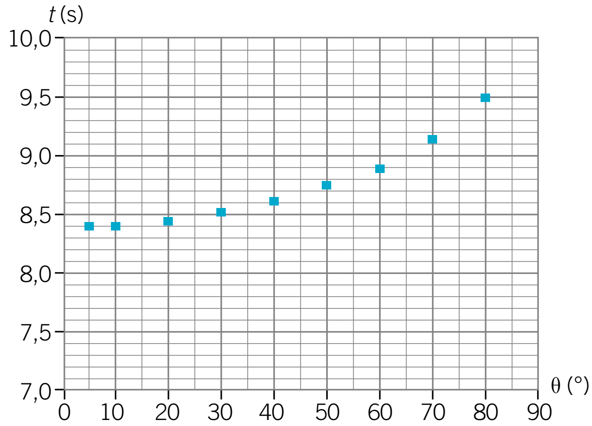
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot M + 0$$

Queda:

$$1{,}933 = \frac{4\pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4\pi^2}{1{,}933} = 20{,}42 \text{ N/m}$$

b) Cuando se estira el muelle aparece una fuerza recuperadora que le obliga a realizar un movimiento armónico simple. Como se ha deducido en el libro del alumno, el cuadrado del periodo de oscilación es directamente proporcional a la masa del resorte.

46. **Un astronauta realiza un viaje espacial a un planeta del Sistema Solar. Durante su aproximación determina, con sus aparatos de telemetría, el radio de dicho planeta, que resulta ser $R = 3{,}37 \cdot 10^6$ m. Una vez en la superficie del planeta utiliza un péndulo simple, formado por una pequeña esfera de plomo y un hilo de 25 cm de longitud, y realiza el análisis de sus oscilaciones, variando la amplitud angular de la oscilación (θ) y midiendo, en cada caso, el tiempo (t) correspondiente a 5 oscilaciones completas del péndulo. El astronauta representa los valores experimentales según la gráfica:**



a) Comentar físicamente los resultados mostrados en la figura.

b) Determinar la masa del planeta.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

(P. Asturias. Septiembre, 2006)

a) El periodo del péndulo se relaciona con su longitud y el valor de g en el punto donde oscila:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De acuerdo con la deducción que se recoge en el libro del alumno, el periodo es independiente de la amplitud angular siempre que esta no exceda de 15°, ya que, para valores más altos, no se cumple la simplificación $\theta \simeq \text{sen}\ \theta$.

En la gráfica se observa que el tiempo que tarda el péndulo en dar cinco oscilaciones (y, por tanto, su periodo) aumenta a medida que aumenta la amplitud angular. Para amplitudes mayores de 15° el movimiento del péndulo deja de ser armónico.

b) En la gráfica leemos que el periodo del péndulo es:

$$T = \frac{\text{Tiempo}}{\text{N.° de oscilaciones}} = \frac{8{,}4\ \text{s}}{5\ \text{oscilaciones}} = 1{,}68\ \text{s}$$

(MAS)

Con este dato calculamos g en la superficie del planeta:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot L = \frac{4\pi^2}{(1{,}68\ \text{s})^2} \cdot 0{,}25\ \text{m} = 3{,}5\ \text{m/s}^2$$

Como se estudió en el tema 2, el valor de g en la superficie del planeta es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3{,}5 \cdot (3{,}37 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}55 \cdot 10^{20}\ \text{kg}$$

47. Se construye un péndulo colgando un cuerpo de 1 kg de una cuerda de 1 m. Se le hace oscilar de manera que el cuerpo llega a subir hasta una altura de medio metro en la posición más elevada. Calcula la velocidad en el punto más bajo de las dos formas siguientes:

a) Utilizando el principio de conservación de la energía.

b) Considerando que describe un MAS.

c) Explica las diferencias que se obtienen entre ambos resultados.

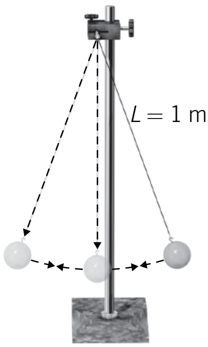
a) Según el principio de conservación de la energía:

$$E_{MA} = E_{MB} \rightarrow E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} \rightarrow E_{CA} = E_{PB}$$

Tomando como cero de energía potencial la que tiene la bola en A:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \cancel{m}gh \rightarrow$$

$$\rightarrow v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5} = 3{,}13\ \text{m/s}$$



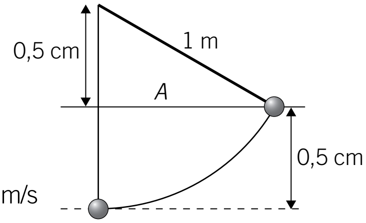
b) Si describe un MAS, en el punto más bajo de la trayectoria tendrá una velocidad:

$$v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A$$

El periodo del péndulo es:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 2\ \text{s}$$

Calculamos A por medio de la relación trigonométrica:



$$A = \sqrt{(1\ \text{m})^2 - (0{,}5\ \text{m})^2} = 0{,}87\ \text{m}$$

Entonces:

$$v_{\text{máx.}} = \frac{2\pi}{T} \cdot A = \frac{2\pi}{2\ \text{s}} \cdot 0{,}87\ \text{m} = 2{,}73\ \text{m/s}$$

c) El movimiento de este péndulo no corresponde realmente a un MAS, ya que la amplitud angular excede con mucho los 15° en los que se admite la equivalencia $\theta \simeq \text{sen}\ \theta$.

$$\cos\theta = 0{,}5/1 \rightarrow \theta = \text{arc cos } 0{,}5 = 60°$$

NOTAS

7

El movimiento ondulatorio. El sonido

PRESENTACIÓN

- Estudiamos en este tema el movimiento ondulatorio como la propagación en un medio de un movimiento vibratorio armónico simple. Es la primera vez que se hace un estudio similar en la etapa preuniversitaria, y habrá que hacer esfuerzos para que el alumnado comprenda ciertos fenómenos desde el punto de vista científico, al margen de algunas preconcepciones que derivan de su experiencia o de informaciones presentadas por los medios de información.
- Además de estudiar los fenómenos ondulatorios con carácter general, ejemplificaremos algunas de sus particularidades en el estudio del sonido. El alumnado con conocimientos musicales encontrará en este tema explicación a algunos fenómenos y conceptos que maneja en otros campos.

OBJETIVOS

- Identificar el movimiento ondulatorio como la propagación en el espacio de un movimiento vibratorio armónico. Reconocer distintos tipos de ondas.
- Comprender el fenómeno del transporte de energía sin que se produzca transporte de materia.
- Comprender el movimiento ondulatorio como un movimiento doblemente periódico, con respecto al tiempo y al espacio.
- Distinguir entre aspectos relacionados con la propagación del movimiento ondulatorio (por ejemplo, su velocidad) y el movimiento de las partículas del medio que se ven afectadas por la perturbación.
- Conocer las magnitudes físicas que caracterizan una onda.
- Interpretar la ecuación matemática correspondiente a un movimiento ondulatorio y reconocer en ella las magnitudes físicas que caracterizan la onda.
- Conocer los efectos relacionados con la propagación de la energía que acompaña a una onda. Comprender la variación de la amplitud o la intensidad de la onda con relación a su distancia al foco de la perturbación.
- Comprender el principio de Huygens y utilizarlo para explicar las propiedades del movimiento ondulatorio, especialmente aquellas que no se pueden explicar de otro modo, como las interferencias o la difracción.
- Reconocer el sonido como una perturbación ondulatoria y relacionar algunos fenómenos conocidos con las propiedades del movimiento ondulatorio.
- Reflexionar acerca de la contaminación acústica, causas y modos de evitarla.

7 El movimiento ondulatorio.

CONTENIDOS

Conceptos

- Aspectos físicos del movimiento ondulatorio. Distintos tipos de ondas.
- Estudio matemático del movimiento ondulatorio. Ecuación de la onda y su relación con las características de la misma: periodo, frecuencia, longitud de onda, velocidad de propagación y desfase.
- Características del movimiento de los puntos del medio que son alcanzados por una onda armónica: velocidad y aceleración en función del tiempo y de la posición.
- La propagación de energía por las ondas armónicas. Concepto de potencia e intensidad y relación de estas magnitudes (junto con la amplitud de la onda) con la distancia al foco, para distintos tipos de ondas.
- Teoría acerca de la propagación de las ondas. Principio de Huygens.
- Propiedades de las ondas: reflexión, refracción, interferencias, difracción y polarización. Estudio especial de las interferencias que producen ondas estacionarias.
- El sonido, un ejemplo de movimiento ondulatorio.
- Particularización para el sonido de las propiedades de las ondas. Aplicación a casos de instalaciones sonoras e instrumentos musicales.
- Cualidades del sonido.
- Aplicaciones del sonido.
- Contaminación sonora.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Adquirir soltura en el estudio matemático de un movimiento a partir de las observaciones que de él se pueden realizar.
- Habituarse a observar un mismo fenómeno desde dos perspectivas diferentes: temporal y espacial.
- Adquirir destreza en la interpretación de gráficas y obtener datos representativos a partir de las mismas.

Actitudes

- Asumir que la suma de dos fenómenos no siempre produce un fenómeno de mayor magnitud (comprender las interferencias constructivas y destructivas).
- Comprender la importancia de los modelos matemáticos para el conocimiento de ciertos fenómenos.
- Reconocer el papel de la física en la comprensión de fenómenos aparentemente distantes, como la música.

El sonido

EDUCACIÓN EN VALORES

Los conceptos que se manejan en este tema tienen amplia repercusión en aspectos no académicos, lo que puede ser aprovechable para una educación en valores.

1. **Educación para la salud**

   El sonido es un tipo de onda que se aprovecha para construir aparatos de reconocimiento y diagnóstico. Además de los consabidos radares, interesa que el alumnado conozca la ecografía como técnica de diagnóstico clínico con una incidencia para el organismo mucho menor que las radiaciones electromagnéticas que se emplean en las radiografías convencionales. Este conocimiento le puede ayudar a enfrentarse sin temor a estudios que requieran esta prueba.

   La costumbre reciente de escuchar música u otros sonidos por medio de cascos puede provocar consecuencias nocivas para la salud auditiva de las personas. Es importante hacer ver a los alumnos la necesidad de controlar ellos mismos el uso de estos aparatos, adaptando el volumen a niveles que no les resulten dañinos.

2. **Educación cívica**

   Los ruidos suelen ser causa de conflicto social. Es importante que el alumnado conozca los modos en que se mide el nivel de ruido y su incidencia en la salud. Todo ello les puede llevar a ser más respetuosos con sus conciudadanos.

3. **Educación para el consumidor**

   Las especificaciones de muchos aparatos que compran los jóvenes incluyen magnitudes cuyo significado se estudia en este tema. Puede ser interesante hacer una recopilación de las que aparecen en una serie de artículos de uso frecuente y estudiar su significado.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Partiendo de la ecuación de una onda, obtener sus características, como periodo, frecuencia, longitud de onda o velocidad de propagación.
2. Conociendo los parámetros característicos de un movimiento ondulatorio, deducir la ecuación de la onda.
3. Relacionar la ecuación de una onda con la gráfica que la representa, y viceversa.
4. Estudiar la amplitud o la intensidad de una onda a una determinada distancia del foco, para distintos tipos de onda.
5. Identificar la onda que resulta de la interferencia de dos ondas coherentes a una cierta distancia de los focos. Reconocer cuándo se produce una interferencia constructiva y cuándo una destructiva.
6. Reconocer una onda estacionaria y relacionarla con las ondas que la originan.
7. Conocer el fenómeno de difracción e identificar una situación en la que se puede producir.
8. Estudiar una onda sonora desde el punto de vista de cualquiera de los aspectos relacionados anteriormente.
9. Identificar las características del sonido. Conocer las unidades del nivel de intensidad sonora (decibelio, dB).
10. Analizar una situación donde se produzca contaminación sonora y proponer algún método para reducirla.

El movimiento ondulatorio.

1. **La ecuación de una onda es:**

$$y(x, t) = 20 \cdot \text{sen}\,[2 \cdot \pi \cdot (8 \cdot t - 0{,}01 \cdot x)]$$

medidas x e y en centímetros y t, en segundos. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

(Extremadura. Septiembre, 2006)

Comparamos la ecuación de esta onda con la ecuación general que muestra la elongación de un punto en función del tiempo y su posición medida desde su foco:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Cuidado: no confundir ν (frecuencia) con v (velocidad).

- Amplitud: $A = 20$ cm.
- Frecuencia: $\nu = \dfrac{1}{T}$. Comparando con la ecuación de la onda:

$$8\cancel{t} = \nu \cdot \cancel{t} \rightarrow \nu = 8\ \text{Hz}$$

- Longitud de onda. Comparando con la ecuación de la onda:

$$0{,}01 \cdot \cancel{x} = \frac{\cancel{x}}{\lambda} \rightarrow \lambda = 100\ \text{cm} = 1\ \text{m}$$

- Velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = 1\ \text{m} \cdot 8\ \text{Hz} = 8\ \text{m/s}$$

2. **Discuta razonadamente cómo variarán, en un movimiento ondulatorio, las siguientes magnitudes cuando aumentamos la frecuencia de la onda:**

a) Periodo.

b) Amplitud.

c) Velocidad de propagación.

d) Longitud de onda.

(Castilla y León. Septiembre, 2006)

Para analizar su dependencia con la frecuencia debemos expresar cada una de las magnitudes en función de la misma.

a) $f = \dfrac{1}{T} \rightarrow T = \dfrac{1}{f}$. Son inversamente proporcionales. Por tanto, al aumentar la frecuencia de la onda disminuirá el periodo.

b) La amplitud y la frecuencia son independientes.

c) $v_p = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$. Son directamente proporcionales. Por tanto, al aumentar la frecuencia de la onda aumenta también la velocidad de propagación.

El sonido

d) $v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f}$. Son inversamente proporcionales.

Para una onda que se propague a una determinada velocidad, cuanto mayor sea la frecuencia, menor será la longitud de onda.

(Nota: en algunos textos se representa la frecuencia con la letra f, aunque también es habitual representarla con la letra ν. Conviene que los alumnos se habitúen a ambas notaciones.)

3. **Sea una onda armónica transversal propagándose a lo largo de una cuerda, descrita (en el SI) mediante la expresión:**

$$y(x, t) = \text{sen}\ (62{,}8x + 314t)$$

a) ¿En qué dirección (sentido) viaja la onda y cuál es su velocidad?

b) Calcular su longitud de onda, su frecuencia y el desplazamiento máximo de cualquier elemento de la cuerda.

(P. Asturias. Junio, 2006)

a) Dado que el signo que se utiliza es el positivo, resulta que la onda viaja en el sentido negativo de las x. La velocidad es:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

En general:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Identificamos términos en la expresión de la onda:

- $2\pi \cdot \frac{\cancel{t}}{T} = 314 \cdot \cancel{t} \rightarrow T = \frac{2\pi}{314} = 0{,}02\ \text{s} \rightarrow \nu = \frac{1}{T} = 50\ \text{Hz}$
- $2\pi \cdot \frac{\cancel{x}}{\lambda} = 62{,}8 \cdot \cancel{x} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{62{,}8} = 0{,}1\ \text{m}$

Por tanto:

$$v_p = \lambda \cdot \nu = 50\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{Hz} = 5\ \text{m/s}$$

b) En función de lo obtenido en el apartado anterior: $\nu = 50$ Hz, $\lambda = 0{,}1$ m. Y, además, $A = 1$ m (elongación máxima de la onda).

4. **En una cuerda se propaga una onda cuya ecuación viene dada por $y(x, t) = 3 \cdot \text{sen}\ (6t - 2x)$, donde x viene en metros, y t, en segundos. Calcula:**

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) La aceleración a los 5 s de un punto de la cuerda situado a 1 m del origen.

c) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados una distancia de 2 m.

(Canarias. Septiembre, 2007)

a) La velocidad de propagación de la onda es: $v_p = \lambda/T$.
Deduciremos los parámetros comparando la expresión del enunciado con la ecuación de una onda:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Comparando:

- $2\pi \cdot \frac{\cancel{t}}{T} = 6\cancel{t} \rightarrow T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\,\text{s}$
- $2\pi \cdot \frac{\cancel{x}}{\lambda} = 2\cancel{x} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\text{m}$

Por tanto:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\pi}{\pi/3} = 3\,\text{m/s}$$

b) Se puede obtener la aceleración con la que vibran los puntos del medio derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega t + kx + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + kx + \phi_0) \rightarrow$$
$$\rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0) = -\omega^2 \cdot y$$

Teniendo en cuenta que $\omega = 6$ rad/s:

$$a_x = -\omega^2 \cdot y = -6^2 \cdot 3 \cdot \text{sen}(6 \cdot 5 - 2 \cdot 1) = -29{,}26\ \text{m/s}^2$$

c) Ahora:

- $y_1(x, t) = 3 \cdot \text{sen}\,(6t - 2x)$
- $y_2(x + 2, t) = 3 \cdot \text{sen}\,[6t - 2 \cdot (x + 2)]$

El desfase es:

$$\phi_2 - \phi_1 = [6t - 2 \cdot (x + 2)] - (6t - 2x) =$$
$$= \cancel{6t} - \cancel{2x} - 4 - \cancel{6t} - \cancel{2x} = -4\ \text{rad}$$

Los puntos están desfasados un ángulo $\phi = 4$ rad.

5. **La ecuación de una onda armónica que se propaga por una cuerda es:**

$$\boldsymbol{y(x,\ t) = 0{,}002 \cdot \text{sen}\ (4x + 300t)}$$

Calcula:

a) La amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda.

b) La velocidad de propagación. ¿Qué sentido tiene, negativo o positivo?

c) La velocidad transversal máxima de un punto cualquiera de la cuerda.

d) Representa la onda en función de *x* para *t* = 0 s.

(Cantabria. Septiembre, 2005)

El sonido

a) Identificaremos los términos a partir de la expresión general de la onda armónica:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Suponemos que las magnitudes se expresan en unidades del SI.

- Amplitud: $A = 0{,}002$ m.
- Periodo:

$$2\pi \cdot \frac{\cancel{t}}{T} = 300 \cdot \cancel{t} \rightarrow T = \frac{2\pi}{300} = 0{,}021 \text{ s}$$

- Frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\dfrac{2\pi}{300}\text{ s}} = \frac{300}{2\pi}\text{ s}^{-1} = 47{,}75 \text{ Hz}$$

- Longitud de onda:

$$2\pi \cdot \frac{\cancel{x}}{\lambda} = 4\cancel{x} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57 \text{ m}$$

b) Dado que en la ecuación de onda se usa el signo positivo entre los dos términos de la fase, el sentido de avance del movimiento será contrario al de avance de las x; en consecuencia, la velocidad será negativa (retroceso). Calculamos v_p:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{1{,}57 \text{ m}}{0{,}021 \text{ s}} = 74{,}76 \text{ m/s}$$

c) La velocidad se calcula derivando la posición con respecto al tiempo:

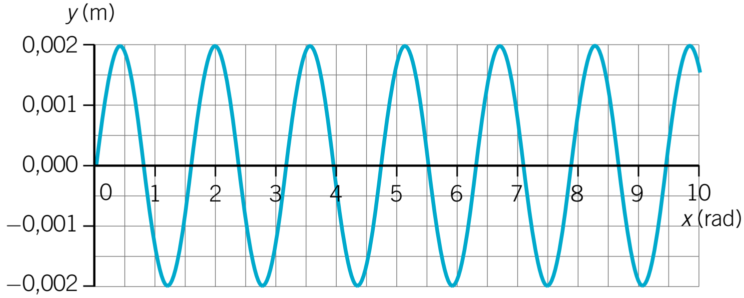
$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm k\,x + \phi_0)$$

Por tanto:

$$v_{x\,\text{máx.}} = \omega \cdot A = 300 \text{ rad/s} \cdot 0{,}002 \text{ m} = 0{,}6 \text{ m/s}$$

d) La expresión de la onda en $t = 0$ es:

$$y(x, t = 0) = 0{,}002 \cdot \text{sen}(4x)$$



6. **En un medio indeterminado se propaga una onda transversal y plana, representada por la ecuación:**

$$y = 0{,}20 \cdot \cos \pi(4t - x)$$

En unidades del SI, calcule:

a) La velocidad de propagación de la onda en el medio.

b) El módulo de la aceleración máxima de vibración de las partículas del medio.

c) La aceleración de una partícula del medio situada a 5 cm del foco emisor cuando el estado de vibración de la partícula es $y = -0{,}10$ m.

(Cataluña. Junio, 2007)

a) Obtenemos la velocidad de propagación de la onda a partir de:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

Obtendremos los parámetros comparando la expresión del enunciado con la ecuación de una onda:

$$y = A \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Comparando:

- $2\cancel{\pi} \cdot \frac{\cancel{t}}{T} = 4\cancel{\pi}\cancel{t} \rightarrow T = \frac{2}{4} = 0{,}5$ s
- $2\cancel{\pi} \cdot \frac{\cancel{x}}{\lambda} = \cancel{\pi}\cancel{x} \rightarrow \lambda = 2$ m

Por tanto:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2 \text{ m}}{0{,}5 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}$$

b) La aceleración máxima es:

$$a_{x\,\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A = 4^2 \text{ (rad/s)}^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 3{,}2 \text{ m/s}^2$$

c) La aceleración se calcula derivando la velocidad con respecto al tiempo. Primero obtenemos la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d[A \cdot \cos(\omega t \pm k\,x)]}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x)$$

Derivando esta expresión:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d[-A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x)]}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm k\,x) =$$
$$= -\omega^2 \cdot y = -(4 \text{ rad/s})^2 \cdot (-0{,}1 \text{ m}) = 1{,}6 \text{ m/s}^2$$

El sonido

7. En un concierto se utiliza un altavoz que emite con una potencia de 50 W. ¿Cuál es la intensidad del sonido que se percibe a 50 m del mismo? La organización quiere impedir que el público se aproxime a una distancia menor que el doble de la correspondiente al umbral del dolor. ¿Dónde deben poner el límite de seguridad? Umbral del dolor: I = 100 W/m².

Para una onda tridimensional, la intensidad a una determinada distancia del foco viene dada por:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{50\ \text{W}}{4\pi \cdot (50\ \text{m})^2} = 1{,}59 \cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

Veamos primero a qué distancia del foco se alcanza el umbral de dolor:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot I}} = \sqrt{\frac{50\ \text{W}}{4\pi \cdot 100\ \text{W/m}^2}} = 0{,}2\ \text{m}$$

Por tanto, el límite debe ponerse al menos al doble de esta distancia:

$$\text{Límite} > 2 \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}4\ \text{m}$$

8. Una antena de telefonía emite una radiación de 900 MHz. A 50 m de la misma, la intensidad es $5 \cdot 10^{-2}$ W/m². Determina:

a) La longitud de onda de la radiación.

b) La distancia que nos tenemos que acercar a la antena para recibir el doble de intensidad que tenemos a 50 m.

c) Cuánto nos podemos alejar de la antena sin que la intensidad se reduzca a la mitad de la que tenemos a 50 m.

Datos: velocidad de propagación de la radiación electromagnética en el aire = $3 \cdot 10^8$ m/s.

a) A partir del dato de la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio podemos calcular la longitud de onda de la misma:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{900 \cdot 10^6\ \text{Hz}} = 0{,}33\ \text{m}$$

b) Calculamos primero la potencia de radiación de la onda conociendo el valor de su intensidad a 50 m del foco:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow P = S \cdot I = 4\pi \cdot r^2 \cdot I =$$

$$= 4\pi \cdot (50\ \text{m})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2 = 1{,}57 \cdot 10^3\ \text{W} = 1{,}57\ \text{kW}$$

Conociendo la potencia de radiación podemos calcular la distancia a la que se percibe el doble de intensidad que antes, es decir:

$$I' = 2 \cdot I = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2 = 0{,}1\ \text{W/m}^2$$

Entonces:

$$P = 4\pi r'^2 \cdot I' \rightarrow r' = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot I'}} = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^3 \text{ W}}{4\pi \cdot 0,1 \text{ W/m}^2}} = 35,35 \text{ m}$$

En consecuencia, nos tendremos que acercar:

$$50 \text{ m} - 35,35 \text{ m} = 14,65 \text{ m}$$

c) Con un procedimiento análogo al anterior calculamos la distancia a la que la intensidad se reduce a la mitad, es decir:

$$I'' = \frac{1}{2} \cdot I = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

Ahora:

$$P = 4\pi r''^2 \cdot I'' \rightarrow$$

$$\rightarrow r'' = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot I''}} = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^3 \text{ W}}{4\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2}} = 70,69 \text{ m}$$

Con lo cual nos podremos alejar un máximo de:

$$70,69 \text{ m} - 50 \text{ m} = 20,69 \text{ m}$$

9. Al dejar caer una piedra en la superficie de agua en calma de un estanque obtenemos una onda con A = 25 cm. Suponiendo que no hubiese rozamiento entre las partículas del medio, ¿cuál será la amplitud cuando la onda haya avanzado 2 m desde el origen?

Nota: suponer que a 1 cm del foco la amplitud sigue siendo de 1 cm.

La onda que se propaga en la superficie en calma de un estanque es bidimensional. Tal y como se deduce en el libro del alumno, su amplitud disminuye con la distancia según la relación:

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \rightarrow A_2 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

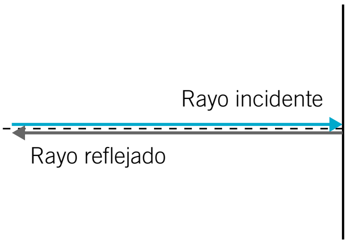
La amplitud es de 25 cm a 1 cm del foco:

$$A_2 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = 25 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{0,01 \text{ m}}{2 \text{ m}}} = 1,8 \text{ cm}$$

10. Dibuja el rayo reflejado si el rayo incidente tiene la dirección de la normal.

De acuerdo con las leyes de la reflexión, el rayo incidente forma con la normal a la superficie de reflexión un ángulo igual al que forma el reflejado.

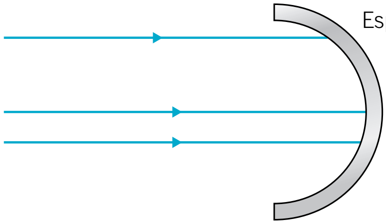
Si el rayo incidente coincide con la normal, formarán un ángulo de 0°.



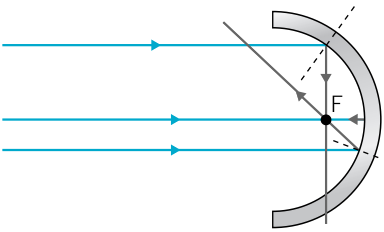
El sonido

El rayo reflejado también formará un ángulo de 0°, por lo que su dirección coincidirá con la normal y con la del rayo incidente.

11. **Dibuja los rayos reflejados en este caso.**



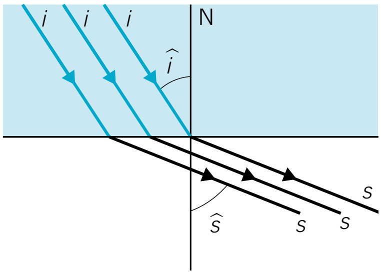
La normal a una superficie semiesférica tiene dirección radial. El rayo incidente y el reflejado forman un ángulo igual con la normal a la superficie de reflexión.



Los rayos grises son los reflejados. Las rayas punteadas indican la dirección radial en cada punto (normal). El rayo incidente que coincide con el diámetro de la semiesfera coincide con el rayo reflejado correspondiente. Todos los rayos reflejados coinciden en un punto: el foco (F).

12. **Dibuja la figura 7.28a si la onda pasa a un medio en el que se propaga a mayor velocidad que en el medio de origen.**

De acuerdo con las leyes de la refracción, cuando el rayo incidente se propaga a mayor velocidad que el refractado, el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de refracción.



En la figura la velocidad de propagación de la onda en el nuevo medio es mayor que en el medio inicial.

En consecuencia, el ángulo de incidencia ($\hat{i}$) es menor que el ángulo de refracción ($\hat{s}$).

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{s}}{v_{\text{refractado}}}$$

Si $v_{\text{incidente}} < v_{\text{refractado}} \rightarrow \text{sen}\,\hat{i} < \text{sen}\,\hat{s} \rightarrow \hat{i} < \hat{s}$.

13. **Dibuja el rayo refractado correspondiente a un rayo que incide en dirección perpendicular a la de la superficie de refracción:**

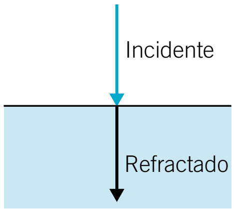
a) Si la onda se propaga a mayor velocidad en el medio incidente.

b) Si se propaga a menor velocidad en el medio incidente.

Si el rayo incide en la dirección perpendicular a la superficie de refracción, el rayo refractado lleva esa misma dirección, cualquiera que sea la velocidad a la que se propague en cada uno de los medios.

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{s}}{v_{\text{refractado}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{0}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{s}}{v_{\text{refractado}}} \rightarrow \hat{i} = 0 = \hat{s}$$



14. **El sonido se propaga a unos 340 m/s en el aire y a unos 1500 m/s en el agua de mar.**
Determina cuáles son las características (longitud de onda y frecuencia) que percibiremos bajo el agua de un sonido de 50 Hz que emite un altavoz en la playa.

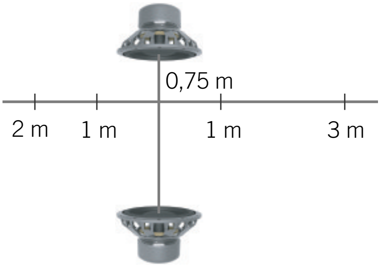
Dado que queremos analizar las características del sonido dentro del agua de mar, analizaremos la onda refractada tras entrar en contacto con la superficie del agua.

Suponemos que el sonido se propaga de forma ideal en ambos medios, por lo que no hay pérdida de energía cuando cambia de medio. Esto significa que la frecuencia de la onda incidente y la frecuencia de la onda refractada son iguales.

La variación de la velocidad de propagación se traduce en una variación en la longitud de onda.

$$v_{\text{p}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda_{\text{agua}} = \frac{v_{\text{p agua}}}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{1500\ \text{m/s}}{50\ \text{Hz}} = 30\ \text{m}$$

15. **En una habitación tenemos dos altavoces separados una distancia de 5 m que emiten dos señales idénticas de 80 Hz y con una amplitud de 5 cm. Determina cuál será el valor de la amplitud en los siguientes puntos de la habitación:**



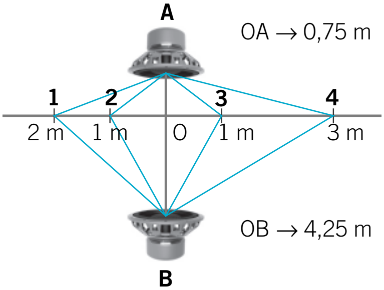
El sonido

Necesitamos conocer la distancia que separa a los micrófonos de cada uno de los puntos. Si nos fijamos en el altavoz A y el punto 1:

$$d_{A1}^2 = d_{1O}^2 + d_{OA}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow d_{A1} = \sqrt{d_{1O}^2 + d_{OA}^2} = \sqrt{(2\ \text{m})^2 + (0{,}75\ \text{m})^2} = 2{,}136\ \text{m}$$

Operando de manera análoga para los otros puntos:



- $d_{A2} = \sqrt{1^2 + 0{,}75^2} = 1{,}25\ \text{m}$
- $d_{A3} = \sqrt{1^2 + 0{,}75^2} = 1{,}25\ \text{m}$
- $d_{A4} = \sqrt{3^2 + 0{,}75^2} = 3{,}092\ \text{m}$

Para el altavoz B las distancias son estas:

- $d_{B1} = \sqrt{2^2 + 4{,}25^2} = 4{,}697\ \text{m}$
- $d_{B2} = \sqrt{1^2 + 4{,}25^2} = 4{,}366\ \text{m}$
- $d_{B3} = \sqrt{1^2 + 4{,}25^2} = 4{,}366\ \text{m}$
- $d_{B4} = \sqrt{3^2 + 4{,}25^2} = 5{,}202\ \text{m}$

Calculamos la función de la interferencia que se produce cuando las dos ondas alcanzan uno de estos puntos:

$$y = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\omega t - k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

La amplitud de la interferencia es:

$$A_I = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

Necesitamos conocer el número de onda, k, que se puede obtener conociendo la frecuencia de la misma y la velocidad de propagación del sonido en el aire (340 m/s). Por tanto:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{80\ \text{Hz}} = 4{,}25\ \text{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4{,}25\ \text{m}} = 1{,}48\ \text{m}^{-1}$$

La amplitud de la interferencia en cada uno los puntos del dibujo es:

- $A_1 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \dfrac{d_{A1} - d_{B1}}{2}\right) =$

$$= 2 \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(1{,}48 \cdot \frac{2{,}136 - 4{,}697}{2}\right)\text{m} = -0{,}032\ \text{m} = -3{,}2\ \text{cm}$$

- $A_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \dfrac{d_{A2} - d_{B2}}{2}\right) =$

$$= 2 \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(1{,}48 \cdot \frac{1{,}25 - 4{,}366}{2}\right) = -0{,}067 \text{ m} = -6{,}7 \text{ cm}$$

- $A_3 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \dfrac{d_{A3} - d_{B3}}{2}\right) =$

$$= 2 \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(1{,}48 \cdot \frac{1{,}25 - 4{,}366}{2}\right) = -0{,}067 \text{ m} = -6{,}7 \text{ cm}$$

- $A_4 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \dfrac{d_{A4} - d_{B4}}{2}\right) =$

$$= 2 \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(1{,}48 \cdot \frac{3{,}092 - 5{,}202}{2}\right) = 9{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}94 \text{ cm}$$

Así pues, el sonido será más intenso en los puntos 2 y 3 que en los puntos 1 y 4.

16. Indique, justificando cada caso, cuáles de las siguientes funciones pueden representar una onda estacionaria y cuáles no:

a) sen (Ax) · cos (Bx)
b) sen (Ax) · cos (Bt)
c) cos (100t) · sen (x)
d) sen (Ax) + cos (Bx)
e) sen (Ax/λ) · cos (Bt/T)
f) sen 2π(x/λ + t/T)

(R. Murcia. Septiembre, 2007)

Comparamos cada caso con la expresión general de una onda estacionaria:

$$y = 2 \cdot A_{\text{onda}} \cdot \cos(k\,x) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

a) No representa una onda estacionaria, ya que la expresión no contiene variables x y t.

b) Podemos representarla como:

$$y = \cos\left(Ax + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(Bt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Y se corresponde con una onda estacionaria en la que $A_{\text{onda}} = 1/2$, $k = A$ y $\omega = B$.

c) Nuevamente podemos transformar la expresión del enunciado en:

$$y = \text{sen}\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Se corresponde con una onda estacionaria en la que $A_{\text{onda}} = 1/2$, $k = 1$ y $\omega = 100$.

El sonido

d) No puede ser una onda estacionaria, ya que la expresión no contiene variables x y t.

e) Reescribimos la expresión como:

$$y = \cos\left(\frac{Ax}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{Bt}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Se identifica con la expresión de una onda estacionaria en la que $A_{\text{onda}} = 1/2$, $k = A/\lambda$ y $\omega = B/T$.

f) Es la expresión de una onda armónica. No es una onda estacionaria.

17. **Una onda estacionaria en una cuerda se puede describir por la ecuación:**

$$\boldsymbol{y(x,\ t) = 0{,}02 \cdot \text{sen}\ (10\pi\ x/3) \cdot \cos\ (40\pi t)}$$

donde y, x, t se expresan en unidades del SI.

Calcula:

a) La velocidad y la amplitud de las ondas que, por superposición, pueden dan lugar a esta onda estacionaria.

b) La distancia entre dos nodos consecutivos de la cuerda.

c) La velocidad máxima que presenta el punto medio entre dos nodos consecutivos.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

a) Comparamos los términos con los de la ecuación general de ondas estacionarias:

$$y = 2 \cdot A \cdot \cos(k\,x) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

La onda dada reescrita es:

$$y = 0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{10\pi \cdot x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(40\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparando:

- $2A = 0{,}02 \rightarrow A = \dfrac{0{,}02}{2} = 0{,}01\ \text{m} = 1\ \text{cm}$
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{10\pi}{3} \rightarrow \lambda = \dfrac{6\pi}{10\pi} = 0{,}6\ \text{m}$
- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 40\pi \rightarrow T = \dfrac{2\pi}{40\pi} = 0{,}05\ \text{s}$

Por tanto:

$$v_{\text{p}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}6\ \text{m}}{0{,}05\ \text{s}} = 12\ \text{m/s}$$

b) En una onda estacionaria la distancia entre dos nodos consecutivos es:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}6\ \text{m}}{2} = 0{,}3\ \text{m}$$

El primer nodo estará en el origen, ya que $y\,(x = 0) = 0$.

Por tanto, el siguiente nodo estará en la posición:

$$x = 0 + 0{,}3\ \text{m} = 0{,}3\ \text{m}$$

c) La velocidad de vibración de cualquier punto del medio es:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left[0{,}02 \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot x}{3}\right) \cdot \cos(40\pi \cdot t)\right]}{dt} =$$

$$= 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot x}{3}\right) \cdot [-40\pi \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t)] =$$

$$= -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot x}{3}\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t)\ \text{m/s}$$

Calculamos la velocidad del origen, primer nodo ($x = 0$):

$$v(x = 0) = -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot 0}{3}\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t) = 0$$

Calculamos la velocidad de un punto que esté a 30 cm del extremo (siguiente nodo):

$$v(x = 0{,}30\ \text{m}) = -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot 0{,}3}{3}\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t) =$$

$$= -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t) = 0$$

Calculamos la velocidad de un punto que esté a 15 cm del extremo, equidistante de ambos nodos:

$$v(x = 0{,}15\ \text{m}) = -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10\pi \cdot 0{,}15}{3}\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t)\ \text{m/s} =$$

$$= -0{,}8\pi \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t) = -0{,}8\pi \cdot 1 \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t)\ \text{m/s}$$

La velocidad máxima en un punto situado entre dos nodos es:

$$|v_{\text{máx.}}| = 0{,}8\pi = 2{,}51\ \text{m/s}$$

18. **a) ¿Qué es una onda estacionaria? Explica qué condiciones deben cumplirse para que se forme una onda estacionaria en una cuerda tensa y fija por sus dos extremos.**

b) Una cuerda de guitarra de longitud $L = 65$ cm vibra estacionariamente en su modo fundamental a una frecuencia $f = 440$ Hz.

El sonido

Representa gráficamente el perfil de esta onda, indicando la posición de nodos y vientres, y calcula la velocidad de propagación de ondas transversales en esta cuerda.

(Aragón. Junio, 2005)

a) Las ondas estacionarias resultan de la superposición de dos ondas idénticas que se propagan en el mismo medio en sentidos opuestos y con oposición de fase.

Para que se produzca una onda estacionaria en una cuerda tensa y fija por sus dos extremos, la cuerda debe tener una longitud tal que en ella pueda entrar un número entero de semilongitudes de la onda.

b) En el modo fundamental:

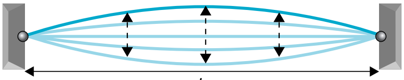
$$\lambda_1 = 2 \cdot L \rightarrow \nu_1 = \frac{v_p}{\lambda_1} = \frac{v_p}{2 \cdot L} = \nu_0$$

Queda:

$$\lambda = v_p \cdot T = \frac{v_p}{f} \rightarrow v_p = \lambda_1 \cdot f$$

Entonces:

$$\lambda_1 = 2 \cdot L = 2 \cdot 0{,}65 \text{ m} = 1{,}3 \text{ m} \rightarrow$$
$$\rightarrow v_p = 1{,}3 \text{ m} \cdot 440 \text{ s}^{-1} = 572 \text{ m/s}$$



Los nodos están en $x = 0$ y en $x = L = \lambda/2$.

El vientre se encontrará en:

$$x = \frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2} = \frac{0{,}65 \text{ m}}{2} = 0{,}325 \text{ m}$$

19. En la primera cuerda de una guitarra las ondas se propagan a 422 m/s. La cuerda mide 64 cm entre sus extremos fijos. ¿Cuánto vale la frecuencia de vibración (en el modo fundamental)?

(R. Murcia. Junio, 2006)

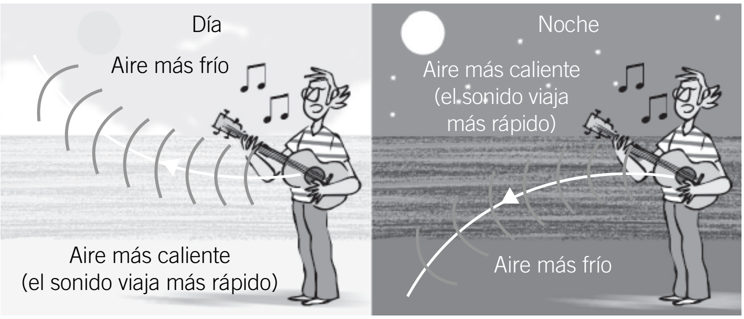
En esta situación tenemos una cuerda fija por sus dos extremos. Cuando vibra en su modo fundamental resulta que:

$$f_1 = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{v_p}{2 \cdot L} = f_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow f_0 = \frac{422 \text{ m/s}}{2 \cdot 0{,}64 \text{ m}} = 329{,}7 \text{ Hz}$$

20. **Si pasas temporadas en la costa, te habrás dado cuenta de que de noche puedes oír sonidos más lejanos que de día.**

Explica este hecho teniendo en cuenta que, de día, el Sol calienta el suelo y la brisa del mar refresca nuestras caras, mientras que de noche llega una brisa cálida al tiempo que se refresca el suelo.



(Pista: ten en cuenta la refracción de las ondas de sonido al moverse por un medio no homogéneo.)

La velocidad del sonido es mayor en las capas donde la temperatura es mayor. Cuando el sonido penetra en zonas de diferente temperatura sufre una refracción que le lleva a curvarse hacia las zonas con menor temperatura. Esto ocurre precisamente porque la velocidad de propagación del rayo refractado es menor y su ángulo de refracción se aproxima a la normal (es menor que el rayo incidente), por lo que se curva hacia esta zona.

Durante la noche, el aire más frío será el que esté en contacto con el suelo, por lo que las ondas sonoras se curvarán hacia el suelo en lugar de escaparse hacia la atmósfera, permitiendo que se escuchen a mayor longitud (ya que no se han desviado hacia el aire y están todavía a una altura que permite percibirlas).

21. **Una marca de frigoríficos establece en su publicidad que estos electrodomésticos trabajan con un nivel de intensidad sonora máximo de 40 dB. ¿Cuál es la máxima intensidad de sonido que emiten los frigoríficos?**

Dato: intensidad umbral, $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2007)

A partir del nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 40 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow 4 = \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 10^4 \rightarrow I = 10^4 \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

El sonido

22. **a) Explique qué es una onda armónica y escriba su ecuación.**

b) Una onda armónica es doblemente periódica. ¿Qué significado tiene esa afirmación? Haga esquemas para representar ambas periodicidades y coméntelos.

(Andalucía. 2007)

a) Una onda armónica resulta de la perturbación provocada por un movimiento ondulatorio si no existe rozamiento. En este caso, la onda permanece igual por tiempo indefinido y se llama onda armónica.

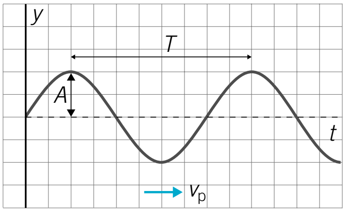
Su ecuación se expresa así:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} + \phi_0\right]$$

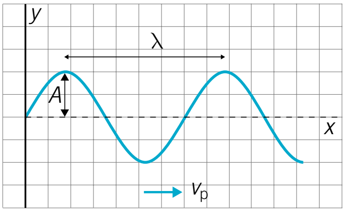
b) La onda armónica es periódica con respecto al tiempo y con respecto a la posición.

Esto significa que, si se observa la onda en un determinado instante de tiempo, se obtiene una función periódica con respecto a *x*.

Si se observa la onda para un determinado punto, se obtiene una función periódica en *t*. En ambos casos las ondas periódicas obtenidas tienen la misma amplitud, longitud de onda y periodo.



Periodicidad respecto al tiempo.



Periodicidad respecto a la posición.

23. **Dibuje dos ondas que cumplan con las condiciones que se especifican en los siguientes supuestos:**

1.° Que tengan la misma amplitud y una doble longitud de onda que la otra.

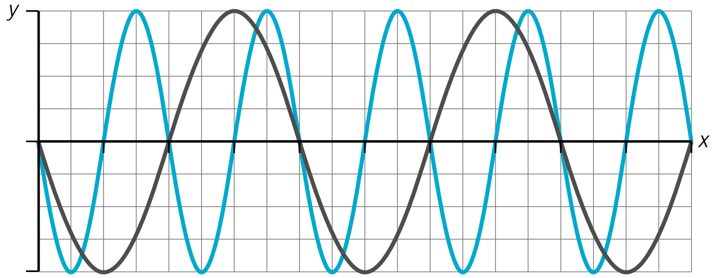
2.° Que tengan la misma longitud de onda y una doble amplitud que la otra.

3.° Que tengan la misma amplitud y longitud de onda pero desfasadas 180°.

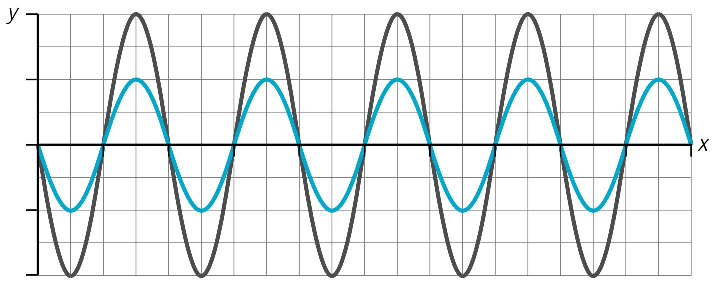
(Extremadura. Junio, 2005)

Respuestas gráficas:

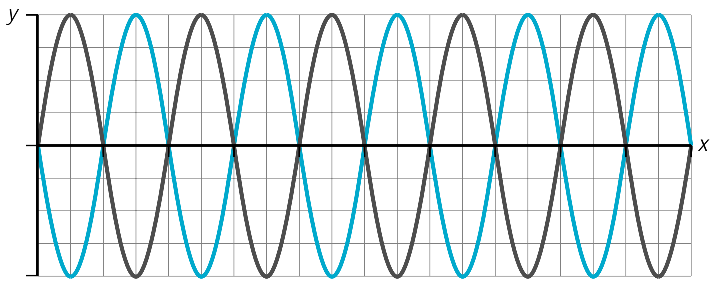
- La onda gris tiene longitud de onda doble que la azul:



- La onda gris tiene una amplitud doble que la onda azul:



- La onda gris y la azul tienen la misma amplitud y longitud de onda, pero están desfasadas 180°:



24. **Un tren de ondas atraviesa un punto de observación. En este punto, el tiempo transcurrido entre dos crestas consecutivas es de 0,2 s. De las afirmaciones siguientes, escoja la que sea correcta y justifique la respuesta.**

a) La longitud de onda es de 5 m.

b) La frecuencia es de 5 Hz.

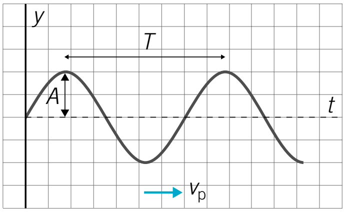
c) El periodo es de 0,4 s.

d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

(Cataluña. Septiembre, 2004)

El sonido

La situación descrita en el enunciado equivale a decir que el periodo de la onda armónica es $T = 0{,}2$ s.



$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2\ \text{s}} = 5\ \text{Hz}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la b).

La longitud de onda no se relaciona con el periodo, ya que se refiere a una periodicidad espacial.

25. **A. Una onda armónica se propaga por una cuerda tensa. Si su frecuencia se reduce a la mitad:**

a) El periodo se reduce a la mitad.

b) La velocidad de propagación se duplica.

c) La longitud de onda se duplica.

B. Si se trata de una onda transversal:

a) En un instante dado todos los puntos de la cuerda vibran con la misma velocidad.

b) La onda se propaga a la velocidad constante de 340 m/s.

c) La onda vibra en una dirección que es perpendicular a la de propagación.

(Cataluña. Junio, 2007)

A) Veamos la relación entre la frecuencia y cada una de las magnitudes:

a) $T = \frac{1}{\nu}$. Al reducir la frecuencia a la mitad, el periodo aumentará al doble. Falso.

b) $v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$. Al reducir la frecuencia a la mitad, la velocidad de propagación se reduce también a la mitad. Falso.

c) $v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{\nu}$. Si se mantiene constante la velocidad de propagación, al reducir la frecuencia a la mitad, la longitud de onda se duplica. Cierto.

B) Por definición, ondas transversales son aquellas en las que las partículas del medio vibran en dirección perpendicular a la de avance de la perturbación. La respuesta correcta es la c).

26. **Si un teléfono móvil emite ondas electromagnéticas en la banda 1700-1900 MHz, ¿cuál es la longitud de onda más corta emitida?**

(R. Murcia. Septiembre, 2006)

Sabiendo que la velocidad a la que se propagan las ondas electromagnéticas es $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, podemos calcular la longitud de onda a partir de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$$

En la banda de frecuencias propuesta en el enunciado:

$$\lambda_{\text{mín.}} = \frac{c}{\nu_{\text{máx.}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1900 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0{,}1579 \text{ m}$$

27. **Una visión simplificada de los efectos de un terremoto en la superficie terrestre consiste en suponer que son ondas transversales análogas a las que se producen cuando forzamos oscilaciones verticales en una cuerda.**

En este supuesto y en el caso en que su frecuencia fuese de 0,5 Hz, calcular la amplitud que deberían tener las ondas del terremoto para que los objetos sobre la superficie terrestre empiecen a perder el contacto con el suelo.

(P. Asturias. Septiembre, 2005)

Para que los objetos pierdan el contacto con el suelo se deben ver sometidos a una fuerza hacia arriba que sea igual o superior a su propio peso:

$$F = m \cdot a = m \cdot g \qquad [1]$$

Podemos obtener la aceleración con la que vibrarán los cuerpos alcanzados por el terremoto a partir de la ecuación de la onda:

$$y_x = A \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x + \phi_0)$$

Obtenemos la velocidad derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d\,[A \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x + \phi_0)]}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm k\,x + \phi_0)$$

Obtenemos la aceleración derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\,[A \cdot \text{sen}(\omega t \pm k\,x + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega t \pm k\,x + \phi_0) = -\omega^2 \cdot y$$

Es decir:

$$a_{x\,\text{máx.}} = -\omega^2 \cdot A \qquad [2]$$

El sonido

Igualando [1] y [2]:

$$g = \omega^2 \cdot A = (2\pi \cdot \nu)^2 \cdot A \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{g}{(2\pi \cdot \nu)^2} = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{(2\pi \cdot 0{,}5 \text{ m/s})^2} = 1 \text{ m}$$

28. Una onda transversal se propaga por una cuerda en la dirección positiva del eje OX. La amplitud es $A = 0{,}06$ m, la frecuencia vale $f = 10$ Hz y su velocidad es de 15 m/s.

a) Determinar su longitud de onda.

b) Escribir la ecuación de la onda.

c) Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda.

(País Vasco. Junio, 2006)

a) Calculamos la longitud de onda:

$$v_p = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{15 \text{ m/s}}{10 \text{ Hz}} = 1{,}5 \text{ m}$$

b) La ecuación general de una onda armónica es:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Dado que $T = 1/f$, tendremos:

$$y_x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(10 \cdot t - \frac{x}{1{,}5}\right)\right] = 0{,}06 \cdot \text{sen}(20\pi \cdot t - 4{,}19 \cdot x)$$

El signo es negativo porque se propaga en el sentido positivo del eje X.

c) Obtenemos la velocidad derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)$$

Obtenemos la aceleración derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} =$$

$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0) = -\omega^2 \cdot y_x$$

Sus valores máximos para algún punto de la cuerda serán:

- $v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 2\pi \cdot 10 \text{ rad/s} \cdot 0{,}06 \text{ m} = 3{,}77 \text{ m/s}$
- $|a_{\text{máx.}}| = \omega^2 \cdot A = (2\pi \cdot 10 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}06 \text{ m} = 236{,}87 \text{ m/s}^2$

29. **Un surfista observa que las olas del mar tienen 3 m de altura y rompen cada 10 s en la costa. Sabiendo que la velocidad de las olas es de 35 km/h, determina la ecuación de onda de las olas.**

(Canarias. Junio, 2005)

Los datos proporcionados en el enunciado se corresponden con los siguientes parámetros:

- $A = 3$ m (suponemos altura desde la superficie del agua en calma).
- $T = 10$ s.
- $v_p = 35$ km/h.

Conociendo el periodo y la velocidad de propagación de las olas podemos determinar el valor de la longitud de onda de las mismas, ya que:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 35 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \cancel{\text{s}}} \cdot 10 \cancel{\text{s}} = 97{,}2 \text{ m}$$

La ecuación de onda será:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right] = 3 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{10} \pm \frac{x}{97{,}2}\right)\right] =$$
$$= 3 \cdot \text{sen}(0{,}2\pi \cdot t \pm 0{,}0646 \cdot x)$$

30. **La ecuación de una onda transversal es $y(t, x) = 0{,}05 \cdot \cos(5t - 2x)$ (magnitudes SI). Calcula:**

a) Los valores de t para los que un punto situado en $x = 10$ m tiene velocidad máxima.

b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 3λ?

(Galicia. Junio, 2007)

a) La velocidad de los puntos alcanzados por una onda transversal se puede obtener derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d[A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0)$$

La velocidad será máxima cuando:

$$\text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0) = 1$$

Sustituimos los valores que conocemos del enunciado y despejamos el valor de t que cumple la condición ($x = 10$ cm). Para que el seno de un ángulo sea 1, el ángulo debe ser igual a $\pi/2$ o $\pi/2$ más un número entero de vueltas ($\pi/2 + 2 \cdot n \cdot \pi$, con $n = 0, 1, 2\ldots$).

El sonido

$$\operatorname{sen}(\omega t \pm k\,x + \phi_0) = 1 \rightarrow \operatorname{sen}(5 \cdot t - 2 \cdot 10) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 \cdot t - 20 = \frac{\pi}{2} + 2n \cdot \pi \rightarrow t - 4 = \frac{\pi}{10} + \frac{2n \cdot \pi}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 4 + \frac{\pi}{10} + \frac{4n \cdot \pi}{10} \rightarrow t = 4 + \frac{\pi}{10} \cdot (4n + 1)$$

Cuando $n = 0$:

$$t = 4 + \frac{\pi}{10} = 4{,}31 \text{ s}$$

b) Dado que las ondas armónicas se propagan a velocidad constante: $v_p = \dfrac{\lambda}{T}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 5 \text{ rad/s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

Además, por ser una velocidad uniforme, para que el espacio recorrido sea igual a 3λ:

$$v_p = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v_p} = \frac{3 \cdot \lambda}{\lambda/T} = 3 \cdot T = 3 \cdot \frac{2\pi}{5} = 3{,}77 \text{ s}$$

31. Una onda armónica transversal se desplaza en la dirección del eje X en sentido positivo y tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) La fase inicial, sabiendo que para $x = 0$ y $t = 0$ la elongación es $y = -2$ cm.

c) La expresión matemática que representa la onda.

d) La distancia mínima de separación entre dos partículas del eje X que oscilan desfasadas $\pi/3$ rad.

(C. Madrid. Septiembre, 2006)

a) Por definición:

$$v_p = \lambda \cdot \nu = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 8 \text{ Hz} = 0{,}32 \text{ m/s}$$

b) La ecuación de una onda armónica se corresponde con la expresión:

$$y_x = A \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

Para $x = 0$, $t = 0 \rightarrow y = -2$ cm:

$$-0{,}02 = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}[2\pi \cdot (0 \pm 0) + \phi_0] \rightarrow$$

$$\rightarrow -1 = \operatorname{sen}\phi_0 \rightarrow \phi_0 = \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

c) Completamos los parámetros en la expresión del apartado anterior:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right] = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(t \cdot \nu \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y_x = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(t \cdot 8 - \frac{x}{0{,}04}\right) - \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(16\pi \cdot t - 50\pi \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Si el desfase es $\pi/3$ rad:

$$\phi_2 - \phi_1 =$$

$$= \left(\cancel{16\pi \cdot t} - 50\pi \cdot x_2 - \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\cancel{16\pi \cdot t} - 50\pi \cdot x_1 - \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}\text{rad} \rightarrow$$

$$\rightarrow 50\pi \cdot (x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3}\text{rad} \rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{50 \cdot 3}\,\text{m} = 6{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

32. La expresión matemática que representa una onda armónica que se propaga a lo largo de una cuerda tensa es:

$$\boldsymbol{y(x,\ t) = 0{,}01 \cdot \text{sen}\ (10\pi t + 2\pi x + \pi)}$$

Donde *x* e *y* están dados en metros y *t*, en segundos. Determine:

a) El sentido y la velocidad de propagación de la onda.

b) La frecuencia y la longitud de onda.

c) La diferencia de fase de oscilación entre dos puntos de la cuerda separados 20 cm.

d) La velocidad y la aceleración de oscilación máximas de un punto de la cuerda.

(C. Madrid, 2007)

a) La expresión general de una onda armónica es:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

Donde el signo positivo entre los dos términos variables del argumento indica que la onda se propaga en el sentido negativo del eje X.

La velocidad de propagación de la onda puede determinarse como:

$$v_p = \frac{\lambda}{T}$$

El sonido

Obtenemos el periodo y la longitud de onda comparando la expresión de esta onda con la expresión general:

- $10\pi = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ s}$
- $2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$

Por tanto:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{1 \text{ m}}{0{,}2 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

b) La frecuencia es:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2 \text{ s}} = 5 \text{ Hz}$$

c) Para puntos separados 20 cm (0,2 m):

$$\phi_2 - \phi_1 = (\cancel{10\pi \cdot t} + 2\pi \cdot x_2 + \cancel{\pi}) - (\cancel{10\pi \cdot t} + 2\pi \cdot x_1 + \cancel{\pi}) =$$
$$= 2\pi \cdot (x_2 - x_1) \rightarrow \phi_2 - \phi_1 = 2\pi \cdot 0{,}2 = 0{,}4\pi$$

d) La velocidad se obtiene derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos(\omega t \pm kx + \phi_0)]}{dt} =$$
$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \phi_0) = -\omega^2 \cdot y_x$$

Sus valores máximos para algún punto de la cuerda serán:

- $v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 2\pi \cdot 5 \text{ rad/s} \cdot 0{,}01 \text{ m} = 0{,}1\pi \text{ m/s}$
- $|a_{\text{máx.}}| = \omega^2 \cdot A = (2\pi \cdot 5 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}01 \text{ m} = \pi^2 \text{ m/s}^2$

33. Una onda de frecuencia 40 Hz se propaga a lo largo del eje X en el sentido de las *x* crecientes. En un cierto instante, la diferencia de fase entre dos puntos separados entre sí 5 cm es $\pi/6$ rad.

¿Qué valor tiene la longitud de onda? ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?

Escribe la función de onda sabiendo que la amplitud es 2 mm.

(C. Valenciana. Septiembre, 2007)

a) Calculamos λ a partir del desfase:

$$\frac{\pi}{6} = \phi_2 - \phi_1 = (\cancel{\omega t} - k\,x_2 + \cancel{\phi}) - (\cancel{\omega t} - k\,x_1 + \cancel{\phi}) = k \cdot (x_1 - x_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{6} = k \cdot (x_1 - x_2) = k \cdot 0{,}05 \text{ m} \rightarrow k = \frac{\pi}{0{,}05 \text{ m} \cdot 6} = 10{,}47 \text{ m}^{-1}$$

Entonces:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10{,}47 \text{ m}^{-1}} = 0{,}6 \text{ m}$$

Calculamos la velocidad de propagación así:

$$v_p = \lambda \cdot \nu = 0{,}6 \text{ m} \cdot 40 \text{ Hz} = 24 \text{ m/s}$$

b) La expresión general de la ecuación de onda armónica es:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$T = 1/\nu = 1/40 \text{ Hz} = 0{,}025$ s. Por tanto:

$$y_x = 0{,}002 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}025} - \frac{x}{0{,}6}\right) + \phi_0\right]$$

El signo que precede a la x es negativo porque la onda se desplaza en el sentido de las x crecientes.

34. Una cuerda está unida por un extremo a una pared y está libre por el otro extremo. Hacemos vibrar el extremo libre armónicamente y se genera una onda transversal, descrita por la ecuación:

$$y = 4 \cdot \text{sen}\, 2\pi\, (t/2 - x/4)$$

en que la amplitud se mide en centímetros, mientras que el tiempo, *t*, y la distancia, *x*, se miden en unidades del Sistema Internacional (SI). Calcule:

a) La velocidad de vibración de un punto de la cuerda que dista 5 m del extremo libre, en el instante $t = 3$ s.

b) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda que distan 1 m y 3 m de la pared, respectivamente, en un mismo instante.

c) Cuánto tardaría la vibración en llegar a la pared desde el extremo libre en que se genera, si la cuerda tuviera una longitud de 10 m.

(Cataluña. Junio, 2007)

a) La velocidad de vibración de los puntos de una onda armónica puede obtenerse según:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d\left\{4 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right)\right]\right\}}{dt} = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$

El sonido

Para $x = 5$ y $t = 3$:

$$v_x = 4\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot 3 - \frac{\pi}{2} \cdot 5\right) = 0 \text{ m/s}$$

b) El desfase es:

$$\phi_2 - \phi_1 = \left(\cancel{\pi \cdot t} - \frac{\pi}{2} \cdot x_2\right) - \left(\cancel{\pi \cdot t} - \frac{\pi}{2} \cdot x_1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot (x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2} \cdot (3 - 1) = \pi$$

c) Necesitamos conocer la velocidad de propagación de la onda, que podemos calcular según:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{4 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

Si la vibración tiene que recorrer 10 m, como es una velocidad constante:

$$v_p = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v_p} = \frac{10 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 5 \text{ s}$$

35. A una playa llegan 15 olas por minuto y se observa que tardan 5 minutos en llegar desde un barco anclado en el mar a 600 m de la playa.

a) Tomando como origen de coordenadas un punto de la playa, escriba la ecuación de onda, en el Sistema Internacional de unidades, si la amplitud de las olas es de 50 cm. Considere la fase inicial nula.

b) Si sobre el agua a una distancia de 300 m de la playa existe una boya que sube y baja según pasan las olas, calcule su velocidad en cualquier instante de tiempo. ¿Cuál es su velocidad máxima?

(Castilla y León. Septiembre, 2006)

Si llegan 15 olas por minuto, significa que la frecuencia será:

$$\nu = \frac{15 \text{ olas}}{1 \cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 0{,}25 \text{ Hz}$$

Además, si las olas tardan 5 minutos en recorrer 600 m, podemos determinar su velocidad de propagación así:

$$v_p = \frac{600 \text{ m}}{5 \cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

Con la velocidad de propagación podemos determinar la longitud de onda:

$$v_p = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ Hz}} = 8 \text{ m}$$

a) La expresión general de una onda armónica es:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

Si el origen de coordenadas es un punto de la playa, las ondas que parten de mar adentro y se aproximan a la playa avanzan en el sentido negativo de las X, por lo que el signo entre los términos de la fase será positivo. La fase inicial es nula, $T = 1/\nu = 4$ s y $A = 0,5$ m. Por tanto:

$$y_x = 0,5 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(0,25 \cdot t + \frac{x}{8}\right)\right] = 0,5 \cdot \text{sen}(0,5\pi \cdot t + 0,25\pi \cdot x)\ \text{m}$$

b) Derivando la expresión anterior obtenemos la velocidad:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d[0,5 \cdot \text{sen}(0,5\pi \cdot t + 0,25\pi \cdot x)]}{dt} =$$
$$= 0,5 \cdot 0,5\pi \cdot \cos(0,5\pi \cdot t + 0,25\pi \cdot x)$$

A 300 m de la playa:

$$v_{300\,\text{m}} = 0,5 \cdot 0,5\pi \cdot \cos(0,5\pi \cdot t + 0,25\pi \cdot 300) =$$
$$= 0,25\pi \cdot \cos(0,5\pi \cdot t + 75\pi)\ \text{m/s}$$

Por tanto:

$$v_{300\ \text{máxima}} = 0,25\pi\ \text{m/s} = 0,79\ \text{m/s}$$

36. Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal, en el sentido negativo del eje X, siendo 10 cm la distancia mínima entre puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda está generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple cuya frecuencia es de 50 Hz y su amplitud, de 4 cm, determina:

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) La expresión matemática de la onda, si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas y en $t = 0$ la elongación es nula.

c) La aceleración de máxima oscilación en un punto cualquiera de la cuerda.

(Cantabria. Junio, 2007)

a) Calculamos la velocidad de propagación de la onda a partir de $v_p = \lambda \cdot \nu$.

Del enunciado: $\lambda = 0,1$ m y $\nu = 50$ Hz. Así:

$$v_p = \lambda \cdot \nu = 0,1\ \text{m} \cdot 50\ \text{Hz} = 5\ \text{m/s}$$

b) La expresión general de una onda armónica es:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

El sonido

Si en $t = 0$ la elongación es nula, el desfase inicial es nulo también. Como la onda se propaga en el sentido negativo del eje X, el signo entre los términos de la fase será positivo. $A = 0{,}04$ m y $T = 1/\nu$. Por tanto:

$$y_x = 0{,}04 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(50 \cdot t + \frac{x}{0{,}1}\right)\right] =$$
$$= 0{,}04 \cdot \text{sen}(100\pi \cdot t + 20\pi \cdot x)\,\text{m}$$

37. **La energía de una onda es proporcional:**

a) Al cuadrado de la amplitud.

b) A la inversa de la frecuencia.

c) A la longitud de onda.

(Galicia. Junio, 2003)

La energía de la onda es:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Donde $k = m \cdot \omega^2$. Por tanto, la única respuesta correcta es la a).

38. **Supongamos que se produce una onda armónica al lanzar una piedra a la superficie en calma de un estanque. Su amplitud:**

a) Disminuye con la distancia al foco.

b) Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.

c) Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

d) Permanece constante.

La onda armónica producida es bidimensional. Por tanto:

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

En estas circunstancias la amplitud de la onda en un punto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al foco. La respuesta correcta es la b).

39. **Supongamos que un altavoz produce una onda armónica en un espacio abierto. Su intensidad:**

a) Disminuye con la distancia al foco.

b) Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.

c) Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

d) Permanece constante.

Se trata de una onda tridimensional, por lo que:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

La intensidad de una onda tridimensional en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.
La respuesta correcta es la c).

40. **Una onda de 40 Hz, que se propaga a 20 m/s, llega al límite con otro medio formando un ángulo de 45°. La onda avanza en el nuevo medio formando un ángulo de 60° con la perpendicular a la frontera entre ambos. Calcula la velocidad a la que se propaga la onda en el nuevo medio y la frecuencia y la longitud de la onda en cada medio.**

El rayo incidente y el refractado en el nuevo medio tendrán la misma frecuencia. La velocidad de propagación en el medio refractado puede obtenerse a partir de:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{s}}{v_{\text{refractado}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{refractado}} = v_{\text{incidente}} \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{s}}{\text{sen}\,\hat{i}} = 20\ \text{m/s} \cdot \frac{\text{sen}\ 60°}{\text{sen}\ 45°} = 24{,}5\ \text{m/s}$$

Obtendremos la longitud de onda para cada uno de los medios según:

$$v_{\text{p}} = \lambda \cdot \nu \rightarrow \lambda = \frac{v_{\text{p}}}{\nu}$$

Entonces:

- $\lambda_{\text{incidente}} = \dfrac{v_{\text{p i}}}{\nu} = \dfrac{20\ \text{m/s}}{40\ \text{Hz}} = 0{,}5\ \text{m}$
- $\lambda_{\text{refractado}} = \dfrac{v_{\text{p r}}}{\nu} = \dfrac{24{,}5\ \text{m/s}}{40\ \text{Hz}} = 0{,}6125\ \text{m}$

41. **Explica cómo es posible que sonando dos altavoces en una sala vacía haya puntos de la misma donde no se oiga ningún sonido. ¿Ocurre algo similar si solo hay un altavoz?**

Es posible que en un determinado punto la interferencia entre las ondas de los dos altavoces resulte en una interferencia destructiva, de forma que tengan la misma amplitud pero signo opuesto y, por tanto, su suma sea nula. Esto no puede ocurrir si solo hay un altavoz, ya que con solo una onda no se producen interferencias en ningún punto.

El único efecto que se podría producir con un solo altavoz es una atenuación en los puntos donde la onda directa

El sonido

y la reflejada en las paredes de la sala lleguen con signos opuestos. Nunca se podrán anular, ya que la onda reflejada estará atenuada y, por tanto, no se restarán amplitudes iguales, pero sí se podrá detectar una disminución en el sonido percibido.

42. **Dos ondas que tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud se están moviendo en la misma dirección y sentido. Si su diferencia de fase es π/2 y cada una de ellas tiene una amplitud de 0,05 m, halle la amplitud de la onda resultante.**

(La Rioja. Septiembre, 2000)

Podemos obtener la onda resultante de la interferencia de dos ondas armónicas a partir de:

$$y = y_A + y_B \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2}\right) + A \cdot \text{sen}\,(\omega t - k x_2) =$$

$$= A \cdot \left[\text{sen}\left(\omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\,(\omega t - k x_2)\right]$$

Utilizamos la relación trigonométrica relativa a la suma del seno de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\alpha \equiv \omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2};\ \beta \equiv \omega t - k x_2$$

Entonces:

$$y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{\overbrace{\left(\omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2}\right)}^{\alpha} + \overbrace{(\omega t - k x_2)}^{\beta}}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{\overbrace{\left(\omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2}\right)}^{\alpha} - \overbrace{(\omega t - k x_2)}^{\beta}}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\omega \cdot t - k \cdot (x_1 + x_2) + \frac{\pi}{2}}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{k \cdot (x_2 - x_1) + \frac{\pi}{2}}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

La amplitud de esta onda resultante será:

$$A_{res.} = 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Si las ondas se mueven en la misma dirección y sentido, habrá puntos P del medio que se encuentren a la misma distancia de los focos donde se originan las ondas. Para esos puntos:

$$A_{res.} = 2 \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m} = 0{,}071 \text{ m}$$

43. Dos ondas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02m. Determine la ecuación de la onda resultante y su amplitud si las dos ondas difieren en fase:

a) En π/6. **b) En π/3.**

(La Rioja. Junio, 2007)

Podemos obtener la onda resultante de la interferencia de dos ondas armónicas sumando ambas ondas:

$$y = y_A + y_B \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot \text{sen}(\omega t - k x_1 + \phi) + A \cdot \text{sen}(\omega t - k x_2) =$$
$$= A \cdot [\text{sen}(\omega t - k x_1 + \phi) + \text{sen}(\omega t - k x_2)]$$

Utilizamos la relación trigonométrica relativa a la suma del seno de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\alpha \equiv \omega t - k x_1 + \frac{\pi}{2};\ \beta \equiv \omega t - k x_2$$

$$y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{\overbrace{(\omega t - kx_1 + \phi)}^{\alpha} + \overbrace{(\omega t - kx_2)}^{\beta}}{2}\right] \cdot$$
$$\cdot \cos\left[\frac{\overbrace{(\omega t - kx_1 + \phi)}^{\alpha} - \overbrace{(\omega t - kx_2)}^{\beta}}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{2 \cdot \omega t - k \cdot (x_1 + x_2) + \phi}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{k \cdot (x_1 + x_2) + \phi}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2 \cdot A \cdot \cos\left[\frac{k \cdot (x_2 - x_1) + \phi}{2}\right] \cdot \text{sen}\left[\omega \cdot t - \frac{k \cdot (x_1 + x_2) + \phi}{2}\right]$$

El sonido

La amplitud de esta onda resultante será:

$$A_{res.} = 2 \cdot A \cdot \cos\left[\frac{k \cdot (x_2 - x_1) + \phi}{2}\right]$$

Para estas ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}02\ \text{m}} = 100\pi\ \text{m}^{-1}$$

a) Para $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$$A_{res.} = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \cos\left[\frac{100\pi \cdot (x_2 - x_1)}{2} + \frac{\pi}{12}\right]$$

Para puntos P que se encuentren a la misma distancia de ambos focos:

$$A_{res.} = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3{,}86 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

b) Para $\phi = \frac{\pi}{3}$:

$$A_{res.} = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \cos\left[\frac{100\pi \cdot (x_2 - x_1)}{2} + \frac{\pi}{6}\right]$$

Para puntos P que se encuentren a la misma distancia de ambos focos:

$$A_{res.} = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3{,}46 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

44. Explica por qué lo que llamamos onda estacionaria no es una onda de propagación.

Las ondas estacionarias no son propiamente ondas, ya que no propagan la energía en el medio como lo hacen las ondas armónicas. Cada punto del medio que se ve sometido a una onda estacionaria vibra con una amplitud que depende de su posición [$2 \cdot A \cdot \cos(kx)$]. En consecuencia, la energía de vibración en cada punto es diferente, y existen puntos, los nodos, en los que es nula. Diremos, en consecuencia, que las ondas estacionarias no son ondas de propagación.

45. Explica las diferencias entre una onda pulsante y una onda estacionaria.

Una pulsación es un tipo de interferencia que se produce cuando coinciden en un medio ondas con frecuencias similares.

En el resultado de la superposición de dos ondas que tienen la misma amplitud y frecuencia ligeramente diferente, hay instantes en los que un determinado punto del medio vibra con una amplitud suma de las dos ondas y otros en los que vibra con amplitud 0.

La onda que resulta se llama pulsación, y es una onda cuya amplitud varía periódicamente en un tiempo $T_{mod.}$. La pulsación es una onda de amplitud modulada.

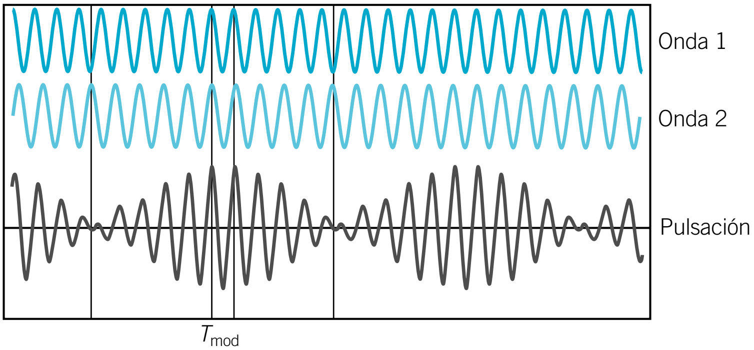
Se produce una onda estacionaria cuando interfieren dos ondas armónicas de la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda que se propagan en sentidos opuestos y con oposición de fase.

Como resultado de la superposición, cada punto de la onda vibra en torno a la posición de equilibrio con una amplitud que depende de su distancia al origen. La onda estacionaria presenta vientres (puntos que oscilan con una amplitud que es el doble de la de las ondas que se superponen) y nodos (puntos que están siempre en la posición de equilibrio). Dos vientres sucesivos o dos nodos sucesivos están separados entre sí una distancia de $\lambda/2$, y la separación entre un nodo y un vientre sucesivo es $\lambda/4$.

46. Explica por qué se dice que una pulsación es una onda de amplitud modulada.

En el resultado de la superposición de dos ondas que tienen la misma amplitud y frecuencia ligeramente diferente, hay instantes en los que un determinado punto del medio vibra con una amplitud suma de las dos ondas y otros en los que vibra con amplitud nula. La onda que resulta se llama pulsación, y es una onda cuya amplitud varía periódicamente en un tiempo T_{mod}. La pulsación es una onda de amplitud modulada.

Se denomina de amplitud modulada porque la amplitud de la onda varía a su vez periódicamente:



47. En una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas, se cumple:

a) La amplitud es constante.

b) La onda transporta energía.

c) La frecuencia es la misma que la de las ondas que interfieren.

(Galicia. Junio, 2005)

El sonido

a) Falso: la onda resultante tiene vientres y nodos, y su amplitud depende de la distancia al origen.

b) Falso: en una onda estacionaria no hay transporte de energía, por lo que no es estrictamente una onda.

c) Verdadero.

48. Una onda estacionaria sobre una cuerda tiene por ecuación:

$$\boldsymbol{y = 0{,}02 \cdot \cos(\pi/2)\, x \cdot \cos 40\pi t}$$

donde *x* e *y* se miden en metros, y *t*, en segundos.

1. Escribir funciones de onda para dos trenes de ondas que al superponerse producirán la onda estacionaria anterior.

2. Calcular la distancia que existe entre dos nodos consecutivos.

3. Determinar la velocidad de un segmento de cuerda situado en el punto *x* = 1 en cualquier instante.

(La Rioja. Septiembre, 2005)

En una onda estacionaria:

$$y = y_A + y_B \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot \text{sen}(\omega t + k\,x) + A \cdot \text{sen}(\omega t - k\,x) =$$

$$= A \cdot [\text{sen}(\omega t + k\,x) + \text{sen}(\omega t - k\,x)]$$

Utilizamos la relación trigonométrica relativa a la suma del seno de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\alpha \equiv \omega t - k\,x_1 + \frac{\pi}{2};\ \beta \equiv \omega t - k\,x_2$$

$$y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{\overbrace{(\omega t + k\,x)}^{\alpha} + \overbrace{(\omega t - k\,x)}^{\beta}}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{\overbrace{(\omega t + k\,x)}^{\alpha} - \overbrace{(\omega t - k\,x)}^{\beta}}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = A \cdot 2 \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot \cos(k\,x) \rightarrow y = 2 \cdot A \cdot \cos(k\,x) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Reescribimos nuestra onda estacionaria:

$$y = 0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \cos\left(40\pi \cdot t\right) =$$

$$= 0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(40\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparando:

- $2A = 0{,}02 \rightarrow A = \dfrac{0{,}02}{2} = 0{,}01$ m
- $k = \pi/2\ \text{m}^{-1}$
- $\omega = 40\pi$ rad/s

1) La función de onda de las ondas que se superponen será:

- $y_1 = 0{,}01 \cdot \text{sen}\left(40\pi \cdot t + \dfrac{\pi}{2} \cdot x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

- $y_2 = 0{,}01 \cdot \text{sen}\left(40\pi \cdot t - \dfrac{\pi}{2} \cdot x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

2) La distancia que separa dos nodos consecutivos es $\lambda/2$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ m} \rightarrow \text{Distancia} = \frac{\lambda}{2} = \frac{4 \text{ m}}{2} = 2 \text{ m}$$

3) Obtenemos la velocidad derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d\left[0{,}02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \cos(40\pi \cdot t)\right]}{dt} =$$

$$= -0{,}02 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \text{sen}(40\pi \cdot t)$$

Para $x = 1$ m, $v = 0$, ya que:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

49. **Una cuerda tensa, fija por sus dos extremos, tiene una longitud L = 1,2 m. Cuando esta cuerda se excita transversalmente a una frecuencia ν = 80 Hz, se forma una onda estacionaria con dos vientres.**

a) Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda.

b) ¿Para qué frecuencia inferior a la dada se formará otra onda estacionaria en la cuerda? Representa esta onda.

(Aragón. Junio, 2003)

a) Dibujamos la onda:

En este caso:

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot L}{2} = L = 1{,}2 \text{ m}$$

La velocidad de propagación será:

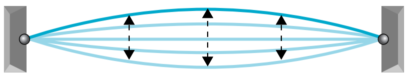
$$v_p = \nu \cdot \lambda = 80 \text{ Hz} \cdot 1{,}2 \text{ m} = 96 \text{ m/s}$$

b) La frecuencia dada se corresponde con el segundo armónico:

$$\nu_2 = \frac{2v_p}{2 \cdot L} = 2\nu_0$$

La frecuencia inmediatamente inferior para la que se produce una onda armónica será la del primer armónico (frecuencia fundamental):

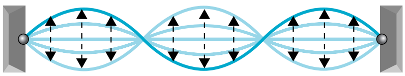
$$\nu_1 = \frac{v_p}{2 \cdot L} = \nu_0 = \frac{80\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}2\ \text{m}} = 33{,}\widehat{3}\ \text{Hz}$$



50. Una cuerda de 40 cm con sus dos extremos fijos vibra en un modo con 2 nodos internos.
¿Cuál es la longitud de onda de la vibración?

(R. Murcia. Junio, 2003)

Dibujamos la onda:



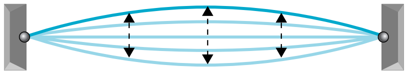
La cuerda vibra en su tercer armónico. Por tanto:

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{2 \cdot 0{,}4\ \text{m}}{3} = 0{,}267\ \text{m}$$

51. Explique por qué, cuando en una guitarra se acorta la longitud de una cuerda, el sonido resulta más agudo.

(Andalucía. 2007)

La cuerda de una guitarra forma una onda estacionaria con nodos en los extremos:



En esta situación:

$$\nu_1 = \frac{v_p}{2 \cdot L} = \nu_0$$

Al acortar la longitud de la cuerda, disminuye L y, por tanto, aumenta la frecuencia de vibración. Las frecuencias más altas se perciben como sonidos más agudos.

52. **La ecuación de una onda sonora que se propaga en la dirección del eje X es:**

$$y = 4 \cdot \text{sen}\ 2\pi(330t - x) \quad \text{(SI)}$$

Calcula:

a) La velocidad de propagación.

b) La velocidad máxima de vibración de un punto del medio en el que se transmite la onda.

c) Suponiendo que su atenuación es imperceptible hasta una distancia de 50 cm del foco, ¿cuál será la amplitud de la onda a una distancia de 5 m del foco?

(Galicia. Septiembre, 2007)

a) La velocidad de propagación de una onda armónica puede obtenerse como $v_p = \lambda \cdot f$. Obtendremos los parámetros por comparación con la expresión general de una onda armónica:

$$y_x = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

Comparando:

- $\nu = \dfrac{1}{T} = 330$ Hz
- $\lambda = 1$ m

Por tanto:

$$v_p = \lambda \cdot \nu = 330 \text{ m} \cdot 1 \text{ Hz} = 330 \text{ m/s}$$

b) La velocidad a la que vibran los puntos del medio se obtiene derivando la expresión de la amplitud con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dy_x}{dt} = \frac{d\{4 \cdot \text{sen}[2\pi \cdot (330 \cdot t - x)]\}}{dt} =$$
$$= 2\pi \cdot 330 \cdot 4 \cdot \cos[2\pi \cdot (330 \cdot t - x)]$$

Por tanto, su valor máximo será:

$$v_{\text{máx.}} = 2\pi \cdot 330 \text{ Hz} \cdot 4 \text{ m} = 8{,}3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

c) La onda sonora es una onda tridimensional. Por tanto, la amplitud en un punto es inversamente proporcional a la distancia al foco:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Si en el punto 1, situado a una distancia $r_1 = 0{,}5$ m la amplitud es la misma que en el origen (atenuación imperceptible), será $A_1 = 4$ m. Queremos obtener la amplitud A_2 en el punto 2, donde $r_2 = 5$ m:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow \frac{4 \text{ m}}{A_2} = \frac{5 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} \rightarrow A_2 = 4 \text{ m} \cdot \frac{0{,}5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 0{,}4 \text{ m}$$

El sonido

53. **Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 80 W. Calcule:**

a) La intensidad sonora en los puntos distantes 10 m de la fuente.

b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 130 dB?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

(C. Madrid, 2007)

a) El sonido es una onda tridimensional, por lo que sus frentes de onda son esféricos. Determinamos la intensidad a 10 m de la fuente según:

$$I_{10\,\text{m}} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot (r_{10\,\text{m}})^2} = \frac{80\ \text{W}}{4\pi \cdot (10\ \text{m})^2} \rightarrow I_{10\,\text{m}} = 0{,}064\ \text{W/m}^2$$

b) Veamos primero a qué intensidad corresponde el nivel indicado en el enunciado, 130 dB:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I_{130\,\text{dB}}}{I_0} \rightarrow 130 = 10 \cdot \log \frac{I_{130\,\text{dB}}}{10^{-12}} \rightarrow 13 = \log \frac{I_{130\,\text{dB}}}{10^{-12}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I_{130\,\text{dB}}}{10^{-12}} = 10^{13} \rightarrow I_{130\,\text{dB}} = 10^{13} \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 10\ \text{W/m}^2$$

Relacionándola con la intensidad a 10 m de la fuente podemos calcular la distancia a la que se percibe con esa intensidad:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \rightarrow \frac{I_{130\,\text{dB}}}{I_{10\,\text{m}}} = \frac{(r_{10\,\text{m}})^2}{(r_{130\,\text{dB}})^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{130\,\text{dB}} = r_{10\,\text{m}} \cdot \sqrt{\frac{I_{10\,\text{m}}}{I_{130\,\text{dB}}}} = 10\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{0{,}064\ \text{W/m}^2}{10\ \text{W/m}^2}} = 0{,}8\ \text{m}$$

54. **Una pequeña fuente sonora emite en el espacio con una potencia de 10 W, uniformemente distribuida en todas las direcciones (onda esférica).**

a) Calcula la intensidad del sonido a 10 m de dicha fuente, en unidades del SI.

b) La intensidad de un sonido también puede medirse en decibelios (dB). Explica en qué consiste la escala decibélica de medida de intensidad acústica.

c) ¿Cuál es la intensidad acústica, en dB, producida por nuestra fuente a 10 m de distancia?

La intensidad umbral del oído humano es $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

(Aragón. Septiembre, 2002)

a) Para una onda esférica (tridimensional):

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{10\ \text{W}}{4\pi \cdot (10\ \text{m})^2} = 0{,}008\ \text{W/m}^2$$

b) Dado que la respuesta subjetiva del oído humano a la intensidad del sonido no es lineal, el nivel de intensidad sonora resulta más significativo si se representa en una escala diferente a las unidades naturales. Esta no linealidad implica que para poder apreciar que el volumen de un sonido es el doble del otro, su intensidad debe ser diez veces mayor, y no el doble. La relación entre ambos no es logarítmica.

Se llama nivel de intensidad del sonido β a la relación:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

I es la intensidad de la onda sonora que llega hasta nosotros e I_0 es la intensidad umbral ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2).

El nivel de intensidad del sonido es una magnitud adimensional y, así calculada, se expresa en decibelios (dB).

c) Hemos obtenido el dato de la intensidad en unidades naturales en el apartado a). De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{0{,}008}{10^{-12}} = 99{,}031\ \text{dB}$$

55. a) ¿Qué es la intensidad de una onda y en qué unidades se mide?

b) ¿La intensidad depende de la amplitud, de la frecuencia, o de ambas?

c) ¿Qué es la intensidad sonora y en qué unidades se mide?

d) ¿Cuál es la intensidad sonora de una onda cuya intensidad es de 10^{-6} W · m^{-2}?

Dato: intensidad umbral = 10^{-12} W · m^{-2}.

(Cantabria. Junio, 2007)

a) Intensidad de una onda (I) es la potencia por unidad de la magnitud que define el frente de onda.

- Para una onda unidimensional, es la potencia que alcanza el punto.
- Si la onda es bidimensional, es la potencia por unidad de longitud. En el SI, la intensidad de una onda bidimensional se mide en W/m.
- Para una onda tridimensional, es la potencia por unidad de superficie. En el SI, la intensidad de una onda tridimensional se mide en W/m^2.

El sonido

b) Como la intensidad depende de la potencia, analizaremos la dependencia de esta con la frecuencia y la amplitud:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2\right)}{dt} = \frac{\frac{1}{2}dm \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A^2}{dt} =$$

$$= 2\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2 \cdot \frac{dm}{dt}$$

Así, resulta que la potencia (y, por tanto, la intensidad) depende de la frecuencia y de la amplitud de la onda.

c) La intensidad es la cualidad del sonido que permite identificarlo como fuerte o débil. Está relacionada con la amplitud de la onda sonora: los sonidos fuertes se corresponden con amplitudes altas, y los débiles, con las bajas. Se puede medir en W/m^2, como la intensidad de cualquier onda tridimensional, pero resulta más significativo medirlo en una escala logarítmica en dB.

Se llama nivel de intensidad del sonido β a la relación:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

I es la intensidad de la onda sonora que llega hasta nosotros e I_0 es la intensidad umbral ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2).

El nivel de intensidad del sonido es una magnitud adimensional y, así calculada, se expresa en decibelios.

d) Calculamos el nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ dB}$$

56. En un partido de fútbol un espectador canta un gol con una sonoridad de 40 dB. ¿Cuál será la sonoridad si gritaran a la vez y con la misma intensidad sonora los 1000 espectadores que se encuentran viendo el partido?
$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.
(Castilla-La Mancha. Junio, 2002)

Pasamos el nivel de intensidad sonora de 40 dB a intensidad en unidades naturales:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 40 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} = \frac{40}{10} = 4 \rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow I = 10^4 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

La intensidad producida por los 1000 espectadores será:

$$I_T = 1000 \cdot I = 1000 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow I_T = 10^{-5}\ \text{W/m}^2$$

Obtenemos el nivel de intensidad sonora correspondiente:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I_T}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-5}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \beta = 10 \cdot 7 = 70\ \text{dB}$$

Como se ve, al unir 1000 voces se consigue aumentar el nivel de intensidad sonora en:

$$70\ \text{dB} - 40\ \text{dB} = 30\ \text{dB}$$

57. **Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) La intensidad de la onda sonora emitida por una fuente puntual es directamente proporcional a la distancia a la fuente.

b) Un incremento de 30 decibelios corresponde a un aumento de la intensidad del sonido en un factor de 1000.

(C. Madrid, 2006)

a) La onda sonora es tridimensional. En una onda tridimensional, la intensidad de la onda en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.
La respuesta es falsa.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

b) Ahora tenemos:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow \frac{\beta}{10} = \log \frac{I}{I_0} \rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Si $\beta' = \beta + 30$ dB:

$$\frac{I'}{I_0} = 10^{\frac{\beta'}{10}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{I'}{I_0} = 10^{\frac{\beta+30}{10}} = 10^{\frac{\beta}{10}+\frac{30}{10}} = \underbrace{10^{\frac{\beta}{10}}}_{I/I_0} \cdot 10^{\frac{30}{10}} = \frac{I}{I_0} \cdot 10^3$$

Es decir:

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{I}{I_0} \cdot 1000 \rightarrow I' = 1000 \cdot I$$

La respuesta es verdadera.

El sonido

58. **Un muro de 60 cm tiene un espesor de semiabsorción de 80 cm.**

a) Si al muro llega una onda de 5 W/m², ¿qué intensidad llega a la segunda cara del muro?

b) ¿Qué espesor debería tener para que la intensidad del sonido se reduzca en un 80 %?

Podemos calcular el coeficiente de absorción del medio a partir del dato del espesor de semiabsorción:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot D_{1/2}} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\beta \cdot D_{1/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta = -\frac{\ln(0,5)}{D_{1/2}} = -\frac{\ln(0,5)}{0,8} = 0,87$$

Con este dato podemos obtener la intensidad que llega a la segunda cara del muro de 60 cm:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} = 5 \cdot e^{-0,87 \cdot 0,6} = 2,97 \text{ W/m}^2$$

Ahora buscamos el espesor para el que la intensidad se reduce al 20 % del valor inicial:

$$0,2 \cdot \cancel{I_0} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta \cdot D_{0,2}} \rightarrow \ln(0,2) = -\beta \cdot D_{0,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow D_{0,2} = \frac{\ln(0,2)}{-0,87} = 1,85 \text{ m}$$

NOTAS

8 La luz y la óptica

PRESENTACIÓN

- La luz como problema físico ha captado el interés de los científicos a lo largo de muchos años. El estudio del tema, aún a este nivel, debe reflejar la controversia a fin de que el alumnado comprenda cómo surgieron las distintas soluciones y cómo las evidencias experimentales, o la falta de ellas, resultaron determinantes para la aceptación de las teorías vigentes.
- El tema comprende lo que se conoce como óptica física y óptica geométrica. En la primera parte se aplican a la luz los principios establecidos en el tema anterior para el movimiento ondulatorio. En la segunda utilizamos las conocimientos clásicos de la óptica geométrica para construir la imagen que los espejos y las lentes forman de un objeto cuando este se encuentra a distintas distancias de ellos.

OBJETIVOS

- Conocer la controversia histórica acerca de la naturaleza de la luz. Analizar las evidencias de su naturaleza corpuscular y de su naturaleza ondulatoria y cómo los estudios teóricos decantaron la controversia hacia una teoría dual.
- Identificar la luz como un fenómeno ondulatorio. Relacionar las características de una radiación luminosa (longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de propagación) con la ecuación de la onda correspondiente.
- Conocer los fenómenos relacionados con la propagación rectilínea de la luz (sombras y penumbras, reflexión y refracción) y las leyes que los gobiernan.
- Comprender algunos efectos experimentales relacionados con los fenómenos anteriores, como las ilusiones ópticas relacionadas con la reflexión y la refracción, la reflexión total y la fibra óptica, la aparición del arco iris, etc.
- Analizar el espectro electromagnético desde el punto de vista de los efectos de las radiaciones en relación con la energía que transportan.
- Conocer los fenómenos relacionados con el carácter ondulatorio de la luz y comprender hechos que son consecuencia de los mismos. Analizar de forma especial las interferencias producidas por la coincidencia en el espacio y en el tiempo de ondas coherentes y la difracción cuando la luz atraviesa obstáculos de pequeño tamaño (experiencias de Young y Fresnell).
- Entender el concepto «luz polarizada» y conocer alguna de sus aplicaciones.
- Ser capaz de elaborar la imagen que un espejo (plano o curvo) o una lente delgada forman de un objeto, dondequiera que este se encuentre. Obtener resultados de forma gráfica y matemática.
- Comprender el funcionamiento de algunos instrumentos ópticos, muy especialmente el ojo humano.

8 La luz y la óptica

CONTENIDOS

Conceptos

- Análisis histórico de la naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz.
- La luz como un ejemplo de movimiento ondulatorio. Características de la onda luminosa y su relación con la ecuación de la onda.
- Fenómenos relacionados con la propagación rectilínea de la luz (sombras y penumbras, reflexión y refracción). Leyes que los gobiernan.
- Estudio del espectro electromagnético.
- Fenómenos relacionados con el carácter ondulatorio de la luz. Interferencias (experiencia de Young), difracción (experiencia de Fresnell) y polarización.
- La óptica geométrica. Principios básicos y normas DIN.
- Reflexión en espejos planos y curvos. Obtención de imágenes de forma gráfica y analítica.
- Refracción en un dioptrio esférico.
- Refracción en lentes delgadas. Obtención de imágenes de forma gráfica y analítica.
- Estudio del ojo y algunos instrumentos ópticos sencillos.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Habituarse a distinguir entre un efecto óptico y el fenómeno real que lo produce.
- Adquirir destreza en el estudio gráfico que permite analizar la imagen de un objeto que se puede obtener por medio de espejos y lentes delgadas.
- Comprender la necesidad del establecimiento de normas al estilo de las normas DIN.

Actitudes

- Reconocer la importancia de la experimentación para la aceptación de teorías científicas.
- Comprender el carácter democrático de la ciencia al comprobar que las teorías de un científico menos reconocido se pueden imponer a las de otros de más prestigio si hay experiencias que las avalen.
- Asumir la importancia de la correcta representación gráfica de los problemas como medio para facilitar su resolución.

EDUCACIÓN EN VALORES

De forma análoga a lo que sucedía en el tema anterior, aquí se manejan conceptos que tienen amplia repercusión en aspectos no académicos, lo que se puede aprovechar para una educación en valores.

1. **Educación para la salud**

   En los últimos años se vierte mucha información acerca de los peligros de una exposición incontrolada a los rayos ultravioletas y la necesidad de protegerse frente a sus efectos. Estos rayos forman parte del espectro electromagnético, y el estudio del mismo puede ayudar a comprender el porqué de esa necesidad.

   Asimismo, se puede aprovechar para comentar el efecto de otros tipos de radiaciones, desde las energéticas radiaciones ionizantes, que justifican el temor a un escape radiactivo, hasta las mucho menos inofensivas radiaciones de radio, televisión o telefonía móvil. Si el profesor lo considera conveniente, puede abrir un debate para que el alumnado muestre sus temores y se pueda analizar la base científica de los mismos.

2. **Educación para el consumidor**

   Las especificaciones de muchos aparatos que compran los jóvenes incluyen magnitudes cuyo significado se estudia en este tema. Puede ser interesante hacer una recopilación de las que aparecen en una serie de artículos de uso frecuente y estudiar su significado.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Conociendo los parámetros característicos de una radiación luminosa (periodo, frecuencia, amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación), obtener la ecuación de la onda, y viceversa.
2. A partir de las leyes de la reflexión y la refracción, localizar la imagen de un objeto cuando los rayos de luz llegan a la superficie de separación entre dos medios y se propagan o no por el segundo.
3. Determinar si en una situación concreta se puede producir o no reflexión total y, en su caso, calcular el ángulo límite.
4. Conocer el espectro electromagnético. Sin necesidad de recordar de memoria los datos concretos de las radiaciones, relacionar su energía con los efectos que provocan.
5. Explicar las señales que resultan de la interferencia de dos ondas de luz coherentes. Relacionar los máximos y los mínimos con su posición sobre una pantalla y la longitud de onda de la radiación, para una instalación determinada.
6. Explicar las figuras que resultan de la difracción de un haz de luz monocromática a través de rendijas u obstáculos pequeños.
7. Explicar el fenómeno de polarización de la luz y conocer alguna de sus aplicaciones.
8. Ser capaz de determinar la imagen que un espejo (recto o curvo) o una lente delgada dan de un objeto, dependiendo de dónde se encuentre este. Se debe describir la imagen que resulta por procedimientos gráficos y analíticos.

1. **Un rayo de luz que viaja por un medio con velocidad de 2,5 · 10^8 m/s incide con un ángulo de 30°, con respecto a la normal, sobre otro medio donde su velocidad es de 2 · 10^8 m/s.**
Calcula el ángulo de refracción.
(C. Valenciana. Junio, 2007)

De acuerdo con las leyes de la refracción:

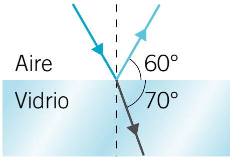
$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{v_{\text{refractado}}}$$

Sustituyendo los datos del enunciado:

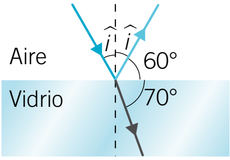
$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,\hat{i} \cdot \frac{v_{\text{refractado}}}{v_{\text{incidente}}} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,30° \cdot \frac{2 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2{,}5 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 0{,}4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{r} = \text{arc sen}\,(0{,}4) = 23{,}6°$$

2. **La figura muestra un rayo de luz que avanza por el aire y se encuentra con un bloque de vidrio. La luz en parte se refleja y en parte se refracta. Calcular la velocidad de la luz en este vidrio y su índice de refracción.**
($n_{\text{aire}} = 1$; $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s.)
(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2007)



El ángulo que forma el rayo reflejado con la horizontal nos permite conocer el ángulo de incidencia. Como se aprecia en la imagen:



$$\hat{i} = 90° - 60° = 30°$$

También a partir de la imagen podemos calcular el ángulo de refracción:

$$\hat{r} = 90° - 70° = 20°$$

Calculamos la velocidad de propagación de la luz en el vidrio a partir de las leyes de la refracción:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{v_{\text{refractado}}} \rightarrow$$

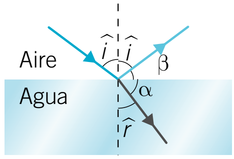
$$\rightarrow v_{\text{refractado}} = \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{\text{sen}\,\hat{i}} \cdot v_{\text{incidente}} = \frac{\text{sen}\,20°}{\text{sen}\,30°} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2{,}05 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Por definición, se puede calcular el índice de refracción así:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2{,}05 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}46$$

3. Un rayo de luz monocromática que se propaga por el aire incide sobre una superficie de agua. Determina el ángulo de incidencia para el cual el rayo reflejado es perpendicular al refractado. (El índice de refracción del agua vale 1,33.)

(Islas Baleares. Junio, 2006)



De acuerdo con la ley de Snell:

$$n_{\text{incidente}} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{\text{refractado}} \cdot \text{sen}\,\hat{r}$$

La imagen nos permite establecer una relación entre los ángulos incidente y refractado. Del enunciado sabemos que:

$$\alpha + \beta = 90°$$

En el esquema:

$$\hat{r} + \alpha + \beta + \hat{i} = 180° \rightarrow \hat{r} + 90° + \hat{i} = 180° \rightarrow \hat{r} = 90° - \hat{i}$$

Por tanto:

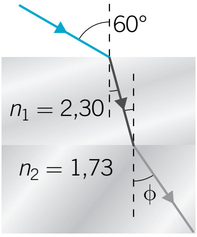
$$n_{\text{incidente}} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{\text{refractado}} \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow 1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = 1{,}33 \cdot \text{sen}\,\underbrace{(90° - \hat{i})}_{\hat{r}}$$

Como $\text{sen}\,(90° - \hat{i}) = \cos \hat{i}$:

$$1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = 1{,}33 \cdot \cos \hat{i} \rightarrow \frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\cos \hat{i}} = 1{,}33 \rightarrow \text{tg}\,\hat{i} = 1{,}33 \rightarrow \hat{i} = 53°$$

4. Un haz de luz monocromática incide desde el aire sobre dos placas planas transparentes de índices de refracción $n_1 = 2{,}30$ y $n_2 = 1{,}73$ como indica la figura. Determina el ángulo de refracción ϕ de la figura.

(Castilla-La Mancha, 2006)



De acuerdo con la ley de Snell:

$$n \cdot \text{sen}\,\hat{i}_1 = n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{r}_2$$

En el primer cambio de medio calculamos el ángulo de refracción del primer medio al segundo.

Este ángulo será, a su vez, el ángulo de incidencia del cambio del segundo medio al tercero ($\widehat{r}_1 = \widehat{i}_2$).

$$n \cdot \operatorname{sen} \widehat{i}_1 = n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r}_1 \rightarrow 1 \cdot \operatorname{sen} 60° = 2{,}30 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \widehat{r}_1 = \frac{\operatorname{sen} 60°}{2{,}30} = 0{,}3765 \rightarrow \widehat{r}_1 = \operatorname{arc\ sen}(0{,}3765) \rightarrow \widehat{r}_1 = 22{,}12°$$

De nuevo aplicando la ley de Snell podemos obtener el ángulo pedido:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i}_2 = n_2 \cdot \operatorname{sen} \phi \rightarrow 2{,}30 \cdot \underbrace{0{,}3765}_{\widehat{i}_2 = \widehat{r}_1} = 1{,}73 \cdot \operatorname{sen} \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \phi = \frac{2{,}30 \cdot 0{,}3765}{1{,}73} = 0{,}5 \rightarrow \phi = \operatorname{arc\ sen}(0{,}5) \rightarrow \phi = 30°$$

5. ¿Cuál es el ángulo límite para la reflexión total interna en el agua de un lago? El índice de refracción del agua es 1,33.

(La Rioja. Junio, 2006)

Lo calcularemos teniendo en cuenta que el ángulo de refracción correspondiente debe ser 90°. En función de la ley de Snell, obtenemos el ángulo de incidencia límite para reflexión total:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r} \rightarrow 1{,}33 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i} = 1 \cdot \operatorname{sen} 90° \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \widehat{i} = \frac{\operatorname{sen} 90°}{1{,}33} = 0{,}75 \rightarrow \widehat{i} = \operatorname{arc\ sen}(0{,}75) \rightarrow \widehat{i} = 48{,}6°$$

6. El ángulo límite vidrio-agua es de 60°. Un rayo de luz, que se propaga por el vidrio, incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45° y se refracta dentro del agua.

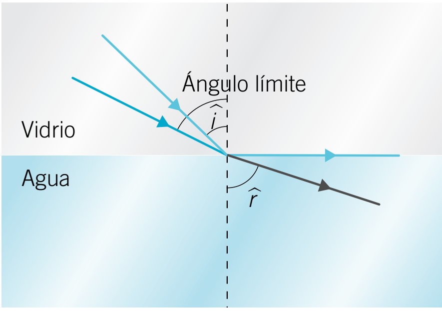
a) Explique qué es el ángulo límite y determine el índice de refracción del vidrio.

b) Calcule el ángulo de refracción en el agua.

Dato: índice de refracción en el agua, $n_a = 1{,}33$.

(Andalucía, 2006)

a) Se denomina ángulo límite o crítico al mayor ángulo que puede formar un rayo incidente con la normal para que se produzca refracción; un ángulo de incidencia mayor que el ángulo límite produce reflexión total.



b) Este ángulo de incidencia será tal que el ángulo de refracción sea de 90°. Para un ángulo de incidencia mayor no habrá fenómeno de refracción y se producirá reflexión total.

Obtenemos el índice de refracción del vidrio (medio incidente) a partir de la ley de Snell, teniendo en cuenta que el ángulo refractado debe ser de 90°:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r} \rightarrow n_1 \cdot \operatorname{sen} 60° = 1{,}33 \cdot \operatorname{sen} 90° \rightarrow$$

$$\rightarrow n_1 = \frac{1{,}33 \cdot \operatorname{sen} 90°}{\operatorname{sen} 60°} = 1{,}54$$

b) Nuevamente utilizando la ley de Snell (medio incidente: vidrio, medio refractado: agua):

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r} \rightarrow 1{,}54 \cdot \operatorname{sen} 45° = 1{,}33 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \widehat{r} = \frac{1{,}54 \cdot \operatorname{sen} 45°}{1{,}33} = 0{,}81 \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{r} = \operatorname{arc\ sen} (0{,}81) \rightarrow \widehat{r} = 54°$$

7. Si el índice de refracción del diamante es 2,52, y el del vidrio, 1,27:

a) La luz se propaga con mayor velocidad en el diamante.

b) El ángulo límite entre el diamante y el aire es menor que entre el vidrio y el aire.

c) Cuando la luz pasa del diamante al vidrio, el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de refracción.

(Galicia. Junio, 2005)

a) En este caso:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n}$$

La luz se propagará a mayor velocidad en el medio con menor índice de refracción. En este caso se propagará con mayor velocidad en el vidrio, luego la afirmación es falsa.

b) El ángulo límite es aquel que produce un ángulo de refracción de 90° con la normal. Utilizamos la ley de Snell para determinar el ángulo límite:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \widehat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \widehat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \widehat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \operatorname{sen} 90° = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \widehat{i}_{\text{límite}} = \operatorname{arc\ sen} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Para el diamante:

$$\widehat{i}_{\text{límite}} = \operatorname{arc\ sen} \left(\frac{1}{2{,}52} \right) = 23{,}38°$$

Para el vidrio:

$$\widehat{i}_{\text{límite}} = \text{arc sen}\left(\frac{1}{1{,}27}\right) = 51{,}94°$$

Por tanto, la afirmación es verdadera.

c) Cuando la luz pasa a un medio menos refringente (menor n), se aleja de la normal. En este caso ocurre así, puesto que el diamante tiene mayor índice de refracción que el vidrio. Por tanto, el ángulo de refracción será mayor que el de incidencia. La afirmación es falsa.

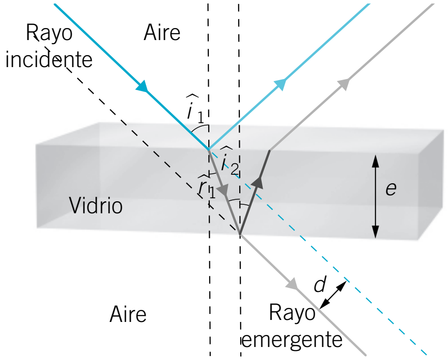
8. Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30°. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción es 1,5.

a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal.

b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

(Andalucía, 2006)

a) Podemos ver en el siguiente diagrama cuál es el camino seguido por el rayo al incidir sobre la lámina de vidrio:

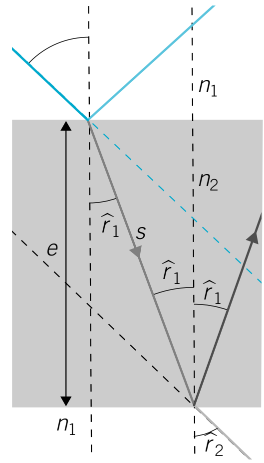


El rayo que emerge de la lámina forma un ángulo con la normal igual al que forma el rayo incidente. Si el ángulo de incidencia es de 30°, el rayo que emerge formará un ángulo también de 30° con la normal. Lo comprobamos utilizando la ley de Snell.

- Entre el aire y el vidrio:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\widehat{i}_1 = n_2 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 1 \cdot \text{sen}\,30° = 1{,}5 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_1 \rightarrow \text{sen}\,\widehat{r}_1 = 0{,}33$$

- Entre el vidrio y el aire.
  El ángulo de refracción anterior es el ángulo de incidencia en este caso ($\widehat{i}_2 = \widehat{r}_1$):



$$n_2 \cdot \text{sen}\,\widehat{i}_2 = \underbrace{n_3}_{n_1 = 1} \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}5 \cdot 0{,}33 = 1 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\widehat{r}_2 = 0{,}5 \rightarrow \widehat{r}_2 = 30°$$

b) Ampliando la zona que muestra el camino de la luz dentro del vidrio se deduce, por tanto, que:

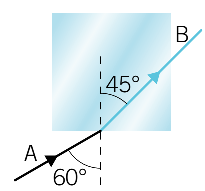
$$\text{sen}\,\widehat{r}_1 = 0{,}33 \rightarrow \widehat{r}_1 = 19{,}45° \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\widehat{r}_1 = 0{,}94$$

Por tanto:

$$e = s \cdot \cos\widehat{r}_1 \rightarrow s = \frac{e}{\cos\widehat{r}_1} = \frac{5\text{ cm}}{0{,}94} = 5{,}32\text{ cm}$$

9. **Sobre un prisma cúbico de índice de refracción *n* situado en el aire incide un rayo luminoso con un ángulo de 60°. El ángulo que forma el rayo emergente con la normal es de 45°. Determine:**

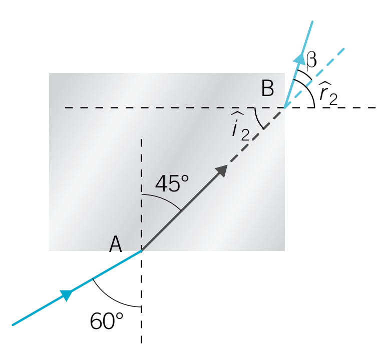


a) El índice de refracción *n* del prisma.

b) El ángulo que forman entre sí la dirección del rayo incidente en A con la dirección del rayo emergente en B.

(Castilla y León. Junio, 2007)

a) A partir de la ley de Snell obtenemos el índice de refracción pedido:



$$n_1 \cdot \text{sen}\,\widehat{i}_1 = n_2 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \cdot \text{sen}\,60° = n_2 \cdot \text{sen}\,45° \rightarrow$$

$$\rightarrow n_2 = \frac{\text{sen}\,60°}{\text{sen}\,45°} = 1{,}225$$

b) Téngase en cuenta que la segunda refracción se hace sobre una cara lateral del prisma.

$$\widehat{i}_2 = 90° - \widehat{r}_1 = 90° - 45° = 45°$$

Aplicamos la ley de Snell a esta situación:

$$n_2 \cdot \text{sen}\,\widehat{i}_2 = n_1 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_2 \rightarrow 1{,}225 \cdot \text{sen}\,45° = 1 \cdot \text{sen}\,\widehat{r}_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\widehat{r}_2 = 0{,}866 \rightarrow \widehat{r}_2 = \text{arc sen}(0{,}866) \rightarrow \widehat{r}_2 = 60°$$

El ángulo pedido en el enunciado es:

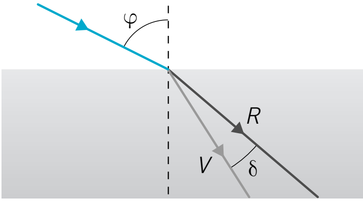
$$\widehat{r}_2 - \beta = 60° - 30° = 30°$$

10. ¿Es posible aprovechar el fenómeno de la refracción de la luz para generar un arco iris iluminando las gotas de lluvia con un haz láser de luz roja?

No es posible. La radiación de un láser de luz roja es una radiación pura formada por una sola frecuencia y se propaga toda a una determinada velocidad. No tiene componentes diversas propagándose a distintas velocidades como la luz blanca.

Solo se puede separar una luz en un arco iris cuando la luz está formada por radiaciones de distintas frecuencias que se propagan juntas, pero cada una tiene una velocidad de propagación diferente cuando pasa a otro medio distinto del aire.

11. Explica en qué consiste el fenómeno de dispersión de la luz. El índice de refracción del agua varía, dentro del espectro visible, entre $n_R = 1{,}330$ para luz de color rojo y $n_V = 1{,}344$ para luz de color violeta. Un rayo de luz blanca incide desde el aire ($n = 1$) sobre la superficie en calma de una piscina, con ángulo de incidencia $\varphi = 60°$. Calcula la dispersión angular (ángulo δ de la figura) que se observa en la luz visible refractada.



(Aragón. Septiembre, 2005)

Se llama dispersión o esparcimiento al proceso que separa un conjunto de entes físicos que se propagan juntos. El prisma produce la dispersión de la luz.

Cuando la luz del sol atraviesa un prisma, observamos su descomposición en los colores del arco iris. La razón estriba en que la luz del sol es el resultado de otras radiaciones más simples.

En el aire, todas ellas se propagan a la misma velocidad (c), por eso apreciamos el efecto conjunto que es la luz blanca. Pero en un medio diferente (el vidrio o el agua), cada radiación se desplaza a una velocidad propia, lo que hace que sus ángulos de refracción sean diferentes (recordar la ley de Snell). El fenómeno se repite al salir de la segunda cara, lo que incrementa la separación entre las radiaciones y permite que se aprecien los colores de forma diferenciada.

Calculamos el ángulo de refracción para la luz roja y para la violeta. La diferencia entre estos dos ángulos será la dispersión angular que se pide. Utilizamos la ley de Snell en cada caso.

Luz roja:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_R \cdot \text{sen}\,\hat{r}_R \rightarrow 1 \cdot \text{sen}\,60° = 1{,}33 \cdot \text{sen}\,\hat{r}_R \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_R = \frac{\text{sen}\,60°}{1{,}33} = 0{,}65 \rightarrow \hat{r}_R = \text{arc sen}(0{,}65) \rightarrow \hat{r}_R = 40{,}6°$$

Luz violeta:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_V \cdot \text{sen}\,\hat{r}_V \rightarrow 1 \cdot \text{sen}\,60° = 1{,}344 \cdot \text{sen}\,\hat{r}_V \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_V = \frac{\text{sen}\,60°}{1{,}344} = 0{,}644 \rightarrow \hat{r}_V = \text{arc sen}(0{,}644) \rightarrow \hat{r}_V = 40{,}1°$$

Por tanto:

$$\delta = \hat{r}_R - \hat{r}_V = 40{,}6° - 40{,}1° = 0{,}5°$$

12. **a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente:**

i) Tienen la misma frecuencia.

ii) Tienen la misma longitud de onda.

iii) Se propagan en el vacío con la misma velocidad.

b) ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?

(Andalucía, 2006)

a) A cada color le corresponden una longitud de onda y una frecuencia determinadas. La relación entre la longitud de onda y la frecuencia viene dada por la velocidad de propagación de la radiación electromagnética en ese medio. Cuando la luz pasa de un medio a otro, varía su velocidad de propagación y la longitud de onda, pero no su frecuencia, que es característica de cada color.

$$v = \lambda \cdot \nu$$

En el aire, la velocidad de propagación de todas las radiaciones que forman la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s, pero su valor cambia en el agua para cada radiación. Por tanto:

i) Falso: la frecuencia es característica de cada color.

ii) Falso: cada color tiene una longitud de onda y frecuencia determinadas.

iii) Verdadero: en el vacío no se aprecian los colores componentes de la luz blanca porque se propagan todos a la misma velocidad.

b) Al propagarse en el agua, la velocidad de cada color y su longitud de onda varían, mientras que su frecuencia permanece constante.

13. **Un haz de luz roja que se propaga en el vacío tiene una longitud de onda de 650 · 10^{-9} m. Al incidir perpendicularmente sobre la superficie de un medio transparente la longitud de onda del haz que se propaga en el medio pasa a ser de 500 · 10^{-9} m.**

a) Calcular el índice de refracción del medio para esa radiación.

b) Notar que un rayo de luz que se propagase en el vacío y cuya longitud de onda fuese de 500 · 10^{-9} m sería de color verde. ¿Quiere esto decir que la luz que se propaga en el medio transparente pasa a ser de ese color?

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

(P. Asturias. Junio, 2006)

a) De acuerdo con la fórmula de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Para el caso del vacío y del medio donde la velocidad de la luz es v_{medio}:

- $E_{\text{vacío}} = h \cdot \nu_{\text{vacío}} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{\text{vacío}}}$
- $E_{\text{medio}} = h \cdot \nu_{\text{medio}} = h \cdot \dfrac{v_{\text{medio}}}{\lambda_{\text{medio}}}$

Al cambiar de medio, la energía de los fotones será la misma; por tanto, será:

$$E_{\text{vacío}} = E_{\text{medio}} \rightarrow \cancel{h} \cdot \frac{c}{\lambda_{\text{vacío}}} = \cancel{h} \cdot \frac{v_{\text{medio}}}{\lambda_{\text{medio}}} \rightarrow \frac{c}{\lambda_{\text{vacío}}} = \frac{v_{\text{medio}}}{\lambda_{\text{medio}}} \qquad [1]$$

Por otra parte, sabemos que, por definición:

$$n = \frac{c}{v_{\text{medio}}} \rightarrow \frac{1}{n} = \frac{v_{\text{medio}}}{c} \qquad [2]$$

Entonces, retomando [1] y usando [2]:

$$\frac{\cancel{c}}{\cancel{c} \cdot \lambda_{\text{vacío}}} = \frac{v_{\text{medio}}}{c \cdot \lambda_{\text{medio}}} \rightarrow \frac{1}{\lambda_{\text{vacío}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_{\text{medio}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{\lambda_{\text{medio}}} = \frac{650 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{500 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 1{,}3$$

b) No, la coloración se mantiene al cambiar de medio. Cuando la luz pasa de un medio a otro, los fotones que la integran pasan al nuevo medio con la energía que transportan (es constante). Por eso se mantiene el color. No obstante, como en el nuevo medio se desplazarán a una velocidad distinta, cambiará la longitud de onda de la radiación.

14. **Se ilumina con un láser de helio-neón que emite una luz roja de 633 nm una lámina en la que se han hecho dos rendijas y se recoge la interferencia que resulta en una pantalla situada a 1 m de la lámina. Se observa que el centro de la tercera banda brillante está 47 mm por encima del punto en que incidiría la luz del láser si no estuviese la lámina. Calcula:**

a) La separación entre las rendijas.

b) La distancia a la que se encontrará el centro de la segunda y la cuarta banda brillante.

a) Podemos obtener la separación entre rendijas, d, a partir de la expresión:

$$d = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y}$$

De acuerdo con los datos del enunciado:

- $n = 3$ por ser la tercera banda.
- $L = 1$ m.
- $y = 47$ mm.
- $\lambda = 633$ nm.

Por tanto:

$$d = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y} = 3 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{47 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

b) Podemos calcular las distancias pedidas a partir de:

$$y = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d}$$

Segunda banda:

$$y_2 = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} =$$

$$= 2 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m}} = 0{,}0313\ \text{m} = 31{,}3\ \text{mm}$$

Cuarta banda:

$$y_4 = 4 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} =$$

$$= 4 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m}} = 0{,}0627\ \text{m} = 62{,}7\ \text{mm}$$

15. **Para determinar la longitud de onda de una radiación se la hace pasar por un orificio de 3 mm de diámetro y se recoge el resultado en una pantalla que se ha colocado a 1 m de distancia del orificio. En el centro se observa un disco luminoso que tiene una anchura de 4 mm. ¿Cuál es el valor de la longitud de onda?**

El disco luminoso observado en el centro está delimitado por el primer mínimo de difracción:

$$y = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{a}$$

Como $n = 0$:

$$y = \frac{\lambda \cdot L}{a} \rightarrow \lambda = \frac{y \cdot a}{L} = \frac{0{,}002\ \text{m} \cdot 0{,}003\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 6 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

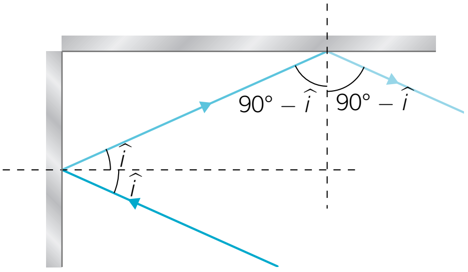
16. Razona acerca de la veracidad o falsedad de la frase siguiente: «El uso de gafas polarizadoras modifica la intensidad de la luz que llega a nuestros ojos, pero no el color de los objetos que observamos».

Es verdadera. Al eliminar las componentes de la onda en alguna de las direcciones, la intensidad total de la onda disminuye, ya que se absorbe la intensidad correspondiente a estas componentes. Sin embargo, en todas las direcciones la luz vibra con la misma frecuencia, por lo que su color no variará.

17. Dos espejos planos están colocados perpendicularmente entre sí. Un rayo que se desplaza en un plano perpendicular a ambos espejos es reflejado primero en uno y luego en el otro espejo. ¿Cuál es la dirección final del rayo con respecto a su dirección original?

(Castilla y León, 2008)

La dirección final será paralela a la dirección original del rayo, ya que el ángulo que forma el rayo reflejado con el plano de cada espejo es igual al ángulo de incidencia. Lo vemos por geometría en el esquema.



La normal a un lado es paralela al otro lado. Si el ángulo que forma el rayo incidente con la normal al primer lado es $\hat{i}$, el ángulo que forma el segundo rayo reflejado con el segundo lado es $90° - \hat{i}$.

18. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 0,5 m. Determina analítica y gráficamente la posición y el aumento de la imagen de un objeto de 5 cm de altura situado en dos posiciones diferentes:

a) A 1 m del espejo. **b) A 0,3 m del espejo.**

(Galicia. Septiembre, 2006)

a) El objeto se encuentra a la izquierda de C:
La imagen se forma entre C y F, es de menor tamaño e invertida.

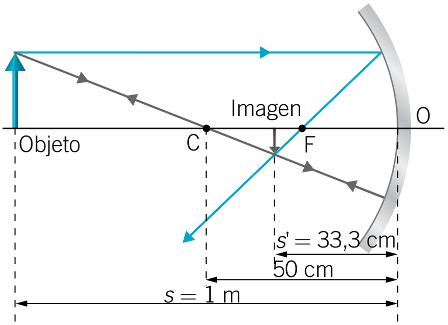
Determinamos el tamaño y la posición exactos utilizando la ecuación fundamental de los espejos junto con las normas DIN. Hay que recordar que la distancia focal es igual a la mitad del radio de curvatura del espejo, $f = r/2$:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-100\ \text{cm}} = \frac{1}{-25\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{100\ \text{cm}} - \frac{1}{25\ \text{cm}} = -0{,}03\ \text{cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{-0{,}03\ \text{cm}^{-1}} = -33{,}33\ \text{cm}$$

$s' < 0$, lo que indica que la imagen está a la izquierda de O.



Aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5\ \text{cm}} = -\frac{-33{,}33\ \text{cm}}{-100\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = -\frac{33{,}33\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}}{100\ \text{cm}} = -1{,}67\ \text{cm}$$

$y' < 0$, lo que indica que la imagen está invertida con respecto al objeto.

b) El objeto se encuentra entre C y F. La imagen se forma a la izquierda de C, es de mayor tamaño e invertida.

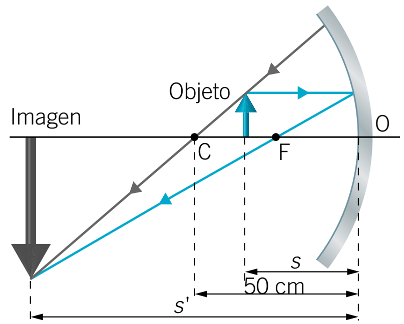
Determinamos el tamaño y la posición exactos utilizando la ecuación fundamental de los espejos junto con las normas DIN:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-30\ \text{cm}} = \frac{1}{-25\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{30\ \text{cm}} - \frac{1}{25\ \text{cm}} = -0{,}00\overset{\frown}{6}\ \text{cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{-0{,}00\overset{\frown}{6}\ \text{cm}^{-1}} = -150\ \text{cm} = -1{,}5\ \text{m}$$

$s' < 0$, lo que indica que la imagen está a la izquierda del vértice O.



Aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5\text{ cm}} = -\frac{-150\text{ cm}}{-30\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = -\frac{150\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{30\text{ cm}} = -25\text{ cm}$$

$y' < 0$, lo que indica que la imagen está invertida con respecto al objeto.

19. **Enumere las propiedades (real o virtual, derecha o invertida, mayor o menor) de la imagen que nos devuelve una cuchara por su parte convexa y por su parte cóncava. Para demostrarlas, dibuje la marcha de los rayos y la imagen que se obtiene de la flecha en el espejo esférico convexo de la figura. El punto C es el centro de curvatura del espejo.**

(Cataluña. Junio, 2007)

a) El objeto está entre C y F, espejo cóncavo:

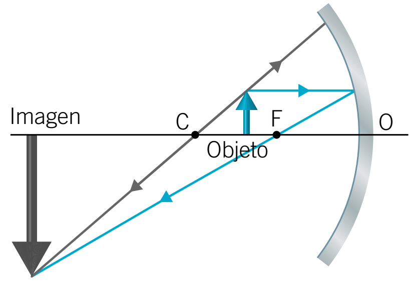


Imagen:

- A la izquierda de C.
- Real.
- Invertida.
- Mayor.

b) Espejo convexo:

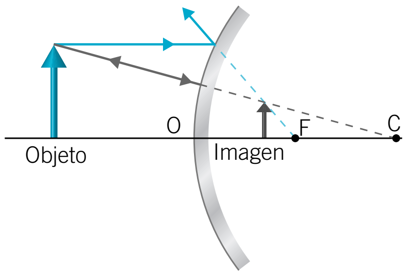


Imagen:

- Entre O y F.
- Virtual.
- Derecha.
- Menor.

20. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de 10 cm.

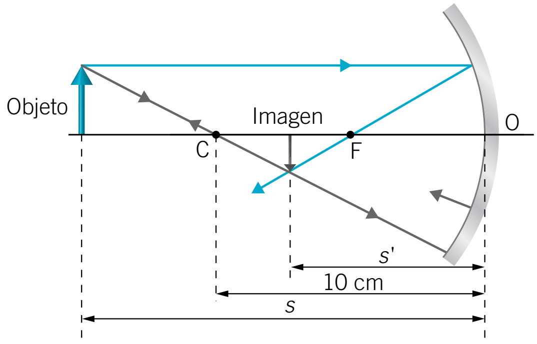
a) Determine la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 5 cm de altura que se encuentra frente al mismo, a la distancia de 15 cm. ¿Cómo es la imagen obtenida? Efectúe la construcción geométrica de dicha imagen.

b) Un segundo objeto de 1 cm de altura se sitúa delante del espejo de manera que su imagen es del mismo tipo y tiene el mismo tamaño que la imagen del objeto anterior. Determine la posición que tiene el segundo objeto respecto al espejo.

(C. Madrid. Septiembre, 2007)

a) El objeto se encuentra a la izquierda de C:

La imagen aparece entre C y F, es invertida y de menor tamaño. Es una imagen real.



Determinamos el tamaño y la posición exactos utilizando la ecuación fundamental de los espejos junto con las normas DIN.

Hay que recordar que la distancia focal es igual a la mitad del radio de curvatura del espejo:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-15\text{ cm}} = \frac{1}{-5\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{15} - \frac{1}{5} = -0{,}1\widehat{3}\text{ cm}^{-1} \rightarrow s' = \frac{1}{-0{,}1\widehat{3}\text{ cm}^{-1}} = -7{,}5\text{ cm}$$

$s' < 0$, lo que indica que está a la izquierda del vértice del espejo.

Aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5\text{ cm}} = -\frac{-7{,}5\text{ cm}}{-15\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = -\frac{7{,}5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{15\text{ cm}} = -2{,}5\text{ cm}$$

$y' < 0$, lo que indica que la imagen está invertida con respecto al objeto.

b) Buscamos un objeto que dé una imagen invertida del mismo tamaño que la anterior:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{-2{,}5\text{ cm}}{1\text{ cm}} = -\frac{s'}{s} \rightarrow s' = 2{,}5 \cdot s$$

Entonces:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{2{,}5 \cdot s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2{,}5 \cdot s} + \frac{2{,}5}{2{,}5 \cdot s} = \frac{1}{-5} \rightarrow \frac{1 + 2{,}5}{2{,}5 \cdot s} = \frac{1}{-5} \rightarrow$$

$$\rightarrow s = \frac{-5\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm}}{2{,}5\text{ cm}} = -7\text{ cm}$$

El objeto tiene que estar a 7 cm del vértice del espejo.

21. Calcule las distancias focales de un dioptrio esférico cóncavo de 0,1 m de radio en el que los índices de refracción de los dos medios transparentes son $n = 1$ y $n' = 1{,}33$.

(Extremadura. Septiembre, 2005)

Empleamos las expresiones obtenidas en el libro del alumno.
En este caso, como el dioptrio es cóncavo, $r < 0$.

- Foco imagen:

$$f' = r \cdot \frac{n'}{n' - n} = -10\text{ cm} \cdot \frac{1{,}33}{1{,}33 - 1} = -40\text{ cm}$$

- Foco objeto:

$$f = -r \cdot \frac{n}{n' - n} = -(-10 \text{ cm}) \cdot \frac{1}{1{,}33 - 1} = +30 \text{ cm}$$

22. **¿Cuánto vale el radio de curvatura de las superficies de una lente biconvexa simétrica de 5 D de potencia y 1,45 de índice de refracción?**
(R. Murcia. Septiembre, 2007)

Calculamos la distancia focal a partir de la potencia según:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{5 \text{ D}} = 0{,}2 \text{ m}$$

La lente es un sistema formado por dos dioptrios. De acuerdo con la ecuación fundamental:

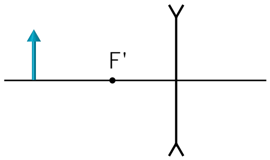
$$(n' - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f'}$$

Si la lente es simétrica, $r_1 = -r_2 = r$:

$$(1{,}45 - 1) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-r}\right) = \frac{1}{20 \text{ cm}} \rightarrow 0{,}45 \cdot \frac{2}{r} = \frac{1}{20 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 0{,}45 \cdot 2 \cdot 20 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

23. **a) Explicar qué es una imagen virtual.**
b) ¿Puede fotografiarse una imagen virtual? ¿Por qué? Pon un ejemplo sencillo.
c) Si tenemos un objeto situado a la izquierda de una lente divergente tal como se muestra en la figura, determinar gráficamente la posición de la imagen y el tamaño.

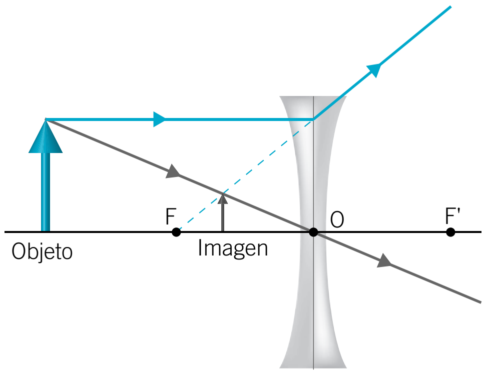


d) ¿Cuáles son las características de la imagen?
(Cantabria. Junio, 2007)

a) Imagen virtual. Es una ilusión óptica que se obtiene al prolongar las direcciones de los rayos reflejados divergentes hasta que coinciden.

b) Una imagen virtual producida por un espejo puede tomarse en una fotografía. La cámara fotográfica capta la misma ilusión óptica que el ojo cuando percibe la imagen virtual.

c) Características de la imagen:
- Entre O y F.
- Virtual.
- Derecha.
- Menor.



24. **Un objeto de 1 cm de altura está situado a 50 cm de una lente convergente de +15 cm de distancia focal.**

a) Dibuja el diagrama de rayos correspondiente y especifica las características de la imagen.

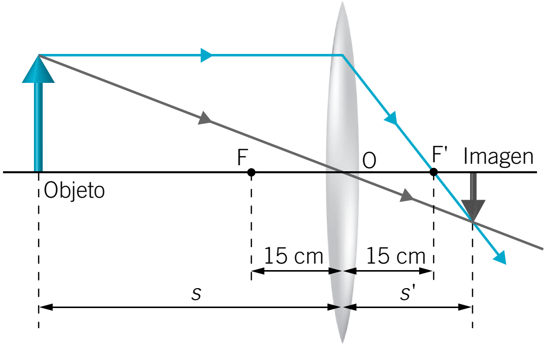
b) Calcula la posición de la imagen.

c) Halla el tamaño de la imagen.

(Canarias. Junio, 2007)

a) El objeto está situado a la izquierda de 2F.

Características de la imagen:
- Entre F' y 2F'.
- Real.
- Invertida.
- Menor.



b) Tenemos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-50 \text{ cm}} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{1}{50 \text{ cm}} = 0{,}04\widehat{6} \text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{0{,}04\widehat{6} \text{ cm}^{-1}} = 21{,}4 \text{ cm}$$

c) En este caso:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{21{,}4 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}}{-50 \text{ cm}} = -0{,}43 \text{ cm}$$

$y' < 0$, lo que indica que la imagen está invertida.

25. **Dos lentes convergentes, cada una de ellas de 10 cm de distancia focal, están separadas 35 cm. Un objeto está a 20 cm a la izquierda de la primera lente.**

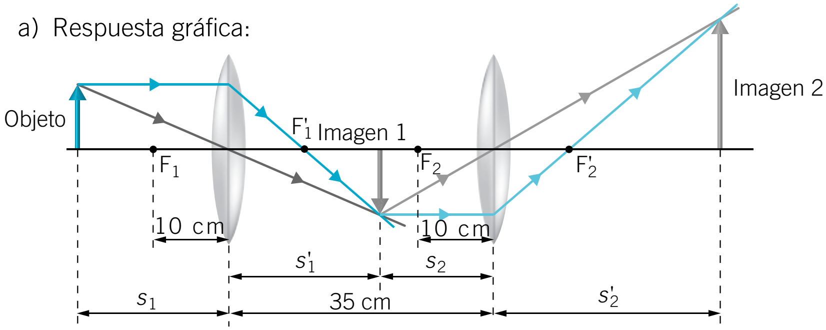
a) Hallar la posición de la imagen final utilizando un diagrama de rayos y la ecuación de las lentes delgadas.

b) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

c) ¿Cuál es la amplificación lateral total de la imagen?

(La Rioja. Septiembre, 2006)

a) Respuesta gráfica:



Utilizamos la ecuación de las lentes para obtener la posición final. Para la primera lente convergente:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1} \rightarrow \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} = 0{,}05 \text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s'_1 = \frac{1}{0{,}05 \text{ cm}^{-1}} = 20 \text{ cm}$$

La imagen de la primera lente se formará 20 cm a su derecha, esto es, 15 cm a la izquierda de la segunda lente (entre F y 2F). Repetimos los cálculos para la segunda lente; $s_2 = -15$ cm en este caso:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2} \rightarrow \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}} = 0{,}0\widehat{3} \text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s'_2 = \frac{1}{0{,}0\widehat{3} \text{ cm}^{-1}} = 30 \text{ cm}$$

La posición final de la imagen será 30 cm a la derecha de la segunda lente.

b) En ambos casos el objeto de cada lente se encuentra entre F y 2F. En estas circunstancias la imagen formada es real e invertida. Resulta que el objeto de la segunda lente es la imagen de la primera (es decir, invertido). Al invertirlo de nuevo, la imagen final es real y derecha.

c) Para la primera lente:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1} = -1$$

No hay aumento lateral.

Para la segunda lente:

$$\frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2} = \frac{30\ \text{cm}}{-15\ \text{cm}} = -2$$

Es el aumento lateral total.

26. El ojo humano se asemeja a un sistema óptico formado por una lente convergente (el cristalino) de +15 mm de distancia focal. La imagen de un objeto lejano (en el infinito) se forma sobre la retina, que se considera como una pantalla perpendicular al sistema óptico.

Calcula:

a) La distancia entre la retina y el cristalino.

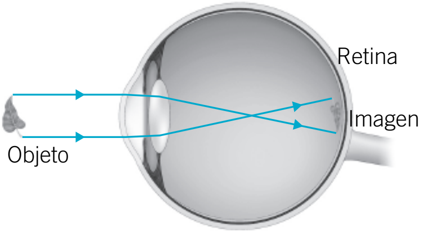
b) La posición de la imagen de un árbol que está a 50 m del cristalino del ojo.

c) El tamaño de la imagen de un árbol de 10 m de altura que está a 100 m del ojo.

(Canarias. Junio, 2005)

a) La ecuación de las lentes es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$



Si el objeto está en el infinito, $s = -\infty$.

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = f' = 15\ \text{mm}$$

La imagen se forma en una pantalla (retina) a $s' = 15$ mm de la lente (cristalino).

b) Aplicamos de nuevo la ecuación de las lentes. Si el objeto está en $s = -50$ m:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-50\text{ m}} = \frac{1}{0{,}015\text{ m}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}015\text{ m}} - \frac{1}{50\text{ m}} = 66{,}64\widehat{6}\text{ m}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{66{,}64\widehat{6}\text{ m}^{-1}} = 0{,}015\,004\,5\text{ m} \simeq 15\text{ mm}$$

c) La ecuación de las lentes es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-100\text{ m}} = \frac{1}{0{,}015\text{ m}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}015\text{ m}} - \frac{1}{100\text{ m}} = 66{,}65\widehat{6}\text{ m}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{66{,}65\widehat{6}\text{ m}^{-1}} = 0{,}015\,002\text{ m} \simeq 15\text{ mm}$$

Aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{10\text{ m}} = \frac{0{,}015\text{ m}}{-100\text{ m}} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\text{ m} = -1{,}5\text{ mm}$$

Se obtiene una imagen invertida de 1,5 mm de alto.

27. Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz, explicando las diferencias entre ambos fenómenos.

(Andalucía, 2007)

Leyes de la reflexión:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.
- El ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión.

Leyes de la refracción:

- El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano.
- El ángulo de incidencia y el de refracción se relacionan con la velocidad de propagación de la luz en ambos medios:

$$\frac{\text{sen}\,\widehat{i}}{v_{\text{incidente}}} = \frac{\text{sen}\,\widehat{r}}{v_{\text{refractado}}}$$

Ambos fenómenos ocurren cuando un rayo llega a la superficie de separación de dos medios.

En el caso de la reflexión, el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal es el mismo que el del rayo incidente. Además, el rayo incidente y el reflejado se propagan en el mismo medio.
Por el contrario, el rayo refractado forma un ángulo distinto al del rayo incidente, y se propaga por el otro medio.

28. Un rayo de luz pasa de un medio a otro más denso. Indique cómo varían las siguientes magnitudes: amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

(Andalucía, 2007)

Suponiendo que ambos medios son ideales y no se considera el rozamiento interno de sus partículas, el valor de la amplitud no se ve afectada por un cambio de densidad del medio.

La frecuencia está determinada por la energía de la radiación. Suponiendo un medio ideal, no hay pérdidas de energía. Por tanto, la frecuencia tampoco varía al cambiar de medio. El rayo refractado por el medio más denso tiene la misma frecuencia que el rayo incidente en la superficie de separación del medio.

Cuanto mayor es la densidad del medio, menor es la velocidad de propagación. Por este motivo la longitud de onda del rayo refractado en el medio más denso varía también, según:

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

Si la velocidad de propagación disminuye y la frecuencia se mantiene constante, disminuirá también la longitud de onda del rayo refractado.

29. Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque formando un ángulo de 20° con la normal.

a) ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado?

b) Variando el ángulo de incidencia, ¿podría producirse el fenómeno de reflexión total? Razone la respuesta.

$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1,33$.

(Andalucía, 2006)

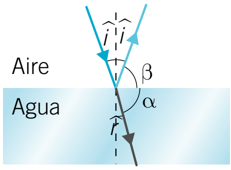
a) De acuerdo con la ley de Snell, obtenemos el ángulo del rayo refractado con la normal:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_{aire}}{n_{agua}} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = \frac{1}{1,33} \cdot \text{sen}\,20° = 0,257 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{r} = \text{arc sen}(0,257) = 14,9°$$

De acuerdo con la geometría mostrada en la figura, el ángulo buscado es $\alpha + \beta$.



Del dibujo sabemos:

$$\widehat{r} + (\alpha + \beta) + \widehat{i} = 180° \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 180° - \widehat{r} - \widehat{i} = 180° - 14{,}9° - 20° \rightarrow \alpha + \beta = 145{,}1°$$

b) Por definición, se denomina ángulo límite o crítico al mayor ángulo que puede formar un rayo incidente con la normal para que se produzca refracción; un ángulo de incidencia mayor que el límite produce reflexión total.

Para que suceda este fenómeno el rayo de luz debe pasar de un medio más refringente a otro menos refringente, es decir, de mayor índice de refracción a menor índice de refracción.

En este caso, el rayo pasa de un medio de menor *n* a mayor *n*. Por tanto, no puede producirse el fenómeno de reflexión total.

30. Un haz luminoso de longitud de onda $550 \cdot 10^{-9}$ m, que viaja a través del vacío, incide sobre un material transparente. El haz incidente forma un ángulo de 40° con la normal a la superficie, mientras que el refractado forma un ángulo de 26°. Calcular el índice de refracción del material y la longitud de onda del haz que se propaga en su interior.

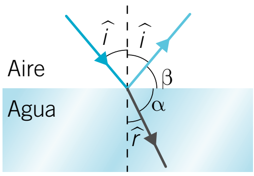
(P. Asturias. Septiembre, 2005)

Utilizamos la ley de Snell para obtener el índice de refracción del material:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\widehat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\widehat{r} \rightarrow n_2 = n_1 \cdot \frac{\text{sen}\,\widehat{i}}{\text{sen}\,\widehat{r}} = 1 \cdot \frac{\text{sen}\,40°}{\text{sen}\,26°} \rightarrow n_2 = 1{,}466$$

A partir del dato del índice de refracción podemos obtener la velocidad de propagación en el medio:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n}$$



Por otra parte, obtendremos la longitud de onda de acuerdo con la expresión:

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu}$$

La frecuencia del rayo incidente y el refractado es la misma, por lo que podemos obtenerla a partir de la longitud de onda en el vacío:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} = \frac{\dfrac{\cancel{c}}{n_2}}{\dfrac{\cancel{c}}{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}} = \frac{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{1{,}466} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_2 = 3{,}75 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

La frecuencia de la radiación no varía, pero la longitud de onda, sí.

31. Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. Si un rayo incide desde el medio de índice n_1, razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $n_1 > n_2$, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.

b) Si $n_1 < n_2$, a partir de un cierto ángulo de incidencia se produce el fenómeno de reflexión total.

(Castilla y León. Septiembre, 2007)

a) Utilizamos la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen}\, \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\, \hat{r}$$

Cuando la luz pasa a un medio menos refringente (menor n), se aleja de la normal.

Por tanto, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. La afirmación a) es falsa.

b) Para que suceda este fenómeno el rayo de luz debe pasar de un medio más refringente a otro menos refringente.

Es decir, de mayor índice de refracción a menor índice de refracción.

En este caso se pasa de un medio de menor n a uno de mayor n. Por tanto, no se produce reflexión total.

32. Un rayo luminoso se propaga por un medio de índice de refracción $n = 1{,}5$ e incide sobre la frontera de separación con otro medio de índice de refracción $n' = 1$. Calcular los ángulos de reflexión y refracción del rayo en los casos:

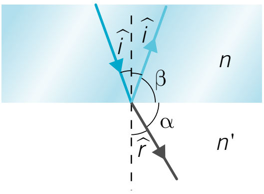
a) El ángulo de incidencia del rayo es 20°.

b) El ángulo de incidencia es 60°. Comentar este resultado.

(P. Asturias. Septiembre, 2006)

a) Utilizamos la ley de Snell para calcular el ángulo de refracción:

$$n \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n' \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow$$



$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n'} =$$

$$= \frac{1{,}5 \cdot \text{sen}\,20°}{1} = 0{,}5130 \rightarrow$$

El ángulo de reflexión es el mismo que el ángulo de incidencia.

b) Utilizamos la ley de Snell para calcular el ángulo de refracción:

$$n \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n' \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n'} =$$

$$= \frac{1{,}5 \cdot \text{sen}\,60°}{1} = 1{,}2990$$

El seno de un ángulo no puede valer más de uno. Este resultado indica que se produce el fenómeno de reflexión total, porque el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite. No hay rayo refractado.

El ángulo de reflexión es el mismo que el ángulo de incidencia.

33. Los índices de refracción del aire y del diamante son, respectivamente, 1,0 y 2,4. Explica razonadamente en qué sentido debe viajar la luz para que se produzca el fenómeno de la reflexión total. (Es decir, ¿desde el aire hacia el diamante o viceversa?)

(Canarias. Septiembre, 2006)

Por definición, se denomina ángulo límite o crítico al mayor ángulo que puede formar un rayo incidente con la normal para que se produzca refracción; un ángulo de incidencia mayor que el límite produce reflexión total. Para que suceda este fenómeno, el rayo de luz debe pasar de un medio más refringente a otro menos refringente; es decir, de mayor índice de refracción a menor índice de refracción.

Por tanto, el rayo debe propagarse desde el diamante hacia el aire.

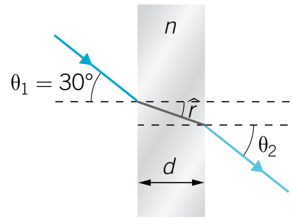
34. Sobre una lámina transparente de índice de refracción 1,5 y de 1 cm de espesor, situada en el vacío, incide un rayo luminoso formando un ángulo de 30° con la normal a la cara. Calcule:

a) El ángulo que forma con la normal el rayo que emerge de la lámina. Efectúe la construcción geométrica correspondiente.

b) La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.

(C. Madrid. Junio, 2005)

a) Podemos observar el esquema de la situación planteada en el enunciado en el dibujo de la derecha:

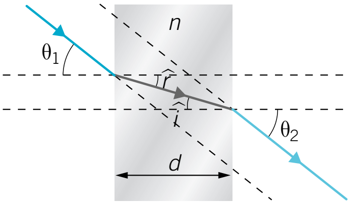


- $n = 1{,}5$.
- $d = 0{,}01$ m.
- $\theta_1 = 30°$ y buscamos el valor de θ_2.

Aplicamos la ley de Snell para obtener el valor del ángulo pedido.

- Entre el aire y la lámina:

$$n_1 \cdot \text{sen}\ \theta_1 = n \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow$$
$$\rightarrow 1 \cdot \text{sen}\ 30° = 1{,}5 \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow \text{sen}\ \hat{r} = 0{,}33$$



- Entre la lámina y el aire:

  El ángulo de refracción anterior es el ángulo de incidencia, en este caso:

$$n \cdot \text{sen}\ \hat{r} = n_2 \cdot \text{sen}\ \theta_2 \rightarrow 1{,}5 \cdot 0{,}33 = 1 \cdot \text{sen}\ \theta_2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{sen}\ \theta_2 = 0{,}5 \rightarrow \theta_2 = 30°$$

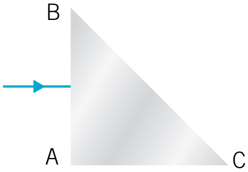
b) Calculamos el ángulo $\hat{r}$ y su coseno.

$$\text{sen}\ \hat{r} = 0{,}33 \rightarrow \hat{r} = 19{,}45° \rightarrow \cos \hat{r} = 0{,}94$$

Calculamos el espacio (s) que recorre la luz en el vidrio teniendo en cuenta el ángulo que forma el rayo con la normal en este material y el espesor del bloque.

$$\cos \hat{r} = \frac{d}{s} \rightarrow s = \frac{d}{\cos \hat{r}} = \frac{1\ \text{cm}}{0{,}94} = 1{,}06\ \text{cm}$$

35. **Se tiene un prisma óptico de índice de refracción 1,5 inmerso en el aire. La sección del prisma es un triángulo rectángulo isósceles como muestra la figura. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre la cara AB del prisma.**



a) Explique si se produce o no reflexión total en la cara BC del prisma.

b) Haga un esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma. ¿Cuál es la dirección del rayo emergente?

(C. Madrid. Septiembre, 2005)

a) Si el rayo incide con la misma dirección que la normal a la cara AB del prisma, se refracta sin modificar su dirección y llega a la cara BC formando un ángulo de 45° con la normal a esa cara.

Utilizamos la ley de Snell para calcular el ángulo de refracción en la cara BC:

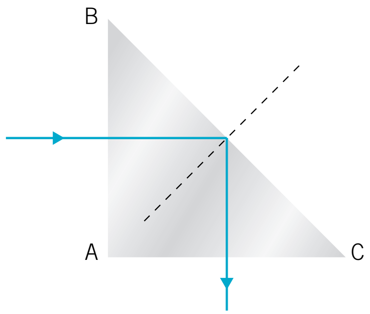
$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{1{,}5 \cdot \text{sen}\,45°}{1} = 1{,}0607$$

No es posible que el seno de un ángulo sea mayor que uno. Por tanto, se ha producido reflexión total.

No existe ángulo refractado hacia fuera del prisma en esta cara.

b) El rayo incidente en la cara AC del prisma es el rayo reflejado en la cara BC por reflexión total. Este rayo formará un ángulo de 45° con la normal al lado BC e incidirá con un ángulo de 0° sobre el lado AC. Al ser paralelo a la normal, se refracta sin modificar su dirección y emerge del prisma perpendicularmente al rayo que incide sobre la cara AB desde fuera del prisma.



36. **Un rayo de luz de 600 nm de longitud de onda incide desde el aire sobre la superficie perfectamente lisa de un estanque de agua, con un ángulo de 45° respecto a la normal.**

a) Determine el ángulo de refracción del rayo al penetrar en el agua.

b) Calcule la longitud de onda del rayo en el agua.

c) Calcule la energía que tiene un fotón de esa luz.

Datos: índice de refracción del agua = 1,33; constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s.

(R. Murcia. Septiembre, 2006)

a) Utilizamos la ley de Snell de la refracción:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}45°}{1{,}33} = 0{,}5317 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{r} = \text{arc sen}\,(0{,}5317) = 32{,}12°$$

b) La velocidad es igual a la frecuencia multiplicada por la longitud de onda: $v = \lambda \cdot \nu$. La frecuencia del rayo incidente y el refractado es la misma:

$$\nu_{\text{aire}} = \nu_{\text{agua}} \rightarrow \frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{v_{\text{agua}}}{\lambda_{\text{agua}}}$$

Podemos determinar la velocidad de propagación del rayo en el agua a partir del índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v_{\text{agua}}} \rightarrow v_{\text{agua}} = \frac{c}{n}$$

$$\nu_{\text{aire}} = \nu_{\text{agua}} \rightarrow \frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{v_{\text{agua}}}{\lambda_{\text{agua}}} \rightarrow \frac{\cancel{c}}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{\frac{\cancel{c}}{n}}{\lambda_{\text{agua}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{agua}} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{n} = \frac{600 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{1{,}33} = 4{,}51 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

c) Con la fórmula de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{600 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}32 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

37. Si un haz de luz láser incide sobre un objeto de pequeño tamaño (del orden de su longitud de onda):

a) Detrás del objeto siempre hay oscuridad.

b) Hay zonas de luz detrás del objeto.

c) Se refleja hacia el medio de incidencia.

(Galicia. Septiembre, 2007)

La respuesta correcta es la b), ya que se produce el fenómeno de difracción.

38. En la polarización lineal de la luz:

a) Se modifica la frecuencia de la onda.

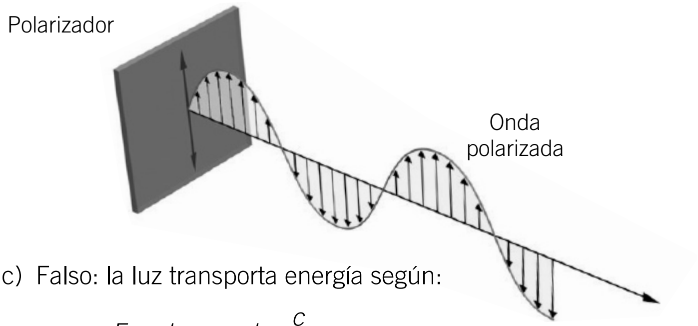
b) El campo eléctrico oscila siempre en un mismo plano.

c) No se transporta energía.

(Galicia. Septiembre, 2006)

a) Falso: la polarización no produce variación en la frecuencia.

b) Verdadero: tras la polarización lineal, el campo oscila en una única dirección. Polarizar una onda transversal es hacer que el vector que representa la perturbación vibre en una única dirección perpendicular a la de avance de la onda:



c) Falso: la luz transporta energía según:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

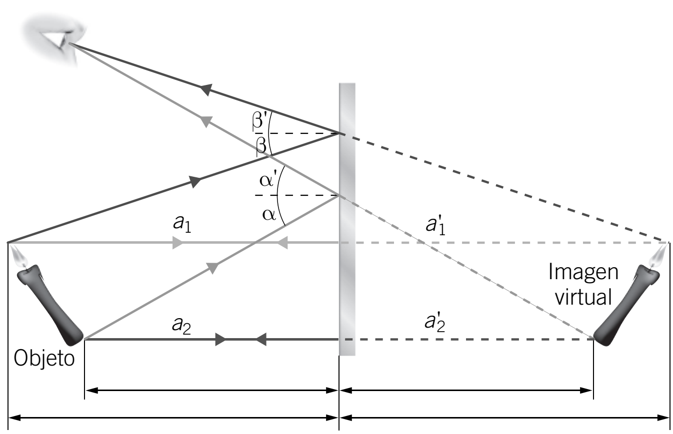
39. **Diga si es CIERTO o FALSO y razone la respuesta: «Una imagen virtual es aquella que podemos proyectar sobre una pantalla».**

(Extremadura. Septiembre, 2005)

Falso: sobre una pantalla solo se puede construir la imagen que resulta de la convergencia de los rayos que proceden del objeto, después de haber sufrido reflexión o refracción.

La imagen virtual no resulta de la intersección de rayos; es una ilusión óptica que se obtiene al prolongar las direcciones de los rayos reflejados o refractados que proceden del objeto hasta que coinciden en un punto. Por ello, una imagen virtual no se puede proyectar en una pantalla.

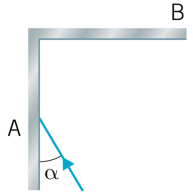
Pensemos, como ejemplo, en la imagen obtenida en un espejo plano; el ojo recoge los rayos reflejados que proceden de cada punto del objeto e interpreta la imagen como procedente de detrás del espejo, donde coinciden las direcciones de esos rayos reflejados.



$a'_1 = a_1$; $a'_2 = a_2$; ley de reflexión: $\alpha' = \alpha$ y $\beta' = \beta$

40. **¿Qué se entiende por reflexión especular y reflexión difusa? Enuncie las leyes de la reflexión.**

Se tienen dos espejos, A y B, planos y perpendiculares entre sí. Un rayo luminoso contenido en un plano perpendicular a ambos espejos incide sobre uno de ellos, por ejemplo el A, con el ángulo α mostrado en la figura. Calcule la relación entre las direcciones de los rayos incidente en A y reflejado en B.

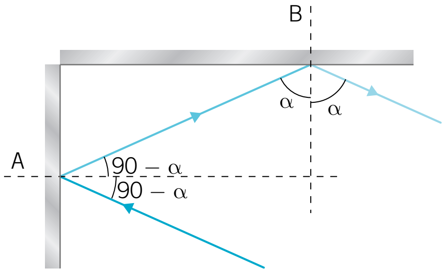


(Castilla y León. Junio, 2007)

La reflexión especular es la que se produce cuando el rayo incidente llega a una superficie cuyas irregularidades son muy pequeñas en relación con la longitud de onda de la radiación; en caso contrario tendremos una reflexión difusa. La reflexión especular permite obtener una imagen, real o virtual, de los objetos. La reflexión difusa nos permite apreciar los bordes de los objetos y conocer su forma por observación directa.

Leyes de la reflexión:

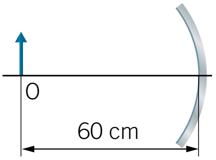
- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.
- El ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión.



El rayo incidente en A y el reflejado en B son paralelos. Lo vemos por geometría en el dibujo.

La normal a un lado es paralela al otro lado, por lo que el ángulo que forma el rayo incidente con la normal al primer lado (90° − α) es el mismo que el que forma el segundo rayo reflejado con el segundo lado (90° − α).

41. **Un objeto O está situado a 60 cm del vértice de un espejo esférico, cóncavo, tal y como indica la figura. Se observa que la imagen producida por el espejo es real e invertida, siendo su tamaño la mitad del tamaño del objeto.**



a) Calcula la posición de la imagen y el radio de curvatura del espejo.

b) Comprueba gráficamente los resultados mediante un trazado de rayos.

(Aragón. Septiembre, 2007)

a) Sabemos que $y = -2y'$. Y que $s = -60$ cm.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-60 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

A partir de la ecuación del aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{-\cancel{y}/2}{\cancel{y}} = -\frac{s'}{-60\ \text{cm}} = 0{,}5\ \text{cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{0{,}5\ \text{cm}^{-1}} = -30\ \text{cm}$$

Entonces podemos calcular ya *f*:

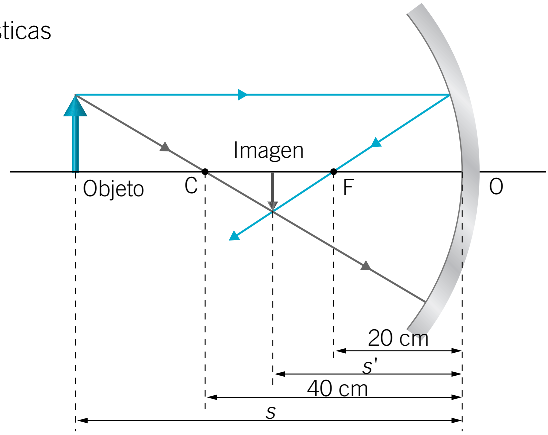
$$\frac{1}{-30\ \text{cm}} + \frac{1}{-60\ \text{cm}} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{f} = -0{,}05\ \text{cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow f = \frac{1}{-0{,}05\ \text{cm}^{-1}} = -20\ \text{cm}$$

El radio es el doble de la distancia focal:

$$r = 2 \cdot f = 2 \cdot 20\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$$

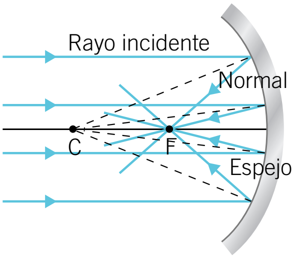
b) Por las características del enunciado, debe de tratarse de un objeto situado a la izquierda de C:



42. **Un estudiante afirma que puede hacer fuego orientando un espejo esférico cóncavo en dirección al Sol. Indica a qué distancia del espejo habría que situar un papelito para quemarlo. ¿Se podría hacer lo mismo con un espejo convexo? Justifica tus respuestas.**

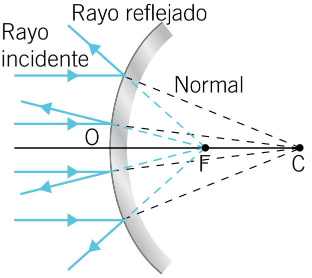
(Castilla-La Mancha, 2006)

Como el Sol está muy alejado, podemos suponer que los rayos que llegan al espejo procedentes de él son paralelos al eje del objeto. En consecuencia, tras reflejarse en el espejo convergerán en el foco.



Por tanto, el papel hay que colocarlo en el foco.

No podría hacerse lo mismo con un espejo convexo, ya que los rayos que se reflejan en él divergen. En consecuencia, la energía que transportan no coincide en ningún punto; el foco del espejo convexo es virtual.



43. **Es corriente utilizar espejos convexos como retrovisores en coches y camiones o en vigilancia de almacenes, con objeto de proporcionar mayor ángulo de visión con un espejo de tamaño razonable.**

a) Explique con ayuda de un esquema las características de la imagen formada en este tipo de espejos.

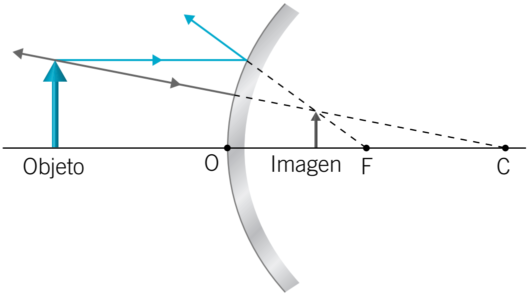
b) En estos espejos se suele indicar: «Atención, los objetos están más cerca de lo que parece». ¿Por qué parecen estar más alejados?

(Andalucía, 2007)

a) Espejos convexos.

Características de la imagen:

- Entre O y F.
- Virtual.
- Derecha.
- Menor.



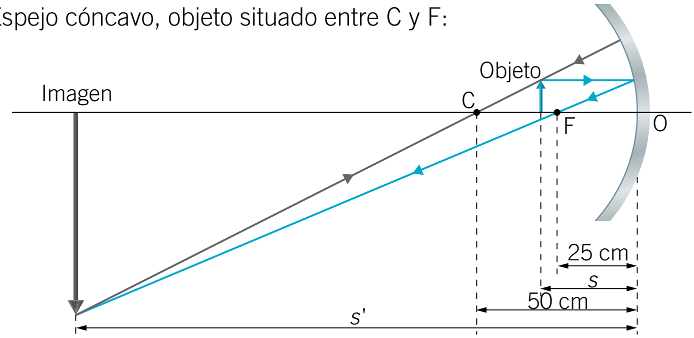
b) Los objetos parecen estar más alejados porque la imagen virtual que el cerebro interpreta es de menor tamaño que el objeto, por lo que el efecto es equivalente a una imagen más alejada.

44. **Dado un espejo esférico de 50 cm de radio y un objeto de 5 cm de altura situado sobre el eje óptico a una distancia de 30 cm del espejo, calcula analítica y gráficamente la posición y tamaño de la imagen:**

a) Si el espejo es cóncavo. **b) Si el espejo es convexo.**

(Galicia. Junio, 2006)

a) Espejo cóncavo, objeto situado entre C y F:



La imagen se formará a la izquierda de C, será invertida y de mayor tamaño que el objeto.

Determinamos el tamaño y la posición exactos utilizando la ecuación fundamental de los espejos junto con las normas DIN:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{-30\text{ cm}}=\frac{1}{\underbrace{-25\text{ cm}}_{f=r/2}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{30\text{ cm}}-\frac{1}{25\text{ cm}}=-0{,}00\widehat{6}\text{ cm}^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow s'=\frac{1}{-0{,}00\widehat{6}\text{ cm}^{-1}}=-150\text{ cm}$$

$s'<0$, lo que indica que está a la izquierda del vértice del espejo.

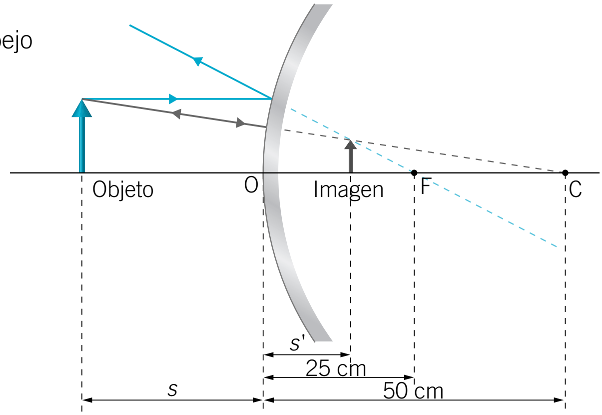
Aumento:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}\rightarrow\frac{y'}{5\text{ cm}}=-\frac{-150\text{ cm}}{-30\text{ cm}}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=-\frac{5\text{ cm}\cdot 150\text{ cm}}{30\text{ cm}}=-25\text{ cm}$$

$y'<0$, lo que indica que la imagen está invertida con respecto al objeto.

b) Para un espejo convexo:



Determinamos el tamaño y la posición exactos utilizando la ecuación fundamental de los espejos junto con las normas DIN:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{-30\text{ cm}}=\frac{1}{\underbrace{25\text{ cm}}_{f=r/2}}\rightarrow$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{30\text{ cm}}+\frac{1}{25\text{ cm}}=0{,}07\widehat{3}\text{ cm}^{-1}\rightarrow s'=13{,}64\text{ cm}$$

$s'>0$, lo que indica que está a la derecha del vértice del espejo.

Aumento: $$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5\text{ cm}} = -\frac{13{,}64\text{ cm}}{-30\text{ cm}} \rightarrow$$
$$\rightarrow y' = \frac{5\text{ cm} \cdot 13{,}64\text{ cm}}{30\text{ cm}} = 2{,}27\text{ cm}$$

$y' > 0$, lo que indica que la imagen es derecha con respecto al objeto.

45. Se tiene un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal.

a) ¿Dónde se debe situar un objeto para que su imagen sea real y doble que el objeto?

b) ¿Dónde se debe situar el objeto para que la imagen sea doble que el objeto pero tenga carácter virtual?

Efectúa la construcción geométrica en ambos casos.

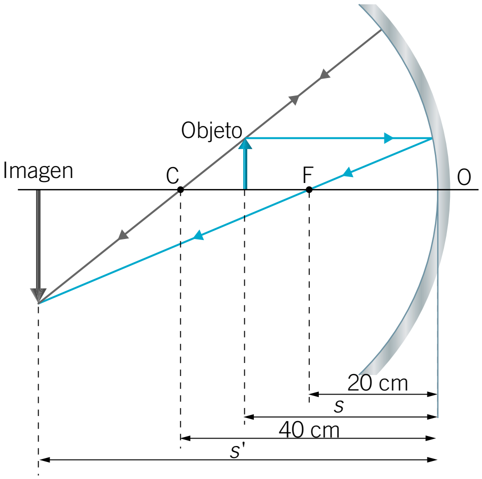
(C. Madrid. Junio, 2006)

a) Queremos que $y' = 2y$, $f = 20$ cm. Para que la imagen sea mayor que el objeto, debe situarse el objeto entre C y F. La imagen aparecerá invertida. De la ecuación del aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{-2\cancel{y}}{\cancel{y}} = -\frac{s'}{s} = -2 \rightarrow s' = 2s$$

Realizamos los cálculos aplicando la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20\text{ cm}} \rightarrow \frac{1}{\underbrace{2s}_{s'}} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20\text{ cm}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{1}{2s} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{-20\text{ cm}} \rightarrow \frac{3}{2s} = \frac{1}{-20\text{ cm}} \rightarrow$$
$$\rightarrow s = \frac{-20\text{ cm} \cdot 3}{2} = -30\text{ cm} \rightarrow s' = 2 \cdot s = -60\text{ cm}$$



b) Para obtener una imagen virtual con un espejo cóncavo, el objeto debe colocarse entre F y O.

De la ecuación del aumento:

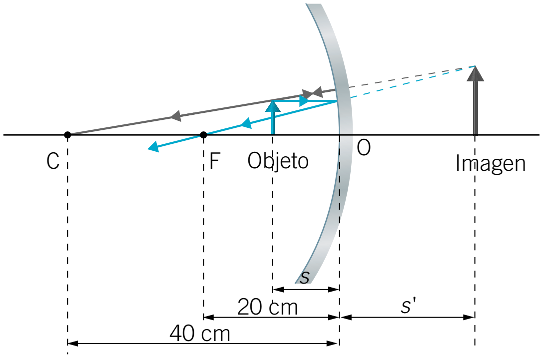
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{2\cancel{y}}{\cancel{y}} = -\frac{s'}{s} = 2 \rightarrow s' = -2s$$

Realizamos los cálculos aplicando la ecuación de los espejos:

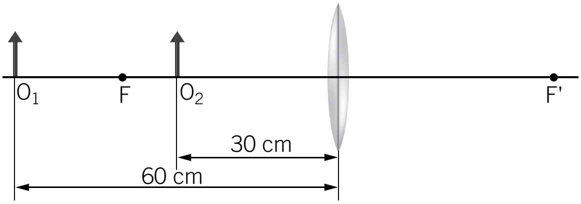
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20\ \text{cm}} \rightarrow \frac{1}{\underbrace{-2s}_{s'}} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-20\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{-2s} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{-20\ \text{cm}} \rightarrow \frac{1}{2s} = \frac{1}{-20\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow s = -10\ \text{cm} \rightarrow s' = -2 \cdot s = -2 \cdot (-10\ \text{cm}) \rightarrow s' = 20\ \text{cm}$$



46. **a) La lente delgada convergente de la figura tiene una focal imagen *f'* = 40 cm. Calcula la posición y el tamaño de la imagen de cada uno de los dos objetos indicados en la figura, O_1 y O_2, ambos de altura $y = 2$ cm.**



b) Comprueba gráficamente tus resultados, mediante trazados de rayos.

(Aragón. Septiembre, 2006)

- Objeto O_1:

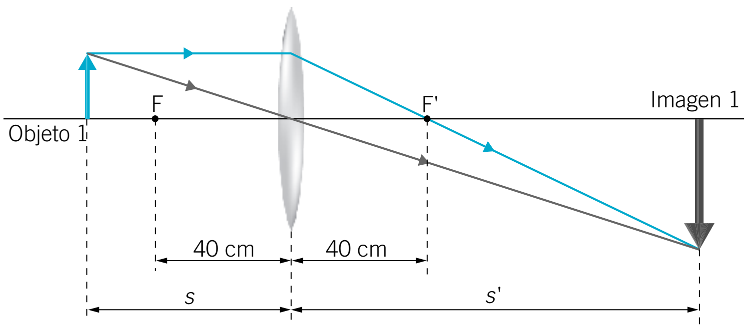
$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-60\ \text{cm}} = \frac{1}{40\ \text{cm}} \rightarrow \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{40\ \text{cm}} - \frac{1}{60\ \text{cm}} =$$

$$= 0{,}008\widehat{3}\ \text{cm}^{-1} \rightarrow s'_1 = \frac{1}{0{,}008\widehat{3}\ \text{cm}^{-1}} = 120\ \text{cm}$$

Aumento:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1} \rightarrow \frac{y'_1}{2\text{ cm}} = \frac{120\text{ cm}}{-60\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y'_1 = -\frac{2\text{ cm} \cdot 120\text{ cm}}{60\text{ cm}} = -4\text{ cm}$$



- Objeto O_2:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{40\text{ cm}} \rightarrow$$

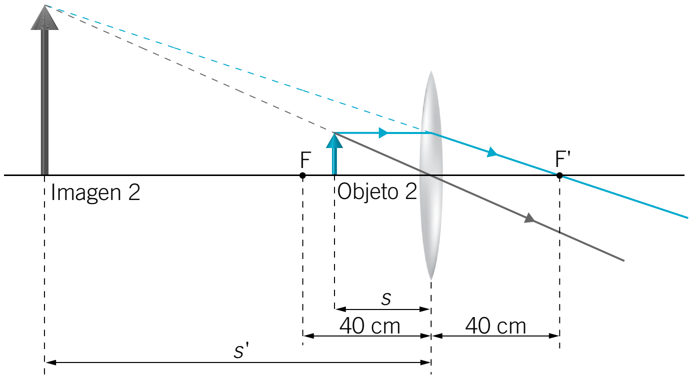
$$\rightarrow \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{40\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{40\text{ cm}} - \frac{1}{30\text{ cm}} = -0{,}008\widehat{3}\text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s'_2 = \frac{1}{-0{,}008\widehat{3}\text{ cm}^{-1}} = -120\text{ cm}$$

Aumento:

$$\frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2} \rightarrow \frac{y'_2}{2\text{ cm}} = \frac{-120\text{ cm}}{-30\text{ cm}} \rightarrow y'_2 = \frac{2\text{ cm} \cdot 120\text{ cm}}{30\text{ cm}} = 8\text{ cm}$$



47. **Mediante una lente delgada de focal $f' = 10$ cm se quiere obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Calcula la posición donde debe colocarse el objeto si la imagen debe ser:**

a) Real e invertida.

b) Virtual y derecha.

c) Comprueba gráficamente tus resultados, en ambos casos, mediante trazados de rayos.

(Aragón. Junio, 2005)

a) Queremos una imagen tal que $y' = -2y$, $f = 10$ cm.
Para que la imagen sea mayor que el objeto, debe situarse el objeto entre 2F y F. La imagen aparecerá invertida. Como la distancia focal imagen es positiva, la lente es convergente.

De la ecuación del aumento:

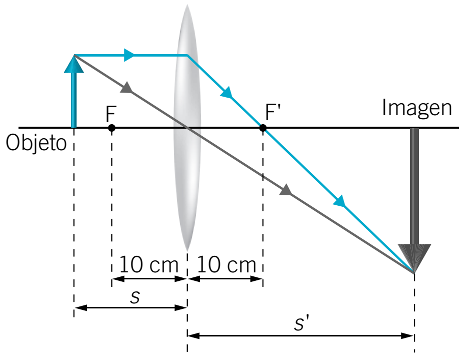
$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{\overbrace{-2\cancel{y}}^{y'}}{\cancel{y}} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = -2s$$

Realizamos los cálculos aplicando la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow \frac{1}{-2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{-2s} - \frac{(-2)}{-2s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow \frac{3}{-2s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow$$

$$s = \frac{3 \cdot 10\text{ cm}}{-2} = -15\text{ cm} \rightarrow s' = -2s = -2 \cdot (-15\text{ cm}) = 30\text{ cm}$$



b) Para obtener una imagen virtual de $y' = 2y$, el objeto debe colocarse entre F y O.

De la ecuación del aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{\overbrace{2\cancel{y}}^{y'}}{\cancel{y}} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 2s$$

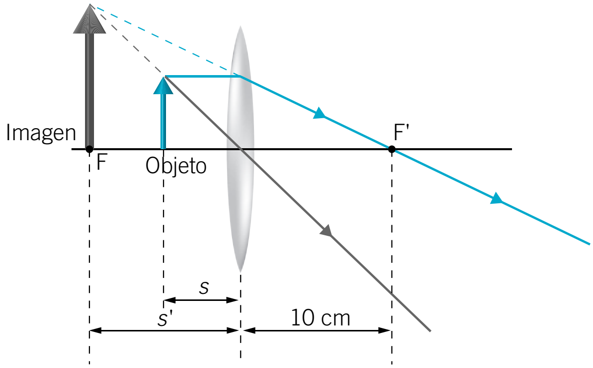
Realizamos los cálculos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2s} - \frac{2}{2s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow \frac{-1}{2s} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow s = \frac{-1 \cdot 10\text{ cm}}{2} = -5\text{ cm} \rightarrow s' = 2s = 2 \cdot (-5\text{ cm}) = -10\text{ cm}$$

La imagen está sobre el foco objeto.



c) Ver esquemas anteriores.

48. **Un objeto se coloca a 50 cm de una pantalla en la que se desea obtener su imagen por medio de una lente convergente de +10 D. Calcula la posición donde hay que colocar la lente, entre el objeto y la pantalla, para obtener una imagen nítida del mismo.**

A partir de la potencia de la lente obtenemos su distancia focal imagen:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{10\text{ D}} = 0{,}1\text{ m} = 10\text{ cm}$$

$s + s' = 50$ cm $\rightarrow s' = 50$ cm $- s$. Por tanto:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{50 - s} - \frac{1}{-s} = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{s} + 50 - \cancel{s}}{s \cdot (50 - s)} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{50}{s \cdot (50 - s)} = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 500 = 50 \cdot s - s^2 \rightarrow s^2 - 50s + 500 = 0$$

Resolviendo la raíz cuadrada se obtienen dos soluciones:

- $s_1 = 36{,}18$ cm.
- $s_2 = 13{,}82$ cm.

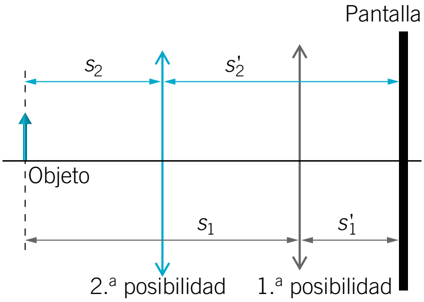
Los valores de s' son los complementarios. Así pues, hay dos posiciones posibles para la lente.

1.ª posibilidad:

- $s_1 = -36{,}18$ cm
- $s'_1 = 50 - |s_1| =$
  $= 50 \text{ cm} - 36{,}18 \text{ cm} =$
  $= 13{,}82$ cm

2.ª posibilidad:

- $s_2 = -13{,}82$ cm
- $s'_2 = 50 - |s_2| =$
  $= 50 \text{ cm} - 13{,}82 \text{ cm} =$
  $= 36{,}18$ cm

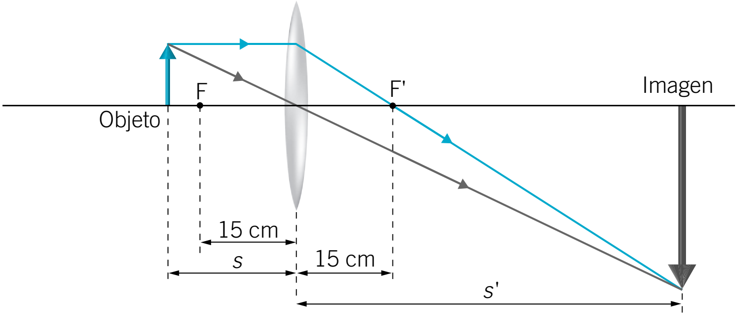


49. **Con un banco óptico de longitud *l* se observa que la imagen producida por una lente convergente siempre es virtual. ¿Cómo se puede interpretar esto?**
(Galicia. Junio, 2007)

La longitud del banco es tal que el objeto siempre se sitúa entre F y O. El banco es demasiado corto. Para obtener una imagen real sería necesario un banco más largo que permitiese alejar el objeto más allá del punto F.

50. **Un objeto de 3 cm de altura se coloca a 20 cm de una lente delgada de 15 cm de distancia focal; calcula analítica y gráficamente la posición y el tamaño de la imagen:**
a) Si la lente es convergente. **b) Si la lente es divergente.**
(Galicia. Septiembre, 2006)

a) Lente convergente, objeto situado entre F y 2F:



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \rightarrow$$

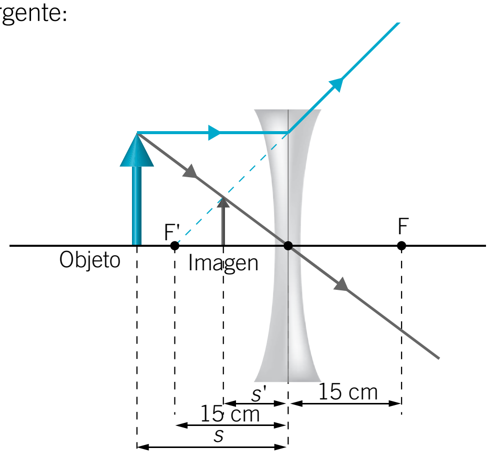
$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} = 0{,}01\widehat{6} \text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{0{,}01\widehat{6} \text{ cm}^{-1}} = 60 \text{ cm}$$

Aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{3\ \text{cm}} = \frac{60\ \text{cm}}{-20\ \text{cm}} \rightarrow y' = \frac{60\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm}}{-20\ \text{cm}} = -9\ \text{cm}$$

b) Lente divergente:



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20\ \text{cm}} = \frac{1}{-15\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = -\frac{1}{15\ \text{cm}} - \frac{1}{20\ \text{cm}} = -0{,}1167\ \text{cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{1}{-0{,}1167\ \text{cm}^{-1}} = -8{,}57\ \text{cm}$$

Aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{3\ \text{cm}} = \frac{-8{,}57\ \text{cm}}{-20\ \text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{-8{,}57\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm}}{-20\ \text{cm}} = 1{,}29\ \text{cm}$$

51. **Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes, de distancias focales 10 cm la primera y 20 cm la segunda, separadas por una distancia de 60 cm. Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado 15 cm delante de la primera lente:**

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen final del sistema.

b) Efectúe la construcción geométrica de la imagen mediante el trazado de rayos correspondiente.

(C. Madrid. Septiembre, 2005)

a) Para la primera lente:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1} \rightarrow \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-15\text{ cm}} = \frac{1}{10\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{10\text{ cm}} - \frac{1}{15\text{ cm}} = 0{,}0\widehat{3}\text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow s'_1 = \frac{1}{0{,}0\widehat{3}\text{ cm}^{-1}} = 30\text{ cm}$$

La imagen se forma 30 cm a la derecha de la primera lente. Como las lentes están separadas entre sí 60 cm, resulta que esto equivale a decir que se forma 30 cm a la izquierda de la segunda.

Veamos el tamaño de la imagen producida por la primera lente:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1} \rightarrow \frac{y'_1}{0{,}2\text{ cm}} = \frac{30\text{ cm}}{-15\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y'_1 = \frac{30\text{ cm} \cdot 0{,}2\text{ cm}}{15\text{ cm}} = -0{,}4\text{ cm} = -4\text{ mm}$$

Para la segunda lente ($s_2 = -30$ cm):

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2} \rightarrow \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{20\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{s_2} = \frac{1}{20\text{ cm}} - \frac{1}{30\text{ cm}} = 0{,}01\widehat{6}\text{ cm}^{-1} \rightarrow$$

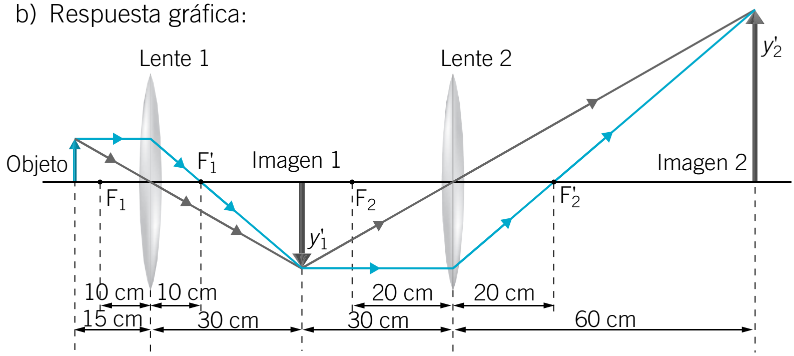
$$\rightarrow s'_2 = \frac{1}{0{,}01\widehat{6}\text{ cm}^{-1}} = 60\text{ cm}$$

La imagen final se forma 60 cm a la derecha de la segunda lente. Veamos cuál es el tamaño de la misma ($y'_1 = y_2$):

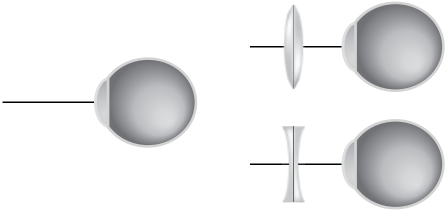
$$\frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2} \rightarrow \frac{y'_2}{-0{,}4\text{ cm}} = \frac{60\text{ cm}}{-30\text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y'_2 = \frac{60\text{ cm} \cdot (-0{,}4\text{ cm})}{-30\text{ cm}} = 0{,}8\text{ cm} = 8\text{ mm}$$

b) Respuesta gráfica:

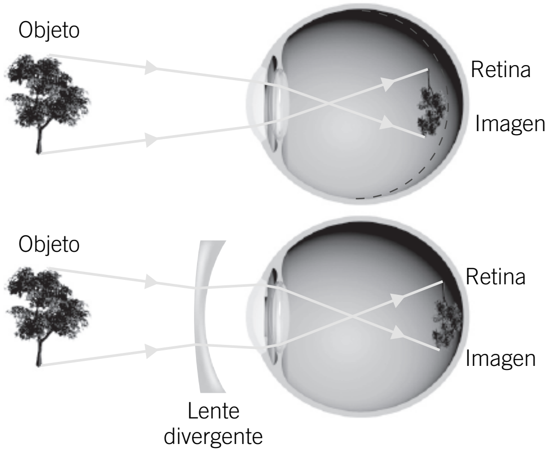


52. **El ojo de la figura de abajo es miope. Dibujar el trazado de rayos en el ojo de la izquierda y el punto aproximado de enfoque.**
Este defecto se corrige con una de las dos lentes de la derecha. Dibujar el trazado de rayos y enfoque en la figura que corresponda.
(La Rioja. Septiembre, 2007)



Las personas miopes tienen el cristalino más convergente de lo normal. Por este motivo enfocan bien los objetos cercanos, pero los rayos procedentes de los alejados convergen en un punto anterior a la retina, por lo que la imagen que se forma en ella es borrosa.

La miopía se corrige con una lente divergente (la de abajo), que hace que el foco del conjunto lente + cristalino se sitúe sobre la retina.



9

La física cuántica

PRESENTACIÓN

- Para el alumnado que estudia la asignatura de Química de 2.º de Bachillerato, una buena parte del contenido de este tema se habrá abordado en momentos anteriores del curso. Es importante que el profesorado tenga en cuenta este hecho a fin de proporcionar la necesaria coherencia a los estudios de sus alumnos y alumnas.
- Más que profundizar en desarrollos matemáticos, se pondrá el acento en comprender el alcance y las consecuencias de las expresiones analizadas. Es necesario incidir muy especialmente en la parte del universo en la que son significativos los efectos cuánticos. Así, en muchas ocasiones los principios generales no tendrán consecuencia en los fenómenos que experimentan cuerpos macroscópicos, pero sí serán significativos los que sufren partículas de nivel subatómico o de unos pocos de átomos, como las nanopartículas.

OBJETIVOS

- Conocer la existencia de fenómenos que no se pueden explicar con los principios de la física clásica (la única que se conocía a finales del siglo XIX).
- Conocer la ley de Planck como primera formulación matemática de la cuantización de la energía. Comprender lo novedoso de la idea.
- Estudiar el efecto fotoeléctrico a través de las experiencias que se llevaron a cabo y sus consecuencias. Entender el balance energético de Einstein como una aplicación de la idea de la cuantización.
- Analizar los espectros atómicos y comprender la idea de cuantización que subyace en los mismos.
- Reconocer el modelo atómico de Bohr como la primera teoría acerca de la constitución de la materia que asume la idea de la cuantización.
- Comprender el principio de la dualidad onda-corpúsculo y sus consecuencias en función del tamaño de la partícula considerada.
- Conocer el principio de indeterminación y sus consecuencias en función del tamaño de la partícula considerada.
- Identificar el modelo mecanocuántico del átomo que surge de los dos principios anteriores.
- Reconocer algunas aplicaciones de la física cuántica en dispositivos tecnológicos conocidos, como el láser, la célula fotoeléctrica, la nanotecnología o el microscopio electrónico.

9 La física cuántica

CONTENIDOS

Conceptos

- Fenómenos que no explica la física clásica: la emisión de radiación por parte de un cuerpo negro.
- La ley de Planck y la idea de la cuantización de la energía.
- El efecto fotoeléctrico. Interpretación de Einstein.
- El estudio de los espectros atómicos y su relación con la cuantización de la energía.
- El modelo atómico de Bohr para el átomo de hidrógeno.
- Los principios básicos de la física cuántica: principio de dualidad onda-corpúsculo y principio de indeterminación.
- Consecuencias de los principios de la física cuántica en cuerpos macroscópicos y en cuerpos microscópicos.
- Algunas aplicaciones de la física cuántica: el láser, la célula fotoeléctrica, la nanotecnología y el microscopio electrónico.

Procedimientos, destrezas y habilidades

- Adquirir destreza en la interpretación de un principio en relación con el tamaño de la partícula sobre la que se estudia.
- Mostrar capacidad para analizar resultados evaluando órdenes de magnitud, mejor que resultados numéricos precisos.
- Mostrar capacidad para relacionar un dispositivo tecnológico con el principio físico que lo sustenta.

Actitudes

- Reconocer el carácter tentativo de la ciencia analizando hechos que no se pueden explicar con los conocimientos actuales y que pueden requerir el desarrollo de una nueva parte de la física.
- Comprender la importancia de los estudios teóricos de los que se pueden derivar en el futuro aplicaciones tecnológicas impensables en el momento de su aparición. Tomar como ejemplo lo que aquí se estudia de la física cuántica y sus aplicaciones.
- Valorar el papel de la ciencia en numerosas aplicaciones que usamos a diario.

EDUCACIÓN EN VALORES

La física cuántica se presenta habitualmente como un cuerpo de conocimientos muy teóricos. No obstante, podemos tomar ejemplo de las discusiones que acompañaron a su establecimiento para hacer un ejercicio de educación en valores.

1. **Educación para la salud**

   Algunas de las técnicas más innovadoras en investigación biomédica emplean dispositivos que se basan en los principios de la física cuántica, como el microscopio electrónico y el microscopio de efecto túnel. Además, la nanotecnología se presenta como una técnica esperanzadora en la aplicación de terapias frente a cánceres y otras enfermedades muy agresivas.

   Se pueden aprovechar estas ideas para que los alumnos y alumnas aumenten su conocimiento acerca del mundo que les rodea, tomando como punto de partida un tema de gran interés, como son las actuaciones relacionadas con la mejora en el estado de salud de las personas.

2. **Educación cívica**

   Recordando alguno de los debates científicos que surgieron alrededor de los principios de la física cuántica y lo difícil que resultó su aceptación por científicos de renombre, se puede establecer una discusión en la que los alumnos y alumnas analicen distintas consecuencias de los fenómenos cuánticos. Como ejemplo se puede estudiar el movimiento de un balón o las consecuencias filosóficas de no tener certeza del lugar que ocupa una partícula en el espacio.

3. **Educación para el consumidor**

   Algunos dispositivos de lectura de datos incluyen un haz láser. Los punteros láser se pueden adquirir incluso a un precio muy bajo. Es frecuente que crucemos puertas que se abren o cierran por medio de células fotoeléctricas.
   Los conocimientos básicos que sustentan estas situaciones deben ser conocidos por los consumidores con el fin de que valoren las consecuencias de adquirir los dispositivos más adecuados a la función que desean, sin que su manejo suponga un riesgo para sí mismos o para otras personas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Interpretar la ley de Planck. Calcular la energía de una radiación y la energía que lleva un determinado haz de fotones.
2. Analizar los distintos aspectos del efecto fotoeléctrico. Calcular la frecuencia umbral y el potencial de frenado para una determinada radiación incidente.
3. Reconocer fenómenos cuánticos en experiencias significativas, como el efecto fotoeléctrico o los espectros atómicos.
4. Aplicar cuantitativamente el principio de dualidad onda-corpúsculo y valorar sus consecuencias para partículas de tamaño muy diverso.
5. Aplicar cuantitativamente el principio de incertidumbre y valorar sus consecuencias para partículas de tamaño muy diverso.
6. Reconocer fenómenos cuánticos en algunos dispositivos, como el microscopio electrónico, la célula fotoeléctrica o las nanopartículas.

1. **Al realizar una experiencia para estudiar el espectro de emisión térmica de un cuerpo negro encontramos que el máximo de emisión coincide con la longitud de onda de 600 nm (color naranja). Calcula:**

a) La temperatura del cuerpo negro en esa experiencia.

b) La intensidad de la radiación emitida.

a) De acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\text{máx.}} \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$$

Conociendo la longitud de onda de la radiación podemos obtener la temperatura:

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{\lambda} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{600 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4830\ \text{K}$$

b) Aplicamos la fórmula de Stefan-Boltzmann:

$$I = \frac{dE/dt}{S} = \frac{\sigma \cdot S \cdot T^4}{S} = \sigma \cdot T^4$$

Suponiendo que se trata de un cuerpo negro ideal, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Por tanto:

$$I = \sigma \cdot T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \cdot (4830\ \text{K})^4 =$$
$$= 3{,}09 \cdot 10^{7}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. **Un fotón de luz roja de 700 nm de longitud de onda tiene una energía igual a $2{,}84 \cdot 10^{-19}$ J. ¿Cuál es la energía de un fotón de luz verde de 550 nm?**

(R. Murcia. Junio, 2006)

Calculamos la energía de cada fotón utilizando la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

- $E_{\text{roja}} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{\text{roja}}}$
- $E_{\text{verde}} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{\text{verde}}}$

Si dividimos ambas expresiones:

$$\frac{E_{\text{roja}}}{E_{\text{verde}}} = \frac{\dfrac{\cancel{hc}}{\lambda_{\text{roja}}}}{\dfrac{\cancel{hc}}{\lambda_{\text{verde}}}} \rightarrow E_{\text{verde}} = E_{\text{roja}} \cdot \frac{\lambda_{\text{roja}}}{\lambda_{\text{verde}}} =$$

$$= 2{,}84 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot \frac{700 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

3. **Cuando incide sobre el potasio luz de 300 nm de longitud de onda, los fotoelectrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2,03 eV.**

a) ¿Cuál es la energía del fotón incidente?

b) ¿Cuál es el trabajo de extracción (función trabajo) del potasio?

Datos: 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

(P. Asturias. Septiembre, 2007)

a) Calculamos la energía de la radiación incidente de acuerdo con la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{300 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 6{,}625 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

b) De acuerdo con la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - E_{\text{C}} =$$

$$= 6{,}625 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 2{,}03\ \cancel{\text{eV}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} = 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

4. **Al iluminar un cierto metal, cuya función de trabajo es 4,5 eV, con una fuente de 10 W de potencia que emite luz de 10^{15} Hz, no se produce el efecto fotoeléctrico. Conteste y razone si se producirá el efecto si se duplica la potencia de la fuente.**

(R. Murcia. Junio, 2005)

La potencia de la fuente determina el número de fotones emitidos por unidad de tiempo. Si se duplica la potencia, se duplica el número de fotones, pero no la energía que transportan.

De acuerdo con la expresión de Einstein:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

Por tanto, sería necesario incrementar $E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu$ para sobrepasar el trabajo de extracción (o función de trabajo) y que se produzca efecto fotoeléctrico.

Es inmediato ver que la energía del fotón que deberíamos incrementar depende de la frecuencia de la radiación emitida, pero es independiente de la potencia de la fuente. Así pues, no se producirá efecto fotoeléctrico al duplicar la potencia de la fuente.

5. **El umbral fotoeléctrico del cobre viene dado por una longitud de onda $\lambda_0 = 320$ nm. Sobre una lámina de este metal incide una radiación ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 240$ nm. Hallar:**

a) El trabajo de extracción.

b) La energía cinética máxima de los electrones liberados.

Datos: constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

(La Rioja. Septiembre, 2007)

a) De acuerdo con la expresión de Einstein:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

Calculamos el trabajo de extracción:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{320 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 6{,}216 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

b) Obtenemos la energía del fotón de acuerdo con la fórmula de Planck:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{240 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 8{,}288 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Entonces:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow E_C = E_{\text{fotón}} - W_{\text{extracción}} =$$

$$= 8{,}288 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 6{,}216 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2{,}072 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

6. **En una célula fotoeléctrica se ilumina el cátodo metálico con una radiación de $\lambda = 200$ nm; en estas condiciones, el potencial de frenado para los electrones es de 1 voltio. Cuando se usa luz de 175 nm, el potencial de frenado es de 1,86 V. Calcula:**

a) El trabajo de extracción del metal y la constante de Planck, *h*.

b) ¿Se produciría efecto fotoeléctrico si se iluminase con luz de 250 nm?

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; 1 m = 10^9 nm.

(Galicia. Junio, 2002)

a) De acuerdo con la expresión de Einstein:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

Expresado en función del potencial de frenado:

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + |q_e| \cdot V_{\text{frenado}}$$

Planteamos las dos ecuaciones en función de los parámetros que se citan en el enunciado. (Como en el libro, $|q_e| = e$.)

- $\lambda = 200$ nm:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} + |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_{\text{extracción}} + |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{\text{extracción}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} =$$

$$= h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V}$$

- $\lambda = 175$ nm:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} =$$

$$= h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{175 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1{,}86 \text{ V}$$

Entonces:

$$h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} =$$

$$= h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{175 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1{,}86 \text{ V} \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{175 \cdot 10^{-9}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{200 \cdot 10^{-9}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}86 \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot 1{,}71 \cdot 10^{15} = h \cdot 1{,}5 \cdot 10^{15} + 1{,}38 \cdot 10^{-19} \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot (1{,}71 \cdot 10^{15} - 1{,}5 \cdot 10^{15}) = 1{,}38 \cdot 10^{-19} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-19}}{0{,}21 \cdot 10^{15}} = 6{,}57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Calculamos el trabajo de expresión con la ecuación deducida anteriormente. Usamos para h el valor que hemos obtenido:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} =$$

$$= 6{,}57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 8{,}25 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

b) Calculamos la energía aportada por el fotón y vemos si sobrepasa el trabajo de extracción que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}42 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{250 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 7{,}704 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Dado que la energía es menor que el trabajo de extracción, resulta que no se produciría efecto fotoeléctrico.

7. **Calcula la energía de la primera raya de la serie de Lyman, de la serie de Balmer y de la serie de Paschen para el átomo de hidrógeno y determina en qué zona del espectro electromagnético se encuentra cada una.**

Calcularemos, en cada caso, la longitud de onda correspondiente a la radiación, y a partir de esta obtendremos la energía según la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

La serie de Lyman se corresponde con:

$$\frac{1}{\lambda_L} = R \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Y la primera línea se produce para $n = 2$.

$$\frac{1}{\lambda_L} = 10\,967\,757 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 8{,}226 \cdot 10^{6}\ \text{m}^{-1}$$

Entonces:

$$E_L = h \cdot \frac{c}{\lambda_L} =$$

$1/\lambda_L$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 8{,}226 \cdot 10^{6}\ \text{m}^{-1} = 1{,}64 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

La serie de Balmer se corresponde con:

$$\frac{1}{\lambda_B} = R \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Y la primera línea de la serie de Balmer se produce para $n = 3$.

$$\frac{1}{\lambda_B} = 10\,967\,757 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}523 \cdot 10^{6}\ \text{m}^{-1}$$

Entonces:

$$E_B = h \cdot \frac{c}{\lambda_B} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 1{,}523 \cdot 10^{6}\ \text{m}^{-1} = 3{,}03 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La serie de Paschen se corresponde con:

$$\frac{1}{\lambda_P} = R \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Y la primera línea de la serie de Paschen se produce para $n = 4$.

$$\frac{1}{\lambda_P} = 10\,967\,757 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4^2}\right) = 5{,}332 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$$

Entonces:

$$E_P = h \cdot \frac{c}{\lambda_P} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 5{,}332 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} = 1{,}06 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

8. La energía del electrón del átomo de hidrógeno vale 2,174 · 10^{-18} J cuando se encuentra en la primera órbita. Calcula la energía del fotón que emite el electrón cuando salta del nivel 4 al nivel 2.
¿En qué serie espectral encontraremos esta raya? Compara el valor de la energía de este fotón con la que se obtendría utilizando la fórmula de los espectroscopistas.

Cuando un electrón se encuentra en un determinado nivel de energía, el valor de esta es negativo, ya que el electrón y el núcleo tienen carga de distinto signo.

Podemos obtener la energía de un electrón en una órbita a partir de:

$$E = -\frac{\text{cte.}}{n^2}$$

Para la primera órbita, $n = 1$:

$$E_1 = -\frac{\text{cte.}}{1^2} = -2{,}18 \cdot 10^{-18} \rightarrow \text{cte.} = 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Conociendo el valor de la constante podemos determinar el valor de la energía en los restantes niveles:

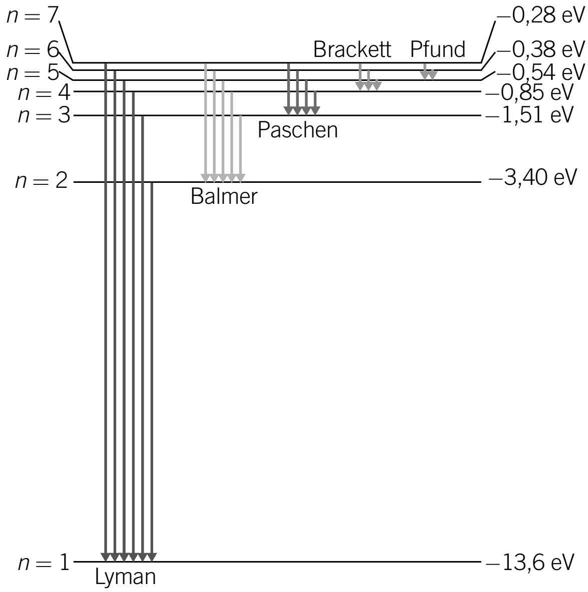
- $E_2 = -\frac{\text{cte.}}{2^2} = -\frac{2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{4} = -5{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- $E_4 = -\frac{\text{cte.}}{4^2} = -\frac{2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{16} = -1{,}36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Y la energía del fotón que se libera al producirse el cambio entre niveles se puede obtener como:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = E_4 - E_2 =$$

$$= -1{,}36 \cdot 10^{-19} \text{ J} - (-5{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J}) = 4{,}09 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De acuerdo con el siguiente esquema, esta raya se encontrará en la serie espectral de Balmer.



Comparamos con el valor que se obtendría utilizando la fórmula de los espectroscopistas.

Para el tránsito entre los niveles $n = 2$ y $n = 4$:

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) = R \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right) =$$

$$= 10\,967\,757\ \text{m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = 2{,}0565 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}$$

Calculamos la energía del fotón con la fórmula de Planck:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 2{,}0565 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1} = 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

El valor coincide con el obtenido por el procedimiento anterior.

9. **Una de las rayas de la serie de Lyman del espectro del átomo de hidrógeno aparece a una longitud de onda de 94,97 nm. Determina entre qué niveles de energía se produce el tránsito electrónico. Dato: la energía del electrón en el primer nivel energético del átomo de hidrógeno es −13,6 eV (el signo menos indica que el electrón está ligado al núcleo).**

Cuando un electrón salta de una órbita (n_1) a otra (n_2) absorbe o emite un fotón cuya energía coincide con la diferencia de energía entre las órbitas:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = E_2 - E_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow E_2 - E_1 = -\frac{\text{cte.}}{n_2^2} - \left(-\frac{\text{cte.}}{n_1^2}\right) = \text{cte.} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Por otra parte:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Relacionando las expresiones anteriores:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = \text{cte.} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{cte.}}{h \cdot c} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Podemos obtener el valor de la constante a partir del dato de la energía del electrón en el primer nivel energético:

$$E = -\frac{\text{cte.}}{n^2} \rightarrow -13{,}6 \cancel{\text{eV}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1 \cancel{\text{eV}}} = -\frac{\text{cte.}}{1^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{cte.} = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Entonces:

$$\frac{\text{cte.}}{h \cdot c} = \frac{2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \text{m}^{-1}$$

Con los datos del enunciado resulta que:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\text{cte.}}{h \cdot c} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{94{,}97 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \text{m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{94{,}97 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}097 \cdot 10^{7}} = \frac{1}{1{,}0418} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Por ser una raya de la serie de Lyman, será $n_1 = 1$.

$$\frac{1}{1{,}0418} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n_2^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{1{,}0418} = \frac{1}{n_2^2} = 0{,}0410 \rightarrow$$

$$\rightarrow n_2 = \sqrt{\frac{1}{0{,}0410}} = 4{,}99 \approx 5$$

Así, el tránsito se produce entre el nivel 5 y el 1.

10. **Calcule la longitud de la onda de materia asociada a un balón de fútbol de 500 g de masa que se mueve a una velocidad de 72 km/h.**
Dato: constante de Planck (h) = 6,6 · 10^{-34} J · s.
(Extremadura. Junio, 2006)

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$72\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

Calculamos la longitud de onda aplicando directamente la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\cdot v} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{0{,}5\ \text{kg}\cdot 20\ \text{m/s}} = 6{,}63\cdot 10^{-35}\ \text{m}$$

11. **Razone si la longitud de onda de De Broglie de los protones es mayor o menor que la de los electrones en los siguientes casos:**
a) Ambos tienen la misma velocidad.
b) Ambos tienen la misma energía cinética.
(Andalucía, 2007)

a) La longitud de onda de De Broglie se obtiene así:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\cdot v}$$

Si el protón y el electrón tienen la misma velocidad:

- $\lambda_{\text{protón}} = \dfrac{h}{m_{\text{protón}}\cdot v}$
- $\lambda_{\text{electrón}} = \dfrac{h}{m_{\text{electrón}}\cdot v}$

Dividiendo ambas:

$$\frac{\lambda_{\text{protón}}}{\lambda_{\text{electrón}}} = \frac{\dfrac{\cancel{h}}{m_{\text{protón}}\cdot \cancel{v}}}{\dfrac{\cancel{h}}{m_{\text{electrón}}\cdot \cancel{v}}} = \frac{m_{\text{electrón}}}{m_{\text{protón}}} \rightarrow \lambda_{\text{protón}} = \lambda_{\text{electrón}}\cdot\frac{m_{\text{electrón}}}{m_{\text{protón}}}$$

Como la masa del protón es mayor que la masa del electrón, la longitud de onda del protón será menor que la del electrón.

b) Expresamos la longitud de onda en función de la energía cinética:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot E_C}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{m\cdot 2\cdot E_C}}$$

Si ambos tienen la misma energía cinética, será mayor la longitud de onda del electrón, ya que su masa es menor que la del protón.

12. **a) En un microscopio electrónico se aplica una diferencia de potencial de 20 kV para acelerar los electrones. Determine la longitud de onda de los fotones de rayos X de igual energía que dichos electrones.**

b) Un electrón y un neutrón tienen igual longitud de onda de De Broglie. Razone cuál de ellos tiene mayor energía.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1}; $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_n = 1{,}7 \cdot 10^{-7}$ kg.

(Andalucía, 2006)

a) La diferencia de potencial con que se acelera el haz de electrones nos permite calcular la energía cinética que adquieren:

$$E_{\text{electrón}} = |q_e| \cdot V = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 20 \cdot 10^{3}\ \text{V} \rightarrow$$
$$\rightarrow E_{\text{electrón}} = 3{,}2 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

Esta es la energía cinética que lleva cada electrón.

Los fotones que tienen igual energía que los electrones tendrán una energía que, de acuerdo con la ley de Planck, viene dada por la expresión:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda_{\text{fotón}}} \rightarrow$$
$$\lambda_{\text{fotón}} = \frac{h \cdot c}{E_{\text{electrón}}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3{,}2 \cdot 10^{-15}\ \text{J}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_{\text{fotón}} = 6{,}1875 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

b) Tenemos que expresar la energía cinética en términos de longitud de onda:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{(m \cdot v)^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \qquad [1]$$

De la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

Sustituyendo en la ecuación [1]:

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{m} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot m}$$

Aplicándolo al electrón y al neutrón:

- $E_{C\,e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot m_e}$
- $E_{C\,n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot m_n}$

Dividiendo ambas:

$$\frac{E_{C\,e}}{E_{C\,n}} = \frac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{\lambda^2} \cdot m_e}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{\lambda^2} \cdot m_n}} \rightarrow \frac{E_{C\,e}}{E_{C\,n}} = \frac{m_n}{m_e} \rightarrow E_{C\,e} = E_{C\,n} \cdot \frac{m_n}{m_e}$$

Si tienen la misma longitud de onda, dado que la masa del electrón es menor que la del neutrón, resulta que su energía cinética es mayor que la del neutrón.

13. **a) Enuncie el principio de incertidumbre y explique cuál es su origen.**

b) Razone por qué no tenemos en cuenta el principio de incertidumbre en el estudio de los fenómenos ordinarios.

(Andalucía, 2006)

a) Los dos enunciados del principio de incertidumbre son:

- No es posible determinar a la vez el valor exacto de la posición y el momento lineal de un objeto cuántico. Ambas indeterminaciones guardan la siguiente relación:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

  – Δx: indeterminación en la posición.
  – Δp: indeterminación en el momento lineal.

- No es posible determinar a la vez el valor exacto de la energía de un objeto cuántico y el tiempo que se requiere para medirla. Ambas indeterminaciones guardan la siguiente relación:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

  – ΔE: indeterminación en la energía.
  – Δt: indeterminación en el tiempo.

Se origina al intentar realizar medidas a nivel cuántico, donde el doble carácter corpuscular y ondulatorio de las partículas impide que conozcamos con precisión y a la vez su posición y momento lineal. Esta incertidumbre en la medida no depende de la precisión de los aparatos de medida; es una característica intrínseca de la naturaleza.

b) En los fenómenos ordinarios se trabaja en el mundo macroscópico. Como ya sucedía con la longitud de onda asociada a los objetos en movimiento, la indeterminación en objetos macroscópicos no tiene efectos apreciables.

El valor de la constante de Planck (del orden de 10^{-34} en unidades del SI) hace que el error intrínseco sea del todo inapreciable.

14. **Explica qué problemas causaría elegir un cuerpo que no fuese cuerpo negro para estudiar la emisión térmica.**

Se entiende como cuerpo negro aquel cuyas paredes absorben cualquier radiación que les llegue, sin dar lugar a ningún tipo de reflexiones hacia el exterior. En consecuencia, la radiación que emite un cuerpo negro es debida, exclusivamente, a su estado térmico.

Si el cuerpo elegido no fuese negro, podrían obtenerse radiaciones debidas a reflexiones de otras radiaciones que lo alcancen, enmascarando el resultado de la radiación puramente térmica emitida por el mismo.

15. **Cuando se calienta una barra de hierro al rojo vivo emite radiación con una longitud de onda de 724 nm. Si seguimos calentando hasta que su color es amarillo claro, la radiación emitida tiene una longitud de onda de 580 nm. Calcula la temperatura de la barra de hierro en cada caso.**

Calculamos en cada caso la temperatura a partir de la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\text{máx.}} \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$$

- $T_{\text{rojo}} = \dfrac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{\text{rojo}}} = \dfrac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{724 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4003\ \text{K}$
- $T_{\text{amarillo}} = \dfrac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{\text{amarillo}}} = \dfrac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{580 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4997\ \text{K}$

16. **Tomando los datos que precises del ejercicio anterior, determina la cantidad de energía que emite en cada segundo una barra de hierro cuya superficie es de 0,5 m^2 cuando se encuentra al rojo vivo.**

Aplicamos la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma \cdot S \cdot T^4 =$$

$$= 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \cdot 0{,}5\ \text{m}^2 \cdot (4003\ \text{K})^4 = 7{,}28 \cdot 10^6\ \text{W}$$

17. **La parte visible de la radiación electromagnética está limitada por la radiación roja, de longitud de onda 400 nm, y la violeta, de 700 nm. Determina cuál de ellas es más energética y cuántas veces es más energética que la otra.**

Relacionamos la longitud de onda y la frecuencia:

$$c = \lambda \cdot \nu \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

De acuerdo con Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Aplicando esta expresión al caso de la radiación violeta y la roja nos queda:

- $E_{\text{violeta}} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{\text{violeta}}}$
- $E_{\text{roja}} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{\text{roja}}}$

Dividiendo ambas:

$$\frac{E_{\text{violeta}}}{E_{\text{roja}}} = \frac{\cancel{h} \cdot \dfrac{\cancel{c}}{\lambda_{\text{violeta}}}}{\cancel{h} \cdot \dfrac{\cancel{c}}{\lambda_{\text{roja}}}} = \frac{\lambda_{\text{roja}}}{\lambda_{\text{violeta}}} = \frac{700 \text{ nm}}{400 \text{ nm}} = 1{,}75 \rightarrow \frac{E_{\text{violeta}}}{E_{\text{roja}}} = 1{,}75$$

Como la longitud de onda de la radiación roja es menor que la longitud de onda violeta, será mayor la energía de la radiación violeta.
La energía de un fotón es proporcional a la frecuencia. Y la frecuencia de la radiación violeta es mayor que la de la radiación roja.

18. **La intensidad de la luz solar en la superficie terrestre es aproximadamente de 1400 W · m^{-2}. Suponiendo que la energía media de los fotones sea de 2 eV:**

a) Calcula el número de fotones que inciden por minuto en una superficie de 1 m^2.

b) ¿A qué longitud de onda corresponde esa energía media de los fotones?

Datos: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(País Vasco. Junio, 2001)

a) Para una superficie de 1 m^2:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow P = I \cdot S = 1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 1 \text{ m}^2 = 1400 \text{ W}$$

La potencia de la radiación es la energía emitida por unidad de tiempo. Esa energía la aportan todos los fotones que integran la radiación, es decir, es la suma de la energía de todos sus fotones:

$$P = \frac{E_{\text{radiación}}}{t} = \frac{n \cdot E_{\text{fotón}}}{t}$$

En cada segundo:

$$E_{\text{radiación}} = 1400 \text{ J/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{E_{\text{radiación}}}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1400 \text{ J/s}}{2 \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \cancel{\text{eV}}}} = 4{,}38 \cdot 10^{21} \text{ fotones/s}$$

Expresado en fotones/min:

$$\frac{4{,}38 \cdot 10^{21} \text{ fotones}}{1 \cancel{\text{s}}} \cdot \frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \text{ min}} = 2{,}63 \cdot 10^{23} \text{ fotones/min}$$

b) De acuerdo con la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{2 \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \cancel{\text{eV}}}} = 6{,}19 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

19. Un láser de longitud de onda λ = 630 nm tiene una potencia de 10 mW y un diámetro de haz de 1 mm. Calcula:

a) La intensidad del haz.

b) El número de fotones por segundo que viajan con el haz.

Datos: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; constante de Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s.

(C. Madrid. Junio, 1999)

a) Conociendo la potencia de emisión y la superficie del haz calculamos la intensidad:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{\pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 1{,}27 \cdot 10^{4} \text{ W/m}^2$$

b) La potencia de la radiación es la energía emitida por unidad de tiempo. Esa energía la aportan todos los fotones que integran la radiación, es decir, es la suma de la energía de todos sus fotones:

$$P = \frac{E_{\text{radiación}}}{t} = \frac{n \cdot E_{\text{fotón}}}{t}$$

Calculamos la energía de un fotón, conociendo la longitud de onda de la radiación, a partir de la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{630 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}14 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

En cada segundo:

$$E_{\text{radiación}} = 1{,}27 \cdot 10^{4}\ \text{J/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{E_{\text{radiación}}}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1{,}27 \cdot 10^{4}\ \text{J/s}}{3{,}14 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 4{,}04 \cdot 10^{22}\ \text{fotones/s}$$

20. **a) Enunciar y explicar brevemente la hipótesis de Planck.**

b) Sobre un lado de una placa incide un haz de rayos X formado por 100 fotones; por el otro incide un haz de luz roja. ¿Cuántos fotones tendría que tener el haz de luz roja para que la energía que recibe la placa fuese la misma por ambos lados?

Datos: rayos X → $\nu = 3 \cdot 10^{18}$ Hz; luz roja → $\nu = 4{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz.

(Cantabria. Septiembre, 2007)

a) Planck supuso que en la materia existen pequeños osciladores (átomos o moléculas) que vibran con determinadas frecuencias, absorbiendo y emitiendo energía en forma de ondas electromagnéticas.

Cada oscilador solo puede absorber o emitir energía que sea un múltiplo entero de su energía básica, una energía que es directamente proporcional a su frecuencia natural de oscilación.

La energía básica de un oscilador es:

$$E_0 = h \cdot \nu$$

La energía que puede absorber o emitir un oscilador es:

$$E = n \cdot h \cdot \nu$$

Cada oscilador se puede encontrar en distintos estados cuánticos, correspondientes a los diversos valores de n. Si en el primer estado cuántico la energía del oscilador es:

$$E_1 = 1 \cdot h \cdot \nu$$

En el tercer estado cuántico tendrá una energía:

$$E_3 = 3 \cdot h \cdot \nu$$

Cuando el oscilador pasa de un estado cuántico a otro absorbe o emite la energía que resulta de la diferencia de energía existente entre ellos.

Por eso esa energía siempre es un número de veces la energía básica. Esta unidad de energía básica se llama cuanto de energía o fotón. Los átomos o moléculas pasan de un estado cuántico a otro absorbiendo o emitiendo un determinado número de fotones.

b) Como antes:

$$E_{\text{radiación}} = n \cdot E_{\text{fotón}}$$

Obtenemos la energía de un fotón mediante la expresión de Planck:

- $E_{\text{rojo}} = h \cdot \nu_{\text{rojo}}$
- $E_{\text{rayos X}} = h \cdot \nu_{\text{rayos X}}$

Si queremos que la energía de ambas radiaciones sea la misma:

$$E_{\text{rojo}} = E_{\text{rayos X}} \rightarrow n_{\text{rojo}} \cdot \cancel{h} \cdot \nu_{\text{rojo}} = n_{\text{rayos X}} \cdot \cancel{h} \cdot \nu_{\text{rayos X}} \rightarrow$$

$$\rightarrow n_{\text{rojo}} = \frac{n_{\text{rayos X}} \cdot \nu_{\text{rayos X}}}{\nu_{\text{rojo}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow n_{\text{rojo}} = \frac{100 \text{ fotones} \cdot 3 \cdot 10^{18} \text{ Hz}}{4{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6{,}67 \cdot 10^{5} \text{ fotones}$$

21. Cuando se ilumina un metal con un haz de luz monocromática se observa emisión fotoeléctrica.

a) Explique, en términos energéticos, dicho proceso.

b) Si se varía la intensidad del haz de luz que incide en el metal, manteniéndose constante su longitud de onda, ¿variará la velocidad máxima de los electrones emitidos? ¿Y el número de electrones emitidos en un segundo? Razone las respuestas.

(Andalucía, 2007)

a) La radiación luminosa es una corriente de fotones, cada uno de los cuales tiene una energía que coincide con la energía de la radiación que, de acuerdo con la expresión de Planck, es $E = h \cdot \nu$.

Cuando la radiación luminosa alcanza el metal, cada fotón interacciona con uno de sus electrones y, si tiene energía suficiente (superior al trabajo de extracción), lo arranca.

Cada fotón interacciona con un electrón. Si la energía del fotón supera el trabajo de extracción, la intensidad de la corriente producida depende de la intensidad de la radiación luminosa, ya que el número de electrones arrancados coincidirá con el número de fotones que llegan al metal.

Cuando la energía del fotón supera el trabajo de extracción, el exceso de energía se transforma en energía cinética del electrón.

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

b) Al variar la intensidad del haz de luz, variará el número de fotones que inciden en el metal por unidad de tiempo. Dado que cada fotón interacciona con un electrón, se producirán más interacciones por unidad de tiempo, se emitirán más electrones por segundo, pero cada uno se moverá de forma equivalente al caso anterior (su velocidad no variará).

22. Define el trabajo de extracción de los electrones de un metal cuando recibe radiación electromagnética. Explica de qué magnitudes depende la energía máxima de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico.

(C. Valenciana. Septiembre, 2006)

Se llama trabajo de extracción (o función de trabajo), $W_{\text{extracción}}$, a la energía mínima que deben tener los fotones de la radiación que provoca efecto fotoeléctrico. Coincide con la energía que mantiene ligado al electrón al átomo. La frecuencia de esa radiación coincide con la frecuencia umbral (ν_0), y su valor depende del material.

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2$$

Por tanto, la energía cinética máxima de los electrones arrancados depende de la frecuencia de los fotones de la radiación incidente y de la frecuencia umbral del material.

23. Un metal emite electrones por efecto fotoeléctrico cuando se ilumina con luz azul, pero no lo hace cuando la luz es amarilla. Sabiendo que la longitud de onda de la luz roja es mayor que la de la amarilla, ¿qué ocurrirá al iluminar el metal con luz roja? Razona la respuesta.

(C. Valenciana. Septiembre, 2007)

Para que se emitan electrones la radiación incidente debe tener energía mayor que el trabajo de extracción. La energía incidente es inversamente proporcional a la longitud de onda de la radiación. Por este motivo, si la radiación de una determinada longitud de onda es insuficiente, también lo será la de una longitud de onda mayor. Si no se produce efecto fotoeléctrico al iluminar con luz amarilla, tampoco se producirá con luz roja (cuya longitud de onda es mayor).

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

24. **a) Explique la conservación de la energía en el proceso de emisión de electrones por una superficie metálica al ser iluminada con luz adecuada.**

b) Razone qué cambios cabría esperar en la emisión fotoeléctrica de una superficie metálica:

i) Al aumentar la intensidad de la luz incidente.
ii) Al aumentar el tiempo de iluminación.
iii) Al disminuir la frecuencia de la luz.

(Andalucía, 2006)

a) En el proceso del efecto fotoeléctrico se tiene el siguiente balance energético:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}}$$

Así pues, toda la energía de la radiación incidente que exceda del trabajo de extracción se convertirá en energía cinética de los electrones arrancados.

b) Los cambios serán:

i) Al aumentar la intensidad de la luz incidente aumentan los fotones emitidos por unidad de tiempo, por lo que aumentará también la corriente de electrones emitida por segundo. Aumentará la intensidad de corriente que se produce.

ii) Si aumenta el tiempo de iluminación, el efecto fotoeléctrico durará más tiempo y la cantidad total de electrones emitidos será mayor.

iii) Al disminuir la frecuencia de la luz disminuye también la energía de los fotones que inciden en la superficie. Si la energía es suficiente para sobrepasar el trabajo de extracción, el efecto será una disminución en la energía cinética de los electrones emitidos. Si la disminución de frecuencia hace que los fotones tengan una energía inferior al trabajo de extracción, no se producirá efecto fotoeléctrico.

25. **Un metal cuyo trabajo de extracción es de 4,25 eV se ilumina con fotones de 5,5 eV. ¿Cuál es la energía máxima de los fotoelectrones emitidos?**

a) 5,5 eV **b) 1,25 eV** **c) 9,75 eV**

(Galicia. Septiembre, 2007)

De acuerdo con el balance energético:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{C máx.}} = E_{\text{fotón}} - W_{\text{extracción}} = 5{,}5 \text{ eV} - 4{,}25 \text{ eV} = 1{,}25 \text{ eV}$$

La respuesta correcta es la b).

26. **¿Se produce corriente fotoeléctrica cuando la luz de 400 nm incide sobre un metal con una función de trabajo de 2,3 eV?**
Datos: 1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m · s^{-1}; 1 nm = 10^{-9} m.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

Calculamos primero la energía del haz incidente de acuerdo con la ley de Planck:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Expresado en eV:

$$E = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}}} = 3{,}11\ \text{eV}$$

Dado que la energía del haz es mayor que la función de trabajo del metal, se producirá corriente fotoeléctrica:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}}$$

27. Un haz de luz monocromática de 6,5 · 10^{14} Hz ilumina una superficie metálica que emite electrones con una energía cinética de 1,5 · 10^{-19} J. Calcular:

a) La frecuencia de cada fotón.

b) El trabajo de extracción del metal.

c) El valor de la frecuencia umbral.

Constante de Planck, h = 6,63 · 10^{-34} J · s; velocidad de la luz en el vacío y en el aire, c = 3 · 10^{8} m/s.

(País Vasco. Julio, 2006)

a) La frecuencia de cada fotón coincide con la frecuencia de radiación del haz de luz: 6,5 · 10^{14} Hz.

b) Obtenemos el trabajo de extracción a partir del siguiente balance energético:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - E_{\text{C electrón}} = h \cdot \nu - E_{\text{C electrón}} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 6{,}5 \cdot 10\ \text{Hz} - 1{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

c) Calculamos la frecuencia umbral:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_0 = \frac{W_{\text{extracción}}}{h} = \frac{2{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 4{,}24 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

28. Al iluminar la superficie de un metal con luz de longitud de onda 280 nm, la emisión de fotoelectrones cesa para un potencial de frenado de 1,3 V.

a) Determine la función trabajo del metal y la frecuencia umbral de emisión fotoeléctrica.

b) Cuando la superficie del metal se ha oxidado, el potencial de frenado para la misma luz incidente es de 0,7 V. Razone cómo cambian, debido a la oxidación del metal:

i) La energía cinética máxima de los fotoelectrones.

ii) La frecuencia umbral de emisión.

iii) La función de trabajo.

$c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1} ; $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(Andalucía, 2006)

a) Determinamos la función de trabajo a partir del balance energético del efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - |q_e| \cdot V_{\text{frenado}} =$$

$$= \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{280 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}3\ \text{V} = 5 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Sabemos que:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_0 = \frac{W_{\text{extracción}}}{h} = \frac{5 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 7{,}58 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

b) i. La energía cinética máxima es directamente proporcional al potencial de frenado ($E_C = |q_e| \cdot V_{\text{frenado}}$). Si el potencial de frenado disminuye, también lo hará la energía cinética de los fotoelectrones.

ii. Si la energía cinética disminuye, el balance energético indica que la función de trabajo aumenta: ($W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - |q_e| \cdot V_{\text{frenado}}$).

iii. Si aumenta la función de trabajo, aumenta la frecuencia umbral de emisión ($W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0$).

29. Se ilumina una superficie metálica con luz cuya longitud de onda es de 300 nm, siendo el trabajo de extracción del metal de 2,46 eV.

Calcule:

a) La energía cinética máxima de los electrones emitidos por el metal.

b) La longitud de onda umbral para el metal.

Datos: constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(C. Madrid, 2006)

a) De acuerdo con el balance energético:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow E_{\text{C máx.}} = E_{\text{fotón}} - W_{\text{extracción}} =$$

$$= h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_{\text{extracción}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{300 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} +$$

$$- 2{,}46\ \cancel{\text{eV}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} = 2{,}69 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

b) Calculamos la longitud de onda umbral, λ_0:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} \rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_{\text{extracción}}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{2{,}46 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 5{,}05 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

30. Si iluminamos la superficie de un metal con luz de $\lambda = 512$ nm, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es $8{,}65 \cdot 10^{-20}$ J. ¿Cuál será la máxima energía cinética de los electrones emitidos si incidimos sobre el mismo metal con luz de $\lambda = 365$ nm?

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m · s^{-1}.

(Cantabria. Junio, 2007)

Obtenemos primero el trabajo de extracción característico del metal:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - E_{\text{C}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - E_{\text{C}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{512 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 8{,}65 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 3{,}02 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Y, conociendo el trabajo de extracción, podemos determinar la energía cinética en el segundo caso:

$$E_{\text{C máx.}} = E_{\text{fotón}} - W_{\text{extracción}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_{\text{extracción}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{365 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 3{,}02 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}43 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

31. Sobre una superficie de sodio metálico inciden simultáneamente dos radiaciones monocromáticas de longitudes de onda $\lambda_1 = 500$ nm y $\lambda_2 = 560$ nm. El trabajo de extracción del sodio es 2,3 eV.

a) Determine la frecuencia umbral de efecto fotoeléctrico y razone si habría emisión fotoeléctrica para las dos radiaciones indicadas.

b) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la velocidad máxima de los electrones emitidos.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m · s^{-1}; $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

(Andalucía, 2007)

a) Conociendo el trabajo de extracción determinamos la frecuencia umbral:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_0 = \frac{W_{\text{extracción}}}{h} = \frac{2{,}3\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 5{,}58 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Para cada caso obtenemos la energía de un fotón de la radiación. Si esta es mayor que el trabajo de extracción, se producirá emisión fotoeléctrica.

- $E_1 = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{500 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$
- $E_2 = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_2} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{560 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}54 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

Y expresamos el trabajo de extracción en julios para poder comparar las magnitudes:

$$W_{\text{extracción}} = 2{,}3\ \cancel{\text{eV}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} = 3{,}68 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Como $E_1 > W_{\text{extracción}}$, se producirá efecto fotoeléctrico para la primera de las radiaciones.

Pero $E_2 < W_{\text{extracción}}$, por lo que no se producirá efecto fotoeléctrico para la segunda de las radiaciones.

b) La radiación luminosa es una corriente de fotones, cada uno de los cuales tiene una energía que coincide con la energía de la radiación que, de acuerdo con la expresión de Planck, es $E = h \cdot \nu$.

Cuando la radiación luminosa alcanza el metal, cada fotón interacciona con uno de sus electrones y, si tiene energía suficiente (superior al trabajo de extracción), lo arranca.

Cada fotón interacciona con un electrón. Si la energía del fotón supera el trabajo de extracción, la intensidad de la corriente producida depende de la intensidad de la radiación luminosa, ya que el número de electrones arrancados coincidirá con el número de fotones que llegan al metal.

Cuando la energía del fotón supera el trabajo de extracción, el exceso de energía se transforma en energía cinética del electrón.

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{fotón}} - W_{\text{extracción}})}{m_e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot (3{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 3{,}68 \cdot 10^{-19}\ \text{J})}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}48 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

32. **Se hace incidir luz monocromática de un láser He-Ne de 3 mW de intensidad y de longitud de onda $\lambda = 632$ nm sobre una superficie de potasio, cuyo trabajo de extracción es 2,22 eV.**

a) ¿Se producirá emisión fotoeléctrica?

b) ¿Qué ocurrirá si aumentamos la intensidad del láser He-Ne? Justifica tus respuestas.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s; 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J; 1 nm = 10^{-9} m.

(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2007)

a) Veamos cuál es la energía de los fotones de la radiación:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{632 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}13 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Y lo expresamos en eV para poder compararlo con el trabajo de extracción tal y como se proporciona en el enunciado:

$$E = 3{,}13 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}}} = 1{,}96\ \text{eV}$$

Dado que la energía del fotón, E, es menor que el trabajo de extracción, el fotón no tiene energía suficiente para producir efecto fotoeléctrico.

b) Tampoco se producirá efecto fotoeléctrico al aumentar la intensidad del láser. Al hacer esto, se aumenta la cantidad de fotones por unidad de tiempo que alcanzan el metal, pero cada uno de ellos interacciona con un electrón con energía insuficiente para arrancarlo.

33. **a) Explique, en términos de energía, el proceso de emisión de fotones por los átomos en un estado excitado.**

b) Razone por qué un átomo solo absorbe y emite fotones de ciertas frecuencias.

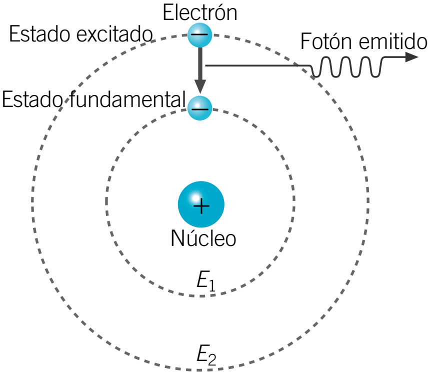
(Andalucía, 2007)

a) Los átomos en estado excitado tienen algún electrón en un nivel energético más alto del que tendría en su estado fundamental. El átomo volverá al estado fundamental cuando el electrón pase del nivel más alto de energía al nivel más bajo que le sea posible.

En este tránsito, los átomos emiten fotones cuya energía coincide con la diferencia de energías correspondiente a los niveles excitado y fundamental entre los que se ha producido el tránsito electrónico.

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = E_2 - E_1$$

b) Los estudios de Bohr y posteriores justifican que el electrón no se puede encontrar en cualquier lugar del átomo. Solo puede estar en determinadas regiones del espacio (orbitales) en cada una de las cuales tiene una determinada energía. El electrón solo puede pasar de un nivel de energía permitido a otro absorbiendo o emitiendo un fotón cuya energía coincide con la diferencia de energía entre los niveles de partida y de llegada.



Los cálculos de Bohr ya establecían que la energía de un electrón en un nivel depende de su número cuántico n:

$$E = -\frac{\text{cte.}}{n^2}$$

Así:

$$E_2 - E_1 = -\frac{\text{cte.}}{n_2^2} - \left(-\frac{\text{cte.}}{n_1^2}\right) = \text{cte.} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad [1]$$

Por otro lado:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$E_2 - E_1 = E_{\text{fotón}} \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = \text{cte.} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{cte.}}{h \cdot c} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

En conclusión, el átomo solo absorbe o emite fotones de determinada longitud de onda, y los fotones que absorbe al producirse un tránsito tendrán la misma energía que los que emite al producirse el tránsito inverso.

34. La energía del electrón en el primer nivel energético del átomo de hidrógeno es −13,6 eV. Teniendo en cuenta este dato, calcula la longitud de onda de la tercera raya de la serie de Balmer del espectro de emisión del átomo de hidrógeno. Compárala con lo que se muestra en la figura 9.13 de la página 314.

Cuando un electrón pasa de un nivel energético a otro más próximo al núcleo emite una radiación cuya energía coincide con la diferencia de energía entre los niveles de partida y de llegada.

Los cálculos de Bohr establecen que la energía de un electrón en un nivel depende de su número cuántico n:

$$E = -\frac{\text{cte.}}{n^2}$$

El dato de la energía para el primer nivel nos permite conocer el valor de la constante. La energía de un electrón en un átomo tiene signo negativo, pues el electrón y el núcleo tienen carga de distinto signo:

$$-13{,}6\ \cancel{\text{eV}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} = -\frac{\text{cte.}}{1^2} \rightarrow \text{cte.} = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

De acuerdo con la información que se muestra en las páginas de teoría del libro del alumno, la tercera raya de la serie de Balmer corresponde a un tránsito entre los niveles $n_1 = 5$ a $n_2 = 2$.

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{\text{cte.}}{n_2^2} - \left(-\frac{\text{cte.}}{n_1^2}\right) = \text{cte.} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\Delta E| = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 4{,}58 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Utilizamos la ley de Planck para calcular la longitud de onda:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = h \cdot \frac{c}{\Delta E} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{4{,}58 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 4{,}33 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

(Este valor es muy similar al que aparece en la figura que se cita en las páginas de teoría, de 434 nm.)

35. **Enuncia y comenta la hipótesis propuesta por Louis de Broglie en 1924 respecto a la dualidad onda-corpúsculo. ¿Qué hecho experimental confirmó por primera vez esa hipótesis?**

(P. Asturias. Junio, 2007)

Toda partícula material que se mueva lleva asociada una onda cuya longitud de onda viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Con esta expresión matemática se podía admitir la doble naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz y, en general, de todas las partículas cuya longitud de onda sea de un tamaño tal que pueda dar un patrón de difracción al atravesar una rejilla. Este efecto no se observa en el mundo macroscópico.

El hecho experimental que confirmó por primera vez esa hipótesis fue la difracción de un haz de electrones. El microscopio electrónico es una aplicación de este hecho.

36. **Enuncia la hipótesis de De Broglie. Calcula la longitud de onda de De Broglie de un electrón que se mueve con una velocidad de 10^7 m/s. Datos: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s.**

(Castilla-La Mancha, 2006)

Toda partícula material que se mueva lleva asociada una onda cuya longitud de onda viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

En el caso propuesto en el enunciado:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^{7}\ \text{m/s}} = 7{,}28 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

37. **Calcula la longitud de onda asociada a un fotón cuya energía es 3 keV. Datos: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.**

Según la expresión de Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3 \cdot 10^{3}\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}} = 4{,}125 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

38. **a) Explica brevemente la hipótesis de De Broglie.**
b) ¿Qué dice el principio de indeterminación?
c) Calcula la longitud de onda asociada a una pelota de golf de 50 g de masa que se mueve a una velocidad de 500 km/h.
Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s.

(Cantabria. Junio, 2006)

a) Toda partícula material que se mueva lleva asociada una onda cuya longitud de onda viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Con esta expresión matemática se podía admitir la doble naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz y, en general, de todas las partículas cuya longitud de onda sea de un tamaño que pueda dar un patrón de difracción al atravesar una rejilla. Este efecto no se observa en el mundo macroscópico.

b) El principio de indeterminación dice que no es posible determinar a la vez el valor exacto de la posición y el momento lineal de un objeto cuántico. De forma equivalente, su segunda formulación indica que no es posible determinar a la vez el valor exacto de la energía de un objeto cuántico y el tiempo que se requiere para medirla.

c) En función del principio de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 500 \dfrac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \dfrac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \dfrac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}} = 9{,}54 \cdot 10^{-35}\ \text{m}$$

39. **a) Escribe la ecuación de De Broglie. Comenta su significado y su importancia física.**
b) Un electrón que parte del reposo es acelerado mediante un campo eléctrico entre dos puntos con una diferencia de potencial $\Delta V = 2000$ V. Calcula el momento lineal final del electrón y su longitud de onda asociada.
$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

(Aragón. Septiembre, 2006)

a) Toda partícula material que se mueva lleva asociada una onda cuya longitud de onda viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Con esta expresión matemática se podía admitir la doble naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz y, en general, de todas las partículas cuya longitud de onda sea de un tamaño que pueda dar un patrón de difracción al atravesar una rejilla. Este efecto no se observa en el mundo macroscópico.

b) La energía con que se acelera el haz de electrones nos permite calcular la velocidad que adquieren y, con ello, por medio de la expresión de De Broglie, podremos calcular la longitud de la onda asociada:

$$E_C = E_P = |q| \cdot \Delta V$$

Entonces:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_P}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot |q| \cdot \Delta V}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{3}\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}652 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}$$

De la relación de De Broglie deducimos:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} =$$

$$= \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 2{,}652 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}} = 2{,}734 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

40. Una superficie de wolframio tiene una frecuencia umbral de $1{,}3 \cdot 10^{15}$ Hertz [Hz].

a) Se ilumina dicha superficie con luz de 1400 Å de longitud de onda (1 Å $= 10^{-10}$ m). ¿Se emiten electrones? Justifica brevemente la respuesta.

b) ¿Cuál debe ser la longitud de onda de la luz para que los electrones emitidos tengan una velocidad de $4 \cdot 10^5$ m/s?

c) Calcula la longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones emitidos con la velocidad de $4 \cdot 10^5$ m/s.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(Canarias. Junio, 2006)

a) Se emitirán electrones si la energía del haz es mayor que el trabajo de extracción del material.

Calculamos el trabajo de extracción a partir de la frecuencia umbral que se indica en el enunciado:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} = 8{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Obtenemos la energía de cada fotón del haz de luz:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1400 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} = 1{,}42 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Dado que la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, efectivamente se emiten electrones por efecto fotoeléctrico.

b) Planteamos el balance energético del efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_{\text{extracción}} + \frac{1}{2} m_{\text{e}} \cdot v_{\text{e}}^{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W_{\text{extracción}} + \frac{1}{2} m_{\text{e}} \cdot v_{\text{e}}^{2}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{8{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (4 \cdot 10^{5}\ \text{m/s})^{2}} =$$

$$= 2{,}13 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

c) Aplicamos la expresión de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 4 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}} = 1{,}82 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$$

41. En un experimento de efecto fotoeléctrico un haz de luz de 500 nm de longitud de onda incide sobre un metal cuya función de trabajo (o trabajo de extracción) es de 2,1 eV. Analice la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Los electrones arrancados pueden tener longitudes de onda de De Broglie menores que 10^{-9} m.

b) La frecuencia umbral del metal es mayor que 10^{14} Hz.

Datos: constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(C. Madrid, 2008)

a) Para responder a esta cuestión necesitamos conocer la velocidad con la que salen los electrones arrancados.

Planteamos el balance energético del efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extracción}} + E_{\text{C electrón}} \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_{\text{extracción}} + \frac{1}{2} m_{\text{e}} \cdot v_{\text{e}}^{2}$$

Por tanto:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(h \cdot \dfrac{c}{\lambda} - W_{\text{extracción}}\right)}{m_e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{500 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 2{,}1\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1\ \cancel{\text{eV}}}\right)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} =$$

$$= 3{,}7 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}$$

La expresión de De Broglie nos permite calcular la longitud de onda asociada a estos electrones:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}} = 1{,}97 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$$

Conclusión: la afirmación a) es falsa, pues los electrones arrancados no tienen longitudes de onda menores que 10^{-9} nm. Los electrones arrancados tienen una velocidad máxima de $3{,}7 \cdot 10^{5}$ m/s, lo que indica que su longitud de onda mínima es $1{,}97 \cdot 10^{-9}$ m.

b) En este caso:

$$W_{\text{extracción}} = h \cdot \nu_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nu_0 = \frac{W_{\text{extracción}}}{h} = \frac{2{,}1\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 5{,}07 \cdot 10^{23}\ \text{Hz}$$

Por tanto, la afirmación b) es verdadera.

NOTAS

10 Relatividad. Física nuclear

PRESENTACIÓN

- Nuevamente estamos en un tema cuyos contenidos se presentan por primera vez al alumnado. Recoge dos aspectos fundamentales de la física del último siglo: por una parte, la teoría de la relatividad, con su novedoso planteamiento conceptual; y por otro, la física del núcleo atómico, de gran actualidad por lo que respecta a las experiencias en el CERN.
- Consideramos muy importante poner el acento en los aspectos conceptuales y en las consecuencias que supusieron los avances teóricos y experimentales en estas ramas de la física. La idea de ciencia en construcción que de todo ello se desprende puede resultar muy motivadora para el alumnado.

OBJETIVOS

- Conocer los enunciados de los principios que sustentan la teoría de la relatividad especial.
- Comprender la idea de la relatividad del espacio y del tiempo.
- Utilizar los conceptos anteriores para comprender experiencias teóricas, como la paradoja de los gemelos, o hechos como la presencia de muones en las proximidades de la Tierra.
- Comprender el concepto de energía relativista y la interconversión masa-energía.
- Conocer el origen de la energía nuclear y ser capaz de evaluarla para un núclido concreto.
- Comprender los procesos radiactivos (naturales y artificiales) analizando las partículas que intervienen.
- Analizar y evaluar la energía asociada a un determinado proceso nuclear.
- Manejar con soltura las leyes que rigen la cinética de las desintegraciones radiactivas. Aplicarlas a estudios de datación y para comprender el problema de las emisiones y los residuos radiactivos.
- Evaluar de forma crítica algunas aplicaciones pacíficas de la energía nuclear.
- Conocer las partículas elementales que forman la materia y su relación con otras partículas conocidas por el alumnado, como los protones, los neutrones y los electrones.

10 Relatividad. Física nuclear

CONTENIDOS

Conceptos	• La constancia de la velocidad de la luz y la necesidad de una nueva teoría física que la explique. • La teoría de la relatividad especial y sus consecuencias: la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. • La masa y la energía relativistas. La interconversión masa-energía. • Las partículas que forman la materia y su ubicación en los átomos o fuera de ellos. • La energía de los núcleos. Estudio de su estabilidad. • La radiactividad natural y las leyes del desplazamiento radiactivo. • La cinética de las desintegraciones nucleares. Periodo de semidesintegración de una muestra y vida media de un núclido. • La radiactividad artificial. Procesos de fisión y fusión nuclear.
Procedimientos, destrezas y habilidades	• Aprender a determinar el valor de magnitudes características de un cuerpo (su masa, energía, tamaño, o tiempo de duración de un suceso) en relación con su velocidad. • Evaluar la estabilidad de los núcleos y relacionarla con las partículas que lo integran. • Completar reacciones nucleares analizando las partículas que intervienen. • Calcular la energía asociada a un proceso nuclear. • Evaluar la actividad nuclear de una muestra radiactiva en distintos momentos.
Actitudes	• Comprender la importancia de la ciencia para conocer y controlar fenómenos naturales, como los radiactivos. • Asumir que se pueden dar aplicaciones saludables y perniciosas de un mismo conocimiento científico.

EDUCACIÓN EN VALORES

Los contenidos que trata este tema son especialmente sensibles para una educación en valores.

Solo por ejemplificar comentamos algunas de las posibilidades.

1. Educación para la salud

La capacidad destructiva de los procesos nucleares puede ser analizada en su doble vertiente.

- El efecto positivo: su utilización para eliminar células cancerosas.
- El efecto negativo: la capacidad de destrucción indiscriminada que se puede producir como resultado de un escape radiactivo.

Por el desarrollo que ha alcanzado en los últimos tiempos, interesa comentar la utilización de isótopos radiactivos en procesos diagnósticos.

2. **Educación para la paz**

   Comentar los devastadores efectos de las armas nucleares se puede convertir en un recurso inestimable para que el alumnado se manifieste a favor de la paz. El debate puede orientarse en el sentido en que se busque la paz por sus efectos positivos, más allá de evitar los desastres que conllevan las guerras y otras situaciones conflictivas.

3. **Educación cívica**

   El tema de la energía nuclear da pie a múltiples debates en los que conviene analizar pros y contras de cada una de sus aplicaciones. Es muy probable que a lo largo de su vida una buena parte del alumnado se tenga que manifestar al respecto de una instalación nuclear o de un centro de gestión de residuos. Conviene, por tanto, ensayar este tipo de debates a fin de que se pongan de manifiesto los distintos aspectos que debemos valorar, más allá de dar una opinión visceral y poco documentada.

4. **Educación medioambiental**

   Cuando se vive cerca de una instalación nuclear, el medio ambiente sufre un impacto considerable. Se requieren medidas de protección que cambian el uso del suelo circundante, y el agua y cualquier emisión requieren controles que garanticen su inocuidad. Asimismo, deben establecerse planes de evacuación que minimicen los efectos derivados de un accidente en la instalación.

   Debemos ser muy respetuosos con estas actuaciones; una actuación nuestra irresponsable puede provocar daños medioambientales irreparables.

5. **Educación para el consumidor**

   Las crecientes necesidades energéticas llevan a los países a plantearse la energía nuclear como un modo relativamente barato de satisfacer sus necesidades. Comprender los riesgos que comportan las instalaciones nucleares puede motivar un consumo responsable de la energía.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Utilizar la teoría especial de la relatividad para explicar experimentos teóricos (como la paradoja de los gemelos) o hechos reales (como la presencia de muones en las proximidades de la Tierra).
2. Calcular las magnitudes que caracterizan un cuerpo (masa, energía, velocidad, longitud o tiempo de duración de un suceso) cuando se mueve con velocidades próximas a las de la luz.
3. Calcular la energía que estabiliza un núcleo.
4. Analizar la estabilidad de varios núcleos evaluando la energía por nucleón.
5. Completar reacciones nucleares en las que falta alguna de las partículas.
6. Calcular la energía asociada a una reacción nuclear.
7. Relacionar (mediante el cálculo oportuno) la actividad de una muestra radiactiva o la cantidad de muestra presente con el tiempo que se ha estado desintegrando.
8. Analizar pros y contras de una aplicación en la que intervengan los procesos nucleares.

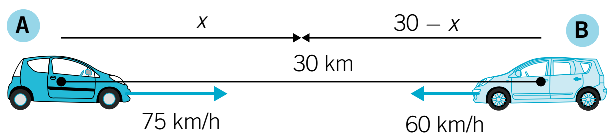
10 Relatividad. Física nuclear

1. **Un coche A se mueve por una carretera recta a la velocidad de 75 km/h y otro coche B circula, por la misma carretera, a 60 km/h. En un momento dado, ambos coches están separados una distancia de 30 km. Calcula:**

a) Cuánto tarda A en alcanzar a B si ambos coches circulan en sentidos opuestos y cuánto si A persigue a B.

b) Suponiendo que A no tuviese ninguna otra referencia externa, ¿a qué velocidad percibe que se mueve B en cada uno de los dos casos contemplados en el apartado anterior?

a) Caso 1: A y B se acercan el uno al otro.



En el momento del encuentro los dos se habrán movido el mismo tiempo.

$$t_A = t_B \rightarrow \frac{d_A}{v_A} = \frac{d_B}{v_B} \rightarrow \frac{x}{75\ \text{km/h}} = \frac{30\ \text{km} - x}{60\ \text{km/h}} \rightarrow$$

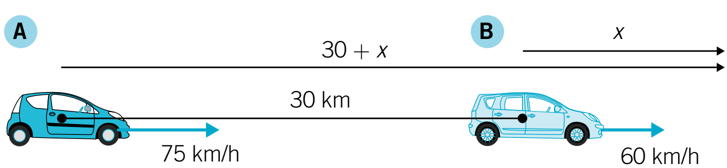
$$\rightarrow \frac{x}{75} = \frac{30}{60} - \frac{x}{60} \rightarrow \frac{x}{75} + \frac{x}{60} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 60 \cdot x + 75 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 75 \rightarrow x = 16{,}67\ \text{km}$$

Veamos el tiempo que tarda A en llegar al punto de encuentro, situado en $x = 16{,}67$ km:

$$t = \frac{16{,}67\ \text{km}}{75\ \text{km/h}} = 0{,}\overset{\frown}{2}\ \text{h} = 13\ \text{min}\ 20\ \text{s}$$

Caso 2: A persigue a B.



$$t'_A = t'_B \rightarrow \frac{d'_A}{v_A} = \frac{d'_B}{v_B} \rightarrow \frac{30\ \text{km} + x}{75\ \text{km/h}} = \frac{x}{60\ \text{km/h}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{30}{75} + \frac{x}{75} = \frac{x}{60} \rightarrow \frac{x}{60} - \frac{x}{75} = \frac{30}{75} \rightarrow$$

$$\rightarrow 75 \cdot x - 60 \cdot x = 30 \cdot 60 \rightarrow x = 120\ \text{km}$$

Veamos el tiempo que tarda A en llegar el punto de encuentro, situado a 120 km + 30 km = 150 km de su posición inicial:

$$t' = \frac{150\ \text{km}}{75\ \text{km/h}} = 2\ \text{h}$$

b) Si no tiene ninguna referencia externa, el sistema de referencia de A se mueve a su misma velocidad.

- Caso 1. La velocidad percibida de B será:

$$v'_B = v_B - v_A = -60\ \text{km/h} - 75\ \text{km/h} = -135\ \text{km/h}$$

A percibe que B se le acerca a una velocidad de 135 km/h.

- Caso 2. La velocidad percibida de B será:

$$v'_B = v_B - v_A = 60\ \text{km/h} - 75\ \text{km/h} = -15\ \text{km/h}$$

A percibe que B se le acerca a una velocidad de 15 km/h.

2. Dos vehículos, A y B, se mueven con velocidad constante por una carretera recta. Cuando B persigue a A, este siente que se le acerca a una velocidad de 30 km/h, pero cuando van uno al encuentro del otro, A percibe que B se le acerca a una velocidad que es siete veces la anterior. ¿A qué velocidad se mueven A y B?

El sistema de referencia se moverá con A. Planteamos las ecuaciones correspondientes a cada caso para la velocidad percibida por A de B:

- Caso 1. B persigue a A:

$$v'_B = v_B - v_A = 30\ \text{km/h}$$

- Caso 2. B y A se acercan el uno al otro:

$$v'_B = v_B - (-v_A) = v_B + v_A = 7 \cdot 30\ \text{km/h} = 210\ \text{km/h}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_B - v_A = 30\ \text{km/h} \\ v_B + v_A = 210\ \text{km/h} \end{cases}$$

Despejamos v_B de la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda:

$$v_B - v_A = 30\ \text{km/h} \rightarrow v_B = v_A + 30\ \text{km/h} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_B + v_A = 210\ \text{km/h} \rightarrow (30\ \text{km/h} + v_A) + v_A = 210\ \text{km/h} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_A = \frac{210\ \text{km/h} - 30\ \text{km/h}}{2} = 90\ \text{km/h}$$

Por tanto:

$$v_B = v_A + 30\ \text{km/h} \rightarrow v_B = 90\ \text{km/h} + 30\ \text{km/h} = 120\ \text{km/h}$$

3. Mortimer es un gran aficionado a los viajes espaciales. Su mayor ilusión sería llegar a algún lugar de Alfa Centauro, el sistema estelar más próximo al Sol y que se encuentra a 4,36 años luz de distancia.

a) ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de diez años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple setenta años?

b) Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso?

c) A la vista del resultado, discute la posibilidad real de realizar viajes interestelares.

a) Desde el punto de vista de la niña, el tiempo que tardará su padre en completar el recorrido será Δt. La velocidad de la nave es:

$$v = \frac{2 \cdot \text{distancia}}{\Delta t}$$

Queremos garantizar que la hija lo verá regresar cuando cumpla 70 años; para su sistema de referencia habrán pasado 60 años.

$$v = \frac{2 \cdot 4{,}36 \text{ años} \cdot c}{60 \text{ años}} = 0{,}145 \cdot c$$

b) Calculamos la edad del padre cuando regrese. Teniendo en cuenta la relación relativista entre los intervalos de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t' \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 60 \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}145^2 \cdot c^2}{c^2}} = 59{,}36 \text{ años}$$

Al finalizar el viaje:

- La hija que se queda en la Tierra tendrá:

$$10 \text{ años} + 60 \text{ años} = 70 \text{ años}$$

- El padre que viaja en la nave, tendrá:

$$30 \text{ años} + 59{,}36 \text{ años} = 89{,}36 \text{ años}$$

c) De acuerdo con los resultados obtenidos, realizar viajes intergalácticos sería una posibilidad factible. En efecto, aunque las distancias existentes entre galaxias son enormes y emplearíamos mucho tiempo, aun viajando a velocidades cercanas a la de la luz, existe el efecto añadido de que un viajero moviéndose en una nave espacial con una velocidad cercana a la de al luz sufre el efecto de la dilatación del tiempo.

Es decir, para él el tiempo pasa mucho más despacio que para un observador exterior, por lo que aunque fuera de la nave pasen cientos o millones de años, si la velocidad de la nave es cercana a la de la luz, el tiempo que experimenta el viajero es mucho menor.

4. La Tierra gira alrededor del Sol, una estrella perteneciente a la galaxia Vía Láctea. Nuestro Sistema Solar se encuentra lejos del centro de la galaxia, a unos 30 000 años luz de distancia. Imagina que una nave espacial que viaja a una velocidad que es el 80 % de la velocidad de la luz decide ir desde la Tierra hasta el centro de la galaxia. ¿Cuánto tiempo tardaría desde el punto de vista de la nave?

Desde un sistema de referencia asociado a la Tierra:

$$v = \frac{\text{distancia}}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{30\,000 \text{ años} \cdot \cancel{c}}{0{,}8 \cdot \cancel{c}} = 37\,500 \text{ años}$$

Veámoslo ahora para un sistema de referencia asociado a la nave espacial.

Teniendo en cuenta la relación relativista entre los intervalos de tiempo para ambos sistemas:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t' \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 37\,500 \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}8^2 \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}} = 22\,500 \text{ años}$$

5. Sobre el mapa, la distancia Madrid-Sevilla es de 470 km, que son recorridos por el AVE a una velocidad media de unos 300 km/h. Utilizando la corrección relativista, determina la distancia Madrid-Sevilla que percibe un pasajero de dicho tren.

Aplicamos la relación relativista entre distancias:

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot L =$$

$$= \sqrt{1 - \underbrace{\frac{\left(300 \dfrac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot 1000 \dfrac{\text{m}}{\cancel{\text{km}}} \cdot \dfrac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}}_{\sim 9 \cdot 10^{-16}}} \cdot 470 \text{ km} \simeq 470 \text{ km}$$

La corrección en la distancia que habría que hacer es muy, muy pequeña.

6. **Supón una bombilla encendida en un tren que viaja a una velocidad de 80 km/h. Un viajero espacial pasa cerca de él a una velocidad igual a *c*. Calcula la velocidad de la luz que percibirá el viajero si avanza acercándose al tren o si lo hace alejándose del mismo.**

La luz se mueve en el vacío con velocidad *c* cualquiera que sea el movimiento relativo entre dos sistemas inerciales; es decir, tanto si el movimiento es de la fuente luminosa como si es del observador.

De acuerdo con esto, la velocidad de la luz percibida por el viajero será siempre *c*.

7. **Supón una nave espacial que viaja a la velocidad de la luz en cuyo interior hay un foco de luz encendido. Los pasajeros de un tren que viaja a la velocidad de 80 km/h ven la luz de ese foco. Calcula la velocidad de la luz que percibirán los viajeros del tren si este viaja acercándose a la nave o si el tren viaja alejándose de la misma.**

La luz se mueve en el vacío con velocidad *c* cualquiera que sea el movimiento relativo entre dos sistemas inerciales; es decir, tanto si el movimiento es de la fuente luminosa como si es del observador.

De acuerdo con esto, la velocidad de la luz percibida por los viajeros será siempre *c*.

8. **Calcula la energía relativista de un cuerpo cuya masa en reposo es m_0 cuando se mueve con una velocidad $v << c$.**

En este caso:

$$E_C = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

- Llamamos $E = m \cdot c^2$ a la energía relativista total de un cuerpo. Su valor depende de la velocidad a la que se desplace.
- Llamamos $E_0 = m_0 \cdot c^2$ a la energía en reposo de la partícula.

La energía total es la energía cinética más la energía en reposo:

$$E = E_C + E_0$$

Podemos escribir así la energía total:

$$E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

Calculamos γ cuando el cuerpo se mueve con $v << c$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

En este caso:

$$E = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$$

Si $v << c$, podemos despreciar el segundo término de la expresión anterior, pues $m_0 \cdot c^2 >> \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$, y queda:

$$E = m_0 \cdot c^2$$

9. Un electrón tiene una energía en reposo de 0,51 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad de 0,8*c*, se pide determinar su masa relativista, su cantidad de movimiento y su energía total.

Datos: carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
Velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

(C. Valenciana, 2000)

Obtenemos la masa en reposo a partir del dato de su energía en reposo:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{0,51 \cdot 10^6 \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1 \cancel{\text{eV}}}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_0 = 9,07 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Masa relativista:

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{9,07 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{(0,8 \cdot \cancel{c})^2}{\cancel{c^2}}}} = \frac{9,07 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - 0,8^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow m = 1,51 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

Cantidad de movimiento:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow p = m \cdot v =$$

$$= 1,51 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow p = 3,624 \cdot 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Energía total:

$$E = m \cdot c^2 = 1,51 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 =$$

$$= 1,359 \cdot 10^{-13} \cancel{\text{J}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cancel{\text{J}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = 0,85\ \text{eV}$$

10. **Un fotón cuya energía es 1,32 · 10^{-12} J se materializa en un par electrón-positrón. Calcula la energía cinética en julios del par resultante. (Datos: masa del electrón, m_e = 9,1 · 10^{-31} kg; c = 3 · 10^8 m/s.)**
Nota: un fotón es una partícula de energía cuya masa en reposo es cero.
(P. Asturias, 2006)

Podemos representar el proceso mediante la ecuación:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía relativista:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

Como el fotón produce un par electrón-positrón, la energía inicial del fotón será igual a la energía en reposo del electrón más la energía en reposo del positrón más la energía cinética del electrón más la energía cinética del positrón:

$$E_{\text{fotón}} = m_{e^-} \cdot c^2 + m_{e^+} \cdot c^2 + E_C \rightarrow$$

$$\rightarrow E_C = E_{\text{fotón}} - (m_{e^-} \cdot c^2 + m_{e^+} \cdot c^2) = E_{\text{fotón}} - 2 \cdot m_{e^-} \cdot c^2$$

Es decir, la energía cinética del par será:

$$E_C = 1{,}32 \cdot 10^{-12}\ \text{J} =$$

$$= 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{J} - 2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}156 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Si el electrón y el positrón se llevan la misma cantidad de energía cinética, cada uno se llevará la mitad de esta cantidad, es decir:

$$5{,}78 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

11. **Considera los núcleos de carbono ^{12}C y ^{13}C de masas 12,0000 uma y 13,0034 uma, respectivamente, siendo 6 el número atómico de estos dos isótopos. Calcula para ambos núcleos:**

a) El defecto de masa en kilogramos y en unidades de masa atómica.

b) La energía de enlace.

c) La energía de enlace por nucleón.

Datos: 1 uma = 1,66 · 10^{-27} kg; 1 uma = 931 MeV; 1 eV = 1,6 · 10^{-19} J; m(p) = 1,0073 uma; m(n) = 1,0087 uma; c = 3 · 10^8 m/s.
[Ten en cuenta que 1 uma = 1 u.]
(Canarias, 2005)

a) Se trata de calcular la diferencia entre la masa de los nucleones (protones y neutrones) y del núclido de cada isótopo de carbono.

El núclido del carbono-12 tiene:

- Protones: Z = 6.
- Neutrones: $A - Z$ = 12 − 6 = 6.

$$\Delta m = (6 \cdot m_p + 6 \cdot m_n) - m(^{12}\text{C}) =$$

$$= (6 \cdot 1{,}0073\ \text{u} + 6 \cdot 1{,}0087\ \text{u}) - 12\ \text{u} = 0{,}096\ \text{u}$$

Es decir:

$$\Delta m = 0{,}096\,\cancel{u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\,\cancel{u}} = 1{,}5936 \cdot 10^{-28}\ \text{kg}$$

El núclido del carbono-13 tiene:

- Protones: $Z = 6$.
- Neutrones: $A - Z = 13 - 6 = 7$.

$$\Delta m = (6 \cdot m_p + 7 \cdot m_n) - m(^{13}\text{C}) =$$
$$= (6 \cdot 1{,}0073\ \text{u} + 7 \cdot 1{,}0087\ \text{u}) - 13{,}0034\ \text{u} = 0{,}1013\ \text{u}$$

Es decir:

$$\Delta m = 0{,}1013\,\cancel{u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\,\cancel{u}} = 1{,}6816 \cdot 10^{-28}\ \text{kg}$$

b) Para el isótopo ^{12}C:

$$E_{\text{enlace}} = \Delta m \cdot c^2 =$$
$$= 1{,}5936 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}4342 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

Para el isótopo ^{13}C:

$$E_{\text{enlace}} = \Delta m \cdot c^2 =$$
$$= 1{,}6816 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}5134 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

c) Para el isótopo ^{12}C:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{1{,}4342 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{12\ \text{nucleones}} = 1{,}1952 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{J}}{\text{nucleón}}$$

Para el isótopo ^{13}C:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{1{,}5134 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{13\ \text{nucleones}} = 1{,}1642 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{J}}{\text{nucleón}}$$

La energía de enlace por nucleón es mayor en el ^{12}C, que será más estable que el ^{13}C.

12. La fuerza nuclear fuerte es la responsable de mantener estable un núcleo de helio. Estima el módulo de dicha fuerza teniendo en cuenta que debe contrarrestar la repulsión electrostática que existe entre sus dos protones que están separados por una distancia de aproximadamente 10^{-15} m.

Datos: $K = 9{,}00 \cdot 10^9$ N · m^2 /C^2; $q_{\text{protón}} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

(Castilla-La Mancha, 2007)

Debe ser igual al módulo de la fuerza electrostática de repulsión entre los protones:

$$F = K \cdot \frac{q^2_{\text{protón}}}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C})^2}{(10^{-15}\ \text{m})^2} = 230{,}097\ \text{N}$$

13. **Si un núcleo atómico emite una partícula α y dos partículas β, su número atómico:**

a) Disminuye en dos unidades. b) Aumenta en dos unidades. c) No varía.

(Galicia. Septiembre, 2007)

Cuando un núcleo atómico emite una partícula α, su número atómico desciende 2 unidades.

Cuando un núcleo atómico emite una partícula β, su número atómico aumenta en 1 unidad $\rightarrow$ al emitir dos, aumentará en 2 unidades.

Sumando los efectos de cada fenómeno, resulta que la respuesta correcta es la c): no varía.

14. **Hallar el número atómico y el número másico del elemento producido a partir del $^{218}_{84}$Po, después de emitir 4 partículas α y 2 β^-.**

(C. Valenciana. Junio, 2006)

Cuando un núcleo atómico emite una partícula α, su número atómico desciende 2 unidades, y su número másico, en 4. Al emitir 4 partículas α, resultará que el número atómico desciende en 8 unidades y el número másico desciende en 16 unidades.

Cuando un núcleo atómico emite una partícula β, su número atómico aumenta en 1 unidad y el número másico no varía. Al emitir dos partículas, aumentará el número atómico en 2 unidades.

El efecto total será que se desciende el número atómico en 6 unidades y el número másico, en 16 unidades:

- Número másico final: $A' = 218 - 16 = 202$.
- Número atómico final: $Z' = 84 - 8 + 2 = 78$.

El proceso resultante es:

$$^{218}_{84}\text{P} \rightarrow 4\alpha + 2\beta + {}^{202}_{78}\text{X}$$

15. **El periodo de semidesintegración del ^{226}Ra es de 1620 años.**

a) Explique qué es la actividad y determine su valor para 1 g de ^{226}Ra.

b) Calcule el tiempo necesario para que la actividad de una muestra de ^{226}Ra quede reducida a un dieciseisavo de su valor original.

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

(Andalucía, 2006)

a) Llamamos actividad radiactiva (A) al número de núclidos que se desintegran por unidad de tiempo. Su valor depende del tipo de núclido y del número de núclidos presentes (N):

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

El signo menos ($-$) se debe a que el número de núclidos presentes disminuye con el tiempo. λ es la constante de desintegración.

Obtenemos el valor de la constante de desintegración a partir del dato del periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1620 \text{ años}} = 4{,}27 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Obtenemos la cantidad de átomos en la muestra a partir del número de Avogadro:

$$N = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ núclidos}}{226 \cancel{\text{g}}} \cdot 1 \cancel{\text{g}} = 2{,}66 \cdot 10^{21} \text{ núclidos}$$

Por tanto:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N =$$

$$= 4{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}66 \cdot 10^{21} \frac{\text{átomos}}{\cancel{\text{año}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{año}}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} =$$

$$= 3{,}6 \cdot 10^{10} \frac{\text{átomos}}{\text{s}} = 3{,}6 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

b) De acuerdo con la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Para $N = 1/16 \cdot N_0$:

$$\frac{\cancel{N_0}}{16} = \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{1}{16} = e^{-4{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Ln}\frac{1}{16} = -4{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t \rightarrow t = \frac{\text{Ln}\frac{1}{16}}{-4{,}27 \cdot 10^{-4}} = 6493{,}18 \text{ años}$$

16. **La actividad de una sustancia disminuye en un factor 5 en el transcurso de 7 días.**

a) Calcula la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración.

b) Si cuando han transcurrido 2 días, la actividad de la sustancia es de 10^{18} desintegraciones/minuto, ¿cuántos átomos teníamos inicialmente?

c) ¿Cuál será la actividad de esa sustancia si en lugar de 2 días transcurren 200?

(Cantabria, 2006)

a) Estado inicial:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0$$

Estado tras 7 días:

$$A = \lambda \cdot N = \frac{A_0}{5} = \frac{\lambda \cdot N_0}{5} \rightarrow \cancel{\lambda} \cdot N = \frac{\cancel{\lambda} \cdot N_0}{5}$$

Por tanto, queda:

$$N = \frac{N_0}{5} \rightarrow \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{\cancel{N_0}}{5} \rightarrow e^{-7\ \text{días} \cdot \lambda} = \frac{1}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 = e^{+7\ \text{días} \cdot \lambda} \rightarrow \ln 5 = +7\ \text{días} \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{\ln 5}{7\ \text{días}} = 0{,}23\ \text{días}^{-1}$$

Conociendo la constante de desintegración podemos obtener el periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}23\ \text{días}^{-1}} = 3{,}01\ \text{días}$$

b) Tenemos:

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10^{18}\ \frac{\text{desintegraciones}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \text{día}} =$$

$$= 0{,}23\ \text{días}^{-1} \cdot N_0 \cdot e^{-0{,}23\ \cancel{\text{días}^{-1}} \cdot 2\ \cancel{\text{días}}} \rightarrow N_0 = 9{,}92 \cdot 10^{21}\ \text{átomos}$$

c) Si transcurren 200 días:

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} =$$

$$= 0{,}23\ \text{días}^{-1} \cdot 9{,}92 \cdot 10^{21} \cdot e^{-0{,}23\ \cancel{\text{días}^{-1}} \cdot 200\ \cancel{\text{días}}} = 24\ \text{desintegraciones/día}$$

17. El periodo de semidesintegración del radón-222 es de 3,9 días; si inicialmente se dispone de 20 microgramos de radón-222, ¿cuánto queda después de 7,6 días?

(Castilla-La Mancha, 2006)

A partir del periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3{,}9\ \text{días}} = 0{,}178\ \text{días}^{-1}$$

El número de átomos y la masa son directamente proporcionales:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 20 \cdot 10^{-6}\ \text{g} \cdot e^{-0{,}178\ \cancel{\text{días}^{-1}} \cdot 7{,}6\ \cancel{\text{días}}} = 5{,}17 \cdot 10^{-6}\ \text{g}$$

18. Se han encontrado unos restos arqueológicos de edad desconocida. Entre ellos apareció una muestra de carbono que contenía una octava parte del isótopo del carbono ^{14}C que se encuentra en la materia viva (solo queda 1/8 del ^{14}C original). Teniendo en cuenta que el periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años:

a) Hallar la edad de dichos restos.

b) Si en la actualidad en la muestra tenemos 10^{12} átomos de ^{14}C, ¿cuál será la actividad de la muestra?

(Cantabria, 2005)

a) Obtenemos λ a partir del periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} = 1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Entonces:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{\cancel{N_0}}{8} = \cancel{N_0} \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1} \cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{8} = e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1} \cdot t} \rightarrow \ln \frac{1}{8} = -1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{-\ln 8}{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}} = 17\,185 \text{ años}$$

b) La actividad de la muestra es:

$$A = \lambda \cdot N =$$

$$= 1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ año}^{-1} \cdot 10^{12} = 1{,}21 \cdot 10^{8} \text{ desintegraciones/año}$$

19. Entre los materiales gaseosos que pueden escapar de un reactor nuclear se encuentra el $^{131}_{53}I$, que es muy peligroso por la facilidad con que se fija el yodo en la glándula tiroides.

a) Escribe la reacción de desintegración sabiendo que se trata de un emisor β^-.

b) Calcula, en unidades del SI, la energía total liberada por el nucleido al desintegrarse.

Datos: masa (^{131}I) = 130,906 12 uma; masa (^{131}Xe) = 130,905 08 uma; masa (β^-) = 5,4891 · 10^{-4} uma; 1 uma [1 u] = 1,6605 · 10^{-27} kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

(P. Asturias, 2007)

a) La reacción que tiene lugar es:

$$^{131}_{53}I \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{131}_{54}Xe$$

b) La variación de masa es:

$$\Delta m = m(^{131}_{53}I) - \left[m(^{131}_{54}Xe) + m(^{0}_{-1}\beta) \right] =$$

$$= 130{,}906\,12 \text{ u} - (130{,}905\,08 + 5{,}489\,1 \cdot 10^{-4}) \text{ u} =$$

$$= 4{,}911 \cdot 10^{-4} \text{ u}$$

Entonces:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 =$$

$$= 4{,}911 \cdot 10^{-4} \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \cancel{\text{u}}} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 7{,}34 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

20. **Complete las siguientes reacciones nucleares:**

- $^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + \ldots$
- $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + \ldots$
- $^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \ldots$
- $^{9}_{4}\mathrm{Be} + \ldots \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \ldots$

(Extremadura. Junio, 2005)

Las reacciones completas son:

- $^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$
- $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$
- $^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^{0}_{1}\beta^{+} +$
- $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

21. **En una reacción nuclear hay una pérdida de masa de $8{,}31 \cdot 10^{-10}$ kg. ¿Cuánta energía se libera en el proceso? Expresa el resultado en J y en kWh. ($c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s.)**

(Castilla-La Mancha. Septiembre, 2006)

La energía liberada es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 8{,}31 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{kg} \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s})^2 =$$
$$= 7{,}48 \cdot 10^{7}\ \mathrm{J} = 7{,}48 \cdot 10^{7}\ \mathrm{W \cdot s}$$

Expresándolo en kWh:

$$7{,}48 \cdot 10^{7}\ \mathrm{J} = 7{,}48 \cdot 10^{7}\ \cancel{\mathrm{W}} \cdot \cancel{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{kW}}{1000\ \cancel{\mathrm{W}}} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \cancel{\mathrm{s}}} = 20{,}78\ \mathrm{kWh}$$

22. **a) Explica brevemente la fusión y la fisión nuclear y en qué se utilizan dichos procesos.**

b) ¿Cuál de los procesos anteriores utiliza el Sol?

c) El Sol radia unos 10^{34} J/año. ¿Cuánto varía la masa del Sol cada año [por este motivo]?

(Cantabria, 2006)

a) La fisión nuclear es un proceso en el que un núclido, generalmente de masa elevada, se rompe en dos fracciones más pequeñas.

A día de hoy, además de su utilización en la fabricación de armas de destrucción, tiene múltiples aplicaciones civiles, como la obtención de energía por medio de las centrales nucleares o de potentes y duraderos generadores de energía en lugares de difícil abastecimiento, como en los submarinos o rompehielos.

La fusión nuclear es un proceso en el que dos núclidos de masa baja se unen dando un núclido de masa más alta.
La masa de los productos de la fusión es ligeramente inferior a la masa de los reactivos, lo que determina la liberación de la cantidad equivalente de energía.

Si se lograse realizar la fusión a temperaturas accesibles, tendríamos el método ideal para obtener grandes cantidades de energía de una manera muy poco contaminante.

b) En el Sol (y en general, en las estrellas) se produce fusión nuclear. Las altas temperaturas que se dan en el Sol y en otras estrellas favorecen los procesos de nucleosíntesis en los que núcleos de masa baja se unen para formar otros de masa mayor. El helio es uno de los elementos más abundantes del Sol, donde se forma por combinación de núcleos de hidrógeno.

c) Calculamos la variación de masa a partir de la energía radiada:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{10^{34} \text{ J/año}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 1{,}11 \cdot 10^{17} \text{ kg/año}$$

Aunque es una masa muy grande, es pequeña comparada con la masa del Sol ($2 \cdot 10^{33}$ kg).

23. **¿Por qué los isótopos empleados en medicina tienen una vida media corta, en general?**

Para poder obtener resultados en un espacio de tiempo reducido.

24. **Da una respuesta razonada que justifique el hecho de que el método del carbono-14 no pueda usarse en restos arqueológicos de centenas de miles de años de antigüedad.**

Debido al periodo de semidesintegración del carbono-14, que es de unos pocos miles de años, al cabo de centenas de miles de años de antigüedad prácticamente todo el carbono-14 de la muestra viva se habrá desintegrado, por lo que el error estimado en la medida será muy alto.

25. **Un vehículo espacial se aparta de la Tierra con una velocidad de 0,5*c*. Desde la Tierra se envía una señal cuya velocidad es medida por la tripulación, obteniendo un valor de:**

a) 1,5*c*.

b) *c*.

c) 0,5*c*.

(Galicia, 2007)

La respuesta correcta es la b), ya que la luz se mueve en el vacío con velocidad *c* cualquiera que sea el movimiento relativo entre dos sistemas inerciales, es decir, tanto si el movimiento es de la fuente luminosa como si es del observador.

26. **Se hacen girar partículas subatómicas en un acelerador de partículas y se observa que el tiempo de vida medio es $t_1 = 4{,}2 \cdot 10^{-8}$ s. Por otra parte, se sabe que el tiempo de vida medio de dichas partículas, en reposo, es $t_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s. ¿A qué velocidad giran las partículas en el acelerador? Razona la respuesta.**

Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

(C. Valenciana, 2002)

Teniendo en cuenta la relación relativista entre el intervalo de tiempo en reposo y para las partículas en el acelerador:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t' \rightarrow \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t'^2 = \Delta t^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{\Delta t'^2}{\Delta t^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{(2{,}6 \cdot 10^{-8})^2}{(4{,}2 \cdot 10^{-8})^2}} = 0{,}79 \cdot c$$

27. **¿Cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud sea la tercera parte que en reposo?**

(La Rioja, 2006)

De acuerdo con la teoría de la relatividad especial:

$$L = \gamma \cdot L' = \frac{L'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L' = \frac{\cancel{L}}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \cancel{L} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 0{,}94 \cdot c$$

28. **Nuestra experiencia nos dice que cuando un cuerpo se ve sometido a la acción de una fuerza durante un tiempo, su energía cinética aumenta, ya que aumenta su velocidad. Supongamos que la fuerza actúa durante un tiempo indefinido, ¿podemos decir que su energía cinética aumenta de forma indefinida porque su velocidad aumenta de la misma manera?**

Desde el punto de vista clásico no existe ningún límite a este hecho, lo que indica que si la fuerza tiene el valor adecuado y actúa durante el tiempo suficiente, la energía del cuerpo podría crecer indefinidamente.

La relatividad especial justifica que la velocidad del cuerpo no puede rebasar la velocidad de la luz, por lo que debemos pensar que, en esas circunstancias, la masa del cuerpo no permanece constante, sino que aumenta en la medida en que lo hace su energía.

En contra de lo que suponía la física clásica, la masa de los cuerpos varía en función de su velocidad, y así hablamos de una masa relativista *m.* (Aunque habitualmente se emplea el término *masa* para referirnos a la masa en reposo de una partícula.)

29. **La energía total relativista de un cuerpo ¿puede ser mayor que su energía en reposo? ¿Puede ser igual? ¿Puede ser menor? Razona en qué condiciones se debe encontrar el cuerpo para que se den la respuesta o respuestas adecuadas.**

Recordamos la ecuación vista en esta unidad:

$$E_C = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

- Llamamos $E = m \cdot c^2$ a la energía relativista total de un cuerpo. Su valor depende de la velocidad a la que se desplace.
- Llamamos $E_0 = m_0 \cdot c^2$ a la energía en reposo de la partícula.

La energía relativista total de un cuerpo es la suma de su energía cinética y su energía en reposo:

$$E = E_C + E_0$$

La energía total relativista siempre es mayor que su energía en reposo cuando el cuerpo se encuentra en movimiento, ya que, al moverse a una determinada velocidad, su energía cinética es mayor que cero.

30. **La ecuación de Einstein $E = m \cdot c^2$ implica que:**

a) Una determinada masa *m* necesita una energía *E* para ponerse en movimiento.

b) La energía *E* es la que tiene una masa *m* que se mueve a la velocidad de la luz.

c) *E* es la energía equivalente a una determinada masa.

(Galicia, 2005)

En los procesos nucleares el conjunto de las sustancias que se transforma suelen experimentar una determinada pérdida de masa que se convierte en energía. De acuerdo con la ecuación de masa, la energía equivalente a una pérdida de masa *m* viene dada por la expresión $E = m \cdot c^2$. La respuesta correcta es la c).

31. **La energía del Sol llega a la Tierra con una potencia de 1,4 kW/m².** **Considerando que la Tierra está a 1,5 · 10¹¹ m del Sol, calcula la cantidad de masa que pierde diariamente el Sol para poder aportar la energía que emite.**

La potencia de la energía solar que llega a la Tierra por unidad de superficie permite calcular la potencia emitida por el Sol:

$$P = P_S \cdot S \rightarrow P = 1{,}4 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \underbrace{4\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}_{4\pi \cdot R^2 = S} = 3{,}958 \cdot 10^{26}\ \text{W}$$

El dato de la potencia permite calcular la energía emitida por el Sol en un día:

$$P = \frac{E}{t} \rightarrow E = P \cdot t = 3{,}958 \cdot 10^{26} \frac{\text{J}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{24 \cdot 3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{día}} = 3{,}42 \cdot 10^{31} \frac{\text{J}}{\text{día}}$$

Admitiendo que esta energía procede de la pérdida de masa del Sol y teniendo en cuenta la relación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow \Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}42 \cdot 10^{31}\ \text{J/día}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 3{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{kg}$$

Aunque es una masa grande en términos terrestres, es pequeña si la comparamos con la masa del Sol ($2 \cdot 10^{30}$ kg).

32. **Calcula cuánta energía hay que comunicar a un electrón que se encuentra en reposo para que se mueva a una velocidad que sea el 80 % de la velocidad de la luz.**

Datos: masa del electrón, $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Al electrón hay que comunicarle una energía igual a la energía cinética que debe adquirir:

$$E_C = E - E_0 =$$
$$= m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow E_C = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot m_0 \cdot c^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow E_C = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{0{,}8^2 \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}}} - 1 \right) \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 =$$
$$= 5{,}47 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

33. **La masa en reposo de un protón es 1,67 · 10^{-27} kg y se mueve a una velocidad que es 0,8 · *c*. Calcula:**

a) Su energía total.

b) Su energía cinética.

c) Su cantidad de movimiento.

a) $E = m \cdot c^2$, donde:

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{0{,}8^2 \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}}} = 2{,}78 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Por tanto:

$$E = m \cdot c^2 = 2{,}78 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 2{,}502 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) Energía cinética:

$$E_C = E - E_0 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2 =$$
$$= (2{,}78 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} - 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}) \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 \simeq 10^{-10}\ \text{J}$$

c) Cantidad de movimiento:

$$p = m \cdot v = m \cdot 0{,}8 \cdot c =$$
$$= 2{,}78 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 6{,}672 \cdot 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

34. **¿Con qué velocidad se mueve una partícula si su energía total es el triple que su energía en reposo?**

Llamamos $E = m \cdot c^2$ a la energía relativista total de un cuerpo. Su valor depende de la velocidad a la que se desplaza.

Llamamos $E_0 = m_0 \cdot c^2$ a la energía en reposo de la partícula.

La relación entre ambas equivale a la relación entre la masa relativista y la masa en reposo de la partícula.

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Por tanto:

$$3 = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{\dfrac{\cancel{m_0}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}}{\cancel{m_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 = \frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 0{,}94 \cdot c$$

35. En un experimento realizado en un acelerador de partículas se hacen chocar dos haces de protones que avanzan a la misma velocidad. Como resultado de la colisión se genera un par protón-antiprotón (el antiprotón es una partícula con la misma masa que el protón, p^+, pero con carga opuesta, p^-). Calcula:

a) La mínima energía relativista que debe tener cada protón para que se produzca ese hecho.

b) La masa relativista de cada protón.

c) La energía cinética de cada protón.

d) La velocidad del protón.

Datos: masa (p^+) = masa (p^-) = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Podemos representar el proceso mediante la ecuación:

$$(p^+ + p^+)^* \rightarrow (p^+ + p^+) + (p^+ + p^-)$$

a) La mínima energía relativista es aquella que permite que el par de protones después del choque y el par protón-antiprotón que se genera estén en reposo:

$$E = E_C + E_0 \rightarrow E_{\text{mínima}} = E_0$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía relativista:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} = (3 \cdot m_{p^+} + m_{p^-}) \cdot c^2 = 4 \cdot m_{p^+} \cdot c^2 =$$
$$= 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 6{,}012 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

La energía inicial es la energía relativista de cada uno de los protones que chocan:

$$E_{\text{inicial}} = 2 \cdot E_{p^+} \rightarrow E_{p^+} = \frac{E_{\text{inicial}}}{2} = \frac{6{,}012 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{2} = 3 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) Para calcular la masa relativista de cada protón tendremos en cuenta la ecuación:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 3{,}33 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

c) Calculamos la energía cinética a partir de la diferencia de masa que experimenta el protón:

$$E_C = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2 =$$
$$= (3{,}33 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} - 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}) \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

d) Para calcular la velocidad tendremos en cuenta la relación entre la masa en reposo y la masa relativista para cada protón (a estas velocidades la relación $E_C = \frac{1}{2} mv^2$ no es válida).

Por tanto:

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$$

Sustituyendo:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{3{,}33 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}\right)^2} = 0{,}865 \cdot c$$

36. **¿Con qué rapidez debe convertirse masa en energía para producir 20 MW? Dato: velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.**

(C. Valenciana, 2000)

20 MW corresponden a $20 \cdot 10^6$ J en un segundo. De acuerdo con la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow 20 \cdot 10^6\ \text{J/s} = \Delta m \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta m = \frac{20 \cdot 10^6\ \text{J/s}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 2{,}22 \cdot 10^{-10}\ \text{kg}$$

Esta es la masa que debe convertirse en energía en cada segundo.

37. **Estudia los siguientes núclidos y establece entre ellos todas las relaciones que puedas. Señala los que pertenecen al mismo elemento químico:**

$$\mathbf{{}^{31}_{16}X;\ {}^{30}_{15}Y;\ {}^{31}_{17}Z;\ {}^{33}_{16}W;\ {}^{34}_{17}P}$$

- ${}^{31}_{16}X$ y ${}^{31}_{17}Z$ son isóbaros (tienen el mismo número másico).
- ${}^{31}_{16}X$ y ${}^{33}_{16}W$ son isótopos (tienen el mismo número atómico). Pertenecen al mismo elemento químico.
- ${}^{31}_{17}Z$ y ${}^{34}_{17}P$ son isótopos (tienen el mismo número atómico). Pertenecen al mismo elemento químico.
- ${}^{31}_{16}X$ y ${}^{30}_{15}Y$ son isótonos (tienen la misma cantidad de neutrones).
- ${}^{33}_{16}W$ y ${}^{34}_{17}P$ son isótonos (tienen la misma cantidad de neutrones).

38. **¿Por qué la masa de un núclido estable es más pequeña que la suma de las masas de sus nucleones? ¿Cómo se llama esta diferencia?**

(Islas Baleares. Septiembre, 2005)

La diferencia entre las mismas se explica considerando que este defecto de masa se convierte en energía en el proceso de constitución del núcleo a partir de sus nucleones. Esta energía se denomina energía de enlace del núclido.

39. **El $^{226}_{88}$Ra emite partículas alfa dando lugar a Rn.**

a) Escriba la ecuación de la reacción nuclear y determine la energía liberada en el proceso.

b) Calcule la energía de enlace por nucleón del Ra y del Rn y discuta cuál de ellos es más estable.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; $m_{Ra} = 226{,}0254\ 06$ u; $m_{Rn} = 222{,}017\ 574$ u; $m_p = 1{,}007\ 95$ u; $m_n = 1{,}008\ 98$ u; $m_\alpha = 4{,}002\ 603$ u; 1 u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

(Andalucía, 2006)

a) La reacción es: $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{222}_{86}\text{Rn}$

Defecto de masa:

$$\Delta m = m(^{226}_{88}\text{Ra}) - [m(^{4}_{2}\alpha) + m(^{222}_{86}\text{Rn})] =$$

$$= 226{,}025\,406 \text{ u} - (4{,}002\,603 \text{ u} + 222{,}017\,574 \text{ u}) = 5{,}229 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

Entonces:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 =$$

$$= 5{,}229 \cdot 10^{-3}\, \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1\, \cancel{\text{u}}} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 7{,}812 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

b) El núclido de Rn tiene:

- Protones: $Z = 86$.
- Neutrones: $A - Z = 222 - 86 = 136$.

$$\Delta m = (86 \cdot m_p + 136 \cdot m_n) - m\,(^{222}_{86}\text{Rn}) =$$

$$= (86 \cdot 1{,}007\,95 \text{ u} + 136 \cdot 1{,}008\,98 \text{ u}) - 222{,}017\,574 \text{ u} =$$

$$= 1{,}887\,406 \text{ u}$$

Es decir:

$$\Delta m = 1{,}887\,406\, \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1\, \cancel{\text{u}}} = 3{,}1342 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Entonces:

$$E_{\text{enlace Rn}} = \Delta m \cdot c^2 =$$

$$= 3{,}1342 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 2{,}82 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Y queda:

$$\frac{E_{\text{enlace Rn}}}{\text{nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace Rn}}}{222 \text{ nucleones}} = \frac{2{,}82 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{222 \text{ nucleones}} =$$

$$= 1{,}27 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{J}}{\text{nucleón}}$$

El núclido de Ra tiene:

- Protones: $Z = 88$.
- Neutrones: $A - Z = 226 - 88 = 138$.

$$\Delta m = (88 \cdot m_\text{p} + 138 \cdot m_\text{n}) - m\,({}^{226}_{88}\text{Ra}) =$$

$$= (88 \cdot 1{,}007\,95\ \text{u} + 138 \cdot 1{,}008\,98\ \text{u}) - 226{,}025\,406\ \text{u} =$$

$$= 1{,}913\,43\ \text{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta m = 1{,}913\,43\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}6606 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 3{,}1774 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Entonces:

$$E_{\text{enlace Ra}} = \Delta m \cdot c^2 =$$

$$= 3{,}1774 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 2{,}86 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{E_{\text{enlace Ra}}}{\text{nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace Ra}}}{226 \text{ nucleones}} = \frac{2{,}86 \cdot 10^{-10}}{226 \text{ nucleones}} =$$

$$= 1{,}26 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{J}}{\text{nucleón}}$$

Resumiendo:

- $\dfrac{E_{\text{enlace Rn}}}{\text{nucleón}} = 1{,}27 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{J}}{\text{nucleón}}$
- $\dfrac{E_{\text{enlace Ra}}}{\text{nucleón}} = 1{,}26 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{J}}{\text{nucleón}}$

Será más estable el núclido de Rn, ya que su energía de enlace por nucleón es mayor.

40. Calcula:

a) La energía media de enlace por nucleón de un átomo de ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ expresada en MeV.

b) La cantidad de energía necesaria para disociar completamente 1 g de ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, expresando dicha energía en J.

Datos: masa atómica del ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ = 39,975 45 u; masa atómica del neutrón = 1,0087 u; masa atómica del protón = 1,0073 u; $N_\text{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ átomos/mol; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

(Castilla y León. Junio, 2001)

a) El núclido de Ca tiene:

- Protones: $Z = 20$.
- Neutrones: $A - Z = 40 - 20 = 20$.

El defecto de masa es:

$$\Delta m = (20 \cdot m_p + 20 \cdot m_n) - m({}^{39}_{20}\text{Ca}) =$$
$$= 20 \cdot (1{,}0073\ \text{u} + 1{,}0087\ \text{u}) - 39{,}975\,45\ \text{u} = 0{,}344\,55\ \text{u}$$

Es decir:

$$\Delta m = 0{,}344\,55\ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} = 5{,}71953 \cdot 10^{-28}\ \text{kg}$$

Por tanto:

$$E_{\text{enlace Ca}} = \Delta m \cdot c^2 =$$
$$= 5{,}719\,53 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 5{,}14758 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

Y queda:

$$\frac{E_{\text{enlace Ca}}}{\text{nucleón}} = \frac{5{,}14758 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{40\ \text{nucleones}} = 1{,}28689 \cdot 10^{-12}\ \text{J/nucleón}$$

En MeV:

$$\frac{E_{\text{enlace Ca}}}{\text{nucleón}} = 1{,}286\,89 \cdot 10^{-12}\ \cancel{\text{J}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{eV}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}}} \cdot \frac{1\ \text{MeV}}{10^6\ \cancel{\text{eV}}} = 8{,}043\ \text{MeV}$$

b) Calculamos la cantidad de núclidos que hay en 1 g de muestra. Utilizamos el número de Avogadro para calcular los átomos que hay en la muestra:

$$N = \frac{N_A}{m} = \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{núclidos}}{40\ \cancel{\text{g}}} \cdot 1\ \cancel{\text{g}} = 1{,}51 \cdot 10^{22}\ \text{núclidos}$$

La energía de disociación será:

$$E_{\text{disociacion}} = N \cdot E_{\text{enlace Ca}} =$$
$$= 1{,}51 \cdot 10^{22} \cdot 5{,}14758 \cdot 10^{-11}\ \text{J} = 7{,}75 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

41. Calcula la masa de deuterio que requeriría cada día una hipotética central de fusión de 500 MW de potencia eléctrica en la que la energía se obtuviese del proceso $2\ {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}$ suponiendo un rendimiento del 30 %.

Datos: masa atómica del deuterio = 2,014 74 u;
masa atómica del helio = 4,003 87 u;
$1\ \text{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos /mol.

(País Vasco. Junio, 2001)

Calculamos la pérdida de masa y la energía correspondiente al proceso indicado:

$$\Delta m = 2m_{D} - m_{He} = 2 \cdot 2{,}014\,74 \text{ u} - 4{,}003\,87 \text{ u} =$$

$$= 0{,}025\,61 \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \cancel{\text{u}}} = 4{,}25 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

La energía que resulta de esta pérdida de masa, teniendo en cuenta el rendimiento, es:

$$E = \frac{30}{100} \cdot \Delta m \cdot c^2 = \frac{30}{100} \cdot 4{,}25 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 =$$

$$= \frac{30}{100} \cdot 3{,}825 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 1{,}15 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Calculamos la energía que debe dar diariamente la central:

$$P = \frac{E}{t} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = P \cdot t = 500 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 24 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{h}}} = 4{,}32 \cdot 10^{13} \frac{\text{J}}{\text{día}}$$

Calculamos el número de veces que se tiene que producir diariamente la reacción señalada para obtener esa cantidad de energía:

$$\frac{4{,}32 \cdot 10^{13} \cancel{\text{J}}/\text{día}}{1{,}15 \cdot 10^{-12} \cancel{\text{J}}/\text{proceso}} = 3{,}76 \cdot 10^{25} \text{ procesos/día}$$

En cada proceso intervienen 2 átomos de deuterio. Su masa nos permite calcular la masa de este elemento que debe utilizar diariamente la central:

$$m = \text{N.º procesos} \cdot 2 \cdot m(\text{D}) =$$

$$= 3{,}76 \cdot 10^{25} \cdot 2 \frac{\cancel{\text{átomos de D}}}{\text{día}} \cdot \frac{2{,}014\,74 \cancel{\text{u}}}{\cancel{\text{átomo de D}}} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \cancel{\text{u}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow m = 0{,}25 \frac{\text{kg de D}}{\text{día}}$$

42. **Sabiendo que en la siguiente reacción nuclear: $^{A}_{Z}X + {}^{1}_{1}H \rightarrow 2\, {}^{4}_{2}He$ se liberan 11,47 MeV de energía:**

a) Escribe el isótopo $^{A}_{Z}X$ que falta en la reacción.

b) Calcula la masa atómica de dicho isótopo.

Datos: masa atómica del hidrógeno = 1,0078 u; masa atómica del ^{4}He = 4,0026 u; 1 u = 931 MeV.

(P. Asturias, 2001)

a) En las reacciones nucleares se conservan la carga eléctrica y el número de nucleones. En consecuencia:

- $Z = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- $A = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

El isótopo que falta es:

$$^{A}_{Z}\text{X} = {}^{7}_{3}\text{X} \rightarrow \text{litio: } {}^{7}_{3}\text{Li}$$

b) El núcleo de H está formado por un solo protón, mientras que el helio está formado por dos protones y dos neutrones. Este hecho nos permitirá determinar la masa de un neutrón:

$$\text{Masa núcleo He} = 2 \cdot \text{masa protón} + 2 \cdot \text{masa neutrón} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4{,}0026 \text{ u} = 2 \cdot 1{,}0078 \text{ u} + 2 \cdot \text{masa neutrón} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{masa neutrón} = \frac{4{,}0026 \text{ u}}{2} - 1{,}0078 \text{ u} = 0{,}9935 \text{ u}$$

Por tanto:

$$m({}^{7}_{3}\text{Li}) = 2 \cdot m({}^{4}_{2}\text{He}) + 11{,}47 \frac{\cancel{\text{MeV}}}{\cancel{c^2}} \cdot \frac{1 \text{ u}}{931 \cancel{\text{MeV}/c^2}} - m({}^{1}_{1}\text{H}) =$$

$$= 2 \cdot 4{,}0026 \text{ u} + 0{,}012\,32 \text{ u} - 1{,}0078 \text{ u} \rightarrow$$

$$\rightarrow m({}^{7}_{3}\text{Li}) = 7{,}009\,72 \text{ u} = 6526 \text{ MeV}/c^2$$

43. **En la desintegración β:**

a) El número atómico aumenta en una unidad.

b) El número másico aumenta en una unidad.

c) Ambos permanecen constantes.

(Galicia. Junio, 2005)

Las partículas β son electrones. Cuando un núclido emite una partícula β se transforma en otro núclido cuyo número atómico aumenta en una unidad y su número de masa no varía. La respuesta correcta es la a).

44. **Un isótopo inestable del astato $^{217}_{85}$At emite una partícula α y se transforma en un elemento X, el cual emite una partícula β y da lugar al elemento Y. Establece los números másico y atómico de X e Y.**

(Castilla-La Mancha. Junio, 2006)

Cuando un núclido emite una partícula α se transforma en otro núclido cuyo número atómico desciende en dos unidades, y su número de masa, en cuatro.

$$^{217}_{85}\text{At} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{217-4}_{85-2}\text{X} \Rightarrow {}^{213}_{83}\text{X}$$

Cuando un núclido emite una partícula β se transforma en otro núclido cuyo número atómico aumenta en una unidad y su número de masa no varía.

$$^{213}_{83}X \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{213}_{83+1}Y \Rightarrow {}^{213}_{84}Y$$

45. **a) ¿Cómo se puede explicar que un núcleo emita partículas β si en él solo existen neutrones y protones?**

b) El $^{232}_{90}Th$ se desintegra, emitiendo 6 partículas α y 4 partículas β, dando lugar a un isótopo estable del plomo. Determine el número másico y el número atómico de dicho isótopo.

(Andalucía, 2006)

a) La partícula que se libera en esta desintegración beta es un electrón, si bien procede del núcleo del átomo como resultado de la desintegración de un neutrón; no tiene que ver con los electrones que existen en la corteza de los átomos.

Hay que recordar que el mecanismo de la desintegración beta es:

$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}_e \; ; \; {}^{0}_{-1}\beta^- = {}^{0}_{-1}e$$

b) Al emitir las 6 partículas α se obtendrá un núclido cuyo número atómico desciende en 12 unidades y su número másico desciende en 24 unidades. El efecto de la emisión de las 4 partículas β será un núclido cuyo número atómico aumenta en 4 unidades. En total tendremos un núclido cuyo número atómico desciende en 8 unidades (12 − 4) y su número másico desciende en 24 unidades:

$$^{232}_{90}Th \rightarrow 6\,^{4}_{2}\alpha + 4\,^{0}_{-1}\beta + {}^{232-24}_{90-8}X \; ; \; {}^{232}_{90}Th \rightarrow 6\,^{4}_{2}\alpha + 4\,^{0}_{-1}\beta + {}^{208}_{82}Pb$$

46. **a) Defina las siguientes magnitudes asociadas a los procesos de desintegración radiactiva: actividad radiactiva (*A*), periodo de semidesintegración (*T*) y vida media (τ).**

b) Se tiene un mol de ^{214}Pb, isótopo radiactivo cuyo periodo de semidesintegración es de 27 minutos. ¿Al cabo de cuánto tiempo quedará solo el 10 % del material inicial? ¿Qué actividad *A* tiene la muestra en ese momento?

(Aragón, 2007)

a) Llamamos actividad radiactiva (*A*) al número de núclidos que se desintegran por unidad de tiempo. Su valor depende del tipo de núclido y del número de núclidos presentes (*N*):

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

Se denomina periodo de semidesintegración ($T_{1/2}$) al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos que había en la muestra. En ese instante: $N = N_0/2$.

$$\ln\frac{N_0/2}{N_0} = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow -\ln 2 = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Se denomina vida media (τ) de un núclido al tiempo que dura un núclido por término medio.

Es un concepto estadístico comparable a lo que conocemos como «esperanza de vida» en las poblaciones humanas.

Se relaciona con el periodo de semidesintegración por medio de la expresión:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

b) Si queremos determinar el tiempo en el que $N = 0{,}1 \cdot N_0$:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0{,}1 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Calculamos la constante de desintegración a partir del dato del periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{27 \text{ min}} = 2{,}567 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}$$

Por tanto:

$$0{,}1 \cdot \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0{,}1 = e^{-2{,}567 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1} \cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln 0{,}1 = -2{,}567 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln 0{,}1}{-2{,}567 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}} = 89{,}7 \text{ minutos}$$

La actividad de la muestra en ese momento es:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

N corresponde a la décima parte de un mol.

$$N = \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ núclidos}}{10} = 6{,}022 \cdot 10^{22} \text{ núclidos}$$

Así:

$$A = \lambda \cdot N = 2{,}567 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{22} \text{ núclidos} =$$

$$= 1{,}55 \cdot 10^{22} \text{ núclidos/min} = 1{,}55 \cdot 10^{22} \frac{\text{núclidos}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} =$$

$$= 2{,}58 \cdot 10^{20} \text{ Bq}$$

47. **Se tienen 200 g de una muestra radiactiva cuya velocidad de desintegración es tal que al cabo de un día le queda solo el 75 % de la misma. Calcula:**

a) La constante de desintegración.

b) La masa que quedará después de 22 días.

(Castilla-La Mancha. Junio, 2007)

a) Calculamos λ:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = 0{,}75 = e^{-\lambda \cdot 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln 0{,}75 = -\lambda \cdot 1 \text{ día} \rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}75}{1 \text{ día}} = 0{,}287\,68 \text{ día}^{-1} = 6{,}9 \text{ h}$$

b) Calculamos N. Como la masa es proporcional al número de partículas:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow m = m_0 \cdot e^{-0{,}287\,68 \cancel{\text{días}}^{-1} \cdot 22 \cancel{\text{días}}} = 1{,}78 \cdot 10^{-3}$$

$$\rightarrow m = 1{,}78 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \text{ g} = 0{,}356 \text{ g}$$

48. **El periodo $T_{1/2}$ del elemento radiactivo ${}^{60}_{27}Co$ es 5,3 años y se desintegra emitiendo partículas β.**

Calcula:

a) El tiempo que tarda la muestra en convertirse en el 70 % del original.

b) ¿Cuántas partículas β emite por segundo una muestra de 10^{-6} gramos de ${}^{60}_{27}Co$?

Dato: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

(Galicia. Septiembre, 2005)

a) Tenemos:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Si queremos determinar el tiempo en el que $N = 0{,}7 \cdot N_0$:

$$0{,}7 \cdot \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Calculamos la constante de desintegración a partir del dato del periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5{,}3 \text{ años}} = 0{,}1308 \text{ años}^{-1}$$

Entonces:

$$0{,}7 = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0{,}7 = e^{-0{,}1308 \text{ años} \cdot t} \rightarrow \ln 0{,}7 = -0{,}1308 \text{ años} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln 0{,}7}{0{,}1308 \text{ años}} = 2{,}7269 \text{ años}$$

b) Cada átomo de Co emite una partícula beta. Calculamos el número de átomos que hay en la muestra y esa será la N que nos permite calcular la actividad y, por tanto, el número de partículas beta que se emiten cada segundo:

$$N = 10^{-6}\ \cancel{g} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{60\ \cancel{g}} = 1 \cdot 10^{16}\ \text{átomos}$$

Por tanto:

$$A = \lambda \cdot N = 0{,}1308\ \text{años}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{16}\ \text{núclidos} =$$

$$= 1{,}308 \cdot 10^{15}\ \frac{\text{núclidos}}{\cancel{\text{año}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{año}}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s}} = 4{,}15 \cdot 10^{7}\ \text{Bq}$$

49. **Cuando se bombardea nitrógeno $^{14}_{7}N$ con partículas alfa se generan el isótopo $^{17}_{8}O$ y otras partículas. La reacción es:**

a) $^{14}_{7}N + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{17}_{8}O + p$

b) $^{14}_{7}N + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{17}_{8}O + n + \beta$

c) $^{14}_{7}N + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{17}_{8}O + p + n + \gamma$

(Galicia. Junio, 2006)

La respuesta correcta es la a), ya que es la única con la que se cumplen el equilibrio de nucleones y de cargas a ambos lados.

50. **¿Cuál de las siguientes reacciones nucleares representa el resultado de la fisión del $^{235}_{92}U$ cuando absorbe un neutrón?**

a) $^{209}_{82}Pb + 5\alpha + 3p + 4n$

b) $^{90}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 6n + \beta$

c) $^{141}_{56}Ba + ^{92}_{36}Kr + 3n$

(Galicia. Septiembre, 2006)

En las reacciones nucleares se conserva la carga y el número total de nucleones. Cuando el uranio absorbe un neutrón, el número de nucleones es:

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n$$

- $Z = 92$
- $A = 235 + 1 \rightarrow A = 236$

Hacemos un balance similar en cada una de las posibilidades que se nos ofrecen:

a) $Z' = 82 + 5 \cdot 2 + 3 = 95$; $A' = 209 + 5 \cdot 4 + 3 + 4 = 236 \rightarrow$ $\rightarrow$ Incorrecto.

b) $Z' = 38 + 54 - 1 = 91$; $A' = 90 + 140 + 6 = 236 \rightarrow$ Incorrecto.

c) $Z' = 56 + 36 = 92$; $A' = 141 + 92 + 3 = 236 \rightarrow$ Correcto.

51. **En noviembre de 2006, el ex espía A. Litvinenko murió por intoxicación radiactiva al haber inhalado o ingerido $^{210}_{84}Po$. El $^{210}_{84}Po$ es inestable y emite una partícula α transformándose en Pb.**

a) Escribe la ecuación de desintegración correspondiente y determina los números másico y atómico del isótopo del Pb resultante.

b) Explica por qué el $^{210}_{84}Po$ es letal por irradiación interna (inhalación o ingestión) y no por irradiación externa.

(Castilla-La Mancha, 2007)

a) La reacción es:

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{206}_{82}\text{Pb}$$

b) La razón está en el poder de penetración de las partículas α. Son partículas muy energéticas, pero con poco poder de penetración, lo que hace que no atraviesen la piel.

52. **a) Define los isótopos radiactivos.**

b) Enumera las partículas o radiaciones emitidas.

c) Indica los efectos de las radiaciones en los seres vivos.

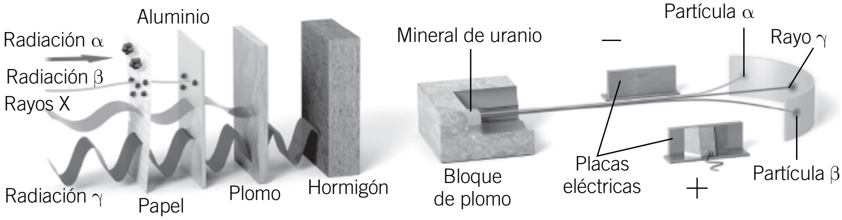
d) Comenta las principales aplicaciones de dos isótopos radiactivos importantes.

(P. Asturias, 2006)

a) Isótopos: son átomos que coinciden en el número atómico (Z) y se diferencian en el número másico (A). Los átomos de los núclidos isótopos pertenecen al mismo elemento químico. En algunos casos son inestables, lo que determina que evolucionen tratando de alcanzar un estado energéticamente más favorable. Para lograrlo, producen emisiones radiactivas.

b)
- Rayos α: son partículas positivas formadas por dos portones y dos neutrones: $^{4}_{2}\alpha$. Se les considera núcleos de He. Forman una radiación ionizante (es capaz de arrancar partículas cargadas a la materia) que tiene muy poco poder de penetración; un papel o la piel humana la pueden detener.
- Rayos β: son partículas negativas idénticas a los electrones. Su poder de penetración es mayor que el de las partículas α, pero son retenidas por una lámina delgada de metal; por ejemplo, aluminio.
- Rayos γ: es radiación electromagnética, por eso no se desvía al atravesar un campo eléctrico. Tiene un gran poder de penetración, más que los rayos X; para detenerla es preciso utilizar gruesas capas de hormigón.

Poder de penetración y desviación:



c) Las radiaciones que alcanzan los tejidos de los seres vivos tienen un efecto destructor sobre sus células, de ahí que se empleen en tratamientos anticancerígenos. Si los tejidos sanos son alcanzados por una radiación radiactiva, pueden sufrir graves destrozos o sufrir alteraciones significativas en el desarrollo de sus células que provoquen la aparición de cánceres, como leucemias.

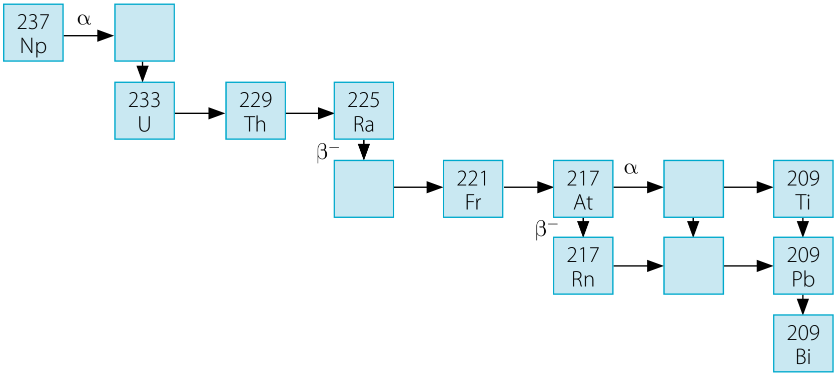
Algunos isótopos radiactivos se fijan de forma selectiva a determinados tipos de células, lo que permite que se utilicen en diagnóstico clínico.

d) Algunos isótopos radiactivos se emplean para obtener grandes cantidades de energía que se pueden utilizar para fines pacíficos, como las centrales nucleares o los reactores nucleares que permiten la navegación de submarinos; o con fines destructivos, como las bombas o los misiles nucleares.

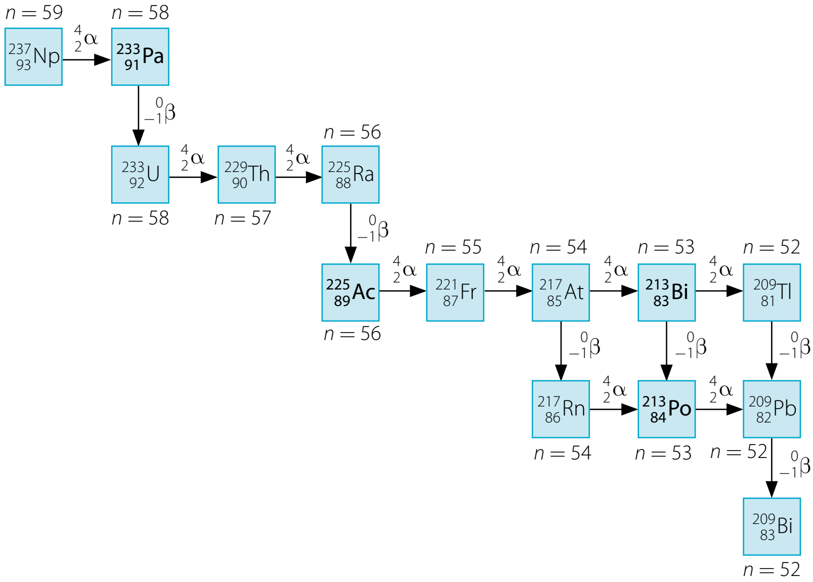
Otros isótopos radiactivos se usan en tratamientos médicos que buscan la destrucción selectiva de células malignas, como las del cáncer, o en el diagnóstico de enfermedades.

También se utilizan los isótopos radiactivos para datar restos arqueológicos (datación con ^{14}C), y en tareas de análisis o investigación, en las que se emplean como trazadores.

53. El siguiente esquema indica los núclidos de la desaparecida serie del neptunio. Complétala señalando el número atómico de cada núclido y las partículas que se emiten cada vez que uno se transforma en el siguiente. Comprueba que estos núclidos cumplen la regla de $A = 4n + 1$.



Solución:



Como se aprecia en el esquema, todos los núclidos tienen un número másico A tal que $A = 4n + 1$, donde n es un número entero.

Anexo I. Sistema periódico de los elementos

Número atómico	Masa atómica (u)	Símbolo	Nombre
20	40,1	Ca	Calcio

GRUPO		1	2	3	4	5	6	7	8
Configuración electrónica		s^1	s^2	d^1	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6
ORBITALES	PERIODO	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	
1s	1	1 H Hidrógeno 1,0							
2s 2p	2	3 Li Litio 6,9	4 Be Berilio 9,0						
3s 3p	3	11 Na Sodio 23,0	12 Mg Magnesio 24,3						
4s 3d 4p	4	19 K Potasio 39,1	20 Ca Calcio 40,1	21 Sc Escandio 45,0	22 Ti Titanio 47,9	23 V Vanadio 50,9	24 Cr Cromo 52,0	25 Mn Manganeso 54,9	26 Fe Hierro 55,8
5s 4d 5p	5	37 Rb Rubidio 85,5	38 Sr Estroncio 87,6	39 Y Itrio 88,9	40 Zr Circonio 91,2	41 Nb Niobio 92,9	42 Mo Molibdeno 95,9	43 Tc Tecnecio (97,9)	44 Ru Rutenio 101,1
6s 4f 5d 6p	6	55 Cs Cesio 132,9	56 Ba Bario 137,3	57 La Lantano 138,9	72 Hf Hafnio 178,5	73 Ta Tántalo 180,9	74 W Wolframio 183,8	75 Re Renio 186,2	76 Os Osmio 190,2
7s 5f 6d 7p	7	87 Fr Francio (223)	88 Ra Radio (226)	89 Ac Actinio (227)	104 Rf Rutherfordio (261)	105 Db Dubnio (262)	106 Sg Seaborgio (266)	107 Bh Bohrio (264)	108 Hs Hassio (277)

		f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
LANTÁNIDOS →	6	58 Ce Cerio 140,1	59 Pr Praseodimio 140,9	60 Nd Neodimio 144,2	61 Pm Prometio (145)	62 Sm Samario 150,4
ACTÍNIDOS →	7	90 Th Torio 232,0	91 Pa Protactinio 231,0	92 U Uranio 238,0	93 Np Neptunio (237)	94 Pu Plutonio (244)

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d^7	d^8	d^9	d^{10}	p^1	p^2	p^3	p^4	p^5	p^6
									VIII A
									4,0 2 **He** Helio
				III A	IV A	V A	VI A	VII A	
				10,8 5 **B** Boro	12,0 6 **C** Carbono	14,0 7 **N** Nitrógeno	16,0 8 **O** Oxígeno	19,0 9 **F** Flúor	20,2 10 **Ne** Neón
VIII		I B	II B	27,0 13 **Al** Aluminio	28,1 14 **Si** Silicio	31,0 15 **P** Fósforo	32,1 16 **S** Azufre	35,5 17 **Cl** Cloro	39,9 18 **Ar** Argón
58,9 27 **Co** Cobalto	58,7 28 **Ni** Níquel	63,5 29 **Cu** Cobre	65,4 30 **Zn** Cinc	69,7 31 **Ga** Galio	72,6 32 **Ge** Germanio	74,9 33 **As** Arsénico	79,0 34 **Se** Selenio	79,9 35 **Br** Bromo	83,8 36 **Kr** Criptón
102,9 45 **Rh** Rodio	106,4 46 **Pd** Paladio	107,9 47 **Ag** Plata	112,4 48 **Cd** Cadmio	114,8 49 **In** Indio	118,7 50 **Sn** Estaño	121,8 51 **Sb** Antimonio	127,6 52 **Te** Teluro	126,9 53 **I** Yodo	131,3 54 **Xe** Xenón
192,2 77 **Ir** Iridio	195,1 78 **Pt** Platino	197,0 79 **Au** Oro	200,6 80 **Hg** Mercurio	204,4 81 **Tl** Talio	207,2 82 **Pb** Plomo	209,0 83 **Bi** Bismuto	(209,0) 84 **Po** Polonio	(210,0) 85 **At** Astato	(222,0) 86 **Rn** Radón
(268) 109 **Mt** Meitnerio	(271) 110 **Ds** Darmstadtio	(272) 111 **Rg** Roentgenio	(285) 112 **Uub** Ununbio		(289) 114 **Uub** Ununquadio		(292) 116 **Uub** Ununhexio		

NO METALES

METALES

GASES NOBLES

f^6	f^7	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f^{14}
152,0 63 **Eu** Europio	157,2 64 **Gd** Gadolinio	158,9 65 **Tb** Terbio	162,5 66 **Dy** Disprosio	164,9 67 **Ho** Holmio	167,3 68 **Er** Erbio	168,9 69 **Tm** Tulio	173,0 70 **Yb** Iterbio	175,0 71 **Lu** Lutecio
(243) 95 **Am** Americio	(247) 96 **Cm** Curio	(247) 97 **Bk** Berkelio	(251) 98 **Cf** Californio	(252) 99 **Es** Einstenio	(257) 100 **Fm** Fermio	(258) 101 **Md** Mendelevio	(259) 102 **No** Nobelio	(262) 103 **Lr** Laurencio

Anexo II. Tabla de constantes físicas y químicas

Cantidad	Valor
Velocidad de la luz en el vacío (c)	299 792 458
Carga elemental (e)	$1{,}602\ 176\ 53 \cdot 10^{-19}$
Constante de Newton de la gravitación (G)	$6{,}6742 \cdot 10^{-11}$
Constante de Planck (h)	$6{,}626\ 0693 \cdot 10^{-34}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}670\ 400 \cdot 10^{-8}$
Constante de la ley de desplazamiento de Wien (λ)	$2{,}897\ 7685 \cdot 10^{-3}$
Permitividad del vacío (ε_0)	$8{,}854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12}$
Constante de Coulomb en el vacío (K)	$8{,}988 \cdot 10^{9}$
Permeabilidad magnética del vacío (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Constante de estructura fina (α)	$7{,}297\ 352\ 568 \cdot 10^{-3}$
Constante de Rydberg (R)	$1{,}097\ 373\ 156\ 852\ 7 \cdot 10^{-7}$
Radio de Bohr (a_0)	$0{,}529\ 177\ 2108 \cdot 10^{-10}$
Masa del electrón	$9{,}109\ 3826 \cdot 10^{-31}$
Masa del electrón (en u)	$5{,}485\ 799\ 0945 \cdot 10^{-4}$
Energía equivalente a la masa del electrón	$8{,}187\ 1047 \cdot 10^{-14}$
Energía equivalente a la masa del electrón (en MeV)	0,510 998 918
Relación masa electrón-protón	$5{,}446\ 170\ 2173 \cdot 10^{-4}$
Relación masa electrón-neutrón	$5{,}438\ 673\ 4481 \cdot 10^{-4}$
Radio clásico del electrón	$2{,}817\ 940\ 325 \cdot 10^{-15}$
Masa del muón	$1{,}883\ 531\ 40 \cdot 10^{-28}$
Masa del tauón	$3{,}167\ 77 \cdot 10^{-27}$
Masa del protón (en u)	1,007 276 466 88
Energía equivalente a la masa del protón	$1{,}503\ 277\ 43 \cdot 10^{-10}$
Energía equivalente a la masa del protón (en MeV)	938,272 029
Relación masa protón-electrón	1836,152 672 61
Relación masa protón-neutrón	0,998 623 478 72
Masa del neutrón	$1{,}674\ 927\ 28 \cdot 10^{-27}$
Masa del neutrón (en u)	1,008 664 915 60
Energía equivalente a la masa del neutrón	$1{,}505\ 349\ 57 \cdot 10^{-10}$
Energía equivalente a la masa del neutrón (en MeV)	939,565 360
Masa de partícula α	$6{,}644\ 6565 \cdot 10^{-27}$
Masa de partícula α (en u)	4,001 506 179 149
Energía equivalente a la masa de partícula α	$5{,}971\ 9194 \cdot 10^{-10}$
Energía equivalente a la masa de partícula α (en MeV)	3727,379 17
Constante de Avogadro (N_A)	$6{,}022\ 1415 \cdot 10^{23}$
Constante de masa atómica (1 u)	$1{,}660\ 538\ 86 \cdot 10^{-27}$
Energía equivalente a constante de masa atómica	$1{,}492\ 417\ 90 \cdot 10^{-10}$
Energía equivalente a constante de masa atómica (en MeV)	931,494 043
Constante de Faraday (F)	96 485,3383
Constante molar de los gases (R)	8,314 472
Constante de Boltzmann (K)	$1{,}380\ 6505 \cdot 10^{-23}$
Constante de Boltzmann (K) (en eV/K)	$8{,}617\ 343 \cdot 10^{-5}$
Volumen molar del gas ideal (273,15 K, 100 kPa)	$22{,}710\ 981 \cdot 10^{-3}$
Masa molar del carbono-12	$12 \cdot 10^{-3}$
Atmósfera estándar (atm)	101 325
Aceleración estándar de la gravedad (g)	9,806 65

Incertidumbre	Unidad
(exacto)	$m \cdot s^{-1}$
0,000 000 14 · 10^{-19}	C
0,0010 · 10^{-11}	$N \cdot m^{2} \cdot kg^{-2}$
0,000 0011 · 10^{-34}	$J \cdot s$
0,000 040 · 10^{-8}	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
0,000 0051 · 10^{-3}	$m \cdot K$
Exacto	$C^{2} \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$
	$N \cdot m^{2} \cdot C^{-2}$
Exacto	$N \cdot A^{-2}$
0,000 000 024 · 10^{-3}	
0,000 073	m^{-1}
0,000 000 0018 · 10^{-10}	m
0,000 0016 · 10^{-31}	kg
0,000 000 0024 · 10^{-4}	u
0,000 0014 · 10^{-14}	J
0,000 000 044	MeV
0,000 000 0025 · 10^{-4}	
0,000 000 0038 · 10^{-4}	
0,000 000 028 · 10^{-15}	m
0,000 000 33 · 10^{-28}	kg
0,000 52 · 10^{-27}	kg
0,000 000 000 13	u
0,000 000 26 · 10^{-10}	J
0,000 080	MeV
0,000 000 85	
0,000 000 000 58	
0,000 000 29 · 10^{-27}	kg
0,000 000 000 55	u
0,000 000 26 · 10^{-10}	J
0,000 081	MeV
0,000 0011 · 10^{-27}	kg
0,000 000 000 056	u
0,000 0010 · 10^{-10}	J
0,000 32	MeV
0,000 0010 · 10^{23}	mol^{-1}
0,000 000 28 · 10^{-27}	kg
0,000 000 26 · 10^{-10}	J
0,000 080	MeV
0,0083	$C \cdot mol^{-1}$
0,000 015	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
0,000 0024 · 10^{-23}	$J \cdot K^{-1}$
0,000 015 · 10^{-5}	$eV \cdot K^{-1}$
0,000 040 · 10^{-3}	$m^{3} \cdot mol^{-1}$
(exacto)	$kg \cdot mol^{-1}$
(exacto)	Pa
(exacto)	$m \cdot s^{-2}$

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **CARRIÓ/SÁNCHEZ/LACASTA**
Interiores: **Manuel García**
Ilustración: **Enrique Cordero, Roberto Hernández, Félix Moreno, David Cabacas**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **Rosa María Barriga, José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Alejandro Retana**
Confección y montaje: **Hilario Simón**

Corrección: **Ángeles San Román, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: SERIDEC PHOTOIMAGENES CD, S.L.; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-0991-8
CP: 833523
Depósito legal: