

Física

2

BACHILLERATO

Javier Barrio
Dulce María Andrés
Juan Luis Antón



Física

Índice

2

Javier Barrio
Dulce María Andrés
Juan Luis Antón

Unidad didáctica 1: Interacción gravitatoria	3
Unidad didáctica 2: Campo gravitatorio	19
Unidad didáctica 3: Movimiento vibratorio	39
Unidad didáctica 4: Movimiento ondulatorio	54
Unidad didáctica 5: Fenómenos ondulatorios mecánicos	69
Unidad didáctica 6: Campo eléctrico	82
Unidad didáctica 7: Campo magnético	97
Unidad didáctica 8: Inducción electromagnética	113
Unidad didáctica 9: La luz y sus propiedades	127
Unidad didáctica 10: Óptica geométrica	141
Unidad didáctica 11: La física del siglo XX	156
Unidad didáctica 10: Física nuclear	177

Física

Unidad didáctica 1

Interacción gravitatoria

SOLUCIONES UNIDAD 1. INTERACCIÓN GRAVITATORIA

CUESTIONES INICIALES

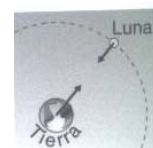
1. ¿De que formas se ha explicado la posición de la Tierra en el Universo a lo largo del tiempo?

Según el modelo geocéntrico, la Tierra está inmóvil y situada en el centro del Universo. Los astros giran en torno a ella con movimiento circular uniforme.

En el modelo heliocéntrico, es el Sol el que está situado en el centro del Sistema Solar y la Tierra, junto a los planetas, giran a su alrededor.

2. Representa en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el sistema formado por la Tierra y por la Luna.

Las dos fuerzas tienen el mismo módulo y la misma dirección y sus sentidos son opuestos, pues son un par de fuerzas de acción y reacción.

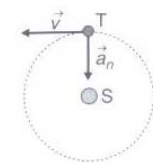


3. El Sol está situado a una distancia media de 150 millones de km. ¿Cuál es la velocidad y aceleración media de la Tierra en torno al Sol? Representa los vectores anteriores sobre la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol.

a) La velocidad de traslación de la Tierra es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10^9 \text{ m}}{365 \text{ días} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3600 \text{ s/h}} = 29\,886 \text{ m/s}$$

Su dirección es la de la tangente a la trayectoria y su sentido el del movimiento.



El movimiento únicamente posee aceleración normal, ya que sólo se modifica la dirección del vector velocidad.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(29\,886 \text{ m/s})^2}{150 \cdot 10^9 \text{ m}} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Su dirección es la de la recta que une los centros de los astros y su sentido hacia el Sol.

ACTIVIDADES FINALES

1. Si se descubriera un planeta situado a una distancia del Sol diez veces mayor que la distancia a la que se encuentra la Tierra, ¿Cuántos años terrestres tardaría en recorrer su órbita?

Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T_{\text{Tierra}}^2}{R_{\text{Tierra}}^3} = \frac{T_{\text{Planeta}}^2}{R_{\text{Planeta}}^3}$

Sustituyendo: $\frac{(1 \text{ año})^2}{(1 \text{ U.A.})^3} = \frac{T_{\text{Planeta}}^2}{(10 \text{ U.A.})^3} \Rightarrow T_{\text{Planeta}} = 31,62 \text{ años terrestres}$

2. Calcula la masa del Sol sabiendo que la constante de la tercera ley de Kepler para los planetas del sistema solar tiene el valor de $3,35 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

La tercera ley de Kepler también se puede expresar como: $\frac{r^3}{T^2} = 3,35 \cdot 10^{18} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$

Para calcular la masa del astro central se aplica la segunda ley de Newton al movimiento circular del planeta:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{\text{astro}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r}; \frac{G \cdot M_{\text{astro}}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

$$\text{Despejando: } M_{\text{sol}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2} \cdot 3,35 \cdot 10^{18} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

3. La masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra, su radio medio es 10,85 veces el terrestre y su distancia media al Sol es 5,2 veces la de la Tierra. Con estos datos calcula el período orbital en torno al Sol en relación a un año terrestre y el valor de la gravedad en su superficie en relación al de la Tierra.

El período de Júpiter se calcula aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}; \frac{1 \text{ año}^2}{r_T^3} = \frac{T_J^2}{(5,2 \cdot r_T)^3} \Rightarrow T_J = 11,86 \text{ años}$$

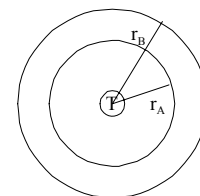
La expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie de un astro es:

$$g_J = G \frac{M_J}{R_J^2} = G \frac{318 \cdot M_T}{(10,85 \cdot R_T)^2} = \frac{318}{10,85^2} \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = 2,7 \cdot g_{0,T} = 26,5 \text{ m/s}^2$$

4. Dos satélites de comunicaciones A y B ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio ($R_A < R_B$). Se pide: a) ¿Cuál de los dos se moverá con mayor velocidad lineal? b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor período de revolución?

Aplicando la segunda ley de Newton a un satélite que gira en torno a la Tierra en una órbita de radio r , resulta que la relación entre la velocidad y el radio de la órbita es:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}}$$



De lo que se deduce que cuanto más pequeño es el radio de la órbita más deprisa se mueve el satélite $v_A > v_B$.

Aplicando la tercera ley de Kepler a los dos satélites, resulta que: $\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \Rightarrow T_A^2 \cdot r_B^3 = T_B^2 \cdot r_A^3$

De donde se deduce que si $r_B > r_A$ entonces $T_A < T_B$, es decir que cuanto menor es el radio de la órbita menos tiempo se tarda en recorrerla, por lo que: $T_A < T_B$.

5. Dos satélites de igual masa orbitan en torno a un planeta de masa mucho mayor siguiendo órbitas circulares coplanarias de radios R y $3 \cdot R$ y recorriendo ambos las órbitas en sentidos contrarios. Calcula la relación entre sus periodos y entre sus momentos angulares (módulo, dirección y sentido).

a) Sea A el satélite que sigue la órbita de menor radio y B el de la de mayor radio. Los periodos de los satélites y los radios de sus órbitas están relacionados por la tercera ley de Kepler.

$$\frac{T_A^2}{R_A^3} = \frac{T_B^2}{R_B^3}; \frac{T_A^2}{R^3} = \frac{T_B^2}{(3 \cdot R)^3}; \frac{T_A^2}{R^3} = \frac{T_B^2}{27 \cdot R^3} \Rightarrow T_B = \sqrt{27} \cdot T_A = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot T_A$$

b) El momento angular de un satélite respecto del planeta es: $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$ es un vector perpendicular al plano de la órbita y su sentido está determinado por la regla de Maxwell.

Soluciones unidad 1: Interacción gravitatoria 2º Bachillerato 2008

Su módulo es: $L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \varphi$ y como la órbita es circular, resulta que:

$$\left. \begin{aligned} L &= r \cdot m \cdot v \cdot \sin 90^\circ \\ v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \end{aligned} \right\} L = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \frac{r^2}{T}$$

Como las órbitas son coplanarias la dirección de los dos momentos angulares es la misma, la de la perpendicular al plano de la órbita. Al recorrer las órbitas en sentidos contrarios, los sentidos de los momentos angulares son opuestos.

La relación entre los módulos, como tienen la misma masa, es:
$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_A \cdot \frac{r_A^2}{T_A}}{2 \cdot \pi \cdot m_B \cdot \frac{r_B^2}{T_B}} = \frac{R_A^2 \cdot T_B}{R_B^2 \cdot T_A}$$

Sustituyendo:
$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{R^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot T_A}{(3 \cdot R)^2 \cdot T_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. Se tienen dos satélites iguales, de la misma masa, uno gira en una órbita circular alrededor de la Tierra y el otro en torno a Marte. ¿Cuál es la relación entre los radios de las órbitas si ambos tienen en mismo período? Su pongamos ahora que los dos satélites giran en órbitas del mismo radio, cada uno alrededor de su planeta. ¿Cuál es la relación entre los momentos angulares correspondientes? Datos: $m_{\text{Marte}} = 0,11 \cdot m_{\text{Tierra}}$; $R_{\text{Marte}} = 0,5 \cdot R_{\text{Tierra}}$

Sobre los satélites actúa la interacción gravitatoria con su planeta correspondiente. Aplicando la segunda ley de Newton y como las órbitas son circulares, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_P \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_P}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita es:
$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_P \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

La relación entre sus radios orbitales, como sus períodos son iguales es:

$$\frac{r_{\text{Tierra}}}{r_{\text{Marte}}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}}{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m_{\text{Marte}} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{m_{\text{Tierra}}}{0,11 \cdot m_{\text{Tierra}}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0,11}} = 2,09 \Rightarrow r_{\text{Tierra}} = 2,09 \cdot r_{\text{Marte}}$$

El módulo del momento angular de un satélite respecto del planeta es: $L = r \cdot m \cdot v$

La velocidad orbital es:
$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{planeta}}}{r}}$$

Los radios de las órbitas son iguales y la relación entre los módulos de los momentos angulares es:

$$\frac{L_{\text{Tierra}}}{L_{\text{Marte}}} = \frac{r \cdot m_{\text{satélite}} \cdot v_{\text{Tierra}}}{r \cdot m_{\text{satélite}} \cdot v_{\text{Marte}}} = \frac{\sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{r}}}{\sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Marte}}}{r}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{Tierra}}}{0,11 \cdot m_{\text{Tierra}}}} = 3,02 \Rightarrow L_{\text{Tierra}} = 3,02 \cdot L_{\text{Marte}}$$

7. Un planeta describe una órbita circular de radio $1 \text{ A } 10^8 \text{ km}$ con un período de rotación 2 años en torno a una estrella de masa mucho mayor. Calcula la masa de la estrella.

La masa del astro central se aplica aplicando la dinámica del movimiento circular del planeta:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{\text{astro}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r}; \frac{G \cdot M_{\text{astro}}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando:

$$M_{\text{astro}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot (2 \text{ años} \cdot 365 \text{ días} / \text{año} \cdot 24 \text{ h} / \text{día} \cdot 3600 \text{ s} / \text{h})^2} = 1,49 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

8. Europa, satélite de Júpiter, fue descubierto por Galileo en 1610. Sabiendo que el radio de la órbita que describe es de $6,7 \cdot 10^5 \text{ km}$ y su período de 3 días, 13 horas y 13 minutos, calcula la velocidad de Europa relativa a Júpiter y la masa del planeta.

El período de Europa es: T 3 días 13 horas y 13 minutos = $3,07 \cdot 10^5 \text{ s}$

La velocidad orbital del satélite es: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,7 \cdot 10^8 \text{ m}}{3,07 \cdot 10^5 \text{ s}} = 1,37 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

Para calcular la masa del astro central se aplica la segunda ley de Newton al movimiento circular del planeta:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{\text{astro}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando: $M_{\text{astro}} = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(1,37 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 \cdot 6,7 \cdot 10^8 \text{ km}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

9. El diámetro de la Luna es la cuarta parte del de la Tierra y su masa es 1/81 de la masa de la Tierra.) Con qué velocidad llegará a la superficie de la Luna un objeto que se deja caer desde una altura de 5 m?

La relación entre los diámetros es la misma que entre los radios.

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es:

$$g = \frac{G \cdot m_L}{R_L^2} = G \frac{\frac{M_T}{81}}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2} = \frac{16}{81} \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = \frac{16}{81} g_{0, \text{Tierra}} = \frac{16}{81} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 1,9 \text{ m/s}^2$$

La velocidad que adquiere el objeto en la superficie de la Luna es:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1,9 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m}} = 4,4 \text{ m/s}$$

10. Supón que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. ¿Aumentaría el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie? ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie es: $g' = \frac{G \cdot M}{r'^2} = \frac{G \cdot M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4G \cdot M}{r^2} = 4 \cdot g_{0, \text{Tierra}}$

Como la masa permanece constante y se considera localizada en el centro de la Tierra, la fuerza gravitatoria con la que interacciona con el Sol no se modifica y por tanto la órbita no sufre ninguna alteración.

11. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Mercurio sabiendo que el radio de Mercurio es igual a la tercera parte del radio terrestre y que la densidad de Mercurio es 3/5 de la densidad de la Tierra.

Soluciones unidad 1: Interacción gravitatoria 2º Bachillerato 2008

Aplicando la relación entre las densidades se cumple que:

$$\rho_M = \frac{3}{5} \rho_T; \frac{M_M}{\frac{4}{3} \pi R_M^3} = \frac{3}{5} \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} \Rightarrow M_M = \frac{3}{5} \frac{M_T \cdot R_M^3}{R_T^3}$$

Aplicando la relación entre los radios: $R_T = 3 R_M$, se tiene que la relación de las masas es:

$$M_M = \frac{3}{5} \frac{M_T \cdot R_M^3}{(3 \cdot R_M)^3} = \frac{1}{45} M_T$$

Aplicando la segunda ley de Newton, la aceleración de la gravedad en la superficie de mercurio es:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{G \cdot \frac{1}{45} M_T}{\left(\frac{1}{3} R_T\right)^2} = \frac{9}{45} g_{tierra} = \frac{1}{5} 9,8 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

12. La aceleración de la gravedad en un planeta es 5 m/s^2 . Si su radio es igual a la mitad del radio terrestre, calcula la relación de su masa con la masa de la Tierra.

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$

Comparando sus valores en los planetas, resulta que: $\frac{g_{Planeta}}{g_{Tierra}} = \frac{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}}{\frac{G \cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}^2}} = \frac{M_{Tierra} \cdot R_{Planeta}^2}{M_{Planeta} \cdot R_{Tierra}^2}$

$$\text{Operando: } \frac{M_{Planeta}}{M_{Tierra}} = \frac{g_{Tierra} \cdot R_{Planeta}^2}{g_{Planeta} \cdot R_{Tierra}^2} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{R_{Tierra}}{2}\right)^2}{5 \text{ m/s}^2 \cdot R_{Tierra}^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow M_{Planeta} = \frac{1}{8} M_{Tierra}$$

13. Un planeta de forma esférica tiene un radio de 3000 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2 . Calcula su densidad media.

La aceleración en su superficie es: $g = \frac{G \cdot m}{R^2} \Rightarrow m = \frac{g \cdot R^2}{G}$

$$\text{La densidad es: } \rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{g \cdot R^2}{G}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3 \cdot g}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot G} = \frac{3 \cdot 6 \text{ m/s}^2}{4 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2} = 7158 \text{ kg/m}^3$$

14. Un cuerpo de masa 100 kg está situado en la superficie de la Tierra. ¿Cuál es su peso? Si se duplicara el radio de la Tierra, manteniendo la masa de ésta, ¿cuál sería entonces el peso del cuerpo? Si se duplicara el radio de la Tierra, manteniendo constante su densidad media, ¿cuál sería en tal caso el peso del objeto?

El peso en la superficie de la Tierra es: $P = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot g = 100 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ N}$

Al duplicar el radio y con la misma masa de la Tierra, se tiene que el peso sería:

$$P_1 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{(2 \cdot R)^2} = \frac{P}{4} = \frac{980 \text{ N}}{4} = 245 \text{ N}$$

Como la densidad permanece constante, se tiene que la masa M' de la Tierra es:

$$\rho = \rho'; \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'}; \Rightarrow M' = M \frac{V'}{V} = M \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = M \frac{(2 \cdot R)^3}{R^3} = M \cdot 8$$

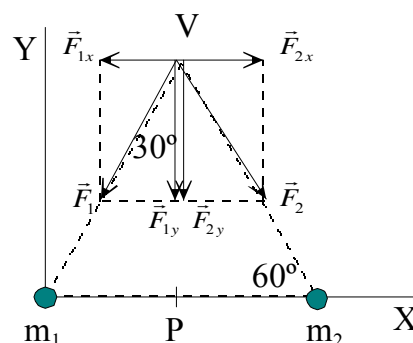
Y el peso del objeto es: $P_2 = \frac{G \cdot M' \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot 8 \cdot M \cdot m}{(2 \cdot R)^2} = 2 \cdot P = 2 \cdot 980 \text{ N} = 1960 \text{ N}$

15. En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado hay colocadas sendas masas de 3 kg cada una. Calcula el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza con la que actúan sobre otra masa de 5 kg colocada en el otro vértice.

Se elige un sistema de referencia con el lado del triángulo que contiene las masas sobre el eje X y en el origen una de ellas. Se denominan m_1 y m_2 a las dos masas iguales y m a la otra masa.

Las dos masas iguales actúan sobre la masa desigual con fuerzas del mismo módulo.

$$F_1 = F_2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_1^2} = \frac{G \cdot 3 \text{ kg} \cdot 5 \text{ kg}}{1 \text{ m}^2}$$



Las componentes en el eje X de las fuerzas anteriores se anulan por simetría y las componentes en el eje Y se refuerzan.

Como los ángulos de un triángulo equilátero son de 60° , resulta que la fuerza que actúa sobre la masa desigual es:

$$F_T = 2 \cdot F_{1y} = 2 \cdot \frac{G \cdot 3 \text{ kg} \cdot 5 \text{ kg}}{1 \text{ m}^2} \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot 5 \text{ kg}}{1 \text{ m}^2} \cdot \sin 60^\circ = 1,73 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Vectorialmente: $\vec{F}_T = -1,73 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j} \text{ N}$

16. Tres masas puntuales de 1 kg están situadas en tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado. ¿Qué fuerza actúa sobre una cuarta masa de 1 kg colocada en el otro vértice?

Se elige un sistema de referencia con la masa m_1 colocada en el punto (0, 0), la m_2 situada en (1, 0), la m_3 puesta en (0,1) y la m_4 localizada en (1, 1) y sobre la que se calculará la fuerza resultante.

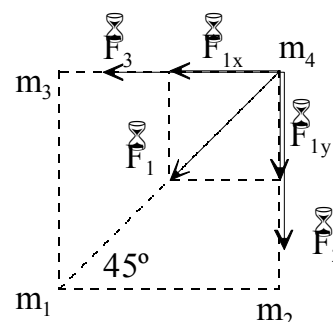
Aplicando la ley de Gravitación Universal y si L es la longitud del lado del cuadrado, resulta que las expresiones de las fuerzas con que actúan las respectivas masas con la masa m_4 son:

$$\vec{F}_2 = \frac{G \cdot m_2 \cdot m_4}{r_{24}^2} (-\vec{j}) = -\frac{G \cdot m^2}{L^2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{G \cdot m_3 \cdot m_4}{r_{34}^2} (-\vec{i}) = -\frac{G \cdot m^2}{L^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_4}{r_{14}^2} [\cos \varphi (-\vec{i}) + \sin \varphi (-\vec{j})] = \frac{G \cdot m^2}{(\sqrt{2} \cdot L)^2} [\cos 45 \cdot \vec{i} - \sin 45 \cdot \vec{j}] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2} \cdot G \cdot m^2}{4 \cdot L^2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2} \cdot G \cdot m^2}{4 \cdot L^2} \vec{j}$$



Sumando, las componentes de la fuerza resultante son:

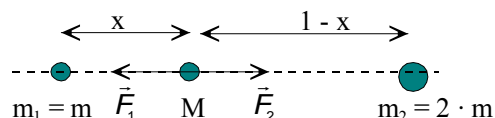
$$\vec{F}_x = \vec{F}_3 + \vec{F}_{1x} = -\frac{G \cdot m^2}{L^2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] \vec{i} \quad ; \quad \vec{F}_y = \vec{F}_2 + \vec{F}_{1y} = -\frac{G \cdot m^2}{L^2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] \vec{j}$$

La fuerza total es: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = -\frac{G \cdot m^2}{L^2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] (\vec{i} + \vec{j})$

Sustituyendo: $\vec{F} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 1 \text{ kg}^2}{1 \text{ m}^2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] (\vec{i} + \vec{j}) = -9,02 \cdot 10^{-11} (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N}$

17. Dos puntos materiales de masas m y $2m$ respectivamente, se encuentran a una distancia de 1 m . ¿Dónde habrá que colocar otra masa para que esté en equilibrio?

Sea las partículas: $m_1 = m$, $m_2 = 2 \cdot m$ y M la masa en equilibrio.



La masa M estará en equilibrio cuando los módulos de las fuerzas con las que interactúa con las otras masas sean iguales.

$$F_1 = F_2; \frac{G \cdot M \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot M \cdot m_2}{r_2^2}; \frac{m}{x^2} = \frac{2 \cdot m}{(1-x)^2}$$

Operando: $(1-x)^2 = 2 \cdot x^2$; $x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0,41 \text{ m}$ de la masa menos

18. La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. Si la masa de la Tierra es $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ calcula la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. ¿Cuál es el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3,4 \cdot 10^8 \text{ m}$?

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que la distancia entre sus centros es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (2,42 \cdot 10^6 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

En ese punto se igualan las fuerzas de interacción gravitatoria con la Tierra y con la Luna.

Como $d_T = 3,4 \cdot 10^8 \text{ m}$ y $d_L = d - d_T = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m} - 3,4 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,5 \cdot 10^8 \text{ m}$, resulta que:

$$\frac{GM_T \cdot m}{d_T^2} = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{d_L^2}; M_L = \frac{M_T \cdot d_T^2}{d_L^2} = 6,4 \cdot 10^{24} \text{ kg} \frac{(0,5 \cdot 10^8)^2}{(3,4 \cdot 10^8)^2} = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

19. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa mucho mayor. La distancia más próxima es $R_{\text{Próximo}} = 1 \text{ A } 10^8 \text{ km}$ y la más alejada es $R_{\text{Alejado}} = 1,8 \text{ A } 10^8 \text{ km}$. Calcula la relación entre las velocidades del planeta en los puntos más próximo, P, y más alejado, A.

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular del planeta respecto del astro central permanece constante a lo largo de la trayectoria en módulo, dirección y sentido.

Soluciones unidad 1: Interacción gravitatoria 2º Bachillerato 2008

Por tanto: $\vec{L}_P = \vec{L}_A$; $\vec{r}_P \times m \cdot \vec{v}_P = \vec{r}_A \times m \cdot \vec{v}_A \Rightarrow r_P v_P = r_A v_A$

La relación entre las velocidades en los puntos P y A es: $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1,8 \cdot 10^8 \text{ km}}{1 \cdot 10^8 \text{ km}} = 1,8$

20. Dos satélites, A y B, giran alrededor de un planeta siguiendo órbitas circulares de radios $2 \cdot 10^8$ y $8 \cdot 10^8$ m, respectivamente. Calcula le relación entre sus velocidades tangenciales respectivas.

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite a los satélites describir un movimiento circular en torno al astro central. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular, se tiene:

$$\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_{\text{astro}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v_{\text{satélite}}^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{r}}$$

Aplicando esta relación a cada satélite y operando, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{r_A}} \\ v_B &= \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{r_B}} \end{aligned} \right\} : \frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{r_A}}}{\sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{r_B}}} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m}}} = 2 \Rightarrow v_A = 2 \cdot v_B$$

21. La nave espacial del primer vuelo tripulado chino orbitó la Tierra a una distancia de 330 km de su superficie. Calcula el período orbital de la nave y su velocidad en la órbita, supuesta circular.

radio de la órbita es: $r = R_T + 330 \text{ km} = 6370 \text{ A } 10^3 \text{ m} + 330 \text{ A } 10^3 \text{ m} = 6,70 \text{ A } 10^6 \text{ m}$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el período es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(6,70 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}} = 5,5 \text{ A } 10^3 \text{ s} = 91 \text{ min}$$

La velocidad orbital es: $v = \frac{2 \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \pi \cdot 6,70 \cdot 10^6 \text{ m}}{5,5 \cdot 10^3 \text{ s}} = 7,65 \text{ A } 10^3 \text{ m/s}$

22. Un satélite artificial describe una órbita circular de radio $2 \cdot R_{\text{Tierra}}$ en torno a la Tierra. Calcula su velocidad orbital y el peso del satélite en la órbita si en la superficie de la Tierra pesa 5 000 N. Dato: $R_{\text{Tierra}} = 6400 \text{ km}$

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite al satélite describir un movimiento circular en torno al astro central.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v_{\text{satélite}}^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{2 \cdot R_{\text{Tierra}}}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}{2 \cdot R_{\text{Tierra}}^2}} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}}{2}} = 5600 \text{ m/s}$$

El peso del satélite en la órbita es la interacción gravitatoria con la Tierra. Relacionando el peso en la órbita con el peso en la superficie de la Tierra.

$$\frac{P_{\text{órbita}}}{P_{\text{superficie}}} = \frac{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2}}{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{R_{\text{Tierra}}^2}} = \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{(2 \cdot R_{\text{Tierra}})^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{\text{órbita}} = \frac{1}{4} P_{\text{superficie}} = \frac{5000\text{N}}{4} = 1250\text{N}$$

23. La distancia Tierra-Luna es aproximadamente 60 RT, siendo RT el radio de la Tierra, igual a 6 400 km. Calcula la velocidad lineal de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra y el correspondiente período de rotación en días. La masa de la Tierra es: $5,98 \cdot 10^{24}$ kg

Sobre la Luna actúa la interacción gravitatoria. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular de la Luna:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{Luna}}}{r^2} = m_{\text{Luna}} \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{kg}}{60 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{m}}} = 993 \text{m/s}$$

$$\text{El período del movimiento es: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{m}}{993 \text{m/s}} = 2,43 \cdot 10^6 \text{s} = 28 \text{días}$$

24. Una sonda espacial orbita en torno a Marte recorriendo una órbita completa cada 7,5 horas, siendo su masa 120 kg. Sabiendo que el radio del planeta Marte es de 3 390 km y que su masa es igual a $6,421 \cdot 10^{23}$ kg y suponiendo que la órbita es circular, calcula su radio y la velocidad con que la recorre la sonda. En realidad, esta sonda describe una órbita elíptica de forma que pueda aproximarse lo suficiente al planeta como para fotografiar su superficie. La distancia a la superficie marciana en el punto más próximo es de 258 km y de 11 560 km en el punto más alejado. Obtén la relación entre las velocidades de la sonda en estos dos puntos.

$$\text{El período del movimiento es: } T = 7,5 \text{ h} = 7,5 \text{ h} \cdot 3 600 \text{ s/h} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ s}$$

a) Sobre la sonda espacial actúa la interacción gravitatoria con Marte que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para describir la trayectoria circular. Aplicando conjuntamente la ley de gravitación universal, la segunda ley de Newton y la relación entre el período del movimiento y su velocidad, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \left. \begin{aligned} \frac{G \cdot m_{\text{Marte}} \cdot m_{\text{sonda}}}{r^2} &= m_{\text{sonda}} \frac{v^2}{r} \\ v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \end{aligned} \right\} \frac{G \cdot m_{\text{Marte}}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

$$\text{Despejando: } r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_{\text{Marte}} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 6,421 \cdot 10^{23} \text{kg} \cdot (2,7 \cdot 10^4 \text{s})^2}{4 \cdot \pi^2}} = 9,25 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$\text{La velocidad con la que recorre la órbita es: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 9,25 \cdot 10^6 \text{m}}{2,7 \cdot 10^4 \text{s}} = 2,15 \cdot 10^3 \text{m/s}$$

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular de la sonda respecto de Marte es una cantidad constante a lo largo de la órbita.

$$\vec{L}_{\text{cerca}} = \vec{L}_{\text{lejos}}$$

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$$r_{\text{cerca}} \cdot m_{\text{sonda}} \cdot v_{\text{cerca}} = r_{\text{lejos}} \cdot m_{\text{sonda}} \cdot v_{\text{lejos}} \Rightarrow \frac{v_{\text{cerca}}}{v_{\text{lejos}}} = \frac{r_{\text{lejos}}}{r_{\text{cerca}}} = \frac{11 560 \text{km}}{258 \text{km}} = 44,81$$

Lógicamente viaja más deprisa cuanto más cerca esté de la superficie de Marte, de acuerdo con la

ley de las áreas.

25. En el año 1957 la extinta Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite artificial de la historia, el Sputnik 1. El satélite pesaba 83 kg y dio 1400 órbitas alrededor de la tierra con un período de 96,2 min. Calcula el momento angular del satélite respecto de la Tierra.

Para calcular el momento angular del satélite respecto de la Tierra hay que determinar el radio de la órbita y su velocidad. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el radio de órbita es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot (96,2 \cdot 60 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}} = 6,95 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La velocidad del satélite es la órbita es: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,95 \cdot 10^6 \text{ m}}{96,2 \cdot 60 \text{ s}} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

El módulo del momento angular es:

$$L = r \cdot m \cdot v = 6,95 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 83 \text{ kg} \cdot 7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 4,38 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

De dirección la perpendicular al plano de la órbita y sentido el indicado por la regla de Maxwell.

26. Un satélite gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 20 000 km de radio. Si el radio de la Tierra es igual a 6370 km y la aceleración de la gravedad en su superficie 9,8 m/s², calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la órbita y la velocidad angular del satélite.

La relación entre la aceleración de la gravedad en la superficie y en la órbita es:

$$\frac{g_{\text{órbita}}}{g_0} = \frac{\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r^2}}{\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{r^2} \Rightarrow g_{\text{órbita}} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2} = 9,8 \text{ m/s}^2 \frac{(6370 \text{ km})^2}{(20000 \text{ km})^2} = 0,99 \text{ m/s}^2$$

La aceleración de la gravedad en la órbita es la misma que la aceleración normal del movimiento circular del satélite.

$$g = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{0,99 \text{ m/s}^2}{20 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

27. Si la masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la Tierra y su período de rotación en torno a su eje es aproximadamente igual al de la Tierra, calcular el radio de la órbita de un satélite geostacionario orbitando sobre el ecuador de Marte.

Para que un satélite sea geostacionario su período de revolución tiene que ser el mismo que el de Marte, es decir, $T = 24 \text{ h}$.

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r , y como $v = \frac{2 \pi \cdot r}{T}$, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_M}{r} = \frac{4 \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita, r , resulta que: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

Y como $m_M = m_T/10$, se tiene que: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}}$

Multiplicando y dividiendo por el R_T^2 , resulta que: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2 \cdot R_T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot R_T^2}}$

Y como: $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se obtiene que:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_{0, \text{Tierra}} \cdot T^2 \cdot R_T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6\,370 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot (8,64 \cdot 10^4 \text{ s})^2}{40 \cdot \pi^2}} = 1,9 \cdot 10^7 \text{ m} = 19\,600 \text{ km}$$

28. Desde un lugar situado a una distancia del centro de la Tierra igual a 5/4 del radio terrestre, se desea poner en órbita circular un satélite. ¿Qué velocidad hay que comunicarle? ¿Cuál es el período del satélite? Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ y $R_{\text{Tierra}} = 6370 \text{ km}$.

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite al satélite describir un movimiento circular en torno al astro central.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v_{\text{satélite}}^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{\frac{5}{4} \cdot R_{\text{Tierra}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}{5 \cdot R_{\text{Tierra}}^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{5}} = 7\,067 \text{ m/s}$$

El período del movimiento es: $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{7\,067 \text{ m/s}} = 7\,079 \text{ s}$

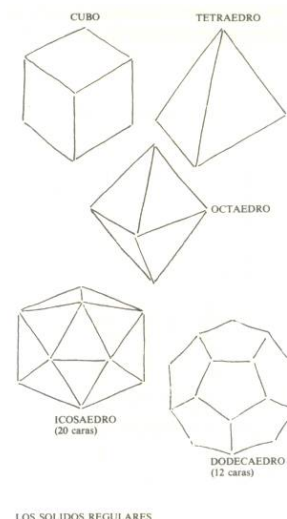
INVESTIGA

1. Kepler, inicialmente, buscando la armonía de los cielos asoció las órbitas de los planetas conocidos hasta entonces con los cuerpos sólidos regulares pitagóricos: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro y octaedro. Busca de qué forma intentaba Kepler encajar las órbitas de los planetas con los sólidos regulares.

Kepler, en su juventud, creyó que había alguna relación entre las órbitas de los planetas y los sólidos regulares pitagóricos.

Ideó un esquema que consistía en meter una esfera dentro de cada una de estas figuras y cada figura dentro de otra esfera mayor. Así, la esfera exterior, que representaba la órbita de Saturno, contenía al cubo, el cual contenía a la esfera de Júpiter, la cual contenía al tetraedro, el cual a su vez contenía la esfera de Marte, y así hasta llegar a la esfera de Mercurio, contenida en el octaedro.

Kepler maravillado por esta construcción, la cual consideró una revelación divina, intentó construir un modelo para comprobar si las distancias entre los planetas y el Sol iban en la misma proporción que los tamaños de las esferas.



Sin embargo estas no coincidían, pero tan convencido estaba Kepler por esta armonía entre los planetas y los sólidos de Pitágoras, que concluyó que las observaciones debían contener algunos errores. Aunque él mismo pudo comprobar años después que este modelo no tenía ninguna relación con las posiciones de los planetas.

2. Recientemente se le ha quitado a Plutón la categoría de planeta. Investiga cuando se tomó ese acuerdo y las razones que lo motivaron.

En el año 2006 y en la ciudad de Praga los astrónomos aprobaron por unanimidad las siguientes categorías de objetos del sistema solar.

Primera categoría: Un planeta es un cuerpo celeste que está en órbita alrededor del Sol, que tiene suficiente masa para tener gravedad propia para superar las fuerzas rígidas de un cuerpo de manera que asuma una forma equilibrada hidrostática, es decir, redonda, y que ha despejado las inmediaciones de su órbita.

Segunda categoría: Un planeta enano es un cuerpo celeste que está en órbita alrededor del Sol, que tiene suficiente masa para tener gravedad propia para superar las fuerzas rígidas de un cuerpo de manera que asuma una forma equilibrada hidrostática, es decir, redonda; que no ha despejado las inmediaciones de su órbita y que no es un satélite.

Tercera categoría: Todos los demás objetos que orbitan alrededor del Sol son considerados colectivamente como cuerpos pequeños del Sistema Solar.

En consecuencia, de acuerdo con esta definición, los planetas del Sistema Solar son a partir de ahora ocho, en lugar de nueve: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno (ordenados por su cercanía al Sol, de menor a mayor).

Plutón, descubierto en 1930, pierde así su condición de planeta, y continúa integrando el Sistema Solar como planeta enano.

TEST DE AUTOEVALUACIÓN

1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La Tierra se mueve alrededor del Sol más deprisa cuando es verano en el hemisferio norte que en invierno. b) Si la órbita de un satélite es circular, su centro coincide con el de la Tierra. c) La constante de la tercera ley de Kepler solo depende de la masa del astro central. d) Cuanto más lejos está un planeta del Sol menor es su velocidad orbital.

a) Falso

La órbita de la Tierra es casi circular, su distancia al Sol en el afelio de 152 millones de km y en el perihelio de 147 millones de km.

Según la segunda ley de Kepler la línea que une al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales. Por tanto, un planeta se mueve más deprisa cuando está más cerca del Sol que cuando está más lejos. Cuando la Tierra está en el perihelio, más cerca del Sol, es invierno en el hemisferio norte y viaja más deprisa que cuando está en el afelio, más lejos del sol, que es verano en el hemisferio norte.

b) Verdadero

Si la órbita no contiene al centro de la Tierra, entonces el momento angular del satélite respecto de la Tierra no se conservaría ya que los vectores de posición y fuerza no serían paralelos.

c) Verdadero

La constante de la tercera ley de Kepler depende de la masa del astro central.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_{\text{astro central}}}$$

2. Completa la frase: Un satélite geostacionario recorre su órbita con un período de _____ y está colocada en la vertical del _____ y se utilizan en _____.

Un satélite geostacionario recorre su órbita con un período de 24 horas y está colocada en la vertical del ecuador terrestre y se utilizan en comunicación y meteorología.

3. El peso de un objeto cual se eleva a una distancia igual a dos veces el radio terrestre es: a) 3 · P_{superficie}; b) P_{superficie}/3; c) P_{superficie}/9; d) P_{superficie}/2.

La solución correcta es la c).

Si el objeto se eleva a una distancia de $2 \cdot R_{\text{Tierra}}$, su distancia desde el centro de la Tierra es igual a $3 \cdot R_{\text{Tierra}}$. Por lo que el peso del objeto es:

$$P' = \frac{G \cdot m_T}{r^2} = \frac{G \cdot m_T}{9 \cdot R_T^2} = \frac{P_{\text{superficie}}}{9}$$

4. En el origen de coordenadas se sitúa una masa $m_1=1\text{kg}$, en el punto A (3, 0) se coloca otra masa $m_2 = 2 \text{ kg}$ y en el punto B (0, 4) una tercera $m_3 = 3 \text{ kg}$. El módulo de la fuerza que actúa sobre la masa colocada en el origen es: a) $1,94 \cdot 10^{-11} \text{ N}$; b) $2,73 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ c) 0 N d) $1,94 \cdot 10^{-9} \text{ N}$

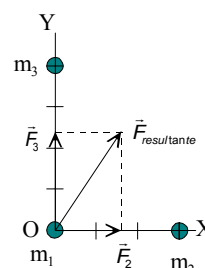
La solución correcta es la a)

La masa m_2 actúa con una fuerza de dirección la del eje X y sentido positivo, hacia la masa m_2 . Su módulo es:

$$F_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\text{kg} \cdot 2\text{kg}}{(3\text{m})^2} = 1,48 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

La masa m_3 actúa con una fuerza de dirección la del eje Y y sentido positivo, hacia la masa m_3 . Su módulo es:

$$F_2 = G \frac{m_2 \cdot m_3}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\text{kg} \cdot 3\text{kg}}{(4\text{m})^2} = 1,25 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$



Las dos fuerzas son perpendiculares, el módulo de la fuerza resultante se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$F_{\text{resultante}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(1,48 \cdot 10^{-11} \text{ N})^2 + (1,25 \cdot 10^{-11} \text{ N})^2} = 1,94 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

5. Una unidad astronómica, U.A, es igual a la distancia media desde la Tierra hasta el Sol. Si el planeta Saturno tarda 29,5 años en recorrer su órbita, su distancia Sol expresada en unidades astronómicas es: a) 29,5 U.A. b) 9,5 U.A. c) 59 U.A. d) 100 U.A.

La solución correcta es la b)

Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T_{\text{Tierra}}^2}{R_{\text{Tierra}}^3} = \frac{T_{\text{Saturno}}^2}{R_{\text{Saturno}}^3}$

$$\text{Sustituyendo: } \frac{(1\text{año})^2}{(1\text{U.A.})^3} = \frac{(29,5\text{años})^2}{R_{\text{Saturno}}^3} \Rightarrow R_{\text{Saturno}} = 9,5\text{U.A.}$$

6. Si un satélite está situado en una órbita a 330 km de la Tierra, su período de revolución es: a) 91 min; b) 62 min; c) 120 min; d) 1 h.

La respuesta correcta es la a)

Radio de la órbita es: $r = R_T + 330 \text{ km} = 6370 \text{ A } 10^3 \text{ m} + 330 \text{ A } 10^3 \text{ m} = 6,70 \text{ A } 10^6 \text{ m}$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el período es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(6,70 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}} = 5,5 \text{ A } 10^3 \text{ s} = 91 \text{ min}$$

7. Un planeta posee un radio que es el doble del radio terrestre y su densidad media es la misma que la de la Tierra. El peso de los objetos en ese planeta respecto de lo que pesan en la Tierra es: a) $2 \cdot P_{\text{Tierra}}$; b) P_{Tierra} ; c) $P_{\text{Tierra}}/2$; d) $P_{\text{Tierra}}/4$.

La solución correcta es la a)

Como la densidad es la misma que la de la Tierra, la masa de se planeta es:

$$\rho = \rho'; \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'}; \Rightarrow M' = M \frac{V'}{V} = M \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = M \frac{(2 \cdot R)^3}{R^3} = 8 \cdot M$$

$$\text{Y el peso del objeto es: } P' = \frac{G \cdot M' \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot 8 \cdot M \cdot m}{(2 \cdot R)^2} = 2 \cdot P_{\text{Tierra}}$$

8. Completa la frase: El momento angular de la Tierra respecto del Sol es un _____, de dirección _____ al plano de la órbita y permanece _____ a lo largo de la trayectoria.

El momento angular de la Tierra respecto del Sol es un vector, de dirección perpendicular al plano de la órbita y permanece constante a lo largo de la trayectoria.

9. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) La interacción gravitatoria entre dos masas depende del medio en el que coloquen. b) El momento angular de una partícula no depende del origen del sistema de referencia. c) Si la órbita de un satélite es estable, su vector de posición y el vector fuerza son paralelos d) El vector momento angular de un satélite respecto de la Tierra está contenido en el plano de su órbita.

a) Falso.

EL módulo de la fuerza de interacción gravitatoria no depende del medio en el que se coloquen los objetos, ya que el valor de G es el mismo en cualquier lugar o medio.

b) Falso.

El vector momento angular de una partícula depende del punto respecto del que se considere, ya que depende del vector de posición.

c) Verdadero.

Ya que de otra forma no se conservaría el vector momento angular del satélite respecto del planeta.

d) Falso.

El vector momento angular un satélite respecto de la Tierra es perpendicular al plano de la órbita.

10. Si se duplicara la masa de la Tierra, la distancia a que habría que colocar la Luna para que girase con el mismo período con el que lo hace actualmente sería: a) $r' = 2 r$; b) $r' = \sqrt[3]{2} r$; c) $r' = r/2$; d) $r' = r$.

La respuesta correcta es la b)

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r , y como $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_L}{r^2} = m_L \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita, r , resulta que: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

La relación de los radios en los dos supuestos es: $\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m'_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}}{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{m'_T}{m_T}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot m_T}{m_T}} \Rightarrow r' = \sqrt[3]{2} \cdot r$

Física

Unidad didáctica 2

Campo gravitatorio

SOLUCIONES UNIDAD 2. CAMPO GRAVITATORIO

CUESTIONES INICIALES

1. ¿Cuándo se dice que una fuerza es conservativa? ¿Para qué sirve saber si una fuerza es conservativa o no?

Una fuerza se dice que es conservativa cuando el trabajo realizado por la fuerza depende únicamente de la posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Si la fuerza es conservativa se puede calcular el trabajo aplicando la ley de la energía potencial, por lo que ese trabajo es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo y no hay que recurrir a la definición de trabajo elemental.

2. ¿A qué se denomina energía mecánica asociada a un objeto? ¿Cuándo se conserva la energía mecánica durante una transformación?

La energía mecánica asociada a un objeto es iguala a la suma de su energía cinética y de su energía potencial. La energía mecánica se conserva durante una transformación cuando solamente actúan fuerzas conservativas sobre el objeto.

3. ¿Cuánto pesa un objeto situado a una distancia igual a $3 \cdot R_{\text{Tierra}}$ de la superficie de la Tierra?

El peso del objeto se divide por nueve:

$$P' = m \cdot g' = m \frac{GM_T}{(3 \cdot R_T)^2} = m \frac{G \cdot M_T}{9 \cdot R_T^2} = m \frac{P}{9}$$

ACTIVIDADES FINALES

1. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se reduce a la mitad el campo gravitatorio terrestre? $R_T = 6400$ km

La relación de los módulos de los campos gravitatorios en la superficie y en el punto en cuestión son:

$$\frac{g_{\text{superficie}}}{g_P} = \frac{\frac{G \cdot M}{R_T^2}}{\frac{G \cdot M}{r^2}}; \frac{g_{\text{superficie}}}{\frac{g_{\text{superficie}}}{2}} = \frac{r^2}{R_T^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r}{R_T}$$

$$\text{Operando: } r = R_T + h = \sqrt{2} \cdot R_T$$

$$\text{Despejando: } h = \sqrt{2} \cdot R_T - R_T = 6400 \text{ km} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2,65 \cdot 10^3 \text{ km}$$

2. Se eleva un objeto de masa $m = 20$ kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura $h = 100$ km. ¿Cuánto ha incrementado su energía potencial?

La variación de la energía potencial asociada al objeto en la nueva posición es:

$$\Delta E_p = E_{p, \text{altura}} - E_{p, \text{superficie}} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} \right) = G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Operando: } \Delta E_p = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2} R_T^2 \frac{r - R_T}{R_T \cdot r} = g_0 \cdot m \cdot R_T^2 \frac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}$$

Soluciones unidad 2: Campo gravitatorio 2º Bachillerato 2008

Como la distancia h es mucho menor que el radio de la Tierra se puede realizar la aproximación $R_T \cdot (R_T + h) \approx R_T^2$ y por tanto:

$$\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ m} = 1,96 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Si no se utiliza la aproximación anterior, se tiene que:

$$\Delta E_p = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2} R_T^2 \frac{r - R_T}{R_T \cdot r} = g_0 \cdot m \cdot R_T \frac{h}{(R_T + h)}$$

$$\text{Sustituyendo: } \Delta E_p = 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ kg} \frac{(6370 \cdot 10^3 \text{ m}) \cdot (100 \cdot 10^3 \text{ m})}{6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 100 \cdot 10^3 \text{ m}} = 1,93 \cdot 10^7 \text{ J}$$

3. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado se colocan tres masas de 2 kg, 3 kg y 4 kg. Calcula la energía transformada para separarlas infinitamente.

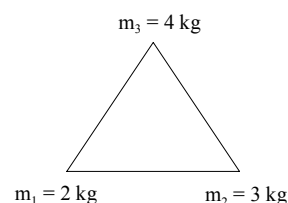
La energía potencial gravitatoria del sistema representa el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria al separar las partículas a una distancia infinita.

En el caso de un conjunto de partículas, la energía potencial gravitatoria total es la suma de todas las parejas de partículas.

$$E_{p,\text{total}} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -G \cdot \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}} \right)$$

$$E_{p,\text{total}} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(\frac{2\text{kg} \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}} + \frac{2\text{kg} \cdot 4\text{