Unidad

1 Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss

● Actividades

1. Si se designa por x el número de mujeres e y el número de hombres, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 42 \\ x > y \\ x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array}\right\}$$

Se trata, pues, de encontrar números naturales que verifiquen esas condiciones. Obviamente hay muchas soluciones y, por tanto, no es única. (Véase tabla adjunta.)

x	22	23	24	25	...
y	20	19	18	17	...

2. *a*) $2x - 3y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$

Entonces $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \dfrac{2}{3}\lambda - \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

b) $3x + y - z = 8 \Rightarrow z = -3x - y + 8$

Entonces $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -3\lambda - \mu + 8 \end{array}\right.$

3. *a*) Por ejemplo, basta añadir la ecuación $x + 3y = 1$. Resulta así el sistema compatible determinado:

$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\}$ (Rectas secantes)

b) Por ejemplo, añadiendo la ecuación $4x - 6y = 10$. Así, resulta el sistema compatible indeterminado:

$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 10 \end{array}\right\}$ (Rectas paralelas)

c) Basta añadir una ecuación multiplicada por un número real, por ejemplo, $4x - 6y = 12$. Así el sistema incompatible es:

$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 12 \end{array}\right\}$ (Rectas coincidentes)

4. *a*) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 8 \\ x + 4y = -6 \end{array}\right\}$ $x = 2, y = -2$

Sistema compatible determinado

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = 2 \end{array}\right\}$ Sistema incompatible.

5. *a*) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{z}{2}$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = \dfrac{\lambda}{2}$

Despejando x de la primera ecuación queda:

$$x = \frac{-3}{4}\lambda + \frac{1}{2}$$

Luego:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-3}{4}\lambda + \frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 4 \\ 2y + 3z = -21 \\ z = 5 \end{array}\right\}$ $z = 5, y = -3, x = 0$

Solución: $(x, y, z) = (0, -3, 5)$

6. *a*) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\}$ Sistema incompatible.

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \\ 4x - y = 1 \end{array}\right\}$ $E_3 = E_1 + E_2$

Luego: $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $E_2 \to E_2 - 3E_1$

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 7y - 4z = 0 \end{array}\right\}$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = \dfrac{4}{7}\lambda$

En la primera ecuación: $x = \dfrac{8}{7}\lambda - \lambda = \dfrac{1}{7}\lambda$

Solución: $(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{7}\lambda, \dfrac{4}{7}\lambda, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$

7. *a*) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 36 \\ 1 & -1 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - F_1;\ F_3 \to F_3 + F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 36 \\ 0 & -2 & 2 & -23 \\ 0 & 2 & 0 & 43 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 36 \\ -2y + 2z = -23 \\ 2y = 43 \end{array}\right\} \quad (x, y, z) = \left(\frac{49}{2}, \frac{43}{2}, 10\right)$$

Sistema compatible determinado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - 2F_1;\ F_3 \to F_3 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$F_3 \to F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 4z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \end{array}\right\}$$ Sistema compatible indeterminado

Solución: $(x, y, z) = (2\lambda - 1, \lambda + 1, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

8. *a*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - 2F_1;\ F_3 \to F_3 - 3F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 4 \\ 3y - 3z = 0 \\ -11y = -11 \end{array}\right\} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1)$$

Sistema compatible determinado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$

$F_3 \to F_3 - 5F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 0 & 29 & 145 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + 3z = 16 \\ y - 6z = -27 \\ 29z = 145 \end{array}\right\}$$

Solución: $(x, y, z) = (1, 3, 5)$

Sistema compatible determinado.

9. *a*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$F_3 \to F_3 + 2F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z = 9 \end{array}\right\}$$

$(x, y, z) = (8, -6, 9)$

Sistema compatible determinado.

b) Sí, por ejemplo, añadiendo una ecuación que sea suma de las dos primeras.

$E'_3 = E_1 + E_2$

Esto es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + 2y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$(x, y, z) = (\lambda - 1, -\lambda + 3, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

10. *a*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$

$F_3 \to F_3 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - 3y - 2z = 3 \\ 5y + 5z = -8 \\ 0 = 4 \end{array}\right\}$$

Sistema incompatible.

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - 3F_1$

$F_3 \to F_3 - 5F_1$

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 5y - 5z = 1 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado.

$(x, y, z) = \left(\frac{1}{5}, \lambda + \frac{1}{5}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

11. No es necesario. Por ejemplo, el sistema de la actividad 10 *b*).

12. $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right)$ $F_1 \leftrightarrow F_2$ $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - 3F_1$ $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -8 & 10 & -18 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 6 \\ -8y + 10z = -18 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado.

$(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}\lambda + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\lambda + \frac{9}{4}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

13. Por ejemplo, el sistema de la actividad 10 *a*).

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -2 \\ x - 3y - 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{array}\right\}$$ Es un sistema incompatible.

Suprimiendo la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -2 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Resulta un sistema compatible indeterminado.

14. *a*) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{array}\right)$ $F_1 \leftrightarrow F_2$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & -6 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 3F_1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -15 & -11 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} F_3 = 2F_3 + 7F_2 \\ F_4 = 2F_4 + 5F_2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -30 & -17 & 0 \end{array}\right)$ $F_4 = F_4 - \frac{30}{12} F_3$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -39/2 & 15 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $F_3 \leftrightarrow F_1$

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \\ F_4 \to F_4 - 3F_1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -6 & -7 & -20 \\ 0 & -7 & -11 & -21 \\ 0 & -6 & -7 & -33 \end{array}\right)$ Sistema incompatible.

15. *a*) Sistema incompatible.

b) Sistema compatible determinado:

$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$

c) Sistema compatible indeterminado:

$(x, y, z) = (-4\lambda + 2, \lambda, -4\lambda + 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

d) Sistema compatible indeterminado:

$(x, y, z, w) = (-\lambda - 2\mu + 5, \mu, -3\lambda + 4, \lambda),$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

e) Sistema incompatible.

f) Sistema compatible determinado:

$(x, y, z, w) = (1, 0, 1, 1)$

g) Sistema compatible determinado:

$(x, y) = (-1, 2)$

h) Sistema incompatible.

16. *a*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - \frac{5}{3} F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Solución trivial:

$x = 0; y = 0; z = 0$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - \frac{1}{2} F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(x, y, z) = (2\lambda, -3\lambda, 5\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

Solución distinta de la trivial.

17. No es posible.

18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & a - 10 & -4 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a - 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 2 \\ -3y - z = -2 \\ (a - 8)z = 0 \end{array}\right\}$$

- Si $a \neq 8$: sistema compatible determinado.
- Si $a = 8$: sistema compatible indeterminado.

Resolución para $a = 0$

$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

Ejercicios

1. $2x + 3y - 2z = 1$

Haciendo $z = \lambda$, $y = \mu$, entonces $x = \lambda - \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}$

$(x, y, z) = \left(\lambda - \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}, \mu, \lambda\right), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Para encontrar tres puntos del plano basta dar valores a los parámetros λ y μ. Así:

$\lambda = 0, \mu = 0 \Rightarrow (1/2, 0, 0)$

$\lambda = 1, \mu = 0 \Rightarrow (3/2, 0, 1)$

$\lambda = 0, \mu = 1 \Rightarrow (-1, 1, 0)$

Sin embargo, para hallar tres puntos que no pertenezcan se deben dar valores a λ y μ que no cumplan la solución. Por ejemplo: (3, 0, 0), (2, 0, 1) y (0, 1, 0).

2. *a*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 8 & 9 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 8 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & -22 & 13 & 4 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - \frac{22}{7} F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{25}{7} & \frac{50}{7} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ -7y + 3z = -1 \\ \frac{25}{7}z = \frac{50}{7} \end{array}\right\} \quad x = 0, y = 1, z = 2$$

Sistema compatible determinado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 5y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda + 1}{5}, \frac{-3\lambda + 1}{5}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistema compatible indeterminado.

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 4F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ -y + z = 1 \end{array}\right\} \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

$(x, y, z) = (-\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

4. $$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = -1 \end{array}\right\} \quad E_2 \to E_2 - 2E_1 \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ -7y = -3 \end{array}\right\}$$

$x = \dfrac{1}{7}, y = \dfrac{3}{7}$

El sistema dado es compatible determinado.

Sí es posible. Basta añadir una ecuación que verifique la solución del sistema propuesto. Por ejemplo:

$$3x + 2y = 3 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$$

Así,

$$3x + 2y = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 21x + 14y = 9$$

5. $$\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible determinado con solución: $x = 2$, $y = 2$.

a) Basta con añadir una ecuación que no verifique la solución anterior. Por ejemplo:

$$x + 2y = 7$$

b) No es posible.

6. *a*) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \\ 0 & 6 & -6 & -42 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - \frac{3}{4}F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ 8y - 4z = -28 \\ -3z = -21 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 7 \end{array}$$

$(x, y, z) = (-2, 0, 7)$

Sistema compatible determinado.

b) No, porque si se elimina una ecuación el sistema resultante sería compatible indeterminado.

7. *a*) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Solución trivial.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 1 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado o con solución distinta de la trivial.

8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $F_2 \to F_2 - 3F_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -11y + 5z = 0 \end{array}\right\}$

$(x, y, z) = (\lambda, 5\lambda, 11\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Sistema con solución distinta de la trivial.

9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $F_2 \to F_2 - 2F_1$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} x + y - z + w = 0 \\ -3w = 0 \end{array}\right\}$

$(x, y, z, w) = (\lambda - \mu, \mu, \lambda, 0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado dependiente de 2 parámetros.

10. Sí, es posible.

11. Sí, por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z + 2w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 2w = 2 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $F_2 \to F_2 - F_1$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z + 2w = 1 \\ 0 = 1 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible de 2 ecuaciones y 4 incógnitas.

12. Sí, por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 2 \end{array}\right\}$ Sistema compatible indeterminado.

Eliminando la tercera ecuación resulta:

$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{array}\right\}$ Sistema incompatible.

13. $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

$\left.\begin{array}{r} x = -4 \Rightarrow 256 + 16a - 4b + c = 0 \\ x = -1 \Rightarrow 1 + a - b + c = 0 \\ x = 2 \Rightarrow 16 + 4a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 16a - 4b + c = -256 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} a = -15 \\ b = 10 \\ c = 24 \end{array}$

La ecuación propuesta es:

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$$

La otra raíz es $x = 3$

14. $\left.\begin{array}{r} 3x + my = 5 \\ 2x + 5y = 8 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & m & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$ $F_2 \to F_2 - \frac{2}{3}F_1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & m & 5 + m \\ 0 & 5 - \frac{2}{3}m & \frac{14}{3} - \frac{2}{3}m \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} 3x + my = 5 + m \\ (5 - \frac{2}{3}m)y = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}m \end{array}\right\}$

El sistema tiene solución única si: $5 - \frac{2}{3}m \neq 0$. Es decir:

$$m \neq \frac{15}{2}$$

15. $\left.\begin{array}{r} (1 + 2k)x + 5y = 7 \\ (2 + k)x + 4y = 8 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 + 2k & 5 & 7 \\ 2 + k & 4 & 8 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - \frac{4}{5}F_1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 + 2k & 5 & 7 \\ \frac{6 - 3k}{5} & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} (1 + 2k)x + 5y = 7 \\ (6 - 3k)x = 12 \end{array}\right\}$

El sistema no tiene solución si: $6 - 3k = 0$.

Esto es: $k = 2$.

16. $\left.\begin{array}{r} (2k - 1)x + ky = 6 \\ 15x + 8y = 6 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2k - 1 & k & 6 \\ 15 & 8 & 6 \end{array}\right)$ $F_1 \leftrightarrow F_2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 6 \\ 2k - 1 & k & 6 \end{array}\right)$ $F_2 \to F_2 - \frac{2k - 1}{15}F_1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 6 \\ 0 & \frac{-k + 8}{15} & \frac{96 - 12k}{15} \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} 15x + 8y = 6 \\ (-k + 8)y = 96 - 12k \end{array}\right\}$

El sistema tendrá infinitas soluciones si:

$\left.\begin{array}{r} -k + 8 = 0 \\ 96 - 12k = 0 \end{array}\right\}$

Esto es: si $k = 8$.

Así, quedaría sólo la ecuación $15x + 8y = 6$

Haciendo $y = \lambda$, $x = \frac{6 - 8\lambda}{15}$

$(x, y) = \left(\frac{-8\lambda + 6}{15}, \lambda\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$

17. $\left.\begin{aligned} 3x-2y+z&=0\\ x+2y-3z&=0\\ kx-14y+15z&=0\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0\\ k & -14 & 15 & 0\end{array}\right)$

$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ k & -14 & 15 & 0\end{array}\right)$

$\begin{aligned} &F_2 \to F_2 - 3F_1\\ &F_3 \to F_3 - kF_1\end{aligned}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -8 & 10 & 0\\ 0 & -14-2k & 15+3k & 0\end{array}\right)$

$F_3 \to F_3 + \dfrac{-14-2k}{8}F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -8 & 10 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{k-5}{2} & 0\end{array}\right)$

$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ -8y+10z&=0\\ (k-5)z&=0\end{aligned}\right\}$

El sistema tendrá solución distinta de la trivial si: $k-5=0$, es decir, $k=5$.

18. *a*) $\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-1\\ 2x+5y+4z&=-2\\ x+3y+k^2z&=k\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &F_2 \to F_2 - 2F_1\\ &F_3 \to F_3 - F_1\end{aligned}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & k^2-3 & k+1\end{array}\right)\quad F_3 \to F_3 - F_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1\end{array}\right)\quad \left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-1\\ y-2z&=0\\ (k^2-1)z&=k+1\end{aligned}\right\}$

$k^2-1=0 \Rightarrow k=\pm 1$

$k+1=0 \Rightarrow k=-1$

Estudio:

- Si $k=-1$, queda el sistema:

  $\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-1\\ y-2z&=0\end{aligned}\right\}$

  que es compatible indeterminado dependiente de 1 parámetro.

- Si $k=1$, el sistema

  $\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-1\\ y-2z&=0\\ 0&=2\end{aligned}\right\}$

  es incompatible.

b) Si $k=-1$,

$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-1\\ y-2z&=0\end{aligned}\right\}$

$(x, y, z) = (-7\lambda-1, 2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado.

19. $\left.\begin{aligned} x+3y-2z&=-3\\ 3x-y+z&=2\\ ax+2y-z&=-1\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -3\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ a & 2 & -1 & -1\end{array}\right)$

$F_2 \leftrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2 & -3\\ a & 2 & -1 & -1\end{array}\right)\quad \begin{aligned} &F_2 \to F_2 + 2F_1\\ &F_3 \to F_3 + F_1\end{aligned}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2\\ 7 & 1 & 0 & 1\\ a+3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\quad F_3 \to F_3 - F_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2\\ 7 & 1 & 0 & 1\\ a-4 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\quad \left.\begin{aligned} 3x-2y+z&=2\\ 7x+y&=1\\ (a-4)x&=0\end{aligned}\right\}$

El sistema tendrá infinitas soluciones si: $a-4=0 \Rightarrow a=4$.

Así, resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+z&=2\\ 7x+y&=1\end{aligned}\right\}$$

$(x, y, z) = (\lambda, -7\lambda+1, -17\lambda+4),\ \lambda \in \mathbb{R}$

20. $\left.\begin{aligned} x-y+kz&=0\\ 4x-4z&=0\\ -x-ky-z&=0\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0\\ 4 & 0 & -4 & 0\\ -1 & -k & -1 & 0\end{array}\right)$

$\begin{aligned} &F_2 \to F_2 - 4F_1\\ &F_3 \to F_3 + F_1\end{aligned}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0\\ 0 & 4 & -4-4k & 0\\ 0 & -k-1 & -1+k & 0\end{array}\right)$

$F_3 \to F_3 + \dfrac{k+1}{4}F_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0\\ 0 & 4 & -4-4k & 0\\ 0 & 0 & -k^2-k & 0\end{array}\right)\quad \left.\begin{aligned} x-y+kz&=0\\ 4y-(4+4k)z&=0\\ -(k^2+k)z&=0\end{aligned}\right\}$

El sistema tendrá infinitas soluciones si: $k^2+k=0 \Rightarrow k(k+1)=0 \Rightarrow k=0$ o $k=-1$.

21. $\left.\begin{aligned} x+2y&=3\\ x-3y&=1\\ 2x+y&=m\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & m\end{array}\right)\quad \begin{aligned} &F_2 \to F_2 - F_1\\ &F_3 \to F_3 - 2F_1\end{aligned}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -2\\ 0 & -3 & m-6\end{array}\right)\quad F_3 \to F_3 - \dfrac{3}{5}F_2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -2\\ 0 & 0 & m-\dfrac{24}{5}\end{array}\right)$

- Si $m = \frac{24}{5}$, el sistema es compatible determinado con solución $(x, y) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$
- Si $m \neq \frac{24}{5}$ el sistema es incompatible.

22. $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - F_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ (k-2)y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

- Si $k = 2$, resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right\}$,

  que es compatible indeterminado.

  $(x, y, z) = (-2\lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

- Si $k \neq 2$, resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ (k-2)y + 2z = 0 \end{array}\right\}$,

  que también es compatible indeterminado.

  $(x, y, z) = \left(\frac{(k+2)\lambda}{k-2}, \frac{-2\lambda}{k-2}, \lambda\right) \lambda \in \mathbb{R}$

En resumen, $\forall k \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible indeterminado, o sea, con solución distinta de la trivial.

23. *a*) Nunca.

b) Sí. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

c) Sí. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{r} x + y + kz = k^2 \\ y - z = k \\ x + ky + z = k \end{array}\right\}$

a) $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 & k \end{array}\right) = M^*$

$\left.\begin{array}{l} |M| = 1 - 1 - k + k = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rg}(M) = 2, \forall k \in \mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & k \end{vmatrix} \begin{array}{l} = k + k - k^2 - k = -k^2 + k = \\ = k(-k+1) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ y } k = 1 \end{array}$

- Si $k = 0$ o $k = 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución).

b)
- Si $k = 0$, resulta el siguiente sistema homogéneo:

  $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$ $(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

- Si $k = 1$, queda el siguiente sistema:

  $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$

  $(x, y, z) = (-2\lambda, \lambda + 1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

25. $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ x + 7y = 10 \\ kx + 8y = 4 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 10 \\ k & 8 & 4 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - kF_1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8-3k & 4-2k \end{array}\right)$ $F_3 \to F_3 - \frac{8-3k}{4} F_2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -12+4k \end{array}\right)$

Si $-12 + 4k = 0$, es decir, $k = 3$ el sistema es compatible determinado con solución $(x, y) = (-4, 2)$.

26. $\left.\begin{array}{r} x - y + z = a \\ x + y - z = b \\ -x + y + z = c \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - F_1$

$F_3 \to F_3 + F_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & a+c \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} x - y + z = a \\ 2y - 2z = b - a \\ 2z = a + c \end{array}\right\}$

$$x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{b+c}{2},\ z = \frac{a+c}{2}$$

Sistema compatible determinado $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

• Problemas

1. Se designa por x, y, z los números mayor, mediano y menor, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=40 \\ x+y&=3z \\ x&=y+z-8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=40 \\ x+y-3z&=0 \\ x-y-z&=-8 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -4 & -40 \\ 0 & -2 & -2 & -48 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=40 \\ -4z&=-40 \\ -2y-2z&=-48 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x&=16 \\ y&=14 \\ z&=10 \end{aligned}$$

Los números pedidos son 16, 14 y 10.

2. x = Número de localidades del patio de butacas vendidas.

y = Número de localidades de entresuelo vendidas.

z = Número de localidades de palco vendidas.

Así:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=500 \\ 50x+35y+25z&=17\,100 \\ 50\cdot\frac{x}{2}+35y+25z&=14\,600 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=500 \\ 10x+7y+5z&=3\,420 \\ 5x+7y+5z&=2\,920 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 10 & 7 & 5 & 3\,420 \\ 5 & 7 & 5 & 2\,920 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 10F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -3 & -5 & -1\,580 \\ 0 & 2 & 0 & 420 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{aligned} x+y+z&=500 \\ -3y-5z&=-1\,580 \\ 2y&=420 \end{aligned}\right\}$$

$x = 100$, $y = 210$, $z = 190$

Se vendieron, pues, 100 butacas de patio, 210 de entresuelo y 190 de palco.

3. x = litros de la solución que contienen el 15 % de ácido sulfúrico.

y = litros de la solución que contienen el 25 % de ácido sulfúrico.

z = litros de la solución que contienen el 50 % de ácido sulfúrico.

Así, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=100 \\ 0{,}15x+0{,}25y+0{,}50z&=0{,}40\,(x+y+z) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=100 \\ -5x-3y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ -5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_2 + 5F_1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 7 & 500 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=100 \\ 2y+7z&=500 \end{aligned}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}\lambda - 150,\ \frac{-7}{2}\lambda + 250,\ \lambda\right)$$

Como el número de libros ha de ser mayor o igual que cero, se debe exigir que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{2}\lambda - 150 \geqslant 0 &\Rightarrow \lambda \geqslant 60 \\ \frac{-7}{2}\lambda + 250 \geqslant 0 &\Rightarrow \lambda \leqslant \frac{500}{7} \end{aligned}\right\} \quad 60 \leqslant \lambda \leqslant \frac{500}{7}$$

$\lambda \geqslant 0$

4. x = euros invertidos en Letras del Tesoro.

y = euros invertidos en Bonos.

z = euros invertidos en Obligaciones.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=10\,000 \\ 0{,}03x+0{,}05y+0{,}04z&=425 \\ x+y&=3z \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=10\,000 \\ 3x+5y+4z&=42\,500 \\ x+y-3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\,000 \\ 3 & 5 & 4 & 42\,500 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\,000 \\ 0 & 2 & 1 & 12\,500 \\ 0 & 0 & -4 & -10\,000 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 10\,000 \\ 2y + z = 12\,500 \\ -4z = -10\,000 \end{array}\right\}$$

$x = 2\,500$, $y = 5\,000$, $z = 2\,500$

Deberá invertir 2 500 € en letras del Tesoro, 5 000 € en Bonos y 2 500 € en Obligaciones.

5. x = plantas compradas a 7 €.

y = plantas compradas a 10 €.

z = plantas compradas a 13 €.

De esta manera se tiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 15 \\ 7x + 10y + 13z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 10 & 13 & 150 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_2 - 7F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 6 & 45 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 15 \\ 3y + 6z = 45 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado.

$(x, y, z) = (\lambda, 15 - 2\lambda, \lambda)$ donde λ ha de ser natural y, además, $15 - 2\lambda \geqslant 0$; $\lambda \leqslant 7{,}5$. Es decir:

$$\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Todas las posibles combinaciones de macetas que pueden comprar Azucena y Jacinto se dan en la siguiente tabla:

λ	***x***	***y***	***z***
0	0	15	0
1	1	13	1
2	2	11	2
3	3	9	3
4	4	7	4
5	5	5	5
6	6	3	6
7	7	1	7

6. x = gramos del producto *A* incluidos en la mezcla.
y = gramos del producto *B* incluidos en la mezcla.
z = gramos del producto *C* incluidos en la mezcla.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} 20x + 10y + 15z = 2\,300 & \text{(proteínas)} \\ 2x + 6y + 5z = 620 & \text{(grasas)} \\ 15x + 10y + 5z = 1\,600 & \text{(humedad)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y + 3z = 460 \\ 2x + 6y + 5z = 620 \\ 3x + 2y + z = 320 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 50 \\ z = 40 \end{array}$$

Se deberán utilizar 60 g del producto *A*, 50 g del producto *B* y 40 g del producto *C*.

7. Sea el polinomio de tercer grado siguiente:

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Imponiéndole que pase por cada uno de los puntos resulta el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} (2, 5) \to 5 = 8 + 4a + 2b + c \\ (3, 10) \to 10 = 27 + 9a + 3b + c \\ (4, -3) \to -3 = 64 + 16a + 4b + c \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c + 2b + 4a = -3 \\ c + 3b + 9a = -17 \\ c + 4b + 16a = -67 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & b & a \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 9 & -17 \\ 1 & 4 & 16 & -67 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 12 & -64 \end{array}\right)$$

$$F_3 \to F_3 - 2F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -36 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} c + 2b + 4a = -3 \\ b + 5a = -14 \\ 2a = -36 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -18 \\ b = 76 \\ c = -83 \end{array}$$

Luego $p(x) = x^3 - 18x^2 + 76x - 83$

8. x = kg de café de Colombia en la mezcla

y = kg de café de Brasil en la mezcla

z = kg de café de Kenia en la mezcla

Así:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8{,}50 \\ x = 3y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 4{,}25 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4{,}25 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 5F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -0{,}75 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$F_3 \to F_3 - 2F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -2y - z = -0{,}75 \\ z = 0{,}5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 0{,}375 \\ y = 0{,}125 \\ z = 0{,}500 \end{array}$$

Se deberán mezclar 375 g de café de Colombia, 125 g de Brasil y 500 g de Kenia.

9. x = número de respuestas correctas.

y = número de respuestas incorrectas.

x = número de respuestas no contestadas.

De esta manera se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \\ x - 0{,}5y = 17{,}5 \\ y = z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Total de respuestas)} \\ \text{(Puntuación de un alumno)} \\ \text{(Igualdad de respuestas incorrectas y no contestadas)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2z = 30 \\ x - 0{,}5z = 17{,}5 \end{array}\right\} \quad E_2 \to E_2 - E_1$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 30 \\ -2{,}5z = -12{,}5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 20 \\ z = 5 \\ y = 5 \end{array}$$

Respondió correctamente 20 preguntas, se equivocó en 5 y no respondió a otras 5.

10. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} (-1, -4) & \to 1 + 16 - a - 4b + c = 0 \\ (2, 1) & \to 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ (3, 0) & \to 9 + 0 + 3a + 0 + c = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c - 4b - a = -17 \\ c + b + 2a = -5 \\ c + 3a = -9 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -17 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -17 \\ 0 & 5 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - \frac{4}{5}F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -17 \\ 0 & 5 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 8/5 & -8/5 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} c - 4b - a = -17 \\ 5b + 3a = 12 \\ a = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c = -6 \\ b = 3 \\ a = -1 \end{array}$$

La circunferencia que pasa por esos tres puntos es:

$$x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$$

11. x = edad del abuelo.

y = edad del padre.

z = edad del hijo.

Así:

$$\left.\begin{array}{r} x = 2y \\ y = 3z \\ x + y + z = 120 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ y - 3z = 0 \\ x + y + z = 120 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 120 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 120 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - 3F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 120 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 10z = 120 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 72 \\ y = 36 \\ z = 12 \end{array}$$

El abuelo tiene 72 años, el padre 36 y el hijo 12.

12. x = km recorridos por la corredora más en forma.

y = km recorridos por la corredora mediana.

z = km recorridos por la corredora más fondona.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 41 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y + z}{2} = 17 \\ 2z = x + y - 20 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 41 \\ 3x + 2y + 2z = 102 \\ -x - y + 2z = -20 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 41 \\ 3 & 2 & 2 & 102 \\ -1 & -1 & 2 & -20 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 41 \\ 0 & -1 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=41 \\ y+z=21 \\ 3z=21 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=20 \\ y=14 \\ z=7 \end{array}$$

La corredora más en forma recorrió ese día 20 km, la mediana 14 km y la más fondona 7 km.

13. Sean x, y, z las edades respectivas del hermano mayor, mediano y pequeño. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y+3z=60 \\ 4x+3y+5z=50 \\ 3x+5y+4z=46 \end{array}\right\}$$

x = 9, y = 3, z = 1

El mayor tiene 9 años, el mediano 3 y el pequeño 1.

14. Sean x e y el porcentaje de alcohol que contiene el vino blanco y el vino tinto, respectivamente. Así:

$$\left.\begin{array}{r} 60x+20y=10 \\ 20x+60y=11 \end{array}\right\}$$

$$x=\frac{19}{160}=0{,}11875$$

$$y=\frac{23}{160}=0{,}14375$$

De esta manera se tiene que:

$$40x+40y=40\cdot\frac{19}{160}+40\cdot\frac{23}{160}=10{,}5$$

10,5 es la graduación de esta mezcla de vino tinto y blanco.

15. Designemos por x, y, z el número de camisetas vendidas de los modelos A, B y C, respectivamente. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+20y+30z=4\,250 \\ 20x+10y+30z=4\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(N.º total de camisetas)} \\ \text{(Ingresos por venta 1)} \\ \text{(Ingresos por venta 2)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 425 \\ 2 & 1 & 3 & 400 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 225 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 + F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 225 \\ 0 & 0 & 3 & 225 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ y+2z=225 \\ 3z=225 \end{array}\right\}$$

$x=50$, $y=75$, $z=75$

Vendió 50 camisetas del modelo A y 75 de cada uno de los modelos B y C.

16. x = cajas de 250 g.

y = cajas de 500 g.

z = cajas de 1 kg.

Así:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x=y+5 \\ 10x+20y+40z=1\,250 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x-y=5 \\ x+2y+4z=125 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 65 \end{array}\right) \quad F_3 \leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 3 & 65 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 + 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 3 & 65 \\ 0 & 0 & 5 & 75 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ y+3z=65 \\ 5z=75 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=25 \\ y=20 \\ z=15 \end{array}$$

Se envasaron 25 cajas de 250 g, 20 cajas de 500 g y 15 de 1 kg.

17. x = días de estancia en Francia.

y = días de estancia en Italia.

z = días de estancia en Suiza.

$$\left.\begin{array}{r} 80x+60y+70z=700 \\ 50x+40y+40z=440 \\ z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 80x+60y=560 \\ 50x+40y=360 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=28 \\ 5x+4y=36 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=4 \\ y=4 \end{array}$$

Pasaron, por tanto, 4 días en Francia y otros tantos en Italia.

18. x = precio del artículo A en la 1.ª tienda.

y = precio del artículo B en la 2.ª tienda.

z = precio del artículo C en la 3.ª tienda.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 10 \\ 1{,}1x + 1{,}1y + 0{,}9z = 10 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 0{,}9 & 10 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_2 - 1{,}1F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -0{,}2 & -1 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 10 \\ -0{,}2z = -1 \end{array}\right\} \quad z = 5$$

a) El precio del artículo C en la 1.ª tienda es de 5 €.

b) $1{,}1x + 1{,}1y + 0{,}9 \cdot 5 = 10 \Rightarrow 1{,}1x + 1{,}1y = 5{,}5$

Luego, entre los artículos A y B en la segunda tienda cuestan 5,5 €.

• Márgenes

— Página 13.

Una posible solución es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ y + z = -2 \\ z = -2 \end{array}\right\}$$

— Página 17.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 3x + 5y = -6 \end{array}\right\}$$

— Página 18.

Respuesta abierta.

— Página 19.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ -2x + y - z = -1 \end{array}\right\}$$

No es posible porque el sistema propuesto es incompatible.

— Página 20.

Sí es posible. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x = 5 \end{array}\right\}$$

— Página 21.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 0 = -2 \end{array}\right\}$$

$E_2 \to E_2 - 2E_1$

Resulta un sistema incompatible.

— Página 22.

No es posible.

— Página 27.

$$(x, y, z) = \left(-\frac{32}{11}\lambda, -\frac{3}{11}\lambda, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

• Cajón de sastre

Sean las siguientes variables:

x = número de conejos.

y = número de pavos.

z = gramos que come un pavo diariamente.

t = número de conejos que se comieron en la celebración.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 32 & \text{(patas)} \\ 200x + zy = 2\,400 & \text{(consumo en g)} \\ (x - t) + (y - 1) = \dfrac{x + y}{2} & \text{(después celebración)} \\ 200(x - t) + z(y - 1) = 1\,300 & \text{(consumo después de la celebración en g)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 16 \\ 200x + zy = 2\,400 \\ x + y - 2t = 2 \\ 200x + zy - 200t - z = 1\,300 \end{array}\right\}$$

Sistema que no tiene solución entera positiva. Por tanto, los datos facilitados no son correctos.

Unidad

2 Matrices

• Actividades

1. *a*) $\left.\begin{array}{r} a = 3 \\ b = 2 + a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3, \quad b = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} 3 = a \\ a = 3 \\ 2 = b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3, \quad b = 2$

2. $M_{3 \times 2} \quad P_{2 \times 3} \quad Q_{3 \times 1} \quad R_{1 \times 2}$

3.

A:	cuadrada	*E*:	cuadrada
B:	triangular inferior	*F*:	rectangular
C:	fila	*G*:	columna
D:	rectangular	*H*:	diagonal

4. *a*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 3/2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 7/3 & 4 & -1/2 \\ 4 & 8 & -1/2 \\ 1 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}$

d) $(2 \quad -0{,}5) - (0{,}3 \quad 1{,}6) = (1{,}7 \quad -2{,}1)$

5. $A + I = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 = y \\ x = 1 \\ 1 = x \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1, \quad y = 3$

6. $M + X = N \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

7. *a*) $-3A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 3 & -15 & -6 \end{pmatrix}$

b) $B - 3A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 6 & -14 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

d) $3C - D = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

No es posible efectuar esta operación de matrices, ya que no tienen la misma dimensión.

8. • $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M^t \Rightarrow M$ es simétrica

• $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow N = -N^t$ y, por tanto, N es antisimétrica.

• $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $P^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow P$ no es ni simétrica ni antisimétrica.

• $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q^t \Rightarrow Q$ es simétrica.

• $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $R^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = R^t$ y, por tanto, R es simétrica.

• $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $S^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ no es ni simétrica ni antisimétrica.

9. $A_{3\times 5} \cdot B_{m\times n} = A \cdot B_{3\times 7}$

Para que se pueda efectuar el producto $A \cdot B$, la matriz B ha de tener el mismo número de filas que de columnas tiene A, es decir, $m = 5$. Por otra parte, como el resultado AB tiene 7 columnas, entonces B debe de tener 7 columnas, es decir, $n = 7$.

En resumen:

$$B_{5\times 7}$$

10. $B_{2\times m} \cdot A_{m\times 4} = B \cdot A_{2\times 4}$

Con estos datos, la matriz B debe de tener 2 filas que concuerda con el resultado. Sin embargo, B puede tener cualquier número de columnas.

11. $A_{5\times 4} \cdot B_{m\times n} \cdot C_{3\times 7} = ABC_{5\times 7}$

Luego $B_{4\times 3}$ y $ABC_{5\times 7}$

12. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -5 & 5 \\ 52 & -1 & 9 \\ 28 & 26 & -4 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 11 & 8 \\ 7 & 17 & 16 \end{pmatrix}$

$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 13 \\ 2 & 5 & 6 \\ 9 & 13 & 15 \end{pmatrix}$

13. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12-4k \\ -30 & -20+k \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5k & -20+k \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 12 - 4k = -24 \quad \Rightarrow k = 9 \\ -30 = 15 - 5k \quad \Rightarrow k = 9\,; \ \boxed{k = 9} \\ -20 + k = -20 + k \end{cases}$$

14. $A^t = (2 \quad 4 \quad 1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces:

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \cdot (2 \quad 4 \quad 1)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$A^t \cdot A = (2 \quad 4 \quad 1)_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = (21)_{1\times 1}$

15. *a*) $A = \begin{array}{c} \\ 1.^{\text{o}} \\ 2.^{\text{o}} \\ 3.^{\text{o}} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{clase} & \text{tutorías} & \text{guardias} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 14 & 3 & 4 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$

$B = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{clase} \\ \text{tutoría} \\ \text{guardia} \end{array}$

$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1.^{\text{o}} & 2.^{\text{o}} & 3.^{\text{o}} \end{array} \\ (6 \quad 5 \quad 4) \end{array}$

b) • $C \cdot A = (6 \quad 5 \quad 4)_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 14 & 3 & 4 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} =$

$= (214 \quad 51 \quad 60)_{1\times 3}$

El número total de horas de clase, tutorías y gardias en esta academia son, respectivamente, 214, 51 y 60.

• $A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 14 & 3 & 4 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 660 \\ 575 \\ 515 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

A los profesores de primer curso se les paga 660 €, a los de segundo curso 575 €, siendo 515 € lo pagado a los de tercer curso.

$C \cdot A \cdot B = (214 \quad 51 \quad 60)_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}_{3\times 1} =$

$= (8\,895)_{1\times 1}$

La cantidad pagada al conjunto de profesores en esta academia es de 8 895 €.

16. Las matrices P y Q serán inversas si su producto es la matriz identidad. Esto es:

$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Entonces:

$PQ + X = O \Rightarrow X = O - PQ = O - I = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

17. $B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ 5a + 6c & 5b + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 4c = 1 \\ 3b + 4d = 0 \\ 5a + 6c = 0 \\ 5b + 6d = 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3a + 4c = 1 \\ 5a + 6c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ c = 5/2 \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} 3b + 4d = 0 \\ 5b + 6d = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 2 \\ d = -3/2 \end{array} \end{array}$$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

18. $(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_3 \to F_3 - 4F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I|M^{-1})$

Luego:

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $(P|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 - 2F_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 1 \end{array}\right)$

Debido al «cero recuadrado» no es posible continuar el algoritmo y, en consecuencia, no existe la matriz inversa P^{-1}.

20. $(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 \to F_1 - F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 \to F_1 - F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$

Así:

$X = A^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 2) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

21. *a*) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 \to \frac{1}{3}F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_3 \to F_3 + 2F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Al tener todos los elementos cero en la última fila, no existe B^{-1}.

c) $X \cdot A = B + 2 \cdot I$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B + 2 \cdot I) \cdot A^{-1}$

$X = (B + 2 \cdot I) \cdot A^{-1}$

$X = \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $(T|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 \to F_1 + \frac{1}{2}F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 \to -\frac{1}{2}F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right) = (I\,|\,T^{-1})$

Si $a = 0$, no es posible obtener la matriz identidad y, en consecuencia, no existirá la matriz inversa T^{-1}. Para cualquier $a \neq 1$, existiría la matriz inversa:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/2a \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

23. Se calculará en primer lugar la matriz inversa M^{-1}. Así:

$$(M\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1 \to F_1 + F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 \to F_1 - F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 \to F_2 /(-1) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I\,|\,M^{-1})$

Así:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M \cdot M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ es impar} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Además,

$$M^{-2} = M^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-3} = M^{-1} \cdot M^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ es impar} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

24. $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = P^2 - 3P - 2I =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$- 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

25. • $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3 + \frac{13}{6} F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg $(R) = 2$

• $S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 5F_1 \\ F_4 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -18 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -18 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 + 5F_2 \\ F_4 - 18F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_4 + 3F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg $(S) = 3$

• $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 16 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ rg $(T) = 3$

• $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -4 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 + 2F_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg $(U) = 2$

26. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & -k + 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k + 4 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3 - kF_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k + 4 \\ 0 & 0 & k^2 - 4k + 3 \end{pmatrix}$

$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1$ y $k = 3$

Por tanto:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 3$: rg $(M) = 3$
- Si $k = 1$ o $k = 3$: rg $(M) = 2$

27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_2 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - 2F_2 \\ F_4 - F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_4 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg $(A) = 3$

28. $A = \begin{pmatrix} a - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & a + 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3 - \frac{a + 2}{2} F_2]{} \begin{pmatrix} a - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$

En consecuencia:

- Si $a \neq 0$: rg $(A) = 3$
- Si $a = 0$: rg $(A) = 2$

• Ejercicios

1. *a*) $A_{2 \times 1} \cdot B_{1 \times 2} = AB_{2 \times 2}$

$A_{2 \times 1} \cdot C_{2 \times 2}$, no es posible

$B_{1 \times 2} \cdot A_{2 \times 1} = BA_{1 \times 1}$

$C_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 1} = CA_{2 \times 1}$

b) $I \cdot C = C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = (7 \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = (61)$

$B \cdot C = (7 \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 66 \end{pmatrix}$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

2. $A = (1 \quad -1 \quad 1)$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B^t = (1 \quad -1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$B \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \quad 0)$$

3. $(A + B)(A - B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B =$
$= A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -AB + BA = 0 \Leftrightarrow AB = BA$

Esto es: se verifica que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ si, y sólo si, se emplea la propiedad conmutativa del producto de matrices.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$, y, en consecuencia,

$(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$

4. Para que se puedan efectuar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, la matriz B debe tener dimensión 2×2.

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada. Entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a + 2b \\ 0 & c + 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a + 2b \\ 2c = 0 \\ 2d = c + 2d \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c = 0 \\ a = d - 2b \\ b, d \in \mathbb{R} \end{array}$$

Así:

$$B = \begin{pmatrix} d - 2b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$

$+ 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ porque $A \cdot B \neq B \cdot A$.

6. Si A es una matriz cualquiera de orden $m \times n$ entonces A^t tendrá orden $n \times m$. De tal forma que,

$$A^t_{n \times m} \cdot A_{m \times n} = A^t \cdot A_{n \times n}$$

y

$$A_{m \times n} \cdot A^t_{n \times m} = A \cdot A^t_{m \times m}$$

Luego siempre existen los productos $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$.

7. $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 - a \end{pmatrix}$

$$P^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 - a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c & (1 - a)^2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = a \\ (1 - a)^2 = 1 - a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to a^2 - a = 0 \to \\ \to a(a - 1) = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{array}$$

$(1 - a)^2 - (1 - a) = 0 \to$
$\to (1 - a)\,[1 - a - 1] = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

En consecuencia:

$$c \in \mathbb{R} \text{ y } a = 0 \text{ o } a = 1$$

Existen matrices P tales que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ o } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Si $AC = BD = I \Rightarrow C = A^{-1}$ y $D = B^{-1}$

Luego:

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \dots A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$(B\,|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \dots B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

9. $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & b \\ 1 & a \\ -3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 - 3F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & b+2 \\ 0 & a+1 \\ 0 & c-3 \end{pmatrix}$

rg $(B) = 2$ si hay 2 filas no nulas. Esto es:

Si $b = -2$, $a = -1$ y $c \neq 3$ o $a = -1$, $c = 3$ y $b \neq -2$ o $b = -2$, $c = 3$ y $a \neq -1$

10. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - mF_1 \\ F_3 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 1-m^2 \end{pmatrix}$

$1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

Entonces:

- Si $m = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rg $(M) = 1$
- Si $m = -1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rg $(M) = 2$
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, rg $(M) = 3$

11. *a*) El rango será 2, ya que si el rango de la matriz inicial es 3 es porque existen 3 filas no nulas, pero al suprimir una columna la matriz resultante es de orden 2×3 y, por tanto, el máximo rango será 2, y únicamente 2 por ser la inicial de rango 3.

b) No. Puede tener rango 2 o rango 1. Por ejemplo:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2

y, sin embargo, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es de rango 1

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} A\text{, si } n \text{ es impar} \\ I\text{, si } n \text{ es par} \end{cases}$$

13. Sean A y B dos matrices diagonales de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Efectivamente el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

b) Depende de los elementos de la diagonal. Tendrá inversa A^{-1} si, y sólo si, el producto de los elementos de la diagonal principal es distinto de cero.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \neq 0$$

14. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

- $Q_{m \times 2} \cdot P_{2 \times 2} = QP_{m \times 2}$, sí es posible cuando $m = 1$, es decir, si Q tiene una fila y 2 columnas

$$Q_{1 \times 2}$$

- $P_{2\times 2} \cdot Q_{2\times n} = PQ_{2\times n}$, no es posible porque el producto PQ siempre tendrá 2 filas.

15. A es ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

Por tanto, si $\exists A^{-1}$ entonces $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot A^t = I$

Así:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9/25 + x^2 = 1 \\ 3/5\,(y - x) = 0 \\ y^2 + 9\backslash 25 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4/5 \\ y = x \\ y = \pm 4/5 \end{cases}$$

Luego: $x = y = 4/5$ o $x = y = -4/5$

16. $$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones resulta:

$$3A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejando B de la segunda ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/9 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 14/9 & 0 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A \cdot B = A \cdot C$

Sin embargo, $B \neq C$

18. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $A^3 = 0$, es decir, es igual a la matriz nula.

Por otra parte:

$$I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I + A + A^2) \cdot (I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Luego son inversas.

19. Sean $M = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$M \cdot P = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - 6c & 2b - 6d \\ -a + 3c & -b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a - 6c = 0 \\ 2b - 6d = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ -b + 3d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3c \\ b = 3d \end{array}$$

Luego $P = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ c & d \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}^*$

20. $D = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = D^t$

a) $$D \cdot M = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$(DM|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Así:

$$(DM)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Por consiguiente:

$$A^n = O,\ n \geqslant 3$$

22. *a*) Si $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ entonces $A^t_{n \times m}$ y $B^t_{n \times m}$

Así:

$$A_{m \times n} \cdot B^t_{n \times m} = AB^t_{m \times m}$$

$$A^t_{n \times m} \cdot B_{m \times n} = A^tB_{n \times n}$$

Verdadera, están definidas AB^t y A^tB.

b) Falso. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, sin embargo $A \neq O$ y $B \neq O$.

c) Falso en general. Sólo es cierto si $AB = BA$.

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

d)

Hipótesis	Tesis
$AB = BA$	$A^{-1}B = BA^{-1}$
y	
A tiene inversa.	

Si $AB = BA$ multiplicar a la izquierda por A^{-1}

$A^{-1}(AB) = A^{-1}(BA)$	aplicamos la propiedad asociativa
$(A^{-1} \cdot A)B = (A^{-1}B) \cdot A$	A tiene inversa
$I \cdot B = (A^{-1}B) \cdot A$	Elemento neutro
$B = (A^{-1}B) \cdot A$	Multiplicamos a la derecha por A^{-1}
$BA^{-1} = (A^{-1} \cdot B)\ (A \cdot A^{-1})$	inversa y neutro
$BA^{-1} = A^{-1}B$	

Por tanto, es verdadera.

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

24. *a*) $(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) F_1 \rightarrow \dfrac{F_1}{3}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 5F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) F_2 \rightarrow 3F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) F_1 \rightarrow F_1 - \frac{4}{3} F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \rightarrow F_3 - F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \rightarrow \frac{1}{2} F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} F_2 &\rightarrow F_2 - 2F_3 \\ F_1 &\rightarrow F_1 - 3F_3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = (I\,|B^{-1})$$

Luego $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -3/2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

25. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada.

Entonces:

$A \cdot B + C = 2A \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - 1 = 2a \\ a + b = 2b \\ c = 2c \\ c + d + 2 = 2d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{array}$$

En consecuencia:

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

26. *a*) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz idempotente ya que $A^2 = A$. En efecto:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27 $A^2 = A + I \Rightarrow A \cdot A = A + I \Rightarrow A \cdot A - A = I \Rightarrow$

$\Rightarrow A(A - I) = I$

Así, $A^{-1} = A - I$ y, por tanto, admite inversa.

• Problemas

1. *a*) Matriz de costes: $M = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 92 & 0 \\ 0 & 0 & 143 \end{pmatrix}$

Matriz de ingresos: $P = \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{pmatrix}$

Matriz de ventas: $V = (2\,400 \quad 1\,625 \quad 842)$

b) Ingresos anuales

$V \cdot P = (2\,400 \quad 1\,625 \quad 842) \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{array}{ccc} A & B & C \\ (432\,000 & 455\,000 & 336\,800) \end{array}$$

Gastos anuales

$V \cdot M = (144\,000 \quad 149\,500 \quad 120\,406)$

Beneficios

$VP - VM = (288\,000 \quad 305\,500 \quad 216\,394)$

2. *a*) $(5 \quad 50 \quad 10 \quad 20) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & 25 \\ 15 & 9 & 20 \\ 18 & 10 & 23 \\ 23 & 12 & 30 \end{pmatrix} =$

$= (1\,440 \quad 830 \quad 1\,955)$

Los costes en Almería, Murcia y Barcelona son, respectivamente 14 400, 8 300 y 19 550 euros.

b) $(2 \quad 5 \quad 5 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & 25 \\ 15 & 9 & 20 \\ 18 & 10 & 23 \\ 23 & 12 & 30 \end{pmatrix} = (231 \quad 135 \quad 325)$

Los costes se incrementan en 2 310, 1 350 y 3 250 euros en cada una de las fábricas.

3. $(500\,000 \quad 125\,000) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix} =$

$= (483\,750 \quad 141\,250)$

En el año 2001 había 483 750 habitantes en el centro y 141 250 en el extrarradio.

4. *a*) $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}35 & 0{,}10 & 0{,}00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6{,}10 \\ 6{,}65 \\ 5{,}30 \end{pmatrix}$

La nota media del profesor *A* es de 6,10, la del *B* de 6,65 y 5,30 la del profesor *C*.

b) $(24 \quad 32 \quad 30) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}20 \\ 0{,}25 & 0{,}00 \end{pmatrix} = (11{,}50 \quad 8{,}80)$

12 insuficientes y 9 sobresalientes.

5. *a*) $A \cdot C = (700 \quad 180 \quad 400) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 8 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} =$

$= (10\,440 \quad 19\,080 \quad 14\,120)$

Coste de noviembre

$A \cdot D = (700 \quad 180 \quad 400) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 25 & 20 \\ 10 & 5 & 10 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} =$

$= (13\,900 \quad 23\,200 \quad 19\,000)$

Coste de diciembre

b) $B \cdot C = (1\,200 \quad 300 \quad 650) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 8 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} =$

$= (17\,650 \quad 32\,300 \quad 23\,950)$

Venta de noviembre

$B \cdot D = (1\,200 \quad 300 \quad 650) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 25 & 20 \\ 10 & 5 & 10 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} =$

$= (23\,600 \quad 39\,300 \quad 32\,200)$

Venta de diciembre

c) $B - A = (500 \quad 120 \quad 250)$ Beneficio

$B - A = (500 \quad 120 \quad 250) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 8 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} =$

$= (7\,210 \quad 13\,220 \quad 9\,830)$

Beneficio de noviembre

$(B - A) \cdot D$ Beneficio de diciembre

d) $C + D = \begin{pmatrix} 25 & 45 & 35 \\ 18 & 11 & 19 \\ 9 & 22 & 13 \end{pmatrix}$

Ventas de noviembre y diciembre

$(B + A) \cdot (C + D) = (1\,900 \quad 480 \quad 1\,050) \cdot$

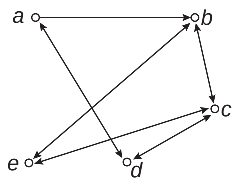
$\cdot \begin{pmatrix} 25 & 45 & 35 \\ 18 & 11 & 19 \\ 9 & 22 & 13 \end{pmatrix} = (65\,590 \quad 113\,880 \quad 89\,270)$

Beneficio de los dos meses.

6. $A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

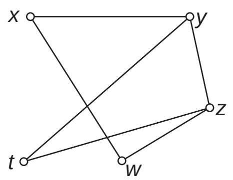
$B = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

7. *a*)



Dígrafo o grafo dirigido.

b)



Grafo no dirigido.

8. Si A es la matriz de adyacencia de un grafo, entonces A^3 indica el número de caminos de longitud 3 entre cada par de vértices y, en particular, la diagonal indica el número de circuitos. Por tanto, la traza de la matriz de A^3 representa el número total de circuitos de longitud 3 del grafo.

9. $M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, entre a y c hay 9 caminos de longitud 4; mientras no hay ningún camino con esa longitud entre a y d; siendo 5 el número de caminos entre a y e.

Entre a y e los caminos son:

a - b - c - d - e; a - d - e -d - e; a - d - c - d - e; a - b - a - d - e; a - d - a - d - e

10. La matriz de un giro de 30° es:

$$\begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen } 30° \\ \text{sen } 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A': (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B': (2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2} & \dfrac{-2+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$C': (1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+4}{2} & \dfrac{-1+4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Así:

$$A' \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$B' \left(\frac{2\sqrt{3}+3}{2}, \quad \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C' \left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}, \quad \frac{-1+4\sqrt{3}}{2} \right)$$

11. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$c_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \frac{1}{2}\,[a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2] =$$

$$= 2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$c_2 = 1 + 1 = 2$

$c_3 = 2 + 1 = 3$

$c_4 = 1 + \dfrac{1}{2} = 1{,}5$

Por tanto, la clasificación es la siguiente:

1.er clasificado, c_3, con 3 puntos

2.º clasificado, c_1, con 2,5 puntos

3.er clasificado, c_2, con 2 puntos

4.º clasificado, c_4, con 1,5 puntos

• Márgenes

— Página 48.

Una matriz triangular y simétrica es, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Salvo la matriz nula, no existe ninguna matriz triangular y antisimétrica.

— Página 52.

$(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ (Falsa)

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (Cierta)

— Página 54.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Luego, $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

— Página 58.

Sí, es cierto. Basta aplicar la propiedad asociativa del producto de matrices.

$A^2 \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot A^2$

— Página 59.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

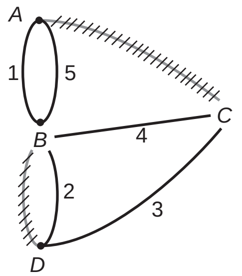
$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1/81 \end{pmatrix}$$

• Cajón de sastre

No es posible. Habría que suprimir al menos dos puentes. Por ejemplo:



$A \overset{1}{-} B \overset{2}{-} D \overset{3}{-} C \overset{4}{-} B \overset{5}{-} A$

Unidad

3 Determinantes

• Actividades

1. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$

2. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 5 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x+3) - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

3. *a*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 90 - 20 = 64$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 30 = 6$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 54 - 48 = 18$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 24 - 24 - 18 = 0$

4. *a*) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 2 - x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$

5. $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 3 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 3$

6. • $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = -5 \quad A_{12} = -6$
$\quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 0$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \ ...$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \\ -15 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

- $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -14 & 19 & 8 \\ 18 & -30 & 12 \\ 16 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Adj}(P))^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(P^t) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} M_{11} = d \\ M_{12} = -c \\ M_{21} = -b \\ M_{22} = a \end{matrix}\right\} \quad \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} M^t_{11} = d \\ M^t_{12} = -b \\ M^t_{21} = -c \\ M^t_{22} = a \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(M) = \text{Adj}(M^t) \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = c$$

En consecuencia, las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ siendo $a, b, d \in \mathbb{R}$, cumplen que $\text{Adj}(M) = \text{Adj}(M^t)$.

9. En ambos casos de trata de determinantes de matrices triangulares y, por consiguiente, el valor de su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 12 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 12 = -96$

10. $|A| = 3 \qquad |B| = 2$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$

$|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 3^3 = 27$

11. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $3M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$

$|M| = 2 - 20 = -18$, $|3M| = 18 - 180 = -162$

luego:

$$|3M| = -162 \neq 3|M| = -54$$

12. $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A^t| \cdot |B|$, ya que

$$|A| = |A^t| \text{ y } |B^t| = |B|$$

13. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad |C| = -4 + 24 - 20 - 4 = -4$

- $|C^t| = |C| = -4$
- $|3C| = 3^3 \cdot |C| = 27 \cdot (-4) = -108$
- $|4C \cdot C^t| = |4C| \cdot |C^t| = 4^3|C| \cdot |C| = 4^3(|C|)^2 =$
  $= 64 \cdot (-4)^2 = 1\,024$

14. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = 7$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ -3f & -3g & -3h \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$

b) $\begin{vmatrix} c & d & e \\ a & b & c \\ f & g & h \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = -7$

15. $\begin{vmatrix} a & d & a+pd \\ b & e & b+pe \\ c & f & c+pf \end{vmatrix} \underset{c'_3 = c_3 - pc_2}{=} \begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix} = 0$, porque

$c_1 = c'_3$

16. *a*) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

Desarrollando por la 2.ª fila

$= -[12 - 24 - 36 - 8] = 56$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \underset{c'_3 = c_3 - 2c_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 2 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$

Desarrollando por la 2.ª fila

$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -32 + 50 + 160 + 28 = 206$

17. $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1-x & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} =$

$F'_2 = F_2 - F_1$

$F'_3 = F_3 - F_1$

$F'_4 = F_4 - F_1$

$= x \begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} =$

Desarrollando por la 1.ª columna

$= x\left(-1(1-x)^3 + x^3\right) = x\,(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ x_4 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

18. Si $|M| = -5 \Rightarrow |M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = \dfrac{1}{5}$

19. • $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $|B| = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

• $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $|C| = 0 \Rightarrow \nexists C^{-1}$

20. • $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 36 - 16 - 24 =$

$= -72 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,(A) = 3$

• $|5| \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,(B) = 2$

• $|-1| \neq 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0$

Luego $\text{rg}\,(C) = 2$

• $|-2| \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,(D) = 3$

21. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

a) $\text{rg}\,(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$

$|A| = a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Por tanto, $\text{rg}\,(A) = 2$ si, y sólo si, $a = \pm 1$.

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$ y $a \neq 1$.

De esta manera, $\text{rg}\,(A) = 3$.

• Ejercicios

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{F'_1 = (-1)F_1}{=} -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{F'_2 = (-1)F_2}{=} \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$\underset{F'_3 = (-1)F_3}{=} -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = -10$

2. $\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$F'_2 = F_2 - 2F_1$

$F'_3 = F_3 - F_1$

$= 3a + 1$

Entonces, $3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1/3$

3. $\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{2}{3} \begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{2}{3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$

$F'_1 = F_1 - F_3$

$= \dfrac{2}{3} \cdot 1 = \dfrac{2}{3}$

4. $\begin{vmatrix} x-3 & 5 & -1 \\ 0 & x+2 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)\,(x+2)\,(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

5. Si $A^2 = A \Rightarrow A \cdot A = A \Rightarrow |A \cdot A| = |A| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \cdot |A| = |A| \Rightarrow |A| = 1$, puesto que $|A| \neq 0$

6. *a*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ -3f & -3g & -3h \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} =$

$= (-3) \cdot 7 = -21$

b) $\begin{vmatrix} c & d & e \\ a & b & c \\ f & g & h \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = -7$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f+2a & g+2b & h+2c \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = 7$

$F'_3 = F_3 - 2F_1$

7. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$

Por tanto, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \lambda \neq 1,\ \lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$

Para $\lambda = 0$ sí existe la matriz inversa A^{-1}.

$|A| = -1 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$ y $m \neq 1$

Luego, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow m \neq 0$ y $m \neq 1$

Para $m = -1$ sí existe A^{-1}.

$|A| = 4 \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\nexists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & k-4 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$

$F'_2 = F_2 - F_1$

$F'_3 = F_3 - F_1$

$= -3k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3$

Entonces, no existe la matriz inversa A^{-1} si, y sólo si, $k = 3$.

10. *a*) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=}$

$C'_2 = C_2 - C_1$

$C'_3 = C_3 - C_1$

$C'_4 = C_4 - C_1$

$$= \begin{vmatrix} -1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$F'_3 = F_3 + F_1$

$$= \begin{vmatrix} -1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ -x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x-1 & x+1 & x+1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por la 4.ª columna

$$= -(x+1) \cdot \begin{vmatrix} -x & -1-x & 0 \\ x & 0 & -1-x \\ x-1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} =$$

$F'_1 = F_1 + F_2$

$$= -(x+1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1-x \\ x & 1+x & -1-x \\ x-1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por la 1.ª fila

$$= (x+1)^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1+x \\ x-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -(x+1)^3 (x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ (triple) y $x_2 = 1$.

b) $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$C'_1 = C_1 + C_4$
$C'_2 = C_2 + C_4$
$C'_3 = C_3 + C_4$

$$= \begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2+x & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2+x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por la 4.ª fila

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 \\ 2 & 2+x & 2 \\ 2 & 2 & 2+x \end{vmatrix} =$$

$C'_1 = C'_1 - C'_3$
$C'_2 = C'_2 - C'_3$

$$= -\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & x & 2 \\ -x & -x & 2+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & -x & x+4 \end{vmatrix} =$$

$F'_3 = F_3 + F_1$

$$= -x \begin{vmatrix} x & 2 \\ -x & x+4 \end{vmatrix} = -x^2 (6+x) = 0 \Rightarrow$$

Desarrollando por la 4.ª columna

$\Rightarrow x_1 = 0$ (doble), $x_2 = -6$.

11. $(5A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Sea $M = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$(5A^t) \cdot (5A^t)^{-1} = (5A^t) \cdot M \Rightarrow I = (5A^t) \cdot M \Rightarrow$

$\Rightarrow (5A^t) = M^{-1}$

Entonces,

$M_{11} = 2$; $M_{12} = -5$; $M_{21} = 1$; $M_{22} = -3$

$\text{Adj}\,(M) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad |M| = -1$

Por tanto,

$$(5A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2/5 & 1 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2/5 & -1/5 \\ 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

12. $(I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Sea $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Entonces:

$(I + 2A)^{-1} = P \Rightarrow (I + 2A) \cdot (I + 2A)^{-1} =$

$= (I + 2A) \cdot P \Rightarrow I = (I + 2A) \cdot P \Rightarrow (I + 2A) = P^{-1}$

$P_{11} = 5$; $P_{12} = -4$; $P_{21} = -2$; $P_{22} = -1$

$\text{Adj}\,(P) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5/13 & 4/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix}$,

$|P| = -13$

Luego,

$$(I + 2A) = \begin{pmatrix} -5/13 & 4/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} -5/13 & 4/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} -18/13 & 4/13 \\ 2/13 & -12/13 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -9/13 & 2/13 \\ 1/13 & -6/13 \end{pmatrix}$$

13. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = -3$, $|B| = 1$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $|A + B| = 3 - 15 = -12$

$|A + B| \neq |A| + |B|$

$-12 \neq -3 + 1$

14. $XA - 2B + 3C = D$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$XA = \underbrace{D + 2B - 3C}_{\substack{\parallel \\ T}} \Rightarrow XA = T \Rightarrow$

$\Rightarrow (X \cdot A) \cdot A^{-1} = T \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = T \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = TA^{-1}$

Por tanto,

$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 \\ -7/2 & -21/2 \end{pmatrix}$

15. $|A| = 2$, $|B| = 6$

a) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12$

b) $|2B| = 2^3 \cdot |B| = 8 \cdot 6 = 48$

c) $|3AB| = 3^3 \cdot |A| \cdot |B| = 27 \cdot 2 \cdot 6 = 324$

d) $|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$

16. • $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $|M| = 6$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

• $N = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$, $|N| = 0$

$\nexists N^{-1}$

• $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $|P| = 3$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & -8/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

• $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|Q| = 1$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. *a*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & -4 \\ -4 & 9 & -1 \end{vmatrix}$

A la 2.ª columna se le ha restado dos veces la 1.ª columna:

$C'_2 = C_2 - 2C_1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

A la 3.ª fila se le ha restado la 1.ª fila:

$F'_3 = F_3 - F_1$

18. *a*) $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$

Verdadera, porque las dos filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

Falsa, porque al intercambiar las dos columnas cambia el signo del valor del determinante. Es decir:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Falsa. (Basta resolverlo.)

d) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Verdadera, porque al multiplicar una fila por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

19. •
$$\begin{vmatrix}4&1&3\\2&1&0\\0&2&-1\end{vmatrix} \underset{C_2'=C_2+2C_3}{=} \begin{vmatrix}4&7&3\\2&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la 3.ª fila}}}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix}4&7\\2&1\end{vmatrix} = 10$$

•
$$\begin{vmatrix}3&0&5\\-2&2&4\\1&1&1\end{vmatrix} \underset{\substack{C_1'=C_1-C_3\\ C_2'=C_2-C_3}}{=} \begin{vmatrix}-2&-5&5\\-6&-2&4\\0&0&1\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la 3.ª fila}}}{=} \begin{vmatrix}-2&-5\\-6&-2\end{vmatrix} = -26$$

•
$$\begin{vmatrix}3&2&3&1\\3&-2&8&5\\2&1&3&1\\4&5&4&-3\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2'=F_2-5F_1\\ F_3'=F_3-F_1\\ F_4'=F_4+3F_1}}{=} \begin{vmatrix}3&2&3&1\\-12&8&7&0\\-1&-1&0&0\\13&11&13&0\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando}\\ \text{por la 4.ª}\\ \text{columna}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}-12&8&7\\-1&-1&0\\13&11&13\end{vmatrix} \underset{C_1'=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix}-19&27&7\\-1&0&0\\0&11&13\end{vmatrix} \underset{C_2'=C_2-C_1}{=}$$

$$\underset{\text{Desarrollando por la 2.ª fila}}{=} \begin{vmatrix}-19&27&7\\-1&0&0\\0&11&13\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}27&7\\11&13\end{vmatrix} = 274$$

•
$$\begin{vmatrix}-1&4&2&1\\2&-1&-2&3\\1&-3&0&3\\3&3&0&3\end{vmatrix} \underset{\substack{C_2'=C_2-C_1\\ C_4'=C_4-C_1}}{=} \begin{vmatrix}-1&5&2&2\\2&-3&-2&1\\1&-4&0&2\\3&0&0&0\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando}\\ \text{por la 4.ª fila}}}{=}$$

$$= -3\begin{vmatrix}5&2&2\\-3&-2&1\\-4&0&2\end{vmatrix} \underset{C_1'=C_1+2C_3}{=} -3\begin{vmatrix}9&2&2\\-1&-2&1\\0&0&2\end{vmatrix} = 96$$

20. *a*)
$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\2g&2h&2i\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = 2\cdot 4 = 8$$

b)
$$\begin{vmatrix}g&h&i\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix} \underset{F_1\leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix}a&b&c\\g&h&i\\d&e&f\end{vmatrix} \underset{F_2\leftrightarrow F_3}{=} \begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = 4$$

c)
$$\begin{vmatrix}-a&b&c\\-(a+d)&e+b&f+c\\-g&h&i\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix}a&b&c\\a+d&e+b&f+c\\g&h&i\end{vmatrix} \underset{F_2'=F_2-F_1}{=} -\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = -4$$

d)
$$\begin{vmatrix}-g&-h&-i\\a&b&c\\3g&3h&3i\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}g&h&i\\a&b&c\\g&h&i\end{vmatrix} \underset{F_1=F_3}{=} 0$$

21. $|A| = 2$ y $|B| = -4$

a) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = 2\cdot(-4) = -8$

b) $|3A| = 3^3\cdot|A| = 27\cdot 2 = 54$

c) $|B^t| = |B| = -4$

d) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

e) $|-2B| = (-2)^3\cdot|B| = (-8)\cdot(-4) = 32$

f) $|A^2| = |A\cdot A| = |A|\cdot|A| = 4$

22. $|X| = 1$ y $|Y| = 5$

a) $|X\cdot Y| = |X|\cdot|Y| = 1\cdot 5 = 5$

b) $|5X| = 5^4\cdot|X| = 625\cdot 1 = 625$

c) $|X^t\cdot X| = |X^t|\cdot|X| = |X|\cdot|X| = 1$

d) $|Y^{-1}| = \dfrac{1}{|Y|} = \dfrac{1}{5}$

e) $|Y^4| = |Y|^4 = 5^4 = 625$

f) $|Y^{-1}\cdot X\cdot Y| = |Y^{-1}|\cdot|X|\cdot|Y| =$
$= \dfrac{1}{\cancel{|Y|}}\cdot|X|\cdot\cancel{|Y|} = |X| = 1$

23. *A* es una matriz de orden 3.

a) Verdadero. Es una propiedad de los determinantes.

b) Falso. $|3A| = 3^3\cdot|A| \neq 3\cdot|A|$

c) Verdadero. Si $|A| = 3$ entonces $|A^3| = |A|^3 =$
$= 3^3 = 27$

d) Falso. $|A^t| = |A|$

e) Verdadero. $|-A| = (-1)^3\cdot|A| = -|A|$

f) Verdadero. $|A\cdot A^t| = |A|\cdot|A^t| = |A|\cdot|A| =$
$= (|A|)^2 \geqslant 0$

g) Falso. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

h) Verdadero. Si $A \cdot A^{-1} = I$, entonces $|A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1$

• Problemas

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1' = C_1 - C_3 \\ C_2' = C_2 - C_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando} \\ \text{la 1.ª fila}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b+c-a-c) =$$

$$= (a-c)(b-c)(b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. Si $A \cdot B = A \cdot C$ y $|A| \neq 0$, entonces existe A^{-1}. Multiplicando a la izquierda por A^{-1}, se tiene:

$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow I \cdot B = I \cdot C \Rightarrow B = C$

3. $\exists M^{-1} \Leftrightarrow |M| \neq 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 4\alpha - 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 3$.

La matriz M no tiene inversa si $\alpha = 1$ o $\alpha = 3$.

Para $\alpha = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |M| = 1$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = M + I$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por otra parte:

$|M| = 0 \Rightarrow \nexists M^{-1}$. Luego M *no* es invertible.

$|N| = 1 \Rightarrow \exists N^{-1}$. Luego N *sí* es invertible.

5. $$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|T| = 6 + a - 3 + 2 - 3a - 3 = -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Discusión:

- Si $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(T) = 3$
- Si $a = 1$, como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(T) = 2$

6. $$P = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \qquad P_{4 \times 4} \qquad |P| = 3$$

a) $|P^{-1}| = \dfrac{1}{|P|} = \dfrac{1}{3}$

b) $|\alpha \cdot P| = \alpha^4 \cdot |P| = 3\alpha^4$

c) $$T = \begin{pmatrix} 2F_1 - F_4 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$|T| = 7 \begin{vmatrix} 2F_1 - F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{=} -7 \begin{vmatrix} 2F_1 - F_4 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} \underset{f_1' = f_1 + f_4}{=} -7 \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = -14\,|P| = -14 \cdot 3 = -42$$

7. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & a \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, \; X^t = \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + az & 2y + ax \\ -x + az & -y + ax \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - x \\ ax + ay & az + ax \end{pmatrix}$$

Si $A^t \cdot X = A \cdot X^t \Rightarrow \begin{cases} 2x + az = 2x - y \\ 2y + ax = 2z - x \\ -x + az = ax + ay \\ -y + ax = az + ax \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} az = -y \\ 2y + ax = 2z - x \\ -x + az = ax + ay \to -x - y = a(x + y) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -1 \to 2y - x = 2z - x \to y = z$

Luego:

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, si $x \neq -y$ y $a = -1$

$X = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$, si $a \neq -1$

8. $|A| = 2$ y $|B| = 3$

$$|B^{-1} \cdot A \cdot B| = \underbrace{|B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B|}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = |A| = 2$$

9.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la 1.ª columna}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Por tanto: rg $(A) = 3$.

10. $2A^2 = A \Rightarrow |2A^2| = |A| \Rightarrow 2^2 \cdot |A^2| = |A| \Rightarrow$

$\Rightarrow 4|A| \cdot |A| = |A| \Rightarrow 4|A| \cdot |A| - |A| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|\,(4|A| - 1) = 0 \Rightarrow |A| = 0$ o $|A| = 1/4$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 1 & 2x + 3 \\ -x + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A \cdot B| = (2x + 1) - (-x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 3x - 2$

Entonces $\exists (A \cdot B)^{-1} \Leftrightarrow |A \cdot B| \neq 0$

$2x^2 + 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ y $x \neq 1\backslash 2$.

12.
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 + a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1' = F_1 - F_4 \\ F_2' = F_2 - F_4 \\ F_3' = F_3 - F_4}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \underset{F_1'' = F_1' - aF_4'}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -a & -a & b - a + ab \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \underset{\text{Desarrollando por la 1.ª columna}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} -a & -a & b - a + ab \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{vmatrix} =$$

$= -[(b - a + ab)(-ab) + ab^2 - a^2b] = a^2b^2$

Por otro lado,

$\begin{vmatrix} 1 + a & 1 \\ 1 & 1 - a \end{vmatrix} = -a^2$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 + b & 1 \\ 1 & 1 - b \end{vmatrix} = -b^2$

Luego:

$|B| = \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2$

En efecto, pues $|A| = |B|$

13. $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2 + 2 & 2b \\ 0 & 2b & 2b^2 + 1 \end{pmatrix}$

$|M| = 2 \neq 0, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Por tanto, rg $(M) = 3$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $N = (1 \quad 1 \quad 2)$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$

b) $A^k \cdot X = B \cdot C$

$|A^k| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, (A^k)^{-1} = A^{-k}$

De tal forma que:

$A^{-k} \cdot (A^k \cdot X) = A^{-k}(B \cdot C) \Rightarrow$

$\Rightarrow I \cdot X = A^{-k} \cdot B \cdot C \Rightarrow X = A^{-k} \cdot B \cdot C$

Se comprueba que:

$A^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 2) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

15. $M = (C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ $\quad M_{3\times 3} \quad |M| = 2$

a) $|A| = |-C_2 \quad C_3 + C_2 \quad 3C_1| =$

$= -3\,|C_2 \quad C_3 + C_2 \quad C_1| = -3\,|C_2 \quad C_3 \quad C_1| =$

$= 3\,|C_1 \quad C_3 \quad C_2| = -3\,|C_1 \quad C_2 \quad C_3| =$

$= -3|M| = -3 \cdot 2 = -6$

Entonces:

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-6} = -\dfrac{1}{6}$, puesto que $\exists A^{-1}$ al ser $|A| \neq 0$.

b) $|B| = |C_1 + C_2 \quad C_2 + C_3 \quad C_3 - C_1| =$

$C_1' = C_1 + C_2$

$C_2' = C_2 + C_3$

$C_3' = C_3 - C_1$

$= |C_1 \quad C_2 \quad C_3| = |M| = 2$

Como $|B| \neq 0$ entonces existe B^{-1}.

16. $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Desarrollando por la 1.ª columna

Desarrollando por la 1.ª columna

$|A| = 2 \quad A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$

$A_{4\times 4}$

a) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

b) $|3A| = 3^4 \cdot |A| = 81 \cdot 2 = 162$

c) $|T| = \begin{vmatrix} 2F_1 + F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2F_1 + F_2 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} =$

$f_1' = f_1 - f_2$

$= -3 \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} =$

$f_4' = f_4 - f_1$

$= 6 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = 6\,|A| = 6 \cdot 2 = 12$

$f_3 \leftrightarrow f_4$

17. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada.

a) Si $A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c$

Luego, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a+d \\ -a-b & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ -a+d=-3 \\ \cancel{-a-b=3} \\ \cancel{a-d=3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3-a \\ d=-3+a \end{cases}$$

c) Si $|A| = 9 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & -3-a \\ -3-a & -3+a \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9-6a = 9 \Rightarrow a = -2$

Por tanto, $b = -1$ y $d = -5$, y la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$

a) $|A| = -b^2 + 4b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$ y $b = 3$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1$ y $b \neq 3$

b) Si $b = 2$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Se comprueba que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

19. *a*) $|A| = \begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} a & a & a & 2a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ 2a & a & a & 2a \end{vmatrix} =$

$$\underset{\substack{F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - 2F_1}}{=} - \begin{vmatrix} a & a & a & 2a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & -a & -a & -2a \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la 1.ª columna}}}{=} -a \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & -a \\ -a & -a & -2a \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F''_3 = F'_3 + F'_1}{=} -a \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & -3a \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la 1.ª columna}}}{=} -a^2 \begin{vmatrix} a & -a \\ -a & -3a \end{vmatrix} = 4a^4$$

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow 4a^4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

Para $a = 1$ sí existe la matriz inversa A^{-1} y se comprueba que es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 4$

20. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \to b(a+d)=0 \to b=0 \text{ ó } a+d=0 \\ ac+cd=0 \to c(a+d)=0 \to c=0 \text{ ó } a+d=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$$

- $|A| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1$

Entonces:

— Si $c = 0$, $b = 0$, $\begin{cases} a = 1, d = 1 \\ a = -1, d = -1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

— Si $c = 0$, $b \neq 0$, $\begin{cases} a = +1, d = +1 \\ a = -1, d = -1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b \neq 0.$

— Si $c \neq 0$, $b = 0$, $\begin{cases} a = 1, d = 1 \\ a = -1, d = -1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \neq 0$

En resumen:

$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$

21. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{vmatrix} = a + 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & b \end{vmatrix} = -b - 3$$

Estudio:

- Si $a \neq -3$ y $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rg}\,(C) = 3$
- Si $b \neq -3$ y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rg}\,(C) = 3$
- Si $a = -3$ y $b = -3 \Rightarrow \text{rg}\,(C) = 2$

22. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 3y + 6 - 5x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 6 = 0$

$P_1(0, -2) \rightarrow 0 + 6 - 6 = 0$

$P_2(3, 5) \rightarrow 21 - 15 - 6 = 0$

Luego, efectivamente, se trata de una recta que pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(3, 5)$.

En general,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= y_1 x + x_2 y + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y - y_2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$

23. *a*) $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

Desarrollando por por la 4.ª fila

$= -cd \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = abcd$

Desarrollando por la 1.ª columna

b) $\exists P^{-1} \Leftrightarrow |P| \neq 0 \Rightarrow abcd \neq 0$.

Es decir, existirá la matriz inversa P^{-1} si, y sólo si, a, b, c y d son no nulos.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

24. $A = \begin{pmatrix} 5 & a+4 & -4 & -3 \\ -2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12a;\ \begin{vmatrix} a+4 & -4 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= (a + 4)\,(3a + 2)$

Entonces: $\text{rg}\,(A) = 3,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$, ya que los dos determinantes hallados no se anulan para ningún valor común.

25. $M = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 2 \\ 0 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$

$|M| = -(k(k-2) - 2(k-1)(k-2) - k =$

$= -k^2 + 2k - 2k^2 + 6k - 4 - k =$

$= -3k^2 + 7k - 4 = 0 \Rightarrow 3k^2 - 7k + 4 = 0$

$$k = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$\exists M^{-1} \Leftrightarrow k \neq 1$ y $k \neq \dfrac{4}{3}$

Para $k = 2$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Márgenes

— Página 74.

Ninguno, porque las matrices no son cuadradas.

— Página 76.

- $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -32 \Rightarrow 3x = -32 \Rightarrow x = -\frac{32}{3}$$

- El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

— Página 79.

- $|A + B| \neq |A| + |B|$. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A + B| = 4$, $|A| = 1$, $|B| = 1$

$4 \neq 1 + 1$

- $$\begin{vmatrix} 2 & b & a+4 \\ 3 & d & c+6 \\ 2 & 2f & 2e+4 \end{vmatrix} \underset{C'_3 = C_3 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & b & a \\ 3 & d & c \\ 2 & 2f & 2e \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b & a \\ 3 & d & c \\ 1 & f & e \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 3 & c & d \\ 1 & e & f \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 = -12$$

— Página 81.

a) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{F'_2 = 2F_2 + 3F_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+3a & 2e+3b & 2f+3c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 4 = 8$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{F'_2 = F_2 + \frac{3}{2}F_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d + \frac{3}{2}a & e + \frac{3}{2}b & f + \frac{3}{2}c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$= 4$

— Página 84.

Si $|P^{-1}| = 6$. Entonces $|P| = \frac{1}{|P^{-1}|} = \frac{1}{6}$

Una posible expresión con todos los elementos positivos puede ser:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/6 & 1 \end{pmatrix}$$

• Cajón de sastre

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

A cada columna se le resta la 1.ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+a^2+ab & c^2+a^2+ac & d^2+a^2+ad \end{vmatrix} =$$

A cada columna se le resta la 1.ª

$= (b-a)\,(c-a)\,(d-a) \cdot$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+a^2+ab & (c-b)(a+b+c) & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)\,(c-a)\,(d-a) \cdot$

$$\cdot \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a+b+c) & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b) \cdot$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b)\,(d-c)$

Unidad

4 Sistemas de ecuaciones

• Actividades

1. *a*) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 2x + z = 3 \\ x + z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ y - z = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. *a*) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

Luego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = -3 \neq 0$

$AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Luego, $X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. *a*) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -x + 3y - z = -8 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \quad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

De la primera ecuación, $z = 7$

Luego $(x, y, z) = (-5, -2, 7)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad |M| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{7}{16}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{5}{16}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{13}{16}$$

5. Un sistema, que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, no es de Cramer si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo. Así,

$$\left.\begin{array}{r}5x - 2y = 3\\ ax + y = 1\end{array}\right\} \quad |M| = \begin{vmatrix}5 & -2\\ a & 1\end{vmatrix} = 5 + 2a = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -5/2$

En consecuencia, para $a = -1$ el sistema es de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r}5x - 2y = 3\\ -x + y = 1\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix}5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{3} = \frac{8}{3}$$

$$(x, y) = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

6. $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}5x + y = 0\\ x + 5y = 2\end{array}\right\}$

$$|M| = \begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix} = 24$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}5 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

7. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x + y - z = 1\\ 3x - y - z = 1\\ 2x - z = 1\end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = 0$$

rg $(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -4 \neq 0$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$. Por tanto, rg $(A^*) = 2$

Como rg (A) = rg $(A^*) = 2 < 3$. el sistema es compatible indeterminado.

Eliminando la tercera ecuación que no interviene en el determinante de orden 2 no nulo, resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + y - z = 1\\ 3x - y - z = 1\end{array}\right\} \quad \text{Haciendo } z = \lambda$$

$$\left.\begin{array}{r}x + y = 1 + \lambda\\ 3x - y = 1 + \lambda\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1+\lambda & 1\\ 1+\lambda & -1\end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1 - \lambda - 1 - \lambda}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1+\lambda\\ 3 & 1+\lambda\end{vmatrix}}{-4} = \frac{1 + \lambda - 3 - 3\lambda}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$$

Luego,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda, \lambda\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

8. $\left.\begin{array}{r}3x - 2y + z = 5\\ 2x - 3y + z = 4\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3x - 2y + z = 5\\ 2x - 3y + z = 4\\ 5y - z = -2\end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & 5 & -2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Como rg (A) = rg $(A^*) = 2 < 3$, entonces el sistema es compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones dependiente de un parámetro.

Eliminando la tercera ecuación, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}3x - 2y + z = 5\\ 2x - 3y + z = 4\end{array}\right\} \underset{z = \lambda}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{r}3x - 2y = 5 - \lambda\\ 2x - 3y = 4 - \lambda\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}5-\lambda & -2\\ 4-\lambda & -3\end{vmatrix}}{-5} = \frac{-7 + \lambda}{-5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-\lambda \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2-\lambda}{-5} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda$$

Luego,

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda, \lambda\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 3y + z &= 4 \\ 5y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Sólo se modifica la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Entonces, rg $(A) = 2$ y rg $(A^*) = 3$, y el sistema es incompatible.

9. *(Errata en el libro. La tercera ecuación es $x + y = 0$.)*

$$\left.\begin{aligned} 2x + my &= 1 \\ x - 3y &= m \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & m \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M^*$$

Comenzamos con el determinante de la matriz ampliada que es de orden 3,

$|M^*| = m^2 - 2m + 4$

$$m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Luego $|M^*| \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, por tanto, rg $(M^*) = 3$. Como, además, rg $(M) \leqslant 2$ ya que M es de orden 2×3. El sistema es incompatible para todo valor de m.

10. $\left.\begin{aligned} 2kx - y &= 2 \\ 3x + y &= 1 \\ 6x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{cc|c} 2k & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{array}\right) = M^*$

$|M^*| = -4k - 6$

Si $-4k - 6 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{3}{2}$

Para $k = -\dfrac{3}{2}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

Entonces,

- Si $k \neq -\dfrac{3}{2}$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $k \neq -\dfrac{3}{2}$: rg $(M) = 1$ y rg $(M^*) = 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

  En resumen, para todo valor de k el sistema es incompatible y carece, por tanto, de solución. No existe, pues, ningún valor de k para que el sistema sea compatible.

11. $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + ky + z &= 8 \\ kx + y + kz &= 10 \end{aligned}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 & 8 \\ k & 1 & k & 10 \end{array}\right) = M^*$

En este caso la matriz de coeficientes, M, es cuadrada.

$|M| = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 8 \\ k & 1 & 10 \end{vmatrix} = -2k^2 + 2k + 4$$

$-2k^2 + 2k + 4 = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Discusión

- Si $k \neq -1$ y $k \neq 2$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $k = -1$: rg $(M) = 1$ y rg $(M^*) = 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $k = 2$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) < 3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

12. *a*) $\left.\begin{aligned} x + y - \lambda z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x + \lambda y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{array}\right) = M^*$

$|M| = -2 + 2\lambda$

Si $-2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Por tanto,

- Si $\lambda \neq 1$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $\lambda = 1$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

b) Resolver el sistema para $\lambda \neq 1$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix}}{-2 + 2\lambda} = \frac{-2 + 2\lambda}{-2 + 2\lambda} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2 + 2\lambda} = \frac{2}{-2 + 2\lambda} = \frac{1}{-1 + \lambda}$$

De la segunda ecuación, se obtiene:

$$z = y = \frac{1}{-1 + \lambda}$$

Luego,

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{-1 + \lambda}, \frac{1}{-1 + \lambda}\right) \quad \lambda \neq 1$$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - \lambda F_1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \underset{\text{Desarrollando por la primera columna}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 \cdot (-3 - \lambda)$$

a) Entonces, $\lambda = -3$, $\lambda = 1$.

- Si $\lambda = 1$, entonces rg $(M) = 1 =$ rg (M^*) y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\lambda = -3$, entonces rg $(M) = 3 =$ rg (M^*) y el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3$, entonces rg $(M) = 4 =$ = rg (M^*) y el sistema es compatible determinado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{array}\right) \quad F_2 \leftrightarrow F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{array}\right) \underset{F'_4 = F_4 + F_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \underset{F'_4 = F_4 + F_3}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ -4y &= 4 \\ -4z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x + y + z = 1\}$ Si $z = t$, $y = \mu$

Solución: $x = 1 - \mu - t$, $y = \mu$, $z = t$, $\forall \mu, t \in \mathbb{R}$

14. *a*) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$|M| = -8 \neq 0 \Rightarrow$ rg $(M) = 3$

Por consiguiente el sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x + y + 6z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$|M| = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Así, rg $(M) = 2 < 3$ y el sistema tiene infinitas soluciones dependiente de un parámetro.

Eliminando la tercera ecuación, nos queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 2y &= -5z \\ x + y &= z \end{aligned}\right\}$$

Haciendo $z = \lambda$,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5\lambda & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}}{1} = -7\lambda, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{1} = 8\lambda$$

Por tanto,

$(x + y + z) = (-7\lambda, 8\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

15. $\left.\begin{aligned} -x - y + 3z &= 0 \\ 2x + az &= 0 \\ 2y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) $|M| = 20 + 2a$

Si $20 + 2a = 0 \Rightarrow a = -10$

Discusión:

- Si $a \neq -10$: rg $(M) = 3 \Rightarrow$ S.C.D. (solución trivial)
- Si $a = -10$: rg $(M) = 2 < 3 \Rightarrow$ S.C.I. (solución distinta de la trivial)

b) Resolución para $a = -10$.

Eliminamos la primera ecuación puesto que, por ejemplo,

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Así:

$\left.\begin{aligned} 2x - 10z &= 0 \\ 2y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Haciendo z = λ, entonces $x = 5\lambda$, y = -2λ,

$(x + y + z) = (5\lambda, -2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

• Ejercicios

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ x + 8y &= 0 \end{aligned}\right\}$

2. *a*) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + z &= 2 \\ -x + y - z &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ 2x + z &= 3 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + z &= 2 \\ -3x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I}X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$

Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$ entonces

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3/2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -11/6 & -1/3 \end{pmatrix}$

4. $A\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 + x \\ -1 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + 3y + 2 \\ x + 4y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 3y + 2 &= 21 \\ x + 4y + 1 &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 3y &= 19 \\ x + 4y &= 23 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 7 \end{aligned}$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

adj $(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, (adj $(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$,

$|A| = 10$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

a) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$

Así,

$X = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

b) $XA + B = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow$

$\Rightarrow XAA^{-1} = (C - B)A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X\underbrace{AA^{-1}}_{I} = (C - B)A^{-1} \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -13/10 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) $AX + B = X \Rightarrow AX - X = -B \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - I)X = -B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A - I)^{-1}(A - I)}_{I}X = (A - I)^{-1}(-B) \Rightarrow$

$\Rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot (-B)$

Ahora bien,

$$A - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A - I| = 4$

$\text{adj}\,(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$

$(\text{adj}\,(A - I))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

d) $XA + C = X \Rightarrow XA - X = -C \Rightarrow$

$\Rightarrow X(A - I) = -C \Rightarrow$

$\Rightarrow X\underbrace{(A - I)(A - I)^{-1}}_{I} = (-C)(A - I)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = (-C)(A - I)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 9/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$AX = BX + C \Rightarrow AX - BX = C \Rightarrow (A - B)X = C \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A - B)^{-1}(A - B)}_{I}X =$

$= (A - B)^{-1}C \Rightarrow X = (A - B)^{-1}C$

De esta manera habrá que calcular $(A - B)^{-1}$.

Así:

$(A - B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, |A - B| = -1$

$\text{adj}\,(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, (\text{adj}\,(A - B))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$A + BX = I \Rightarrow BX = (I - A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{B^{-1}B}_{I}X = B^{-1}(I - A) \Rightarrow X = B^{-1}(I - A)$

$|B| = 1, B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $x = -3, y = 4, z = -5$

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/10 & 1 & 0 \\ 5/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|T| = |A^5| = 1$

De la ecuación $A^5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ se deduce que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

$$A^{-5} = (A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (compruébese)}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 20,\ y = -5,\ z = -9$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y se trata de resolver el sistema homogéneo:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ o bien } AX = O.$$

Como $|A| = 0$, entonces $\nexists\, A^{-1}$ y el sistema tendrá infinitas soluciones (solución distinta de la trivial).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación $x = -y$, y de la tercera ecuación $z = -y$. Sustituyendo en la primera ecuación resulta:

$$-y + 2y - y = 0$$

Luego, $x = -\lambda,\ y = \lambda,\ z = -\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$

O de forma equivalente,

$$(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, -\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

11. Dado el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Luego $AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}O \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}O \Rightarrow X = O$

El sistema tiene sólo la solución trivial

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$|A| = -7,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -3/7 \\ -3/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -5,\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - B^{-1} = \begin{pmatrix} 8/7 & -8/35 \\ -3/7 & 3/35 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} - B^{-1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8/7 & -8/35 \\ -3/7 & 3/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{8}{7}x - \frac{8}{35}y = 1 \\ -\frac{3}{7}x + \frac{8}{35}y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -7/5 \\ y = 49/8 \end{array}$$

Se trata, por tanto, de un sistema compatible determinado.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A^2 - 3A| = 10 \neq 0$

Por tanto, el sistema $(A^2 - 3A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es compatible determinado y su solución se halla por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^2 - 3A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2,\ y = -5,\ z = -5$$

14. Hacemos $y = \lambda$, y tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x - (3 + 2a)z = -\lambda \\ x + (3 - a)z = -\lambda \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x + (1 + b)z = 0 \\ (b - 1)x + b(b - 1)z = -\lambda \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Resolvemos por Cramer ambos sistemas:

$$x_1 = \frac{-\lambda(6 + a)}{9}\ ;\ z_1 = \frac{-\lambda}{9}$$

$$x_2 = \frac{\lambda(1 + b)}{b - 1}\ ;\ z_2 = \frac{-\lambda(1 + b)}{b - 1}$$

Igualando: $x_1 = x_2$; $z_1 = z_2$, obtenemos que $a = -6$ y $b = -1$.

15. $$\left.\begin{aligned} 2x + (a - 7)y = 29 - 7a \\ ax - 6y = 5a - 3 \end{aligned}\right\}$$

El sistema será incompatible si el rango de la matriz de coeficientes es distinto del rango de la matriz ampliada.

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a - 7 & 29 - 7a \\ a & -6 & 5a - 3 \end{array}\right) = M^*$$

$$|M| = -12 - a^2 + 7a$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

Entonces:

- Si $a \neq 3$ y $a \neq 4$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = 3$: rg (M) = rg $(M^*) = 1 \Rightarrow$ S.C.I.

  $$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } (M^*) = 1$$
- Si $a = 4$: rg $(M) = 1$ y rg $(M^*) = 2 \Rightarrow$ S.I.

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 17 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } (M^*) = 2$$

  El sistema es incompatible para $a = 4$, y es compatible indeterminado si $a = 3$.

16. *a*) $$\left.\begin{aligned} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -x - 7y - z = -2 \end{aligned}\right\}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & -1 & -2 \end{array}\right) = M^*,\ |M| = -6 \neq 0$$

rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & -2/3 \\ -1/6 & 0 & -1/6 \\ 17/6 & -1 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & -2/3 \\ -1/6 & 0 & -1/6 \\ 17/6 & -1 & 5/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 3 \\ x + z = 1 \\ 4x - y + 5z = 5 \end{aligned}\right\}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right) = M^*,\ |M| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependiente de un parámetro.

Quedándonos con las dos primeras ecuaciones que aportan un determinante no nulo, resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 3 \\ x + z = 1 \end{aligned}\right\}$$

Si $z = \lambda$, $x = 1 - \lambda$ en la segunda ecuación. Finalmente, en la primera ecuación

$$2(1 - \lambda) - y + 3\lambda = 3 \Rightarrow y = -1 + \lambda$$

Luego:

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, -1 + \lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

17. $$\left.\begin{aligned} 2x + ay + z = 2 \\ x + ay = 1 \\ -y + az = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 \end{array}\right) = M^*,$$

El sistema será compatible indeterminado si rg (M) = rg $(M^*) < 3$.

$$|M| = 2a^2 - 1 - a^2 = a^2 - 1$$

- Si $a = 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3$, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Si $a = -1 \Rightarrow$ rg (M) = rg $(M^*) = 2$, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado si $a = -1$ o $a = 1$.

Si nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, que aportan un determinante de orden 2 no nulo, resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2x + ay + z &= 2 \\ x + ay &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Haciendo $y = \lambda$, entonces en la segunda ecuación $x = 1 - a\lambda$.

Despejando z de la primera ecuación, se tiene:

$$2(1 - a\lambda) + a\lambda + z = 2 \Rightarrow z = a\lambda$$

Luego,

$$(x, y, z) = (1 - a\lambda, \lambda, a\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $a = -1$, $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$
- Si $a = 1$, $(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

18. $\left.\begin{aligned} -x + \lambda y + 2z &= \lambda \\ 2x + \lambda y - z &= 2 \\ \lambda x - y + 2z &= \lambda \end{aligned}\right\}$

a) $M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right) = M^*$

$$|M| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3$$

Si $-3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia:

- Si $\lambda \neq -1$, rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $\lambda = -1$, rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Si $\lambda = -1$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones y basta quedarse con las dos primeras ecuaciones que aportan un determinante de orden 2 no nulo. Así,

$$\left.\begin{aligned} -x - y + 2z &= -1 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -x - y &= -1 - 2\lambda \\ 2x - y &= 2 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 - 2\lambda & -1 \\ 2 + \lambda & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 + 2\lambda + 2 + \lambda}{3} = 1 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 - 2\lambda \\ 2 & 2 + \lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2 - \lambda + 2 + 4\lambda}{3} = -\lambda$$

Luego,

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Si $\lambda = 2$, el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\} |M| = -3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - 3 = -27$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo estos valores de x e y, por ejemplo, en la segunda ecuación, se obtiene el valor de z.

$$z = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

Luego,

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

19. $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 3y + z &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

a) Al añadir una ecuación el sistema resultante será incompatible si el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son distintos. Por ejemplo, basta añadir una fila que sea una de las dos filas anteriores, exceptuando el término independiente. Así,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 2 & \boxed{0} \end{array}\right) = M^*$$

$5x - 5y + 2z = 0$

Así, rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3$

b) Basta sumar las dos filas de M^*

$5x - 5y + 2z = 9$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right) = M^*$$

Así, rg $(M) =$ rg $(M^*) = 2 < 3$

20. $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{array}\right\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right) = M^*$$

$|M| = -3a + 24$

$-3a + 24 = 0 \Rightarrow a = 8$

a)
- Si $a \neq 8$; rg $(M) =$ rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 8$; rg $(M) =$ rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

b) Para $a = 8$, podemos utilizar las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 2 - 2\lambda \\ 2x - y = 2 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

$z = \lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & 1 \\ 2 - 3\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - 2\lambda \\ 2 & 2 - 3\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\lambda$$

Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\lambda, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\lambda, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

21. $\left.\begin{array}{r} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array}\right\}$

a) $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) = M^*$

$$\left.\begin{array}{l} |M| = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rg}(M) = 2, \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda$$

$$-2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda(-\lambda + 1) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Discusión:

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b)
- Para $\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} F_1 = F_2 + F_3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} z = \lambda$$

Solución: $x = -\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

- Para $\lambda = 1$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} F_1 = F_3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} z = \lambda$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 1 - \lambda \\ y &= 1 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

Solución: $x = -2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

22. $\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 2x + ay + z &= a \\ -2x - y - az &= -a \end{aligned}\right\}$

a) $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ -2 & -1 & -a & -a \end{array}\right) = M^*$

$|M| = -2a^2 + 4a - 2$

Si $-2a^2 + 4a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Discusión:

- Si $a \neq 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 1 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = M^*$$

b) Para $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones dependiente de dos parámetros, ya que las 3 ecuaciones son iguales y, por tanto, el orden del mayor no nulo es 1. Así:

$2x + y + z = 1$

Haciendo $z = \lambda$, $y = \mu$, $x = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1 - \lambda - \mu}{2}, \mu, \lambda\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

23. $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 4z + w &= 0 \\ x + y - z + w &= 0 \\ x - z + 2w &= 0 \end{aligned}\right\}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Como rg $(M) = 3 < 4$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones dependiente de un parámetro. Haciendo $w = \lambda$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= -\lambda \\ x + y - z &= -\lambda \\ x - z &= -2\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 4 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ -2\lambda & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6\lambda}{-6} = -\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6\lambda}{-6} = -\lambda$$

De la misma ecuación, despejamos z

$z = x + 2\lambda = \lambda$

Por tanto,

$(x, y, z, w) = (-\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• Problemas

1. x = dinero aportado por Pedro.

y = dinero aportado por Juan.

z = dinero aportado por José.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 860 \\ x &= 3(y + z) \\ 2y &= 3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 860 \\ x - 3y - 3z &= 0 \\ 2y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 20$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 860 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{12\,900}{20} = 645$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 860 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{2\,580}{20} = 129$$

De la última ecuación $z = \frac{2}{3} \cdot 129 = 86$

Se deduce, pues, que Pedro aportó 645 €, Juan 129 € y José 86 €.

2. x = número de hombres.

y = número de mujeres.

z = número de niños.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 40 \\ x + y &= 3z \\ y &= x + z + 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 40 \\ x + y - 3z &= 0 \\ -x + y - z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{56}{8} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{184}{8} = 23$$

De la primera ecuación: $z = 40 - 7 - 23 = 10$

En consecuencia, en la reunión habría 7 hombres, 23 mujeres y 10 niños.

3. x = calificación obtenida en el 1.^er^ examen parcial.

y = calificación obtenida en el 2.º examen parcial.

z = calificación obtenida en el examen final.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x + y + z}{3} = 6 \\ &0{,}20x + 0{,}20y + 0{,}60z = 7{,}6 \\ &0{,}10x + 0{,}20y + 0{,}70z = 8{,}3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 18 \\ x + y + 3z &= 38 \\ x + 2y + 7z &= 83 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 1 & 1 \\ 38 & 1 & 3 \\ 83 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 18 & 1 \\ 1 & 38 & 3 \\ 1 & 83 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

De la primera ecuación: $z = 10$

En consecuencia, Luis obtuvo en la primera evaluación las siguientes calificaciones: 3, 5 y 10.

4. Sean:

x = edad actual de la madre.

y = edad actual del hijo mayor.

z = edad actual del hijo menor.

Entonces hace 14 años las edades de la madre y de los dos hijos eran, respectivamente, $x - 14$, $y - 14$, $z - 14$. Luego:

$$x - 14 = 5[(y - 14) + (z - 14)]$$

Dentro de 10 años las edades respectivas serán: $x + 10$, $y + 10$, $z + 10$. Por tanto:

$$x + 10 = (y + 10) + (z + 10)$$

Por otra parte, dentro de m años se cumplirá:

$$y + m = x$$

$$z + m = 42$$

Por consiguiente, el sistema a que da lugar el enunciado es:

$$\left.\begin{aligned} x - 5y - 5z &= -126 \\ x - y - z &= 10 \\ -x + y + m &= 0 \\ z + m &= 42 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 44 \\ y &= 18 \\ z &= 16 \\ m &= 26 \end{aligned}$$

La edad de la madre es de 44 años, siendo 18 y 16 las edades de los hijos.

5. $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 9 - \lambda \\ x + 5y &= 44 - 10\lambda \end{aligned}\right\}$$

Haciendo $z = \lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 - \lambda & 1 \\ 44 - 10\lambda & 5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1 + 5\lambda}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 - \lambda \\ 1 & 44 - 10\lambda \end{vmatrix}}{4} = \frac{44 - 10\lambda - 9 + \lambda}{4} =$$

$$= \frac{35 - 9\lambda}{4}$$

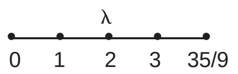
$$(x, y, z) = \left(\frac{1 + 5\lambda}{4}, \frac{35 - 9\lambda}{4}, \lambda\right)$$

Como $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ y, además, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces:

$x = \dfrac{1 + 5\lambda}{4} \geqslant 0$, $y = \dfrac{35 - 9\lambda}{4} \geqslant 0$, $z = \lambda \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$1 + 5\lambda \geqslant 0$, $35 - 9\lambda \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\lambda \geqslant -\dfrac{1}{5}$, $\lambda \leqslant \dfrac{35}{9}$, $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$



Si $\lambda = 0 \Rightarrow x = 1/4,\ y = 35/4,\ z = 0 \leftarrow$ no sirven

Si $\lambda = 1 \Rightarrow x = 3/2,\ y = 17/4,\ z = 1 \leftarrow$ no sirven

Si $\lambda = 2 \Rightarrow x = 11/4,\ y = 2,\ z = 2 \leftarrow$ no sirven

Si $\lambda = 3 \Rightarrow x = 4,\ y = 2,\ z = 3 \leftarrow$ sí, es la única solución.

6. $\left.\begin{array}{r} 0{,}8x + 0{,}3y = m \\ 0{,}2x + 0{,}7y = n \end{array}\right\}$

a) En notación matricial el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$

Habrá, por tanto, 110 000 personas casadas y 40 000 solteras.

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 110\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}$

Dos años más tarde habría 130 000 casadas y 20 000 solteras.

7. Problema resuelto.

8. $\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2bz = b \end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2b & b \end{array}\right) = M^*$

$$M^* = b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3b$$

Si $-3b = 0 \Rightarrow b = 0$

Por tanto,

- Si $b \neq 0$: rg $(M) = 3$ y rg $(M^*) = 4 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $b = 0$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

La resolución si $b = 0$, basta quedarse con las tres primeras ecuaciones que dan lugar a un sistema homogéneo con única solución, la trivial. Es decir:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

9. $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & 3 & 1 & a \end{array}\right) = M^*$

a) $|M| = -a$

Si $-a = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Discusión:

- Si $a \neq 0$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = 0$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ S.C.I.

b) Si $a = 0$, nos quedaremos con las dos primeras ecuaciones que aportan el menor de orden 2 no nulo.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = -\lambda \\ y = \lambda,\ x = -\lambda \end{array}$$

$$(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, -\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

10. $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right) = M^*$

a) $|M| = a^2 + a$

Si $a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ y $a = -1$

Discusión:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = 0$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.I.

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M^*$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $a = -1$: rg $(M) =$ rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ S.C.I.

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M^*$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado dependiente de $3 - 2 = 1$ parámetro.

Las dos primeras ecuaciones aportan el determinante no nulo.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Haciendo en la primera ecuación $y = \lambda$, resulta $x = 2 + \lambda$.

Y, finalmente, de la tercera ecuación se despeja z

$$z = 1$$

Luego,

$$(x, y, z) = (2 + \lambda, \lambda, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad |M| = 2^2 + 2 = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

De la segunda ecuación $z = -\frac{1}{2}$

11. $\left.\begin{array}{r} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{array}\right) = M^*$

a) $|M| = -a^2 + 2a - 1$

Si $-a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Discusión:

- Si $a \neq 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ S.C.I.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3' = F_3 - F_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) =$

$\underset{F_3'' = F_3' - 2F_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \quad z = \lambda$$

Solución: $(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

12. $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (a - 1)x - y + z = a \\ x + (a - 1)y + z = 0 \end{array}\right\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a - 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a - 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = M^*$$

a) $|M| = a(a - 1)$

Si $a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ y $a = 1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = 0$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.I.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $a = 1$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ S.C.I.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) Para $a = 0$ el sistema es incompatible. No procede su resolución.

c) Para $a = 3$ el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right\} \quad |M| = 3(3 - 1) = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{6} = 0$$

$z = 1 - 0 = 1.$

Luego $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

13. $\left.\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x + (a-1)z &= 0 \\ x + (a-1)y + az &= a \end{aligned}\right\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right) = M^*$$

$|M| = a - 2$

Discusión:

- Si $a \neq 2$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 2$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Resolución si $a \neq 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{a-1}{a-2}$$

$$z = \frac{-1}{a-2}$$

14. $\left.\begin{aligned} x - 3y - 2z &= -1 \\ 5x - 2y + - z &= 3 - a \\ 4x - y + az &= 3 \end{aligned}\right\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 3-a \\ 4 & -1 & a & 3 \end{array}\right) = M^*$$

$|M| = 13a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5/13$

Discusión:

- Si $a \neq -5/13$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $a = -5/13$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ S.I.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 5 & -2 & 34/13 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Resolución para $a = 1$

$|M| = 18$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{18} = 0$$

$$z = \frac{7}{9}$$

Así,

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{9}, 0, \frac{7}{9}\right)$$

15. $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 3 \\ 2x - 3y + az &= b \end{aligned}\right\}$ $\quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a & b \end{array}\right) = M^*$

a) $M = -5a + 44$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & b \end{vmatrix} = -5b + 25$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces rg $(M) \geqslant 2$. Por tanto, para que el sistema tenga infinitas soluciones, se ha de verificar que rg (M) = rg (M^*) $= 2 < 3$.

Así,

rg $(M) = 2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow -5a + 44 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ a = \dfrac{44}{5}$

rg $(M^*) = 2 \Rightarrow |M| = 0$ y $-5b + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ a = \dfrac{44}{5}$ y $b = 5$

En resumen, si $a = \dfrac{44}{5}$ y $b = 5$ el sistema será compatible indeterminado dependiendo de un parámetro.

b) Las dos primeras ecuaciones aportan un determinante no nulo porque, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Además, evitamos los parámetros.

$$\left.\begin{array}{r}3x + 2y - 5z = 1\\ 4x + y - 2z = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x + 2y = 1 + 5z\\ 4x + y = 3 + 2z\end{array}\right\}$$

Haciendo $z = \lambda$, resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1+5\lambda & 2\\ 3+2\lambda & 1\end{vmatrix}}{-5} = \frac{-5+\lambda}{-5} = 1 - \frac{1}{5}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}3 & 1+5\lambda\\ 4 & 3+2\lambda\end{vmatrix}}{-5} = \frac{5-14\lambda}{-5} = -1 + \frac{14}{5}\lambda$$

Es decir: $(x, y, z) =$

$= \left(1 - \frac{1}{5}\lambda, -1 + \frac{14}{5}\lambda, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$

16. (*Error en el libro, la segunda ecuación tiene un signo positivo entre* x *e* y.)

$$\left.\begin{array}{r}x + y + az = 2\\ x + y + z = b\end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & a & 2\\ 1 & 1 & 1 & b\end{array}\right) = M^*$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1 - a \quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & b\end{vmatrix} = 2 - b$$

- Si $a \neq 1$ y $b \in \mathbb{R}$: rg (M) = rg $(M^*) = 2 < 3$ $\Rightarrow$ Sistema compatible Indeterminado (1 parámetro).
- Si $a = 1$ y $b \neq 2$: rg $(M) = 1$ y rg $(M^*) = 2 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 1$ y $b = 2$: rg (M) = rg $(M^*) = 1 < 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (2 parámetros).

17. $$\left.\begin{array}{r}x + 2y + z = 2\\ x + y + 2z = 3\\ x + 3y + az = 1\\ x + 2y + z = b\end{array}\right\} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & a & 1\\ 1 & 2 & 1 & b\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & a & 1\\ 1 & 2 & 1 & b\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1\\ F_3 - F_1\\ F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & a-1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{vmatrix} \underset{F_3 + F_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{vmatrix} = -a(b-2)$$

$a(b-2) = 0 \Rightarrow a = 0$ y $b = 2$

Discusión:

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 2$: rg $(M) = 3$ y rg $(M^*) = 4 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 1$ y $b \in \mathbb{R}$: rg $(M) = 2$ y rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & a\end{vmatrix} = -a \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $a \neq 0$ y $b = 2$: rg (M) = rg $(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Procede la resolución cuando $a \neq 0$ y $b = 2$.

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y + z = 2\\ x + y + 2z = 3\\ x + 3y + az = 1\\ x + 2y + z = 2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x + 2y + z = 2\\ x + y + 2z = 3\\ x + 3y + az = 1\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & a\end{vmatrix}}{-a} = \frac{-4a}{a} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}}{-a} = \frac{a}{-a} = -1$$

$z = 0$

● Márgenes

— Página 94

Se designa:

x = precio de un vaso de limonada.

y = precio de un sandwich.

z = precio de un bizcocho.

$$\left.\begin{array}{r}x + 3y + 7z = 14\\ x + 4y + 10z = 17\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x + 3y = 14 - 7z\\ x + 4y = 17 - 10z\end{array}\right\}$$

$x = 5 + 2z$, $y = 3 - 3z$

Hay que hallar $x + y + z$, luego:

$x + y + z = 5 + 2z + 3 - 3z + z = 8$ peniques.

— Página 97

$$\left.\begin{array}{r}5x - 2y = 1\\ -x + y = 0\end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Sí se puede aplicar porque el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero y tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}$$

— Página 100

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} x - 3y - 5z &= 0 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$(x, y, z) = (9 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

— Página 102

- $(x, y, z) = (-\lambda, 2\lambda, 5\lambda - 2), \lambda \in \mathbb{R}$

  $$\left.\begin{aligned} -\lambda + 3 \cdot 2\lambda - (5\lambda - 2) = 2 &\neq 1 \\ 2(-\lambda) + 2\lambda &= 0 \end{aligned}\right\}$$

  No es solución

- $(x, y, z) = (-\mu - 1, 2\mu + 2, 5\mu), \mu \in \mathbb{R}$

  $-\mu - 1 + 3(2\mu + 2) - 5\mu = 5 \neq 1$

  No es solución tampoco.

— Página 103

a) Sí es posible. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 3 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Sistema incompatible — Sistema compatible determinado

b) Sí es posible. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 3 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

S. incompatible — S. incompatible

— Página 105

El rango de la matriz ampliada puede ser 1 o 2. Si el rango es 1 el sistema será compatible indeterminado dependiendo de 2 parámetros. Pero, si el rango es 2, el sistema es incompatible.

— Página 107

$$\left.\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ 2x + 3y &= b \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2a; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 2$$

Si $a = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{rg}(M) = 1$

Si $b = 2 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$

Por tanto:

a) Es incompatible si $a = \frac{3}{2}$ y $b \neq 2$.

b) Es compatible determinado si $a \neq \frac{3}{2}$ y $b \in \mathbb{R}$.

c) Es compatible indeterminado si $a = \frac{3}{2}$ y $b = 2$.

● Cajón de sastre

Representemos en la siguiente tabla los datos del enunciado.

Minas/Minerales	***A***	***B***	***C***
1.ª	4	3	5
2.ª	1	1	1
3.ª	2	4	3

Llamando x, y, z al número de horas de trabajo en las minas primera, segunda y tercera, respectivamente, se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones, cada uno de ellos para cada pedido.

$$\left.\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 19 \\ 3x + y + 4z &= 25 \\ 5x + y + 3z &= 25 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 13 \\ 3x + y + 4z &= 16 \\ 5x + y + 3z &= 16 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 8 \\ 3x + y + 4z &= 12 \\ 5x + y + 3z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, se trata de resolver tres sistemas con la misma matriz de coeficientes. Lo haremos utilizando el método de Gauss.

Así,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 19 & 13 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 25 & 16 & 12 \\ 5 & 1 & 3 & 25 & 16 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \begin{aligned} F_2 &\rightarrow F_2 - \frac{3}{4} F_1 \\ F_3 &\rightarrow F_3 - \frac{5}{4} F_1 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\to \atop \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 19 & 13 & 8 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{43}{4} & \frac{25}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} F_1 \to F_1 - 4F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -8 & -24 & -12 & -16 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{43}{4} & \frac{25}{4} & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} F_1 \to F_1 + \frac{8}{3} F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{6}{5} F_3 \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to F_1 \to \frac{1}{4} F_1,\ F_2 \to 4F_2,\ F_3 \to \frac{1}{3} F_3 \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces, para el primer pedido se necesitan 2 horas de trabajo en la primera mina, 3 horas en la segunda y 4 horas en la tercera. Para el segundo pedido, 1, 5 y 2 horas en cada mina, respectivamente. Y para satisfacer el tercer pedido, 4 horas en la segunda mina y 2 horas en la tercera mina.

Unidad 5 Vectores en el espacio

● Actividades

1. $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (1, -6, 0)$

$ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $D\ (4, 1, 4)$

$ABDC \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $D\ (2, -3, -2)$

$ADBC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$; $D\ (0, 9, -2)$

2. *a*) $B\,(2, 0, 8)$

b) $A\,(2, -1, -3)$

3. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{30}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{73}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

4. *a*) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$. Equilátero.

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Isósceles.

c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 0 + 3} = \sqrt{19}$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 9 + 12} = \sqrt{22}$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25 + 9 + 3} = \sqrt{37}$. Escaleno.

d) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 1 + 64} = \sqrt{81} = 9$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 16 + 49} = 9$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + 9 + 1} = \sqrt{10}$. Isósceles.

e) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2 + 0 + 8} = \sqrt{10}$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8 + 2 + 0} = \sqrt{10}$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2 + 2 + 8} = \sqrt{12}$. Isósceles.

f) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{34}{36}} = \dfrac{\sqrt{34}}{6}$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\dfrac{25}{36} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{16}{9}} = \sqrt{\dfrac{49}{18}} = \dfrac{7}{3\sqrt{2}}$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 0 + 4} = \sqrt{\dfrac{52}{9}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

Escaleno.

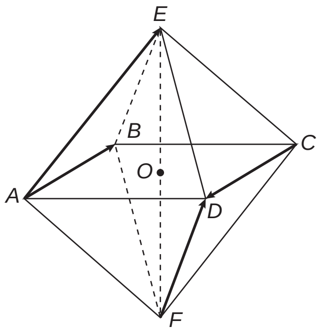
5. $\vec{u} + \vec{v} = (+2, 1, 3)$

$\vec{u} + \vec{w} = (4, 0, 6)$

$\vec{v} + \vec{w} = (0, 5, –1)$

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (3, 3, 4)$

6.



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$

d) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

7. Deben tener la misma dirección, y el mismo sentido.

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

8. Sea $D(x, y, z)$, tenemos:

$(x – 1, y – 5, z – 3) = (1, –1, 2) + 2\,(3, –2, –4)$

$x – 1 = 1 + 6;\ x = 8$

$y – 5 = –1 – 4;\ y = 0$

$z – 3 = 2 – 8;\ z = –3$

9. $\vec{u} // \vec{w} // \vec{y}$

$\vec{v} // \vec{x}$

10. $\vec{v} = (4, –6, 8)$, $\vec{w} = (1, –3/2, 2)$, $\vec{x} = (–2, 3, –4)$

$\vec{x} = (2k, –3k, 4k) \quad \forall k \in \mathbb{R} – \{0\}$

11. $\dfrac{3}{\lambda} = \dfrac{–2}{2} = \dfrac{\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = –3$

$\dfrac{3}{12} = \dfrac{–2}{\mu} = \dfrac{–3}{\mu} \Rightarrow \begin{cases} \mu = –8 \\ \mu = –12 \end{cases}$: No tiene solución.

Si $\lambda = –3$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, pero entonces no existe ningún valor de μ que haga que $\vec{w}$ también tenga la misma dirección.

12. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (–3, 2, –2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}\ (2, 4, 1)$

$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (–6, 1, 4)$

a) $\vec{u}_1 = \left(\dfrac{–3}{\sqrt{17}}, \dfrac{2}{\sqrt{17}}, \dfrac{–2}{\sqrt{17}}\right)$

$\vec{v}_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{21}}, \dfrac{4}{\sqrt{21}}, \dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$

$\vec{w}_1 = \left(\dfrac{–6}{\sqrt{53}}, \dfrac{1}{\sqrt{53}}, \dfrac{4}{\sqrt{53}}\right)$

b) $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\vec{u} \Rightarrow (x – 0, y – 3, z + 2) =$

$= \dfrac{2}{3}(–3, 2, –2)$

$$\left.\begin{array}{l} x = –2 \\ y – 3 = \dfrac{4}{3};\ y = \dfrac{13}{3} \\ z + 2 = \dfrac{–4}{3};\ z = –\dfrac{10}{3} \end{array}\right\} D\left(–2, \dfrac{13}{3}, –\dfrac{10}{3}\right)$$

c) $\overrightarrow{AE} = 2\vec{u} – 3\vec{v} \Rightarrow (x – 3, y – 1, z) =$

$= (–6, 4, –4) + (–6, –12, –3) = (–12, –8, –7)$

$$\left.\begin{array}{l} x = –9 \\ y = –7 \\ z = –7 \end{array}\right\} E\,(–9, –7, –7)$$

d) $\overrightarrow{AF} = \vec{u} – \vec{v} + 2\vec{w} \Rightarrow (x – 3, y – 1, z) =$

$= (–3, 2, –2) + (–2, –4, –1) + (–12, 2, 8) =$

$= (–17, 0, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} x = –14 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{array}\right\} F\,(–14, 1, 5)$$

13. *a*) $\overrightarrow{AB} = (–6, 6, 3) \qquad \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (–2, 2, 1)$

$C = A + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (4, 3, 2) + (–2, 2, 1) = (2, 5, 3)$

$D = A + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (4, 3, 2) + (–4, 4, 2) = (0, 7, 4)$

b) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \left(–\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

$$C = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (4, 3, 2) + \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) =$$
$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{4}\right)$$
$$D = A + \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} = (4, 3, 2) + \left(-3, 3, \frac{3}{2}\right) =$$
$$= \left(1, 6, \frac{7}{2}\right)$$
$$E = A + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (4, 3, 2) + \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{4}\right)$$

14. *a*) $A(2, -3, 4)$; $B(5, 3, 1)$; $A'(8, 9, -2)$

b) $A(4, -1, 5)$; $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right)$; $A'\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{19}{3}\right)$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad x = 8; y = -5; z = 0$

16. Debe pertenecer al plano que determinan esos dos vectores.

17. *a*) Dependientes, rango = 2.

b) Independientes, rango = 3.

c) Dependientes, rango = 1.

d) Independientes, rango = 3.

e) Dependientes, rango = 2.

18. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0; \lambda = 0$

19. $G = \{(1, 2, 3)\ (2, -1, 2)\ (1, -3, -1)\}$. No forman un sistema de generadores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & -3 & x_2 \\ 3 & 2 & -1 & x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & -5 & -5 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -4 & -4 & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{2x_1 - x_2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3x_1 - x_3}{4} \end{pmatrix}$$
$$\frac{3x_1 - x_3}{4} - \frac{2x_1 - x_2}{5} = 0$$
$$15x_1 - 5x_3 - 8x_1 + 4x_2 = 0$$
$$7x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$

Un vector (x_1, x_2, x_3) se puede escribir como combinación lineal de los vectores de G si y sólo si $7x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$.

20. *a*) $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (3\lambda + 2\mu, -2\lambda + 3\mu, \lambda)$

b) No, porque no forman un sistema de generadores.

c) Sí. Por ejemplo, el vector $\vec{w} = (1, 1, 1)$

21. Sea $D(x, y, z)$

$\overrightarrow{AD} = (x - 1, y - 1, z)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (1, -1, -1)$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = k \\ y - 1 = -k \\ z = -k \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = -k \end{array}$$

En este caso los puntos A, B, C y D están alineados.

22. *a*) No forman base. Son dependientes.

b) Forman base. Son independientes y forman un sistema de generadores.

c) No forman base.

d) Sí forman base.

e) No forman base.

23. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 - 1 = 0$. Que los vectores son perpendiculares.

24. *a*) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3, 2, -3)\ (2, 4, 1) =$

$= -6 + 8 - 3 = -1$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-3, 2, -3)\ (-2, -3, -4) =$

$= 6 - 6 + 12 = 12$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (2, 4, 1)\ (-2, -3, -4) =$

$= -4 - 12 - 4 = -20$

d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5, 2, 4)\ (1, -5, -1) =$

$= 5 - 10 - 4 = -9$

25. *a*) $\cos\alpha = \dfrac{5 - 4 + 5}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{30}} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{5}\right) \simeq 78°\ 28'$

b) $\cos\alpha = \dfrac{0 + 2 + 0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) \simeq 73°\ 34'$$

c) $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

d) $\cos \alpha = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

26. $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (3, -3, 2)\\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, 4)\end{array}\right| \cos \hat{A} = \dfrac{6 - 6 + 8}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{24}} =$

$$= \frac{8}{\sqrt{528}} \Rightarrow 69°\ 37'$$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA} = (-3, 3, -2)\\ \overrightarrow{BC} = (-1, 5, 2)\end{array}\right| \cos \hat{B} = \dfrac{3 + 15 - 4}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{30}} =$

$$= \frac{14}{\sqrt{660}} \Rightarrow 56°\ 59'$$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA} = (-2, -2, -4)\\ \overrightarrow{CB} = (1, -5, -2)\end{array}\right| \cos \hat{C} = \dfrac{-2 + 10 + 8}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{30}} =$

$$= \frac{16}{\sqrt{720}} \Rightarrow 53°\ 24'$$

Triángulo acutángulo.

27. $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{26}} \cdot \dfrac{(0, 5, -1)}{\sqrt{26}} =$

$$= \left(0, -\frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right)$$

$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{u}}\, \vec{v}} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}} \cdot \dfrac{(3, 0, 2)}{\sqrt{13}} =$

$$= \left(-\frac{6}{13}, 0, -\frac{4}{13}\right)$$

28. $\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3v_1 - 2v_2 - 3v_3 = 0;$

$$v_1 = \frac{2v_2 + 3v_3}{3};\ v_2 = v_2;\ v_3 = v_3$$

a) $\vec{v} = \left(\dfrac{2}{3}\lambda + \mu, \lambda, \mu\right) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Infinitas.

c) Son coplanarias.

29. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

30. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & -2 \\ \vec{j} & -3 & 3 \\ \vec{k} & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = -9 \cdot 2 - 8 \cdot (-3) - 2 \cdot (3) =$

$= -18 + 24 - 6 = 0 \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = -9 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 - 2 \cdot 1 =$

$= 18 - 16 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

31. $\vec{u} = (1, 1, 0)$

$\vec{v} = (-3, +3, 0)$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & -3 \\ \vec{j} & 1 & +3 \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k} = (0, 0, +6)$

$B = \{(1, 1, 0)\ (-3, +3, 0)\ (0, 0, +6)\}$

$B' = \left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)(0, 0, 1)\right\}$

32. $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 10)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 5)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 50\vec{i} - 30\vec{j} + 0\vec{k}$

$A_{ABC} = \dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\,500 + 900 + 0} =$

$= \dfrac{\sqrt{3\,400}}{2} = 5\sqrt{34}u^2$

33. *(Errata en el libro del alumno. Esta actividad corresponde a la actividad 32 de la columna derecha.)*

$\overrightarrow{AB} = (2, -7, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 3)$

$\overrightarrow{AD} = (2, 1, -6)$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -24 - 42 + 4 + 8 + 84 - 6 =$

$= 24 \neq 0 \Rightarrow$ No coplanario.

$V_{\text{Paralelepípedo}} = 24\ u^3$

34. *(Errata en el libro del alumno. Se refiere a la actividad 32.)*

$A = (3, 1, -2)$

$B = (5, 5, 8)$

$C = (1, -2, 3)$

$D = (0, 0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (2, 4, 10)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 5)$

$\overrightarrow{AO} = (-3, -1, 2)$

$$V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} V_{\text{Paralelepípedo}} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 116 = 58\ u^3$$

35. $V_T = \frac{1}{6} V_{\text{Par}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} 60 = 10\ u^3$

● Ejercicios

1. *a)* $\overrightarrow{AB} = (2, 6, -3)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -7, 1)$

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$(x, y + 3, z - 3) = (2, 6, -3) + (3, -1, -2) =$

$= (5, 5, -5)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y + 3 = 5 \rightarrow y = 2 \\ z - 3 = -5 \rightarrow z = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow D(5, 2, -2)$$

2. *a)* $(3, 1, 2) - (x, y, z) = (1, 0, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2, y = 1, z = 1 \Rightarrow A(2, 1, 1)$

b) $(x, y, z) - (2, 1, -3) = (-3, 5, 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1, y = 6, z = 3 \Rightarrow B(-1, 6, 3)$

3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) =$

$= (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = x_2 - x;\ 2x = x_1 + x_2;\ x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y - y_1 = y_2 - y;\ 2y = y_1 + y_2;\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z - z_1 = z_2 - z;\ 2z = z_1 + z_2;\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{array}\right|$$

$M = (3, -1, 2)$

4. $\overrightarrow{AB} = (9, 1, -7)$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(3, \frac{1}{3}, \frac{-7}{3}\right)$

$A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-5, 1, 7) + \left(3, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right) =$

$= \left(-2, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) \Rightarrow C\left(-2, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

$A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-5, 1, 7) + \left(6, \frac{2}{3}, -\frac{14}{3}\right) =$

$= \left(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) \Rightarrow D\left(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

5. $A' = 2C - A = (10, 6, 2) - (2, -3, 4) = (8, 9, -2)$

$A'(8, 9, -2)$

6. $G = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/13 \\ 3/13 \\ 2/13 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} = \frac{7}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} + \frac{2}{13}\vec{c}$

8. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{3}{-6}$; Sí están alineados.

9. $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \Rightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_1 & x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_4 - y_1 & y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \\ z_4 - z_1 & z_3 - z_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & k \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & k \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 52 - k = 0 \Rightarrow k = 52$$

10. $\vec{x} = k \cdot \vec{a}$; $(x_1, x_2, x_3) = k(2, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2k \\ x_2 = -k \\ x_3 = k \end{cases}$

$V = \{(2k, -k, k), k \in \mathbb{R}\}$ representa el conjunto de todos los vectores paralelos a $\vec{a} = (2, -1, 1)$.

11. $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$; $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(2, -1, 1) +$

$+ \mu(1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$

$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\}$ representa el conjunto de todos los vectores coplanarios con

$\vec{a} = (2, -1, 1)$ y $\vec{b} = (1, 1, 0)$

12. *a*) Dependientes: $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = \vec{0}$

b) Independientes: $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0$

c) Dependientes: $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 = \vec{0}$

d) Dependientes: $2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 7\vec{u}_3 = \vec{0}$

13. Son dependientes porque se puede despejar

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{3}{2}\vec{w}$$

14. Que son linealmente independientes, puesto que no se puede despejar ninguno de ellos como combinación lineal de los demás.

15. Si $k \neq 8$ los vectores son linealmente independientes.

Si $k = 8 \Rightarrow 2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$

16. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. $$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 2 & -1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$$

$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$ es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

18. *a*) No tiene solución: el producto escalar de dos vectores no es un vector.

b) $$(-1, 2, 1) \cdot x = (2, -1, 3) \Rightarrow \begin{cases} -x = 2 \\ 2x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

No tiene solución. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos.

c) $$(1, 1, 4) \cdot x = (2, 2, 8) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \\ 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

d) $(-1, 2, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = 1 + \lambda - 2\mu \end{cases}$$

$\vec{x} = (\lambda, \mu, 1 + \lambda - 2\mu), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

19. $$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{-3}{5}\right)$$

20. $$\left.\begin{matrix} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{u} = (3, -1, 5) \end{matrix}\right\} \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3v_1 - v_2 + 5v_3 = 0$

$v_2 = 3v_1 + 5v_3$

$\vec{v} = (\lambda, 3\lambda + 5\mu, \mu), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

21. $$\left.\begin{matrix} \vec{w} \perp \vec{u} \\ \vec{w} \perp \vec{v} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 3 \\ \vec{j} & 0 & -1 \\ \vec{k} & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = (3, 7, -1)$

22. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, 3, \lambda)\,(1, 2, 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 + 6 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-8}{3}$$

23. $$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{0 - 6 + 2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}}\right) = 118° \; 34'$$

24. $$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6 + 1 - 4}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

25. No, pues de ser así, sería:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{7}{1 \cdot 2} = \frac{7}{2} > 1, \text{ que es imposible.}$$

26. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ no implica que $\vec{v} = \vec{w}$, ya que

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$. Pero si $\vec{u} \neq \vec{0}$ esta igualdad no exige que $\vec{v} - \vec{w} = 0$, ya que podría ser $\vec{v} - \vec{w} \neq \vec{0}$ y $\cos(\vec{u}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$.

27. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot$
$\cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} =$
$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2$.

En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales coincide con la suma de los cuadrados de los lados.

28. $$\left.\begin{matrix} \vec{u} = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = (a, 1, -1) \\ \alpha = 60° \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 2} \cdot \frac{1}{2}$$

$4a^2 + 8a + \cancel{4} = 2a^2 + \cancel{4}$

$2a^2 + 8a = 0$

$2a\,(a + 4) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$

29. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 3 & 7 \\ \vec{j} & 5 & 4 \\ \vec{k} & -1 & 3 \end{vmatrix} = 19\vec{i} - 16\vec{j} - 23\vec{k}$

30. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 1 \\ \vec{j} & 1 & -2 \\ \vec{k} & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{w}_1 = \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \dfrac{-5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}}{5\sqrt{3}} =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$

$\vec{w}_5 = 5 \cdot \vec{w}_1 = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}$

o

$\vec{w}\,'_5 = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}.$

31. $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) =$

$= [(1 + a)\vec{u} + (1 + b)\vec{v}] \times [(1 - a)\vec{u} - (1 + b)\vec{v}] =$

$= -(1 + a)(1 + b)\vec{u} \times \vec{v} - (1 - a)(1 + b)\vec{u} \times \vec{v} =$

$= -[(1 + a)(1 + b) + (1 - a)(1 + b)]\vec{u} \times \vec{v} =$

$= -[(1 + a + 1 - a)(1 + b)]\vec{u} \times \vec{v} = -2(1 + b)\vec{u} \times \vec{v}$

32. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -19$

33. $A_{\text{Par.}} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2} =$

$= \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}\ u^2$

34. $A_{\text{Triang.}} = \dfrac{1}{2} A_{\text{Par.}} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{9 + 0 + 81} = \dfrac{1}{2}\sqrt{90} = \dfrac{3}{2}\sqrt{10}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-9, 3, -3) \end{array}\right\} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & 3 & -9 \\ \vec{j} & -2 & 3 \\ \vec{k} & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 0\vec{j} - 9\vec{k}$

35. $A_{\text{Paralelep.}} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = 13\ u^3$

36. $V_{\text{Tetraedro}} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \end{matrix}\right\| =$

$= \dfrac{1}{6} \cdot 5 = \dfrac{5}{6}\ u^3$

37. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (3, 4, 4) \cdot (2, 3, \lambda - 1) = 0$

$6 + 12 + 4(\lambda - 1) = 0;\ \lambda - 1 = -\dfrac{18}{4} = -\dfrac{9}{2}$

$\lambda = -\dfrac{7}{2}$

$A = \dfrac{1}{2}\sqrt{9 + 16 + 16} \cdot \sqrt{4 + 9 + \dfrac{81}{4}} =$

$= \dfrac{\sqrt{5\,453}}{4} \simeq 18{,}46$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 3 & 2 \\ \vec{j} & 4 & 3 \\ \vec{k} & 4 & -9/2 \end{vmatrix} = -30\vec{i} + \dfrac{43}{2}\vec{j} + \vec{k}$

$A = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{\sqrt{5\,453}}{2} = \dfrac{\sqrt{5\,453}}{4} \simeq 18{,}46$

38. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

2) Como $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} \end{array}\right| \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

3) A partir de 1) y 2) queda demostrado.

39. *a)* $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

Como $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$

$= \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

La igualdad anterior implica que $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es decir, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$

40. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0,\ |\vec{u}_1| = 2,\ |\vec{u}_2| = 5$

$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{u} \perp \vec{w}$ si $\begin{cases} \vec{u} = 8\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 \\ \vec{v} = 2\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 \end{cases}$

$2\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 = \lambda \cdot (8\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2) + \vec{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{w} = (2 - 8\lambda)\vec{u}_1 + (10 + 7\lambda)\vec{u}_2$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 8 \cdot (2 - 8\lambda) \cdot \vec{u}_1^{\,2} - 7(10 + 7\lambda) \cdot \vec{u}_2^{\,2} = 0$

$32(2 - 8\lambda) - 175(10 + 7\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1\,686}{1\,481}$

$\vec{w} = \dfrac{16\,450}{1481}\,\vec{u}_1 + \dfrac{3\,008}{1\,481}\,\vec{u}_2$

41. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0,\ |\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$

$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{u} \perp \vec{w}$ si $\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 \\ \vec{v} = 2\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 \end{cases}$

$2\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 = \lambda \cdot (3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2) + \vec{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{w} = (2 - 3\lambda)\vec{u}_1 - (7 + 4\lambda)\vec{u}_2$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 3(2 - 3\lambda) \cdot \vec{u}_1^{\,2} - 4(7 + 4\lambda) \cdot \vec{u}_2^{\,2} = 0$

$6 - 9\lambda - 28 - 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{22}{25}$

$\vec{w} = \dfrac{116}{25}\,\vec{u}_1 - \dfrac{87}{25}\,\vec{u}_2$

42. $\vec{u} = (5, 1, 3)$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 5v_1 + v_2 + 3v_3 = 0;$

$v_1 = \lambda;\ v_2 = -5\lambda - 3\mu;\ v_3 = \mu$

para $\lambda = -1,\ \mu = 1 \Rightarrow \vec{v} = (-1, 2, 1);$

$|\vec{v}\,| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$\vec{v}\,' = 2\,\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 2 \cdot \dfrac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(\dfrac{-\sqrt{6}}{3}, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

● Problemas

1. *a*) Una superficie esférica.

b) Una recta.

2. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA} =$

$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} =$

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} =$

$= 2 \cdot \vec{0} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC};\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

$\vec{u} + \dfrac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \dfrac{1}{2}\,\vec{w}$

$\vec{u} + \dfrac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} + \dfrac{1}{2}\,\vec{v} - \dfrac{1}{2}\,\vec{u} =$

$= \dfrac{1}{2}\,\vec{u} + \dfrac{1}{2}\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{1}{2}\,\vec{w}$

4. Sean $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = x \cdot \overrightarrow{AM} = x\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{1}{2}\,x\vec{u} + x\vec{v}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{v} + y \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{v} + y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) =$

$= y \cdot \vec{u} + (1 - y) \cdot \vec{v}$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\,x = y \\ x = 1 - y \end{array}\right\}\ x = \dfrac{2}{3};\ y = \dfrac{1}{3}$

Del mismo modo se demuestra que $\overrightarrow{FD} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$.

Quedando finalmente que $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$.

5. *a*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -5, -6) = (-x, 1 - y, 1 - z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 7 \end{cases} \quad D\,(1, 6, 7)$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (+1, -6, 3) = (-x, -5 - y, -z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \quad D\,(-1, 1, -3)$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) =$

$= (x_3 - x, y_3 - y, z_3 - z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 - x_2 + x_3 \\ y = y_1 - y_2 + y_3 \\ z = z_1 - z_2 + z_3 \end{cases}$

6. *a*) $G\left(\dfrac{2 + 1 + 0}{3}, \dfrac{5 + 0 + 1}{3}, \dfrac{3 - 3 + 1}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow G\left(1, 2, \dfrac{1}{3}\right)$

b) $G\left(\dfrac{1 + 2 + 0}{3}, \dfrac{3 - 3 - 5}{3}, \dfrac{2 + 5 + 0}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow G\left(1, \dfrac{-5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

7. $A(1, 0, 2)$

$B(0, 1, 1)$

$G(1, 1, 3)$

$C = 3G - A - B = 3(1, 1, 3) - (1, 0, 2) - (0, 1, 1)$

$C = (2, 2, 6)$

8. $A(2, 1, 2)$

$B(8, 7, 14)$

$\overrightarrow{AB} = (6, 6, 12)$

a) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, 2, 4)$

$X_1(4, 3, 6)$ y $X_2(6, 5, 10)$

b) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

$X_1\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$, $X_2(5, 4, 8)$ y $X_3\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}, 11\right)$

c) $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

$X_1\left(\frac{16}{5}, \frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right)$, $X_2\left(\frac{22}{5}, \frac{17}{5}, \frac{34}{5}\right)$,

$X_3\left(\frac{28}{5}, \frac{23}{5}, \frac{46}{5}\right)$ y $X_4\left(\frac{34}{5}, \frac{29}{5}, \frac{58}{5}\right)$

9. $A(3, 4, 5)$

$C\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C divide al segmento *AB* en dos partes proporcionales a 1 y 3.

O bien $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ o bien $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

- $(x - 3, y - 4, z - 5) = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \\ z = 5 - \frac{52}{3} = -\frac{37}{3} \end{array}\right\} B = \left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{-37}{3}\right)$$

- $(x - 3, y - 4, z - 5) = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right) =$

$= \left(-\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{52}{9}\right) \Rightarrow B\left(\frac{19}{9}, \frac{28}{9}, -\frac{7}{9}\right)$

10. Problema resuelto.

11. Que tiene la misma dirección pero sentidos contrarios.

12. $\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/4 \Rightarrow \alpha(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \pi/4$ si $\lambda > 0$

$\alpha(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = 3\pi/4$ si $\lambda < 0$

13. Como $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, el triángulo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$ es isósceles, siendo iguales los ángulos formados por $\vec{u}$ y $\vec{u} + \vec{v}$ y por $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$. Su suma coincide con el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de modo que $2\beta = \alpha$, $\beta = \alpha/2$.

14. Si el producto escalar es negativo, el ángulo que forman los dos vectores es mayor que $\pi/2$ pero menor o igual que π.

15. $A(1, 2, 3)$

$B(3, 5, -1)$

$C(-1, 1, -3)$

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, -4)$

$\overrightarrow{BC} = (-4, -4, -2)$

$\text{proy}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-8 - 12 + 8}{6} = -2$

$\overrightarrow{\text{proy}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}} = -2 \cdot \frac{(-4, -4, -2)}{6} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

16. *a*) $(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$

$= [(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{w}][(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}] =$

$= (\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{w}^2 =$

$= (\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{w}^2$

b) $(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$

$= [(\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})][\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})] =$

$= (\vec{u})^2 + \vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})^2 =$

$= \vec{u}^2 - (\vec{v} + \vec{w})^2$

17. $\vec{u} = (1, 3, -2)$

$\vec{v} = (-2, 3, 1)$

$\vec{w} = (2, 2, 1)$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0 \Rightarrow$ vectores linealmente independientes.

$\vec{x} = \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$

$\vec{y} = \vec{w} + \mu\vec{v} + k \cdot \vec{u}$

$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0$; $\vec{u} \cdot \vec{y} = 0$; $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow 0 = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}^2$

$0 = 5 + \lambda \cdot 14$; $\lambda = -\frac{5}{14}$;

$$\vec{x} = (-2, 3, 1) - \frac{5}{14}(1, 3, -2) =$$

$$= \left(-\frac{33}{14}, \frac{27}{14}, \frac{12}{14}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} \cdot \vec{y} = 0\\ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}0 = \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{u}^{\,2}\\ 0 = \vec{x} \cdot \vec{w} + \mu \cdot \vec{x} \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{x} \cdot \vec{u}\end{array}\right\}$$

$$0 = \frac{6}{7} + \frac{171}{4}\mu + 0 \Rightarrow \mu = -\frac{4}{57}$$

$$0 = 6 + 5\mu + 14k \Rightarrow k = -\frac{23}{57}$$

$$\vec{y} = \left(\frac{33}{19}, \frac{11}{19}, \frac{33}{19}\right)$$

18. $|\vec{u}| = |\vec{v}| \quad \alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/4$

a) $\alpha(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) = \pi/8$

b) $\alpha(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = \pi/8$

c) $\alpha(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v}) = 3\pi/8$

d) $\alpha(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = 5\pi/8$

19. Si $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} =$

$= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{u}|^2 = 0$

20. $|\vec{u}| = 6$

$|\vec{v}| = 2$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} + \vec{u} \cdot \vec{v} = 36 + 12 \cdot \dfrac{2}{3} = 44$

21. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$

$\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

a) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}^{\,2}| = 4$

b) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 4$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\alpha = 4$

22. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2 =$

$= \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

23. $\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1/4(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2 =$

$= 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$

$\dfrac{1}{4}\left(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

Como $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1/4(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

● Márgenes

— Página 128

El máximo rango de una matriz con tres filas es 3.

El número máximo de vectores de 3 componentes que pueden ser linealmente independientes es 3.

● Cajón de Sastre

Problema

Se trazan paralelas a *MN* y *PQ* por *C* y *D* respectivamente que cortan a *AB* en *X* y a *CB* en *Y*. Se trata de demostrar que *CX* = *DY*. Considérense los vectores:

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX}$

$\overrightarrow{DY} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CY}$

como $r \perp s \Rightarrow \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{DY} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{CY} = 0$

$0 + \ell CY - \ell BX + 0 = 0 \Rightarrow CY = BX$

Y si $CY = BX \Rightarrow DY = CX$, ya está demostrado

Unidad

6 Rectas y planos

● Actividades

1. *a*) $(x, y, z) = (2, -3, 1) + \lambda(2, -4, 5)$

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{5}$$

b) $(x, y, z) = (3 - 1, 0) + \lambda(-5, 6, 3)$

$$\begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{3}$$

c) $(x, y, z) = (2, 5, 0) + \lambda(-2, -7, 3)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 5 - 7\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z}{3}$$

d) $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \lambda\left(2, \frac{3}{2}, -2\right)$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \frac{3}{2}\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3/2} = \frac{z-1}{-2}$$

2. *a*) Punto: $A(-1, 2, -1)$. Vector: $\vec{u} = (3, 0, 5)$

b) Punto: $A(3, 2, 0)$. Vector: $\vec{u} = (-1, 3, 1)$

c) Punto: $A(2, -1, 0)$. Vector: $\vec{u} = (0, 0, 1)$

d) Punto: $A\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Vector: $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$

3. *a*) Eje OX: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$; Eje OZ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 5 \end{cases}$

c) $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

4. $r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 1) = \lambda(-3, 3, -2)$

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

5. *a*) $\pi \equiv (x, y, z) = (3, 3, -1) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(1, 4, -2)$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda + \mu \\ y = 3 + \lambda + 4\mu \\ z = -1 + 3\lambda - 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 1 \\ y-3 & 1 & 4 \\ z+1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14(x-3) + 7(y-3) + 7(z+1) = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y - z - 4 = 0$$

b) $\pi \equiv (x, y, z) = (0, 2, -2) + \lambda(2, -4, 3) + \mu(3, 1, 5)$

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = 2 - 4\lambda + \mu \\ z = -2 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y-2 & -4 & 1 \\ z+2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 23x + y - 14z - 30 = 0$$

c) $\pi \equiv (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(2, 3, 2) + \mu(2, -1, -4)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 3\lambda - \mu \\ z = -2 + 2\lambda - 4\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 3 & -1 \\ z+2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\pi \equiv 5x - 6y + 4z + 3 = 0$

d) $\pi \equiv (x, y, z) = (a, 0, 0) + \lambda(-a, b, 0) + \mu(-a, 0, c)$

$$\begin{cases} x = a - \lambda a - \mu a \\ y = \lambda b \\ z = \mu c \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\pi \equiv bcx + acy + abz = abc$

$$\pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

6. *a*) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-3 & 1 & 1 \\ z-5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 18y + 3z + 35 = 0$

b) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z+3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 7x + y - 5z - 9 = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y+3 & 2 & 4 \\ z+2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \equiv 10x + 3y + 4z + 7 = 0$

7. $\pi_1 \equiv x + y + z + 1 = 0$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(y-1) - z + 1 = 0;$$

$\pi_2 \equiv 2y - z - 1 = 0$

$\frac{1}{0} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$: Secantes

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$\vec{u}_r = (-3, 1, 2)$

8. $\pi_1 \equiv x + 2y - 3z + 5 = 0$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = -2 + \lambda - 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$\pi_2 \equiv 3x + 2y + z + 1 = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 5 = 0 \\ 3x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -7/2 + 5/2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$P(0, -1, 1)$

$\vec{u} = (-4, 5, 2)$

$$r \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{2}$$

9. $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + ky + z + 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y - kz - 2 = 0 \end{cases}$

$$\pi_1 // \pi_2 = \frac{1}{1} = \frac{k}{-1} = \frac{1}{-k} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow k = -1$$

10. $\pi' \equiv 2(x - 3) - 3(y - 1) + 5(z - 2) = 0$

$2x - 3y + 5z - 13 = 0$

11. Eje *OX*: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}; \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje *OY*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}; \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}; \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje *OZ*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}; \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

12. Plano paralelo a *XY*: $z = k$

Plano paralelo a *XZ*: $y = k$

Plano paralelo a *YZ*: $x = k$

13. $r \equiv \begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

14. $P(2, 4, -1)$

$$r \equiv \begin{cases} x + 10y + z = 82 \\ -x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & -1 \\ \vec{j} & 10 & 2 \\ \vec{k} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 2\vec{j} + 12\vec{k}; \vec{u}_r = (4, -1, 6)$$

$$s \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{6}$$

15. $P(2, -1, 5)$

$\pi_1 \equiv 2x + 3y - 4z = 6$

$\pi_2 \equiv 3x - y + z = 4$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 3 \\ \vec{j} & 3 & -1 \\ \vec{k} & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 14\vec{j} - 11\vec{k};\ \vec{u}_r = (1, 14, 11)$$

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-5}{11}$$

16. $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 4 & 2 \\ z+2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi \equiv x - 2y + z + 3 = 0$$

17. $\pi_1 \equiv 3x + 2y + 5z - 8 = 0$

$\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$

$P(1, 5, 0)$

$$\vec{a}_\pi = \vec{a}_{\pi_1} \times \vec{a}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 3 & 2 \\ \vec{j} & 2 & -1 \\ \vec{k} & 5 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

$\pi \equiv 11(x - 1) + (y - 5) - 7(z - 0) = 0$

$\pi \equiv 11x + y - 7z - 16 = 0$

18. $\lambda(x - y - z + 5) + \mu(2x - 2y - z + 1) = 0$

$\left.\begin{matrix} A(-2, -1, 0) \\ B(2, 0, 1) \end{matrix}\right| \quad M\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\lambda\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5\right) + \mu\left(0 + 1 + \frac{1}{2} + 1\right) = 0$$

$6\lambda + \frac{5}{2}\mu = 0$

$12\lambda + 5\mu = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -5 \\ \mu = 12 \end{cases}$

$-5(x - y - z + 5) + 12(2x - 2y - z + 1) = 0$

$19x - 19y - 7z - 13 = 0$

19. *a)* $2kx + (k + 1)y - 3(k - 1)z + 2k + 4 = 0$

$k(2x + y - 3z + 2) + (y + 3z + 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3z \\ y = -4 - 3z \\ z = z \end{cases}$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{1}$$

b) $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = -2 + 5z \\ z = z \end{cases} \quad \pi // s \Leftrightarrow \vec{a}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3(2k) + 5(k + 1) - 3(k - 1) = 0$

$-6k + 5k + 5 - 3k + 3 = 0$

$-4k + 8 = 0$

$k = 2$

$\pi \equiv 4x + 3y - 3z + 8 = 0$

20. $A(1, -2, 3)$, $B(-3, 1, 2)$ y $C(2, 3, -1)$. $E(1, 1, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (-4, 3, -1) = (x - 2, y - 3, z + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -4;\ x = -2 \\ y - 3 = 3;\ \ y = 6 \\ z + 1 = -1;\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 6, -2)$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & -4 & 1 \\ y-1 & 3 & 5 \\ z-1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \equiv 7x + 17y - 23z - 47 = 0$

21. $\lambda(x + y - 1) + \mu(2x + z - 3) = 0;$

$(\lambda + 2\mu)x + \lambda y + \mu z - \lambda - 3\mu = 0;$

$2(\lambda + 2\mu) + 3\lambda + 2\mu = 0;$

$5\lambda + 6\mu = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \mu = -5 \end{cases}$

$6(x + y - 1) - 5(2x + z - 3) = 0;$

$-4x + 6y - 5z + 9 = 0$

$4x - 6y + 5z - 9 = 0$

22. $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 5z - 3 = 0 \\ 8x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$ ¿plano que contiene a r y es perpendicular a $\pi \equiv 2x - 5y - z + 4 = 0$?

$\lambda(x - 2y + 5z - 3) + \mu(8x + 3y + z - 1) = 0$

$(\lambda + 8\mu)x + (-2\lambda + 3\mu)y + (5\lambda + \mu)z - 3\lambda - \mu = 0$

$2(\lambda + 8\mu) - 5(-2\lambda + 3\mu) - (5\lambda + \mu) = 0$

$2\lambda + 16\mu + 10\lambda - 15\mu - 5\lambda - \mu = 0$

$7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

El plano es $\pi' \equiv 8x + 3y + z - 1 = 0$

23. $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 4y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -1 + 5\lambda \end{cases}$

$H \equiv x - 9y + 5z + k = 0$

r pertenece a algún plano del haz H si $\vec{u}_r \cdot \vec{a}_H = 0$.

Como $\vec{u}_r = (2, 3, 5)$ y $\vec{a}_H = (1, -9, 5)$, $\vec{u}_r \cdot \vec{a}_H = 2 - 27 + 25 = 0$. Por tanto existe un plano de H que contiene a r. Dicho plano es $\pi \equiv x - 9y + 5z - 16 = 0$

24. *a*) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} A(1, -2, 3) \\ \vec{u} = (3, 2, 4) \end{cases}$

$s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} B(-2, -3, 0) \\ \vec{v} = (-1, 2, 4) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (-3, -1, -3)$

$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$

r y s se cruzan.

b) $r \equiv \begin{cases} 4x + 5y + 2z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$

$s \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y - 6z + 7 = 0 \end{cases}$

rango (A) = rango $(Aa) = 2 \Rightarrow$ Coincidentes.

25. *a*) $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} A(-2, 2, 3) \\ \vec{u} = (3, -1, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, -4)$

$s \equiv \begin{cases} 3x + y - 2z + 2 = 0 \\ 5x + 7y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

$s \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{4} \Rightarrow \begin{cases} B(-2, 2, -1) \\ \vec{v} = (3, -1, 4) \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Como $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$, las rectas son secantes. Su punto común es $P(4, 0, 7)$.

b) $r \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{5} \Rightarrow \begin{cases} A(-1, 1, -2) \\ \vec{u} = (2, 3, 5) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2)$

$s \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

$s \equiv \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} B(1, 1, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Como $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$, las rectas se cortan. Su punto común es $P(1, 4, 3)$.

26. *a*) $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = -6 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan:

$h_\pi \equiv y + z + k = 0$.

b) $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ y rango $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 1 \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes:

$r \equiv \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

c) $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ y $\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas:

$\vec{u}_r = \vec{v}_s = (2, -1, 1)$.

d) $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 9 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan:

$h_\pi \equiv 3y + 2y - z + k = 0$.

27. Las rectas son secantes y su punto de intersección es $P\left(\dfrac{13}{6}, \dfrac{-5}{6}, \dfrac{-7}{6}\right)$.

28. *a*) La recta r está contenida en el plano π.

b) Son secantes. El punto común es $P(1, 0, 4)$.

29. *a*) Son secantes. El punto común es $P\left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Son secantes. El punto común es

$P\left(-\dfrac{112}{5}, \dfrac{64}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

30. $\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y + 3z = 1 \\ \pi_2 \equiv x + 2y - z = -b \\ \pi_3 \equiv x + ay - 6z = -10 \end{array}\right\}$

- Si $a \neq 7 \Rightarrow$ Los planos forman un triedro.
- Si $a = 7$ y $b = 3 \Rightarrow$ Los planos forman un haz.
- Si $a = 7$ y $b \neq 3 \Rightarrow$ Forman una superficie prismática triangular.

31. *a*) Triedro con vértice $V\left(-\dfrac{5}{4}, \dfrac{33}{4}, \dfrac{23}{4}\right)$.

b) Haz de planos cuyo eje es $r \equiv \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) Haz de planos cuyo eje es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + 7\lambda \\ z = 2 - 5\lambda \end{cases}$

d) Superficie prismática triangular.

32. Para que formen un haz dos ecuaciones deben ser independientes y la tercera debe ser combinación lineal de ellas. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$$ donde se ve que la 3.ª es suma de las dos primeras.

Para que formen una superficie prismática, dos ecuaciones deben ser independientes, y de la tercera, los coeficientes de las incógnitas deben ser combinación lineal de los coeficientes de las incógnitas de las dos primeras, pero los términos independientes no. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y + 2z &= \text{cualquier n.º distinto de } 8 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicios

1. $\pi \equiv y + z - 2 = 0$

2. $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$

3. $\pi \equiv 11x + y - 2z - 11 = 0$

4. $\pi \equiv 2x + y + z - 9 = 0$

5. Sí pertenece: $\lambda = 5$ y $\mu = 4$

6. $a = 6$

7. $a = \dfrac{23}{2}$ y $\pi \equiv 9x + 2y - 2z - 6 = 0$

8. $\left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= -9 + 3\lambda + 3\mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right\}$

9. $\pi \equiv x + y - z - 4 = 0$

10. $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$

11. Las rectas son coplanarias. El plano que determinan es: $\pi \equiv 10x - 3y + z + 23 = 0$

12. *A* sí pertenece, *B* no.

13. Los planos forman un triedro con vértice en $V(4, 1, -2)$.

14. *a*) Se cruzan *b*) Se cruzan
c) Paralelas *d*) Se cortan: $P(-13, 28, 5)$
e) Se cruzan *f*) Se cruzan
g) Se cruzan

15. $k = 4$

16. *a*) $k = 6$; $P\left(-\dfrac{3}{8}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{47}{8}\right)$

b) $k = \dfrac{13}{25}$; $P(10, -18, 25)$

17. $\pi \equiv 7x + 4y - 3z + 20 = 0$

18. $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{-1}$

19. $\pi \equiv x - 2y + 3z + 3 = 0$

20. $\pi \equiv 2x - y - z - 6 = 0$

21. $\pi \equiv 2x + y + 2z - 5 = 0$

22. $\pi \equiv x - 2z + 4 = 0$

23. $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 6\lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = -5 - 5\lambda \end{cases}$

24. $\pi \equiv 4x + 7y - z - 6 = 0$

25. *a*) Triedro con vértice en $\left(\dfrac{13}{7}, \dfrac{10}{7}, -\dfrac{9}{7}\right)$.

b) Los tres planos son paralelos.

c) π_1 y π_3 son coincidentes y tienen en común con π_2 la recta de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{11} + \frac{5}{11}\lambda \\ y &= \frac{40}{11} + \frac{20}{11}\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

d) Los planos forman una superficie prismática triangular.

26. La recta es paralela al plano.

27. La recta corta al plano en el punto $P(3, -6, 0)$ $(\lambda = -5)$.

28. La recta corta al plano en el punto $P\left(\dfrac{3}{2}, -2, 4\right)$.

29. La recta está contenida en el plano.

30. $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

31. $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

32. $\sigma \equiv 2x - y - 5z + 12 = 0$

Problemas

1. $k = 8 \Rightarrow P\left(-\dfrac{16}{7}, \dfrac{11}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$

2. $md \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

3. $k = \dfrac{15}{2} \Rightarrow P(5, 2, 8)$

4. $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 9{,}12\lambda \\ y = -4 - 12{,}72\lambda \\ z = -1 + 7{,}45\lambda \end{cases}$

5. Problema resuelto

6. $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

7. $P'(-5, 1, 0)$

8. $P'\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2\right)$

9. $P'(4, 1, -3)$

10. $r' \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 11x - 8y - 9z - 11 = 0 \end{cases}$

11. $\pi \equiv 2x + y - 3z + 6 = 0$

12. $\sigma \equiv x - y = 0$

13. $\left.\begin{array}{r} (1-k)x + (3-k)y = 0 \\ z - k = 0 \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{R}$

14. $\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0$

15. $\pi \equiv x + 2y - 2 = 0$

16.
- Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$, las rectas se cruzan.
- Si $a = 2$, las rectas son paralelas.
- Si $a = -2$, las rectas se cortan en el punto $P\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{2}\right)$.

17. $t \equiv \begin{cases} 7x - 5y + z - 15 = 0 \\ 7x - 4y - z - 8 = 0 \end{cases}$

18. $\pi \equiv y - 4z = 0$

19.
- Si $m \neq -\dfrac{23}{7} \Rightarrow r$ y π son secantes.
- Si $m = -\dfrac{23}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ y $\begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos.} \\ n = 0 \Rightarrow r \text{ está contenida en } \pi. \end{cases}$

20. $A'\left(\dfrac{9}{14}, \dfrac{4}{14}, \dfrac{-1}{14}\right)$

21. $t \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Unidad

7 Distancias, áreas y volúmenes

• Actividades

1. $\cos \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60° \left(\dfrac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$

2. $\cos \alpha = 0{,}9649 \Rightarrow \alpha = 15°\ 13'$

3. $\text{sen}\ \alpha = 0{,}0393 \Rightarrow \alpha = 2°\ 15'$

4. $p \equiv \begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 4x - 5y - 11z + 10 = 0 \end{cases}$

5. *a*) $P'\left(-\dfrac{254}{169}, \dfrac{450}{169}, \dfrac{167}{169}\right)$;

$d(P, P') = \dfrac{\sqrt{7666}}{13}\ u$

b) Área $= \sqrt{7666}\ u^2$; $d(P, r) = \dfrac{\sqrt{7666}}{13}\ u$

6. $h_{AB} = \dfrac{\sqrt{1811}}{30}\ u$; Área $= \dfrac{1}{2}\sqrt{1811}\ u^2$

7. $d(P, t) = 8{,}22$ $[P(-4, -5, 4)]$

$d(P, t) = \dfrac{\sqrt{20885}}{\sqrt{309}}\ u$

8. $d(P, r) = 2\sqrt{3}\ u$

9. $d(P, \pi) = \dfrac{34\sqrt{35}}{35}\ u$

10. $d(P, \pi) = \dfrac{5\sqrt{14}}{14}\ u$

11. $P'\left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{19}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$

12. $A'B' = \sqrt{2}\ u$

13. $d(P, r) = \dfrac{\sqrt{365}}{3}\ u$

14. $\pi \equiv x - 2y - 3z + 14 = 0$

15. $d(P, r) = 3u$

16. $p \equiv x - 1 = y = \dfrac{z-2}{2}$

17. $b = 2$; $d(r, \pi) = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}\ u$

18. $d(P, \pi) > 0$ y $d(Q, \pi) > 0 \Rightarrow$ es el mismo semiespacio.

19. *a*) En diedros adyacentes:

$[d(M, \pi_1) > 0,\ d(M, \pi_2) > 0$ y

$d(N, \pi_1) < 0,\ d(N, \pi_2) > 0]$

b) En diedros opuestos:

$[d(M, \pi_1) > 0,\ d(M, \pi_2) > 0$ y

$d(N, \pi_1) < 0,\ d(N, \pi_2) < 0]$

20. *a*) $d(\pi, \pi') = 4\ u$

b) $d(\pi, \pi') = \dfrac{4\sqrt{185}}{185}\ u$

21. r y π son paralelos; $d(r, \pi) = \dfrac{2\sqrt{19}}{19}\ u$

22. $d(r, s) = 3\sqrt{\dfrac{78}{29}}\ u$

23. $d(r, \pi) = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\ u$

24. $d(r, s) = \dfrac{103}{\sqrt{545}}\ u$

25. $d(r, s) = 7\ u$

26. $d(r, s) = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}\ u$

27. $d(r, \pi) = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\ u$

28. $p \equiv \begin{cases} x + 5y + 4z + 15 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p \equiv \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{13}{4} + \lambda \end{cases}$

29. $b_1 \equiv (9 - \sqrt{34})x + (12 - 2\sqrt{34})y + (9 + 2\sqrt{34})z +$
$+ 5\sqrt{34} - 39 = 0$

$b_2 \equiv (9 + \sqrt{34})x + (12 + 2\sqrt{34})y + (9 - 2\sqrt{34})z -$
$(-5\sqrt{34} + 39) = 0$

30. r y s se cortan en el punto $P(6, 6, 10)$

La perpendicular común es:

$p \equiv \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$

31. $P_1\left(-3, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ y $P_2\left(0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

32. $P_1\left(\dfrac{9}{4}, -\dfrac{5}{8}, \dfrac{9}{4}\right)$ y $P_2\left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{8}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

33. $\pi \equiv 2x + 10y - 2z - 15 = 0$

34. $A = \sqrt{2}\ u^2$

35. $A = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}\ u^2$

36. $V = 25\ u^3$

37. $V = \dfrac{95}{6}\ u^3$

38. $A = \dfrac{1}{2}\sqrt{854}\ u^2$

39. (Errata en el libro del alumno. En la segunda actividad 38 debería poner 39.)

$\lambda = 2,\ \mu = 3,\ V = \dfrac{2}{3}\ u^3;\ A_T = \sqrt{42} + 4\sqrt{6} + 2\ u^2$

● Ejercicios

1. $\alpha = 35°\ 22'$

2. $\alpha = 66°\ 54'$

3. $\alpha = 45°$

4. $\alpha = 19°\ 6'$

5. *a*) $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ *b*) $t \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

c) $\pi \equiv 2x - 2y - z + 5 = 0$

d) $\pi \equiv 4x + 3y + 2z - 7 = 0$

6. $a)\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$ $\quad b)\ s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

$c)\ \sigma \equiv 2x - 3y = 0$

$d)\ \tau \equiv 3x + 2y + z - 7 = 0$

7. $d(0, r) = \dfrac{\sqrt{1\,309}}{17}$

8. $(a-7)^2 = 47 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 - \sqrt{47} \\ a = 7 + \sqrt{47} \end{cases}$

9. $\pi \equiv x + y + z - a = 0$

$d(0, \pi) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\ u$

10. $d(P, QR) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ u; \quad A_{\widehat{PQR}} = 5\ u^2$

11. Los planos son secantes: $d(\pi, \pi') = 0$

12. $d(\pi, \pi') = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

13. $d(r, \pi) = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

14. La recta y el plano son secantes: $d(r, \pi) = 0$

15. $A'(1, 4, -7)$

16. *a*) Sí; *b*) El segmento está contenido en el plano; *c*) No; *d*) No

17. $d(P, r) = 5\ u$

18. $d(r, s) = \dfrac{21\sqrt{10}}{10}\ u$

19. $p \equiv \begin{cases} 38x + 79y + z + 315 = 0 \\ 6x - 10y + 13z + 4 = 0 \end{cases}$

20. $P_1\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$ y $P_2\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

21. $\pi_m \equiv 3x + 6y + 4z - 12 = 0$

22. Sea $P(x, y, z)$ tal que $d(P, r) = d(P, s)$

Por un lado,

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz}$$

Por otro lado,

$$d(P, s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz}$$

$d(P, r) = d(P, s) \Leftrightarrow 2xz + 2yz = 0 \Leftrightarrow 2z(x + y) = 0$

Si $z = 0$, entonces se cumple $d(P, r) = d(P, s)$.

Existen puntos con $z \neq 0$ para los que $x + y = 0$ y, por tanto, también equidistan de *r* y *s.*

23. $p \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$

o $p \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{2}$

24. Las rectas son paralelas. La distancia entre ellas es: $d(r, s) = \dfrac{\sqrt{174}}{6}$ y el plano que las contiene es

$\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$

25. $P(1, 2, -4)$; $p \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = -4 + \lambda \end{cases}$

26. $\tau \equiv 8x^2 + 8y^2 + 17z^2 - 18xy - 72z + 72 = 0$

27. $P(-1, 0, -1)$

28. $a = \dfrac{4}{3}, \quad b = \dfrac{2}{3}$

29. $P(-1, -2, -3)$

30. $d(r, s) = \dfrac{5\sqrt{251}}{251}$;

$p \equiv \begin{cases} 35x + 53y - 22z = 0 \\ 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \end{cases}$

31. $p \equiv \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

32. $P_1(0, 2, 1)$ y $P_2\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{14}{3}, 3\right)$

33. $P(-6, 3, 3)$

34. $\pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$

35. $V_T = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| =$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \mu - \lambda & \mu - \lambda - 1 & -2(\mu - \lambda) - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Problemas

1. Las ecuaciones del rayo reflejado son:

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -5 + 11\lambda \end{cases}$$

que no pasa por el punto $P(2, 8, -14)$.

2. $\pi \equiv x - 2y - 3z + 14 = 0$

3. $p \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 5 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

4. Las rectas se cruzan. Su perpendicular común es

$$p \equiv \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

La distancia entre ellas es: $d(r, s) = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}\ u$.

5. Problema resuelto.

6. $l = d(r, s) = \dfrac{2}{7}\sqrt{91}, \quad V = \dfrac{104}{49}\sqrt{91}\ u^3$.

7. No existe

8. *a*) $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

b) $t \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

9. No existe ningún rectángulo. El que tiene área mínima es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

10. $P\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

11. $P\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$

12. $A(-1, 0, -1)$. El otro punto es $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, pero no está debajo del plano *XY*.

13. Los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, 1 - \lambda, \lambda - 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -1 - \lambda, \lambda)$ no tienen la misma dirección porque la ecuación $\dfrac{1 - \lambda}{-1 - \lambda} = \dfrac{\lambda - 2}{\lambda}$ no tiene solución.

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\ u^2$$

14. Tres soluciones: $D_1(0, 2, 2)$, $D_2(2, 0, 0)$ y $D_3(2, 4, 4)$

Área $= 2\sqrt{2}\ u^2$.

$P_1 = P_2 = P_3 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ u$

15. Si $a \neq -2$, las rectas se cruzan.

Si $a = -2$, las rectas son paralelas.

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{53}}{9}\ u$$

16. $P(0, 1, 2) \quad P'\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

17. Lugar geométrico formado por las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 12 = 0 \end{cases}$$

y $r_2 \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - 7y + z + 12 = 0 \end{cases}$

18. Lugar geométrico formado por las rectas paralelas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

y $r_2 \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

19. $r \equiv \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 2}{-3}$

20. $V = 10\ u^3$

21. $A(3, -2, 4)$, $d(A, P) = \sqrt{3}\ u$

22. $\pi_m \equiv 5x + 7y + 6z + 7 = 0$; $d(0, \pi) = \dfrac{7\sqrt{110}}{110}\ u$;

$V = \dfrac{49}{180}\ u^3$.

23. $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$

$\pi_2 \equiv x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

24. $\pi_1 \equiv 4y + 3z = 0$; $\pi_2 \equiv 4y - 3z = 0$

25. $r' \equiv x - \dfrac{1}{3} = y + \dfrac{2}{3} = z - \dfrac{1}{3}$

26. La base es un paralelogramo de área $A_b = 9\ u^2$.

La altura es la distancia desde la cúspide hasta el plano $z = 0$: $d(v, \pi) = 5\ u$.

El volumen es $V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 5 = 15\ u^3$.

27. $D(0, 3, 4)$

• Responde

— Página 185.

Porque la distancia mínima entre las rectas corresponde a la perpendicular común, y usando un punto cualquiera de una de las rectas no se garantiza que sea perpendicular a ambas.

— Página 187.

No, en general. Porque la recta que pasa por $A \in r$ y tiene la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$, si bien es perpendiocular a r y s, no tiene por qué cortarlas a ambas.

• Cajón de sastre

Problema

(Nota: Se han cambiado los colores en la figura, pero no se han cambiado las referencias a los colores en el texto. Por tanto no se sabe qué área es la que se da como dato ni cuál se pide.)

El dato es que el área coloreada en azul vale 5π, y se pide el área coloreada en verde y el área coloreada en amarillo.

A_{verde} (gris oscura) $= 4\pi$

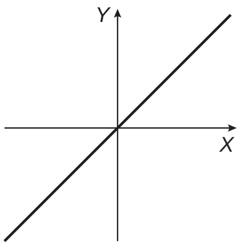
$A_{amarilla}$ (gris clara) $= 9\pi$

Unidad

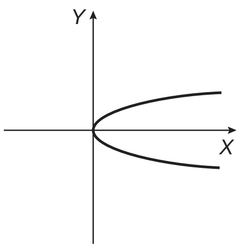
8 Curvas y superficies

• Actividades

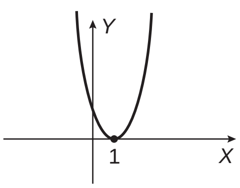
1. *a*)



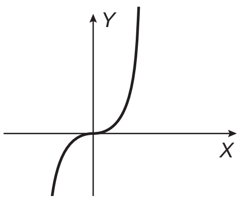
b)



c)



d)



2. *a*) $y = x$ *b*) $x = y^2$

c) $y = (x - 1)^2$ *d*) $y = x^3$

3. *a*) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \text{ sen } t + t^3 + 2 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - t^4 - 5t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -4t - 5t^2 \\ y = t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \text{ sen } t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

5. $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$

6. $x = \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

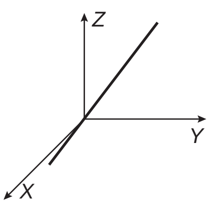
7. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

8. *a*) $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$; *b*) $(1, 0)$; *c*) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$; *d*) $(2, \pi)$

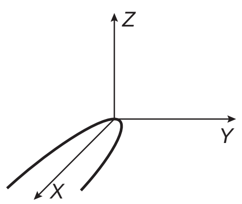
9. *a*) $(2, 0)$; *b*) $(0, 2)$; *c*) $(-3, 0)$; *d*) $(0, -1)$

10. *a*) $r \cos \theta = 1$; *b*) $r = 1$; *c*) $r^2 \cdot \cos \theta \cdot \text{sen } \theta = 1$; *d*) $r = 4$

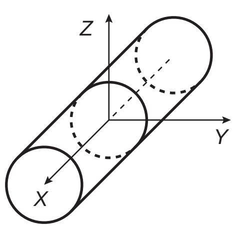
11. *a*)



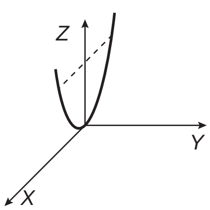
b)



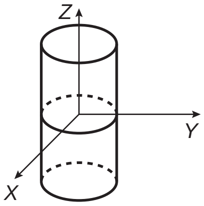
c)



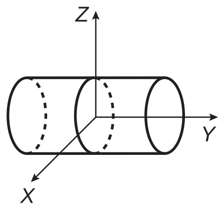
d)



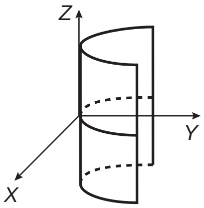
12. *a*)



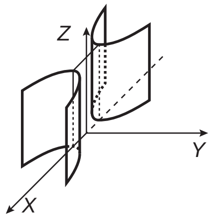
b)



c)



d)



13. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 25$

14. *a*) $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = -9$. No es una esfera.

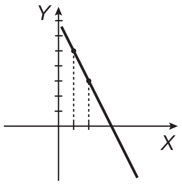
b) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$. Centro (1, 0, 0) y radio $\sqrt{5}$.

15. $2x + 2y + z - 9 = 0$

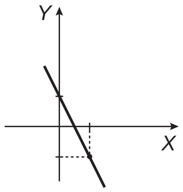
● Ejercicios

1. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

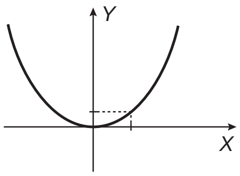
2. *a*)



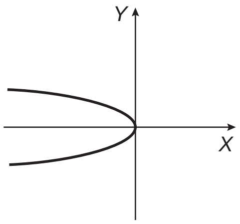
b)



c)



d)



3. *a*) $x - 2y + 2 = 0$ *b*) $y = \dfrac{1}{x}$

c) $9x = y^2 + 2y + 1$ *d*) $y = \text{sen } x$

4. *a*) $\begin{cases} x = -t^3 \\ y = t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2}(\text{sen } t + 3t^3 + 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}(3 + \cos t) \\ y = t \end{cases}$

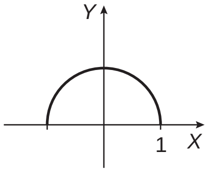
d) $\begin{cases} x = 2t^3 \\ y = t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \text{ sen } t \end{cases}$

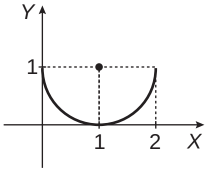
6. $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = -2 + 2 \text{ sen } t \end{cases}$

7. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 49$

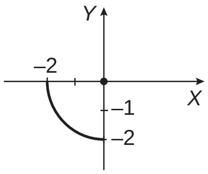
8. *a*)



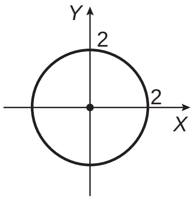
b)



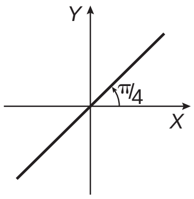
c)



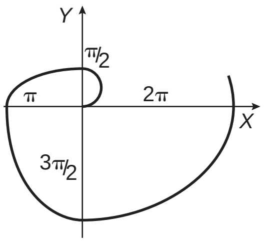
9.



10.

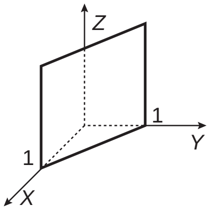


11.

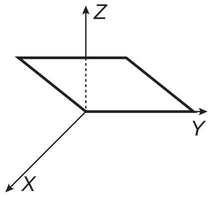


12. Es una recta.

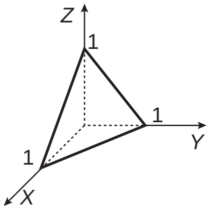
13. *a*)



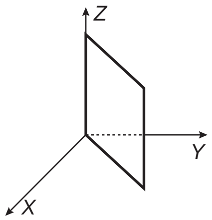
b)



c)

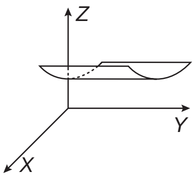


d)

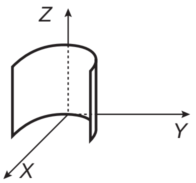


14. *a*) Apartado resuelto.

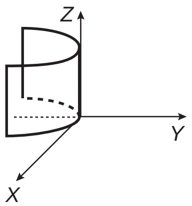
b)



c)



d)



15. *a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$

c) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$

d) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$

16. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$

17. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$

18. *a*) $x^2 + y^2 + z^2 = -5$. No es una esfera.

b) Esfera de centro (0, 0, 0) y radio 5.

c) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = -2$. No es una esfera.

d) Esfera de centro (0, 1, 0) y radio 3.

19. Es exterior.

20. El plano es secante a la esfera.

21. $P\left(\dfrac{1 + \sqrt{10}}{3}, \dfrac{2 - \sqrt{10}}{3}, \dfrac{1 + \sqrt{10}}{3}\right)$

$Q\left(\dfrac{1 - \sqrt{10}}{3}, \dfrac{2 + \sqrt{10}}{3}, \dfrac{1 + \sqrt{10}}{3}\right)$

22. $x = 1$

23. $z = -2$; $z = 2$

● Problemas

1. *a*) $2x + y - 2 = 0$

b) $x + y - 1 = 0$

2. $2x(x + y) = (x + y)^2 + 4$. Son la misma curva.

3. $\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \operatorname{sen} t \end{cases}$

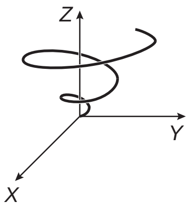
4. $\dfrac{(x - 2)^2}{3^2} + \dfrac{(y - 1)^2}{2^2} = 1$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{2t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

6. Problema resuelto.

7. $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$

8.



Es una hélice que se va separando cada vez más del eje *Z*.

9. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$

10. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$

11. $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{4}{3}$

12. $Q(-1, -1, -1)$

13. $V = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{8}$

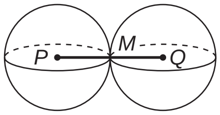
14. $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad Q\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$

15. El problema tiene realmente infinitas soluciones, todas las esferas centradas en algún punto de la perpendicular al plano por el punto *P*(1, 0, 0).

16. Punto medio: *M*(2, 3, 2)

Esferas: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 27$

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 7)^2 = 27$



Las dos tienen el mismo tamaño.

17. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 27$

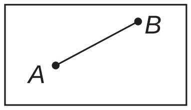
18. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5$

19. $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 13$

20. Máxima distancia $= \dfrac{10\sqrt{3}+6}{3}$

● Cajón de Sastre

Si desarrollamos el cilindro, obtenemos un rectángulo.



Entonces la distancia más corta es una recta, que al enrollarla de nuevo, se convierte en un trozo de hélice.

Unidad

9 Límites y continuidad

● Actividades

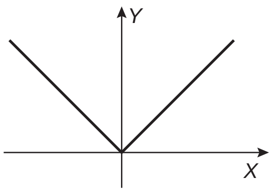
1. *a*) $\mathbb{R}$ *b*) $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

c) $[-1, +\infty)$ *d*) $\mathbb{R}$

e) $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

f) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

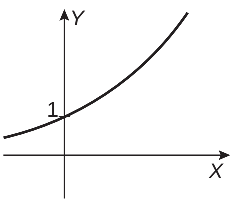
2. *a*)



dom $(f) = \mathbb{R}$

im $(f) = [0, +\infty)$

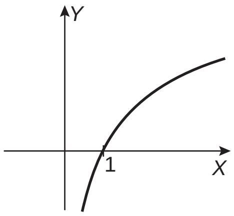
b)



dom $(f) = \mathbb{R}$

im $(f) = (0, +\infty)$

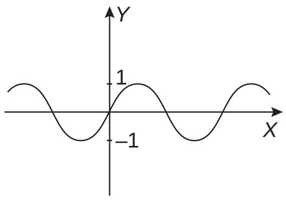
c)



dom $(f) = (0, +\infty)$

im $(f) = \mathbb{R}$

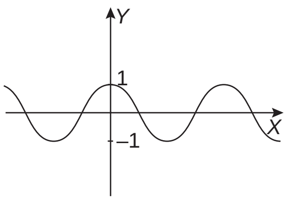
d)



dom $(f) = \mathbb{R}$

im $(f) = [-1, 1]$

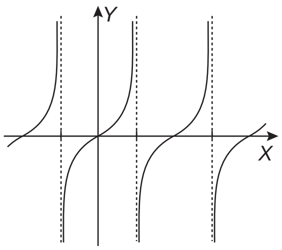
e)



dom $(f) = \mathbb{R}$

im $(f) = [-1, 1]$

f)



dom $(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k \text{ entero}\right\}$

im $(f) = \mathbb{R}$

3. *a*) Creciente. Acotada inferior y superiormente.

b) Decreciente. Acotada superiormente.

c) Creciente. Acotada inferiormente.

d) Decreciente. Acotada inferior y superiormente.

e) Decreciente. Acotada inferior y superiormente.

4. *a*) $+\infty$ *b*) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

c) 0 *d*) ∞ *e*) 0

5. *a*) $+\infty$ *b*) $\frac{2}{3}$

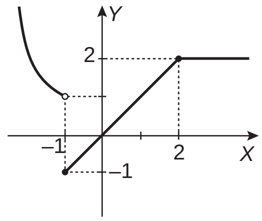
c) $-\infty$ *d*) $-\frac{3}{2}$

6. *a*) $-\infty$ *b*) $+\infty$

7. *a*) 0 *b*) 1 *c*) ∞

d) e^2

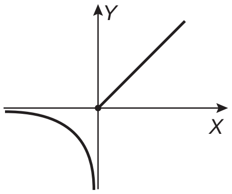
8.



$\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

9.



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

No existe

10. *a*) $-\frac{3}{2}$. No hay indeterminación.

b) 2. No hay indeterminación.

c) 0. No hay indeterminación.

d) No existe y tampoco hay indeterminación.

11. *a*) 12 *b*) $\frac{1}{4}$ *c*) $\frac{1}{2}$

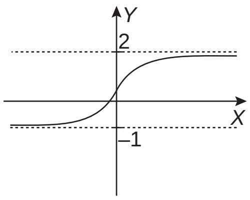
d) No existe *e*) 8 *f*) 4

12. *a*) e *b*) 0 *c*) 125 *d*) e^2

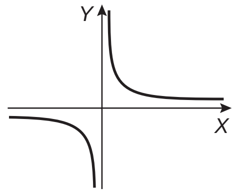
13. *a*) Por la izquierda: 0. Por la derecha: $+\infty$

b) 0

14. Por ejemplo, la gráfica siguiente:



15.

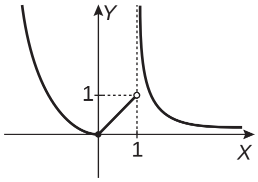


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

16. *a*) 0 *b*) $\frac{1}{3}$ *c*) 0 *d*) e^3

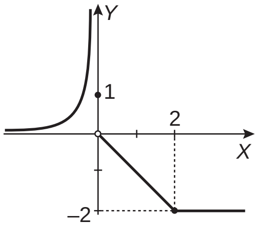
e) e^{-1} *f*) 0 *g*) 0

17.



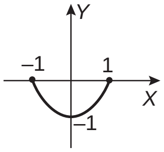
Continua en 0. Discontinuidad de salto infinito en 1.

18.



Discontinuidad de salto infinito en 1. Continua en 2.

19.



Cota superior 0. Cota inferior –1.

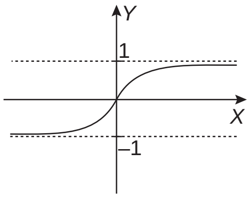
20. *a*) Continua y acotada.

b) Continua pero no acotada.

c) Continua y acotada.

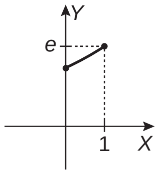
d) Continua pero no acotada.

21.



22. La gráfica anterior.

23.



Máximo en $x = 1$

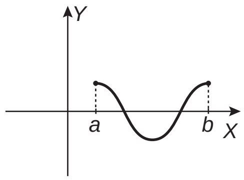
Mínimo en $x = 0$

24. Por ejemplo, en $[-2, 0]$ y en $[0, 2]$.

25. No, porque no es continua en $\frac{\pi}{2}$.

26. $c = 0{,}7390851$.

27.



● Ejercicios

1. *a*) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

b) $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

c) $\text{dom}(h) = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

d) $\text{dom}(p) = \mathbb{R} - \{0\}$.

2. *a*) $\text{dom}(f) = (-3, +\infty)$.

b) $\text{dom}(g) = (0, +\infty)$.

c) $\text{dom}(h) = \mathbb{R} - \{2\}$.

d) $\text{dom}(p) = \mathbb{R} - \{0\}$.

3. *a*) Decreciente. Cota superior $\frac{1}{2}$. Cota inferior 0.

b) Decreciente. Cota superior 1. Cota inferior 0.

c) Decreciente. Cota superior 2. Cota inferior 1.

d) No monótona. Cota superior 1. Cota inferior –1.

4. *a*) $-\infty$ *b*) $-\frac{7}{8}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *d*) $\frac{2}{3}$

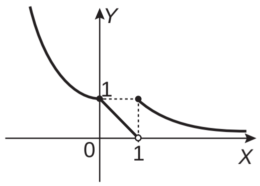
5. *a*) $-\infty$ *b*) 0

c) $-\infty$ *d*) 0

6. *a*) e^2. *b*) $e^{1/4}$

c) $2^{2/3}$ *d*) 1

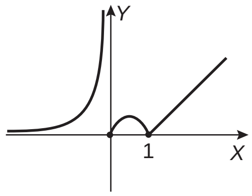
7.



$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe

8.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

9. *a*) $\frac{1}{4}$ *b*) $\frac{2}{3}$

c) Sólo existe por la derecha: 0

d) No existe

10. *a*) No existe *b*) e^2

c) e *d*) 2

11. *a*) 0 *b*) 0

c) e^{-1} *d*) 0

12. *a*) $y = 1$ *b*) $y = 1$

c) No tiene *d*) $y = 0$

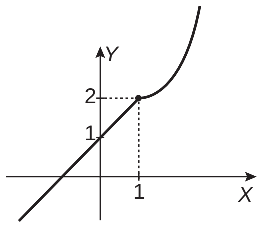
13. *a*) Discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 0$.

b) Continua en $x = 0$. Discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

14. Discontinuidad inevitable de salto infinito en 0.

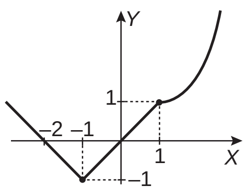
15. Ejercicio resuelto.

16.



$a = -2$

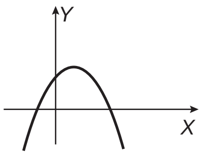
17.



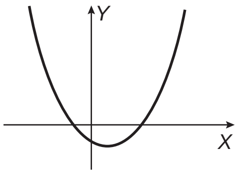
$a = 1$; $b = 0$

18. Máximo en $x = 1$. Mínimo en $x = -1$.

19.



20.



21. No, porque no es continua en $\pi/2$.

22. No, porque no cambia de signo.

23. Aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[7/2, 5]$.

24. *a*) No *b*) Sí *c*) Sí *d*) Sí

25. *a*) Máximo absoluto en $x = -1$. No tiene mínimo absoluto.

b) Máximo absoluto en $x = 0$. Mínimos absolutos en $x = 1$, $x = -1$.

● Problemas

1. $a_4 = 16$, pero $a_5 = 21$, y no 32 como cabría esperar.

2. $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

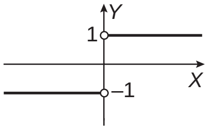
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

3. *a*) $1, \dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}, \dfrac{689}{200}, \dfrac{991}{319}$

b) Parecen aproximarse a un número menor que 3.

c) $L = 2$

4.



dom $(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

No se puede asignar ningún valor.

5. $1/2$

6. Si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = +\infty$. Entonces, existe k tal que $f(k) > 0$. Análogamente, $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$, por lo que existe m tal que $f(m) < 0$. Aplicar el teorema de Bolzano en $[m, k]$.

7. No

8. Aplicar el teorema de Bolzano en $[-1, 1]$. Además, $0^{20} - \text{sen } 0 = 0$.

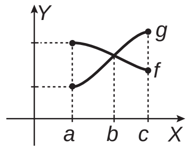
9. Aplicar el teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - 2$ en $[0, \pi]$.

10. Problema resuelto.

11. Aplicar el teorema de los valores intermedios a f en $[1, 2]$.

12. Aplicar el teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - x$ en $[0, 1]$.

13. Interpretación gráfica:



14. No se puede aplicar. Corta en ± 2. No contradice, porque es una condición suficiente, no necesaria.

15. $c = 2{,}153292364$.

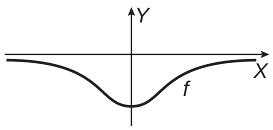
16. $x = -0{,}8721040388$.

17. $c = 0{,}567143$.

18. $c = 0{,}567143$.

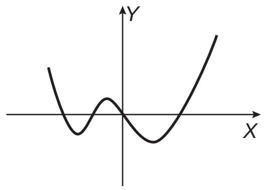
19. $c = 1{,}309799589$.

20.

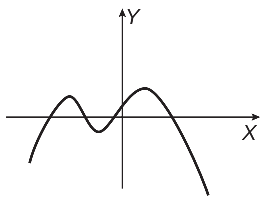


21. Utilizar el mismo argumento que en el problema 6.

22.



23.



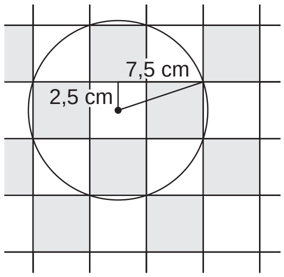
24. Utilizar el mismo argumento que en problema 6.

25. Aplicar el problema 13.

26. $P(0) = -5$; $P(3) = 7$. Aplicar el teorema de los valores intermedios en $[0, 3]$.

27. Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x - \text{tg}\, x$ en $[\pi, 3\pi/2]$.

● Cajón de sastre



El mayor radio es $r = \sqrt{7{,}5^2 + 2{,}5^2} = 7{,}9057$ cm.

Unidad 10 Derivadas

● Actividades

1. *a*) $-\dfrac{1}{2}$ *b*) 1

2. No

3. *a*) $f'(2) = -1$; $f'(3) = -1$

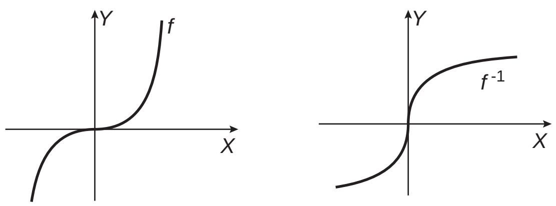
b) $f'(-2) = -4$ *c*) $\dfrac{df}{dx}(1) = 6$

d) $\dfrac{df}{dx}(2) = \dfrac{-3}{16}$

4. *a*) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $y = -2x + 3$

b) $y = 0$; $x = 0$

5.



Tangente a f^{-1}: $x = 0$. Normal: $y = 0$.

6. *a*) $f'(x) = 3x^2$ *b*) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ *d*) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

7. *a*) $y' = 0$ *b*) $y' = 6x^5$

c) $y' = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ *d*) $y' = \dfrac{3}{4}x^{-1/4}$

e) $y' = \dfrac{1}{(\ln 3)\, x}$ *f*) $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

8. *a*) $y' = x^2 e^x (3 + x)$

b) $y' = \dfrac{-18}{x^{10}}$ *c*) $y' = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$

d) $y' = \dfrac{-x \,\text{sen}\, x - \cos x + 1}{(x-1)^2}$

e) $y' = 4 + 3x^{-4}$

9. $(\text{arc sen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\text{arc cos}\, x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. *a*) $y' = \cos(x^3 - 7x) \cdot (3x^2 - 7)$

b) $y' = \dfrac{5x^4}{x^5 + 1}$

c) $y' = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x(x + \sqrt{x})}}$

d) $y' = e^{e^x} \cdot e^x$

11. a) $y' = (\text{sen}\, x)^{\cos x - 1} \cdot [\cos^2 x - \text{sen}^2 x \cdot \ln(\text{sen}\, x)]$

b) $y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$

12. Continua pero no derivable en $x = 1$.

13. No

14. Continua y derivable.

15. Continua y derivable si $a = 2$ y $b = -1$.

16. Continua si $a = 1$. No derivable.

17. $v = 9{,}86$ m/min. $a = 0{,}046$ m/min^2.

18. $M'(1) = 0{,}2$ partes por millón/año. Tasa de variación media = 0,15 partes por millón/año.

● Ejercicios

1. a) $\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{4}{\pi}$

c) e^{-1} d) $\dfrac{\sqrt{10} - 1}{9}$

2. a) $f'(2) = 160$ b) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

c) $f'(2) = \dfrac{1}{9}$ d) $f'(3) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3. a) $x = -1$. Tangente: $y = -x - 2$. Normal: $y = x$.

$x = 1$. Tangente: $y = -x + 2$. Normal: $y = x$.

b) Tangente: $y = 0$. Normal: $x = 0$.

c) Tangente: $y = -2x$. Normal: $y = \dfrac{1}{2}x$.

d) En todos los puntos la tangente es $y = 3x$.

Normal: en $x = -1$, $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{3}$; en $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{3}x$; en $x = 1$, $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$.

4. a) $y' = 0$ b) $y' = -\dfrac{9}{x^4}$.

c) $y' = 5\cos x$. d) $y' = \dfrac{x+1}{x-1}$.

5. a) $y' = 3x^2 + \cos x - x\,\text{sen}\, x$

b) $y' = \dfrac{e^x(x+2)}{(x+3)^2}$ c) $y' = \dfrac{-(1+x)}{2x\sqrt{x}}$

d) $y' = e^x(x^2 + 2x)$

6. a) $y' = \dfrac{1 + \cos x}{2\sqrt{x + \text{sen}\, x}}$ b) $y' = -\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $y' = \dfrac{1}{x \ln x} - \dfrac{1}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \dfrac{2}{x}$

d) $y' = \dfrac{1}{x \ln x} - \dfrac{1}{x}$

7. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen h}\,(x)) = \cos \text{h}\,(x)$

$\dfrac{d}{dx}(\cos \text{h}\,(x)) = \text{sen h}\,(x)$

$\dfrac{d}{dx}(\text{tg h}\,(x)) = 1 + \text{tg h}^2\,(x)$

8. a) $f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$

b) $g'(x) = (x+1)^{x+1} \cdot [(x+1) \cdot \ln(x+2) + x + 2]$

c) $h'(x) = (2\,\text{sen}\, x + x)^{x-1}$
$\cdot [\ln(2\,\text{sen}\, x + x) \cdot (2\,\text{sen}\, x + x) + x(2\cos x + 1)]$

d) $p'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right)$

9. Problema resuelto.

10. $f^n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

11. Continua pero no derivable.

12. Problema resuelto.

13. Continua si $a = 0$, pero no hay ninguno para que sea derivable.

14. $c = 1$; $b = -\dfrac{1}{2}$

15. $a = -1$; $b = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$. Pero no es derivable ni en 0 ni en π.

16. $m = 4$; $n = -1$

17. Si $a = 0$, $b = 4$, continua. Derivable en $x = 0$. No derivable en $x = 2$.

18. $a = 3$; $b = -3$

19. $a = 1$; $b = 0$

20. $a = 2$; $b = 2$

21. $v(t) = 4t^3 - 9t^2 + 6t$

$a(t) = 12t^2 - 18t + 6$

Problemas

1. t.v.m. $= \dfrac{b^3 - a^3}{b - a} > 0$; ya que $b - a > 0$; $b^3 - a^3 > 0$.
El único punto en el que la derivada es nula es 0.

2. f par, t.v.m. $= 0$.
g impar, t.v.m. $= \dfrac{g(a)}{a}$.

3. 1

4. 1

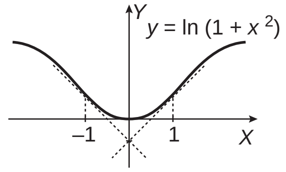
5. $x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$

6. $(2, 4)$. Recta normal: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$

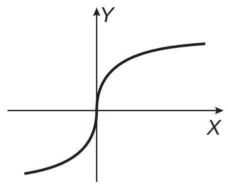
7. $x_0 = 1$

8. $\alpha = 1$

9. $x_0 = -1$



10. No hay derivada en 0. La tangente es vertical.



11. Se cortan en $x_0 = 0$, y las dos rectas tangentes son $y = x + 1$; $y = -x + 1$.

12. El triángulo siempre tiene vértices $O\ (0, 0)$; $P\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$; $Q\ (2a, 0)$. Por tanto, es isósceles.

13. Recta tangente: $y = -5x + 22$. Se para en el punto $(4, 2)$.

14. $a = -4$, $b = 3$. El teorema del valor medio se verifica en $c = \pm\dfrac{13}{10}$.

15. $f'(x) = nx^{n-1}$

16. *a*) Derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en 0.

b) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 4 & \text{si } x < 0 \\ -3x^2 + 8x - 4 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 3x^2 - 8x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

17. Con $k = 3$, es continua y derivable. Para calcular $f'(0)$, usar la definición.

18. Problema resuelto.

19. Continua pero no derivable en $x = 0$.

20. *a*) $f'(0) = k$

b) $f'(x) = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) No, porque $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ no existe.

21. Por ejemplo, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

No son continuas ni derivables en $x_0 = 0$. Sin embargo, $h(x) = f(x) + g(x) = x + 1$.

22. $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

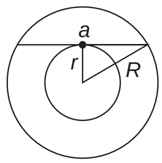
23. La distancia varía con el tiempo
$d(t) = \sqrt{60^2 + 45^2} \cdot t$
La tasa de variación, $d'(t) = \sqrt{60^2 + 45^2}$

24. $\dfrac{dA}{dt} = -12\sqrt[3]{30}$ cm²/hora.

Márgenes

— Página 243.
En el punto $(f(a), a)$ tendrá tangente vertical.

Cajón de sastre



$R^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + r^2$

$R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{4}$

Área $= \pi\,(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi a^2}{4}$

Unidad

11 Estudio local de funciones. Optimización

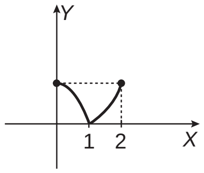
Actividades

1. Sí. $c = \dfrac{\pi}{2}$.

2. No, porque no es derivable en 0.

3. Aplicar el teorema de Bolzano en [–1, 0] y el teorema de Rolle.

4. $f(0) = f(\sqrt{2}) = 1$. No contradice el teorema de Rolle, porque no es derivable en 1.



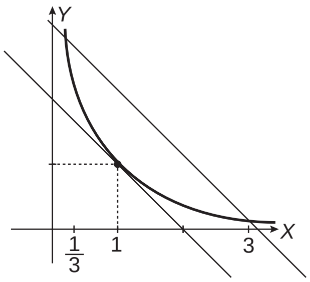
5. $c = \dfrac{49}{4}$

6. $c = \dfrac{1}{2}$. Recta tangente: $y = x + \dfrac{3}{4}$

7. Aplicando el teorema del valor medio a f en $[a, a + h]$, se obtiene que existe $c \in (a, a + h)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

8. $c = 1$. Recta tangente $y = -x + 2$



9. Mínimo en $x_0 = 0$.

10. $f(x) = x^3$. No tiene extremos.

$g(x) = -x^8$. Máximo en $x_0 = 0$.

11. *a*) –2 *b*) 1 *c*) 0 *d*) 0

12. *a*) 1 *b*) 0 *c*) –2 *d*) 0

13. *a*) 1 *b*) e^2 *c*) 1 *d*) $e^{-1/2}$

14. Mínimo en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Máximo en 10.

15. Los mínimos son 6 y 12.

16. Base = $10\sqrt{2}$. Altura = $5\sqrt{2}$.

17. Radio de la base = $5\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. Altura = $\dfrac{40}{\pi}\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{4}}$.

18. A 12 y 18 metros, respectivamente.

Ejercicios

1. $c = 1/3$.

2. No es derivable en –1, 0, 1. No se puede aplicar en [–1, 1]. Sí, en [–1, 0]. $c = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3. Sí, se puede aplicar, $c = \pi$.

4. Sí, se puede aplicar, $c = e^{-1}$.

5. Ejercicio resuelto.

6. *a*) 0 *b*) –2 *c*) 1 *d*) $\dfrac{1}{2}$

7. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0 *d*) No existe

8. 1

9. *a*) e^8 *b*) 1 *c*) e^2 *d*) 1

10. Ejercicio resuelto.

11. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^{-1/x}} = 1$

12. *a*) 1 *b*) 0 *c*) 0 *d*) $e^{3/2}$

13. Porque no es indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x} = 1$.

14. f: Mínimo en $x = 0$. Máximo en $x = \dfrac{100}{101}$

g: Máximo en $x = \dfrac{101}{102}$. No hay mínimo.

15. Máximo en $x = 0$. Mínimo en $x = \pi$.

16. Mínimo en $x = \frac{-10}{10}$. Máximo en $x = 0$.

17. Mínimos en $x = -1$, $x = 1$. Máximo en $x = 0$.

● Problemas

1. Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^5 + x - 1$ en $[0,1]$ y el teorema de Rolle.

2. Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x^{1995} + x + 1$ en $[-1,0]$ y el teorema de Rolle.

3. Suponer que tiene tres y aplicar el teorema de Rolle.

4. Aplicar el teorema de Bolzano a

$$f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1 \text{ en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

y el teorema de Rolle.

5. Si $f'(x) > 0$, f es estrictamente creciente. Si $f(x) = 2x - e^{-2x} + 1$, $f'(x) = 2 + 2e^{-2x} > 0$ para todo x.

6. $m = 28$; $n = -8$; $c = 3$.

7. Si $e(t)$ es el espacio recorrido, existe c tal que $e'(c)$ = Velocidad media = 75 km/h.

8. $h(a) = h(b) = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b)$. Aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

$$h'(c) = f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(c) \cdot [f(b) - f(a)].$$

9. f es constante en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

10. $\alpha = 0$. Límite = 2.

11. Aplicar la regla d L'Hôpital n veces.

12. $2 \times 2 \times 2$ dm^3.

13. Mínimo en t = 6. Máximos en $t = 2$, $t = 10$.

14. *a*) Aumenta en $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Disminuye en $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Es nula en $t = 0$, $t = 3$.

b) El máximo se alcanza en $t = \frac{3}{2}$.

15. Problema resuelto.

16. $x = 5$ metros.

17. *a*) $d = \sqrt{(40 - 60t)^2 + (30 - 120t)^2}$

b) Mínimo en $t = 1/3$.

Distancia mínima. = $10\sqrt{5}$ km

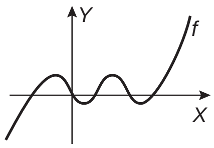
18. Lado de la base: $\sqrt{\frac{27}{2}}$ dm. Altura: 2 dm.

19. $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $y = \sqrt{2}$. Área = 3.

● Márgenes

— Página 254.

El máximo absoluto no es el mayor de los máximos relativos, porque una función puede tener máximos relativos sin máximo absoluto.



Lo mismo con los mínimos.

— Página 264.

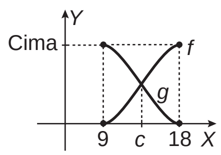
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\ln(e^x - 1)}}$$

sólo se pide por la derecha porque $\ln(e^x - 1)$ no existe para x < 0.

● Cajón de sastre

El hombre que subió y bajó de la montaña

Sea $f(x)$ el camino recorrido por el hombre cuando sube $9 \le x \le 18$ horas. Sea $g(x)$ el camino recorrido por el hombre cuando baja. Gráficamente:



Entonces, a la hora c, se encuentra en $f(c) = g(c)$ cuando sube y cuando baja.

Unidad 12 Representación de funciones

Actividades

1. *a*) dom (f) = $[-1, 1]$.

b) dom (f) = $(-\infty, 0)$.

2. *a*) dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$. No tiene puntos de corte. Es par y siempre positiva.

b) dom (f) = $\mathbb{R}$. Puntos de corte: $(0, -1)$ y $(1, 0)$. No tiene simetrías. Es negativa en $(-\infty, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$.

3. Par.

4. No es periódica.

5. Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

6. Creciente en $(-\infty, 0)$. Decreciente en $(0, +\infty)$. Máximo en $(0, 1)$.

7. En $(-\infty, 0)$ es creciente. En $x = 0$ hay un máximo.

8. *a*) Decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

Creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

b) Creciente en $(-\infty, 0)$. Decreciente en $(0, +\infty)$. No tiene extremos.

c) Creciente en $\mathbb{R}$. No tiene extremos.

d) Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$. Mínimo en $(-1, -e^{-1})$.

e) Decreciente en $(-\infty, 0)$. Creciente en $(0, +\infty)$. No tiene extremos. Atención: $\ln(x^2)$ está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$. $\ln(x^2) \neq 2\ln(x)$.

f) Creciente en $(-\infty, 0)$. Decreciente en $(0, +\infty)$. Máximo en $(0, 1)$.

9. Todos sus puntos críticos son puntos de inflexión. Observar la gráfica de $f'(x) = 1 + \cos x$.

10. Decreciente en $(0, 1)$. Creciente en $(1, +\infty)$. Mínimo en $(1, 0)$.

11. Cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Convexa en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Cóncava en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Puntos de inflexión en $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$.

12. No tiene puntos de inflexión.

13. Convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Cóncava en $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Convexa en $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right)$.

Puntos de inflexión en $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\dfrac{20}{9}\right)$.

14. *a*) Vertical en $x = 2$. Horizontal en $y = 1$.

b) Verticales en $x = -2$, $x = 2$. Horizontal en $y = 0$.

c) No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

d) Verticales en $x = -2$, $x = 3$. Horizontal en $y = 0$.

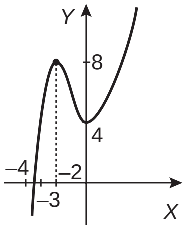
15. *a*) $y = 2x + 1$

b) $y = x$

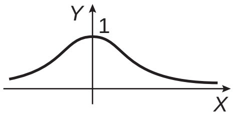
c) $y = x - 1$

d) $y = x - 3$

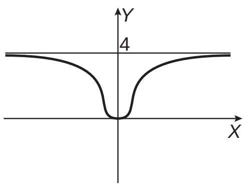
16. *a*)



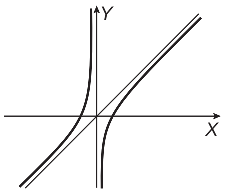
b)



c)



d)



Ejercicios

1. $f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. dom $(f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

2. $y' = 2 - \operatorname{sen} x$, no se anula nunca.

3. $x = \dfrac{\pi}{4}$, máximo absoluto. $x = \dfrac{5\pi}{4}$, mínimo absoluto. $x = 0$, mínimo relativo. $x = 2\pi$, máximo relativo.

4. $x = 0$, $x = 2\pi$, máximos absolutos.

$x = \dfrac{2\pi}{3}$, $x = \dfrac{4\pi}{3}$, mínimos absolutos.

$x = \pi$, máximo relativo.

5. Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, 1)$. Decreciente en $(1, +\infty)$.

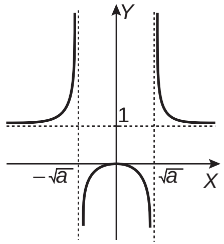
6. Máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

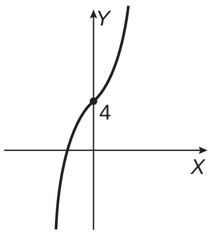
Punto de inflexión en $(0, 0)$.

7. Ejercicio resuelto.

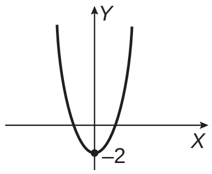
8.



9.

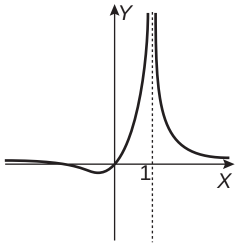


10.

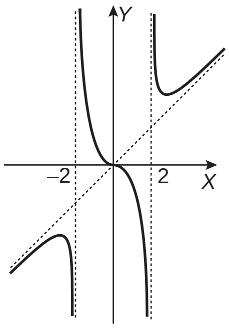


11. Decreciente en $(-\infty, -2)$. Creciente en $(-2, 0)$. Creciente en $(0, +\infty)$.

12.

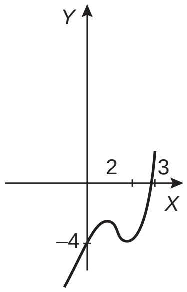


13.

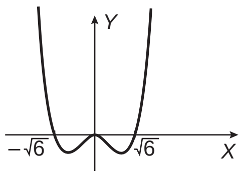


14. Ejercicio resuelto.

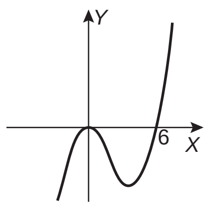
15.



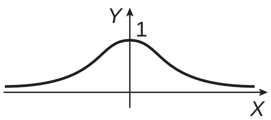
16.



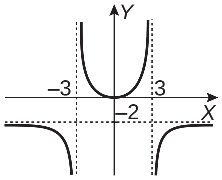
17.



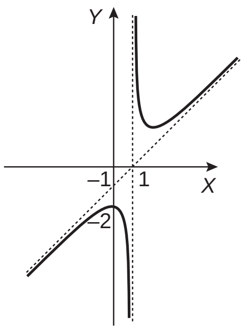
18.



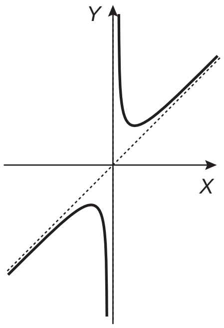
19.



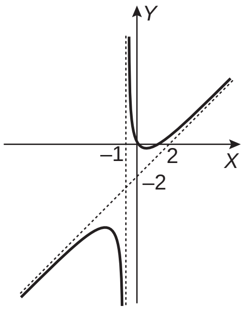
20.



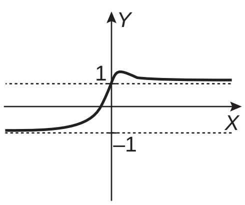
21.



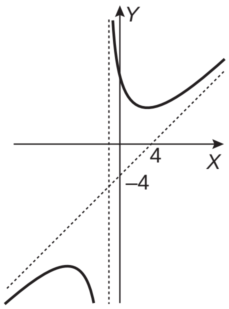
22.



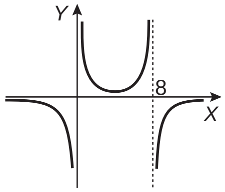
23.



24.



25.



● Problemas

1. $c > \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Es el valor máximo de la función $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

2. Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$. Mínimo en $(-1, \sqrt[3]{2})$.

3. $a = -3$, $b = 3$.

4. $a = -9$, $b = 24$, $c = -16$.

5. No es extremo.

6. Creciente en todo $\mathbb{R}$.

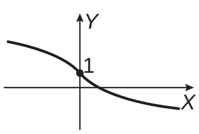
7. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$.

8. *a*) Si $m < 1$, $f''(1) = m\,(m-1) < 0$.

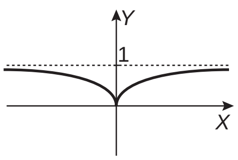
b) Si $m > 1$, $f''(1) = m\,(m-1) > 0$.

9. $f''(x) = 6ax + 2b = 0$, tiene solución única.

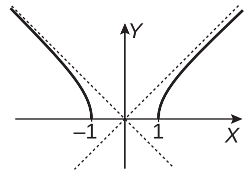
10.



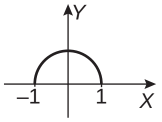
11. Simetría par.



12.

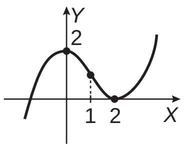


13.

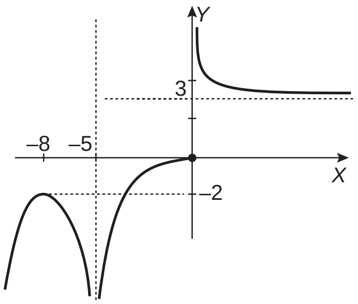


14. No es posible, ya que debería ser decreciente (estrictamente) y cóncava, por lo que cortaría al eje X.

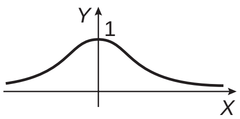
15.



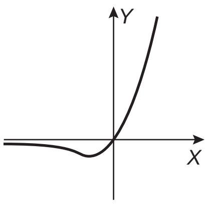
16.



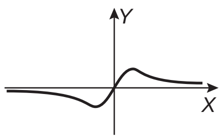
17.



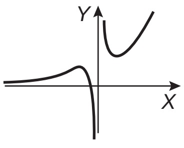
18.



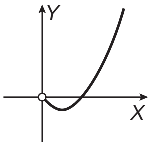
19.



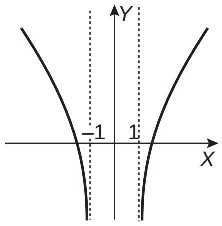
20.



21.

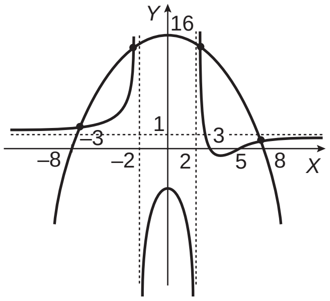


22.



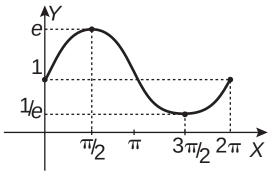
23. Problema resuelto.

24.

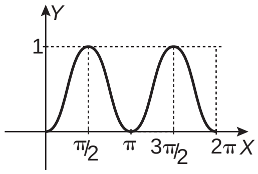


La ecuación tiene 4 soluciones, que son los 4 puntos de corte con las dos curvas.

25.



26.



● Márgenes

— Página 274.

No puede cortar en dos puntos al eje Y porque no sería una función.

— Página 282.

- Puede tener horizontal y oblicua siempre y cuando no estén al mismo lado, es decir, una debe estar a la derecha y la otra a la izquierda.

- Una función $f(x) = ax + b$ es una recta oblicua y, por tanto, su propia asíntota.

● Cajón de sastre

El tiempo en recorrerlo es infinito. Se puede comprobar que el espacio recorrido está dado por:

$$x(t) = 100 \cdot (1 - e^{-t})$$

que verifica la ecuación:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 100 - x(t).$$

Unidad 13 La integral

● Actividades

1. $F(x) = x^2 - x$; $G(x) = = x^2 - x - 2$

Difieren en el término independiente.

2. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$

3. $F(x) = \text{tg}^2\, x + 0$

4. $F(x) = -\text{sen}\, x + C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $F(x) = \int_1^x 2\ dt = 2x - 2 \quad \forall x \in [1, 5].$

6. $F(x) = \begin{cases} x & \forall x \in [0, 2). \\ 3x - 4 & \forall x \in [2, 4] \end{cases}$

7. $In = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left[2\left(1 + \frac{2}{n}(i-1)\right) + 1 \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n} + \frac{8}{n^2}(i-1) \right) =$$

$$= 6 + \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 6 + \frac{8n-8}{2n} = 10 - \frac{4}{n}$$

$$\int_1^3 (2t+1)\, dt = \lim_{n \to \infty} In = 10$$

8. $F'(x) = 2xe^{-x^4}$

Crece en $(0, +\infty)$

Decrece en $(-\infty, 0)$

Presenta un mínimo en $(0, 0)$.

9. (*Errata en el libro del alumno, la función es:*

$F(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)}\, dx$)

Los puntos en los que se anula su derivada son $x = 2$ y $x = 3$.

10. (*Errata en el libro del alumno, el límite es:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 \cdot \ln(1 + 4t^2) dt}{x^5} \Bigg)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 \cdot \ln(1 + 4t^2) dt}{x^5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \ln(1 + 4x^2)}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 4x^2)}{5x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5}$$

11. *a*) 10; *b*) 1/4; *c*) 16/3; *d*) 1

12. *a*) 9/2; *b*) 1/12; *c*) 1; *d*) 2

13. $F'(x) = 2x \cdot \int_0^x f(t)dt + x^2 \cdot f(x)$

14. $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sen}^2 t}}\, dt$

15. $\int_0^b \sqrt[n]{x}\, dx = \frac{n}{n+1} \cdot b \sqrt[n]{b}$

16. $F'(x) = 3x^2 \cdot \text{sen}^3 x^3$

17. $A = \dfrac{125}{3}\ u^2$

18. $A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \text{sen}\, x\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \text{sen}\, x - \cos x\, dx +$

$+ \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos x - \text{sen}\, x\, dx =$

$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2}\ u^2$

19. $A = \int_0^{\ln 3} (3 - e^x)\, dx + \int_{\ln 3}^{2} (e^x - 3)\, dx =$

$= 3 \ln 3 - 2 + 3 \ln 3 + e^2 - 9 = 6 \ln 3 + e^2 - 11$

20. $A = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx - \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\, dx \right| +$

$+ \int_2^4 (x^2 - 3x + 2)\, dx = \dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{14}{3} = \dfrac{17}{3}\ u^2$

21. $V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\, dx = \int_{-R}^{R} R^2 - x^2\, dx = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

22. $V = \pi \int_0^4 \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)^2 dx = \dfrac{52\pi}{3}\ u^3$

• Ejercicios

1. *a*) $\dfrac{1}{6}u^2$; *b*) $\dfrac{6}{5}u^2$; *c*) $\dfrac{b^2}{2a}u^2$

2. *a*) $\dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{2}{3}$

b) $-\dfrac{x^2}{5} + x - \dfrac{6}{5}$

c) $\dfrac{ax^2}{2} - bx + \dfrac{b^2}{2a}$

3. *a*) $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + c$

b) $F(x) = \ln x + c$ *c*) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$

d) $F(x) = 3\sqrt[3]{x} + c$ *e*) $F(x) = e^x + c$

f) $F(x) = \text{sen}\, x + c$ *g*) $F(x) = \text{tg}\,(x) + c$

h) $F(x) = \dfrac{1}{\cos x} + c$ *i*) $F(x) = \text{arc sen}\, x + c$

j) $F(x) = \text{arc tg}\, x + c$

4. *a*) $F(x) = \dfrac{2(x+1)^{3/2}}{3} + \dfrac{2}{3}$

b) $F(x) = 2 \ln (x + 1)$

c) $F(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

5. *a*) $e(t) = \dfrac{t^3}{3} - t^2 + t + 3$

b) $e(t) = -\text{sen}\,(3t + \pi)$

c) $\vec{r}(t) = (t^2 + t + 1, 2t + 1)$

d) $\vec{r}(t) = (2 \cos 3t, 2\, \text{sen}\, 3t)$

6. *a*) $\dfrac{21}{2}$; *b*) $\dfrac{20}{3}$; *c*) $\dfrac{3}{\ln 2}$; *d*) 13

7. *a*) $\lim_{n\to\infty} In = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{5}{n} \cdot f(x_{i-1}) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n+5}{5}} \frac{5}{n} \cdot 2 + \sum_{i=\frac{n+5}{5}}^{\frac{4n+5}{5}} \frac{5}{n} \cdot 5 - \sum_{i=\frac{4n+5}{5}}^{n} \frac{5}{n} \cdot -3 \right) =$$

$= 14$

$\lim_{n\to\infty} Sn =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n/5} \frac{5}{n} \cdot 2 + \sum_{i=n/5}^{4n/5} \frac{5}{n} \cdot 5 + \sum_{i=4n/5}^{n} \frac{5}{n} \cdot -3 \right) =$$

$= 14$

b) $$In = \sum_{i=1}^{\frac{n+2}{2}} \frac{2}{n} \left(2 \cdot \left(\frac{2}{n}(i-1) \right) - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n} \frac{2}{n} \left(\left(\frac{2}{n}\ (i-1) \right)^2 - 1 \right)$$

$\lim_{n\to\infty} In = \dfrac{4}{3}$

$$Sn = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{2}{n} \left(2 \cdot \left(\frac{2}{n}\, i \right) - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=n/2}^{n} \frac{2}{n} \left(\left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 1 \right)$$

$\lim_{n\to\infty} Sn = \dfrac{4}{3}$

8. Ejercicio resuelto.

9. *a*) (*Errata en el libro del alumno. Debe decir* $\forall x \neq 2$,)

$F'(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$

b) $F'(x) = 4x^3 \cos x$

c) $F'(x) = 6x^3 e^x - 3xe^{\sqrt{x}}$

d) $F'(x) = \dfrac{x \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} - \dfrac{x^2 e^x}{\cos x}$

10. *a)* $F'(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$; $F'(x) = 0$ en $x = 2$

$F''(2) = 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo.

b) $F'(x) = \dfrac{2 \text{ sen } x \cos x}{\sqrt{1 + \text{sen}^2 x}}$;

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ x = \pi/2 \rightarrow \text{máximo} \\ x = \pi \rightarrow \text{mínimo} \\ x = 3\pi/2 \rightarrow \text{máximo} \end{cases}$$

11. *a)* $\dfrac{21}{2}$; *b)* $\dfrac{20}{3}$; *c)* $\dfrac{3}{\ln 2}$; *d)* $\dfrac{\pi}{3}$

12. *a)* $A = \int_0^2 t^3\, dt - \int_{-1}^0 t^3\, dt = \dfrac{17}{4}\, u^2$

b) $A = \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\, dt = 2\, u^2$

c) $A = \int_0^1 t^2 - 3t + 2\, dt + \int_2^5 t^2 - 3t + 2\, dt -$

$- \int_1^2 t^2 - 3t + 2\, dt = \dfrac{29}{2}\, u^2$

d) $A = -\int_{-\pi/4}^0 \text{tg } t\, dt + \int_0^{\pi/4} \text{tg } t\, dt = \ln 2\, u^2$

13. *a)* $A = \int_0^2 f(t) - g(t)\, dt = \int_0^2 2t - t^2\, dt = \dfrac{4}{3}\, u^2$

b) $A = \int_0^1 f(t) - g(t)\, dt = \int_0^1 t^2 - t^3\, dt = \dfrac{1}{12}\, u^2$

c) $A = \int_0^1 g(t) - f(t)\, dt = \int_0^1 \sqrt{t} - t^2\, dt = \dfrac{1}{3}\, u^2$

d) $A = 2\sqrt{2}\, u^2$

14. *a)* $A = 9\, u^2$

b) $A = \int_{-1}^0 t^2\, dt = \int_{-1}^0 t^3\, dt = \dfrac{1}{12}\, u^2$

c) $A = \int_2^4 6 - t - \dfrac{8}{t}\, dt = 6 - 8 \ln 2\, u^2$

d) $A = \int_0^1 e^t - e^t\, dt = e + e^{-1} - 2\, u^2$

● Problemas

1. $F(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right) + 2$

2. $F(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3x^3} - \dfrac{3}{4x^4}$

3. $f(x) = \int 3x^2 + 2x + 1\, dx = x^3 + x^2 + x + c$;

pasa por $P(1, 1)$; $c = -2$

$y = x^3 + x^2 + x - 2$

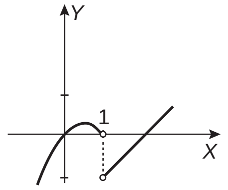
4. $A = \int_0^2 (3x - x^2)\, dx - \int_0^2 (x^2 - x)\, dx = \dfrac{8}{3}\, u^2$

5. $A = 2 \cdot \left(e^2 + \dfrac{1}{e^2} - 2\right)$

6. Espacio = 114 m

7. $A = \int_0^1 \left(4x - \dfrac{2}{3}x\right) dx + \int_1^3 \left(-x + 5 - \dfrac{2}{3}x\right) dx = 5u^2$

8. $F(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



9. $F(x) = x^3 + x - 4$

10. $\int_0^{\pi/a} \text{sen } (ax) \cdot \cos (ax)\, dx = 0$

11. $A = -\int_1^4 (x - 1)^2 (x - 4)\, dx = \dfrac{27}{4}\, u^2$

12. *a)* $A = 4 - \ln 3\, u^2$

b) $A = 20$

c) $A = \int_{-2}^2 8 - 2x^2 - x^2 + 4\, dx = 32\, u^2$

d) $A = \int_{-3}^2 9 - x^2 - (x + 3)\, dx = \dfrac{125}{6}\, u^2$

e) $A = \dfrac{16}{3}\, u^2$

f) $A = 2 \cdot \int_2^{2\sqrt{2}} [4x^2 - (x^4 - 4x^2)] dx = \dfrac{512\sqrt{2}}{15}\, u^2$

13. Problema resuelto.

14. $s = \int v\, dt$

$\int_0^2 \dfrac{3}{2} t + 1\, dt + \int_2^6 4\, dt = \int_6^9 -\dfrac{4}{3} t + 23\, dt =$

$= 5 + 16 + 6 = 27$ m

15. $W = \int_{20}^{40} 2 \cdot dV + \int_{40}^{80} \dfrac{80}{V}\, dV = 40 + 80 \ln 2 = 9\,668,6$ J

16. $m = \int_0^2 (500\,x + 1\,000) \cdot 10^{-4}\pi\, dx = 0{,}9425$ kg

17. $V = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$; $V_{\text{Tierra}} \approx 11{,}2$ km/s

18. $\vec{v} = (-1{,}2t + 300)\vec{i} - 9{,}8t\vec{j}$

$$\vec{r} = \left(\frac{-1{,}2t^2}{2} + 300t\right)\vec{i} + \left(\frac{9{,}8t^2}{2} - 10\,000\right)\vec{j}$$

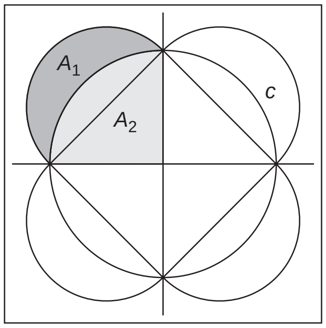
19. $W = \int_{t=0}^{t=10} F \cdot ds = \int_0^{10} (2t + 1)(t^2 + t)\, dt = 6\,050$ J

20. *a*) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^3 - 7x}{8} & 0 < x \leqslant 4 \\ 0 \quad x > 4 \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x/6 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x/3 - 1/6 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x/2 - 1/2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

● Cajón de sastre

Problema



Observa que el área A_1 es igual al área A_2.

En efecto, el área del cuadrante de circunferencia *c* es

$$\frac{\pi \cdot R^2}{4}$$

El lado del cuadrado inscrito en c es $l = R \cdot \sqrt{2}$, y el radio de la semicircunferencia que da origen a la lúnula es

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

El área del semicírculo es:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{\pi \cdot R^2}{4}$$

Como el cuadrante y el semicírculo tienen la misma área y tienen el segmento circular en común, las áreas A_1 y A_2 son iguales.

Unidad 14 Cálculo de primitivas

● Actividades

1. *a*) $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + \dfrac{5x^2}{2} + 3x + c$

b) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3x + \ln|x| + c$

c) $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

d) $\dfrac{-4}{x-1} + c$

e) $\dfrac{(\text{arc tg } x)^2}{2} + c$

f) $\dfrac{\ln^2 x}{2} + c$

g) $\dfrac{\text{arc sen}^2 x}{2} + c$

h) $-2\sqrt{\cos x} + c$

i) $\ln|\ln x| + c$

2. *a*) $e^{\text{sen } x} + c$

b) *Errata en el liro del alumno, debe ser:* $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

c) $x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$

d) $x - \frac{\ln(2e^{2x}+3)}{4} + c$

e) $\frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} + c$

f) $2e^{\sqrt{x}} + c$

g) $e^{\text{arc tg } x} + c$

h) Ojo, errata en el libro, debe ser:

$$\int \frac{\text{sen } e^x}{\sqrt{\cos e^x}} \cdot e^x\,dx$$

$$\int \frac{\text{sen } e^x}{\sqrt{\cos e^x}} \cdot e^x\,dx = -2\sqrt{\cos e^x} + c$$

i) $e^{\text{arc sen } x} + c$

j) $-e^{-\text{arc tg } x} + c$

3. *a*) $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$

b) $\frac{5 \cdot \text{sen } 3x}{3} + c$

c) $-\frac{\cos e^{2x}}{2} + c$

d) $\frac{1}{4\cos^4 x} + c$

e) $\frac{\text{tg}^4 x}{4} + c$

f) $2\sqrt{\text{sen}x + 1} + c$

g) $-\ln|\cos e^x| + c$

h) $\frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{x}{2} + c$

4. *a*) $\frac{\sqrt[3]{(3x+5)^4}}{4} + c$

b) $\ln|\text{sen } x - \cos x| + c$

c) $\ln|1 - \cos x| + c$

d) $3 \cdot \text{arc tg } e^x + c$

e) $\frac{\text{arc tg } x^3}{3} + c$

f) $2\text{ arc tg }(\sqrt{x}) + c$

g) $\frac{2(x^2 + 5x - 7)^{3/2}}{3} + c$

h) $\frac{1}{2}\text{ arc tg }\frac{\text{sen } x}{2} + c$

i) $3\sqrt[3]{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c$

5. *a*) $\ln|x^2 + x + 1| + c$

b) $$\frac{5\sqrt{3}\text{ arc tg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)}{3} +$$

$$+\frac{\ln|x^2 + x + 1|}{2} + c$$

c) $\text{tg } x^2 + c$

d) $\frac{\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{3}\right)}{6} + \text{c}$

e) $\frac{\text{arc tg}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}{2a^2} + c$

f) $\frac{-3^{1/x}}{\ln 3} + \text{c}$

g) $\text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{5}(x+2)}{5}\right) + c$

h) $(\text{arc sen }\sqrt{x})^2 + c$

i) $\frac{(e^x + 1)^5}{5} + c$

j) $-\cos(\ln x) + c$

6. *a*) $\frac{\text{sen}^4 x}{4} + c$

b) $\frac{1}{\cos x} + c$

c) $\frac{2 \cdot (\text{sen } x)^{5/2}}{5} + c$

d) $\frac{x - \text{sen } x \cdot \cos x}{2} + c$

e) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

f) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + c$

g) $\text{sen } x - \text{sen}^3 x + \frac{3}{5}\text{sen}^5 x - \frac{1}{7}\text{sen}^7 x + c$

h) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{2}{5}\text{sen}^5 x + \frac{1}{7}\text{sen}^7 x + c$

7. *a*) $\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + c$

b) $\frac{\text{sen } 6x}{12} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + c$

c) $\frac{\text{sen } x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + c$

8. *a*) $\cos x + x \cdot \text{sen } x + c$

b) $\ln|\cos x| + x\text{ tg } x + c$

c) $$\frac{1}{6}x^2(2x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - 1} -$$

$$-\frac{1}{30}(2x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - 1} + c$$

d) $\dfrac{x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} + c$

e) $e^{2x}\left(\dfrac{2\cos 3x + 3\operatorname{sen}(3x)}{13}\right) + c$

f) $x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + c$

g) $\dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$

h) $\dfrac{1}{2}x^3 \cos 2x + \dfrac{3}{4}x^2 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{3}{4} x \cos 2x -$

$- \dfrac{3}{8}\operatorname{sen} 2x + c$

i) $\dfrac{2}{15}\sqrt{x+1} \cdot (3x^2 - 4x + 8) + c$

j) $\dfrac{2}{9}x^3 (3x-2)^{3/2} - \dfrac{4}{45}x^2 (3x-2)^{5/2} +$

$+ \dfrac{16}{945} x (3x-2)^{7/2} - \dfrac{32}{25\,515}(3x-2)^{9/2} + c$

k) $\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \dfrac{1}{4}\cos^2 x + c$

l) $\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \dfrac{1}{4}\cos^2 x + c$

9. a) $2 \operatorname{arc\,tg} x + x \ln(x^2+1) - 2x + c$

b) $\dfrac{(5x+3)\ln(5x+3) - 5x}{10} + c$

c) $\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + c$

d) $\dfrac{\ln^2 x}{2} + c$

e) $\dfrac{(x^2+1)}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{2} + c$

f) $x \cdot \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + c$

g) $\dfrac{2x^2-1}{4}\operatorname{sen} x \cos x - \dfrac{x\cos^2 x}{2} +$

$+ \dfrac{x(2x^2+3)}{12} + c$

h) $-e^{-2x}\,\dfrac{(4x^3+6x^2+6x+3)}{8} + c$

10. a) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx =$

$= \int \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen} x]\,dx =$

$= -\dfrac{1}{10}\cos 5x - \dfrac{1}{2}\cos x + c$

b) $-\dfrac{2}{5}\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x - \dfrac{3}{5}\cos 2x \cdot \cos 3x + c$

11. a) $2\ln|x| + \ln|x+1| + c$

b) $\dfrac{2}{3}\ln|x+3| + \dfrac{1}{3}\ln|x-3| + c$

c) $3\ln|x| - 3\ln|x-1| - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2} + c$

d) $\int \dfrac{1}{x^3-1}\,dx = -\dfrac{\sqrt{3}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)}{3} -$

$- \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{6} + \dfrac{\ln(x-1)}{3} + c$

e) $\dfrac{7\ln(x+4)}{3} - \dfrac{\ln(x+1)}{3} + c$

f) $\dfrac{3}{16}\ln|x^2+4| + \dfrac{5}{16}\ln|x-2| + \dfrac{5}{16}\ln|x+2| + c$

g) $\dfrac{67 \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x+4}{2}\right)}{10} -$

$- \dfrac{77\ln(x^2+8x+20)}{10} + \dfrac{2\ln x}{5} + 2x + c$

h) $82 \cdot \ln|x-3| - 17\ln|x-2| + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} +$

$+ 19x + c$

12. a) $4 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x-1}) + c$

b) $3\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} +$

$+ 3\ln|\sqrt[3]{x} - 1| + c$

c) $-\ln\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right) + \dfrac{\ln(x-1)}{2} +$

$+ (x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + c$

d) $5 \ln \left(\dfrac{\sqrt{25 - x^2} - 5}{x} \right) + \sqrt{25 - x^2} + c$

e) $2 \ln (\sqrt{x^2 - 4} + x) + \dfrac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} + c$

f) $\dfrac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \dfrac{9 \ln (\sqrt{x^2 + 9} + x)}{2} + c$

g) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \text{ arc tg} \left(\dfrac{\text{tg } \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + c$

h) $-x(\sqrt{2} \text{ arc tg} \left(\dfrac{\text{tg } x}{\sqrt{2}} \right) + c$

r) $\ln (\text{tg } x) + c$

s) $\dfrac{-1}{20} \cos^5 (4x) + c$

t) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{2} + c$ *u*) $-2 \cdot \text{cotg} \sqrt{x} + c$

v) $\dfrac{\ln (e^{2x} + 2)}{2} + c$

w) $\dfrac{1}{8} \ln (3 + 4x^2) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ arc tg } \dfrac{2x}{\sqrt{3}} + c$

x) $\dfrac{\text{sen } 2^x}{\ln 2} + c$ *y*) $\dfrac{\text{sen}^2 bx}{2b} + c$

z) $\text{arc sen } (\text{tg } x) + c$

● Ejercicios

1. *a*) $x^4 + x^3 + x^2 + x + c$

b) $\dfrac{x(3x^4 + 10x^2 + 15)}{15} + c$

c) $\dfrac{(x^2 + 1)^3}{6} + c$ *d*) $\dfrac{2\sqrt[3]{(5x + 2)^2}}{15} + c$

e) $\sqrt{x^2 + 2x + 3} + c$ *f*) $\dfrac{-(1 - x^3)^3}{9} + c$

g) $\ln |x^3 + x + 1| + c$ *h*) $\dfrac{4\sqrt{3x + 1}}{3} + c$

i) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{\text{sen}^5 x}}{5} + c$

j) $\dfrac{\text{sen } (x^2 + 1)}{2} + c$

k) $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \text{arc tg} \left(\dfrac{\sqrt{5}x}{5} \right)}{5} + c$

l) $2 \text{ arc sen} \left(\dfrac{x}{3} \right) + \text{c}$ *m*) $\dfrac{2\sqrt{\text{tg}^3 x}}{3} + c$

n) $\dfrac{-1}{3} \left(1 + \dfrac{1}{\text{tg } x} \right)^3 + c$

o) $e^{e^x} + \text{c}$ *p*) $-\dfrac{3^{2 - x^2}}{2 \ln 3} + c$

q) $\dfrac{e^{2x}}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{2} + 2x + c$

2. *a*) $\dfrac{\text{arc tg} \left(\dfrac{x^4}{3} \right)}{12} + c$

b) $\dfrac{2\sqrt{(x^2 + 5x + 4)^3}}{3} + c$

c) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \text{arc tg} \left(\dfrac{\sqrt{3}e^x}{3} \right)}{3} + c$

d) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{(\ln (x) + 1)^3}}{3} + c$

e) $\ln |\text{sen } e^x + 1| + \text{c}$

f) $\dfrac{-3}{4} \sqrt[3]{(2 + \text{cotg } x)^4} + c$

3. *a*) $e^x - 3 \ln(e^x + 1) + c$

b) $\ln (\cos x - 1) + \cos x + c$

c) $\dfrac{\text{arc tg} \left(\dfrac{e^{2x} - 1}{2} \right)}{4} + c$

d) $4 \ln (\sqrt{\text{sen } x} + 1) + \text{sen } x - 4\sqrt{\text{sen } x} + c$

4. Ejercicio resuelto

5. *a*) $\dfrac{\cos x}{1 - \text{sen } x} + c$

b) $\text{sen } x - \ln (\text{sen } x + 1) + c$

c) $\dfrac{\cos^2 x}{2} - \cos x + c$

d) $3 \cdot \ln(\cos x + 2) + \dfrac{\cos^2 x}{2} - 2 \cdot \cos x + c$

e) $\dfrac{1}{3}\,\text{sen}^3 x - 2\,\text{sen}\,x - \dfrac{1}{\text{sen}\,x} + c$

f) $-2\sqrt{1 + \cos x} + c$

6. *a*) $2 \ln|x - 2| + \ln|x + 2| - 2 \ln|x + 3| + c$

b) $\dfrac{5}{9} \ln|3x + 1| + \dfrac{2}{27x + 9} + c$

c) $\dfrac{4}{5}\,\text{arc tg}\,(x) - \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{5} +$

$\dfrac{17}{5} \ln|x + 2| + \dfrac{x^2}{2} - 2x + c$

d) $\dfrac{7}{15}\,\text{arc tg}\,\dfrac{x - 2}{3} - \dfrac{\ln(x^2 - 4x + 13)}{5}$

$+ \dfrac{2}{5} \ln|x - 1| + c$

e) $\dfrac{1}{24}\left(9 \ln(4x^2 + 4x + 10) - 2\,\text{arc tg}\,\dfrac{2x + 1}{3}\right) + c$

f) $\dfrac{\ln|x + 2|}{3} + \dfrac{5}{3} \ln|x - 1| - 2 \ln|x| + c$

g) $2x - 2 \ln|x| + \ln|x + 2| - 3 \ln|x + 2| + c$

h) $\dfrac{8}{7}\sqrt{3}\,\text{arc tg}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,(2x + 1)}{3}\right) +$

$+ \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{7} - \dfrac{2}{7} \ln|x - 2| + c$

i) $\dfrac{\text{arc tg}\,(x)}{2} - \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{4} + \dfrac{\ln|x - 1|}{2} + c$

j) $-2 \ln|x + 3| + \dfrac{4}{5} \ln|x + 2| + \dfrac{6}{5} \ln|x - 3| + c$

7. Ejercicio resuelto

8. *a*) $3e(5e^2 - 1)$ *b*) $\dfrac{1\,215}{2}$

c) $-\ln(2\sqrt{3} - 3)$ *d*) $2e^3 + 1$

9. *a*) $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}\right)\text{arc sen}\,(x) + \dfrac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + c$

b) $x \cdot \ln|x^2 + 3x + 2| + 2 \ln|x + 1| + \ln|x + 2| -$
$- 2x + c$

c) $\dfrac{x^3}{3}\,\text{arc tg}\,(x) + \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{6} - \dfrac{x^2}{6} + c$

d) y *e*) $\dfrac{3}{16} x^2 \sqrt[3]{(1 + 2x)^2} - \dfrac{9}{80} x \sqrt[3]{(1 + 2x)^2} +$
$+ \dfrac{27}{320} \sqrt[3]{(1 + 2x)^2} + c$

f) $\text{sen}\,x \ln(\text{sen}\,x) - \text{sen}\,x + c$

g) $4\,\text{arc tg}\,\sqrt[4]{x + 1} + \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x + 1}\,(\sqrt{x + 1} - 3) + c$

h) $\dfrac{1}{4} \ln\left(\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right) - \dfrac{1}{2(1 - \cos x)} + c$

10. *a*) $\dfrac{1}{2} e^{\text{arc sen}\,x} \cdot (x - \sqrt{1 - x^2}) + c$

b) $(\text{arc sen}\,\sqrt{x})^2 + c$

c) $\dfrac{x}{2}\cos(\ln(x)) + \dfrac{x}{2}\,\text{sen}\,(\ln(x)) + c$

d) $\ln|\cos x - 1| - \dfrac{1}{2} \ln|1 + \cos^2 x| +$
$+ \text{arc tg}\,(\cos x) + c$

● Problemas

1. $A = 1 - \dfrac{3}{e^2}\,u^2$

2. $F_c(x) = x^2 + c$

$f(x) = x^2 + 2$

3. $f(x) = \int 3x^2 + 2x + 5\,dx = x^3 + x^2 + 5x + c$

4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{4}$

5. $A = \dfrac{1}{4}\,u^2$

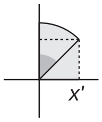
6. $A = \dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}\,u^2$

7. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $A = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$

$= \dfrac{R^2}{2}\,\text{arc sen}\left(\dfrac{x}{R}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$

$A = 4 \cdot \dfrac{R^2\,\text{arc sen}\,(1)}{2} = \pi R^2$

8. $A = 3\pi\ u^2$

9. 

A = área de la circunferencia para x' –

– área del triángulo

Para $R = 1$

$$A = \left[\frac{\text{arc sen}\,(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right] - \frac{x \cdot y}{2} =$$

$$= \left[\frac{\text{arc sen}\,(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right] =$$

$$= \frac{\text{arc sen}\,(x)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

10. $A = 2\left[\dfrac{x \cdot y}{2} - \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt\right] =$

$= x \cdot \sqrt{x^2-1} - 2\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt =$

$= x \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| =$

$\ln|x + \sqrt{x^2-1}|$

11. $A = -\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-9}\,dx = \frac{\ln(5)}{3}\ u^2$

12. *a)* $V_{persona} = 0{,}5045\ cm^3$

$m_{peana} = d \cdot V = 19{,}32\ g/cm^3 \cdot 0{,}5045\ cm^3 =$

$=$ 9,75 g de oro.

b) $V_{copa} = \pi\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx = 2{,}256\ cm^3$

13. $V = 10{,}76$ km/s.

14. *a)* $V = \pi\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi\int_0^4 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi\ u^3$

b) $V = \pi\displaystyle\int_0^\pi (\text{sen}\,x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{2}\,u^3$

15. Problema resuelto.

16. $I = \displaystyle\int_0^R r^2\,dm = \rho\int_0^R r^2\,dv = \rho\int_0^R 2\pi r^3 L\,dr =$

$= \rho 2\pi L\displaystyle\int_0^R r^3\,dr = \rho 2\pi L\,\frac{R^4}{4} = \rho 2 V_{cil}\,\frac{R^2}{4};$

$V_{cil} = \pi R^2 L;\ I = \dfrac{1}{2}\,\rho V_{cil};\ R^2 = \dfrac{M_{cil}}{2}\,R^2$

17. $W = 627{,}2$ kJ

18. *a)* $I = \displaystyle\int_0^\lambda \sqrt{1+(2x)^2}\,dx =$

$$= \frac{\ln(\sqrt{4\lambda^2+1} + 2\lambda)}{4} + \frac{\lambda\sqrt{4\lambda^2+1}}{2}$$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx =$

$$= \left.\frac{(9x+4)^{3/2}}{27}\right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}\,u$$

● Márgenes

— Página 314.

El conjunto de todas las primitivas de $f(x)$.

— Página 319.

(*Errata en el libro del alumno, debe decir:*

$\displaystyle\int \text{sen}\,x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\,x + c =$

$= -\dfrac{1}{2}\cos^2 x + c'$

La respuesta correcta es la *d*).

● Cajón de sastre

$$\left.\begin{array}{l} S_{cilindro} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 \\ S_{esfera} = 4\pi R^2 \end{array}\right\}$$

$$\frac{S_{cilindro}}{S_{esfera}} = \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 \\ V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{array}\right\} \frac{V_{cilindro}}{V_{esfera}} = \frac{3}{2}$$

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS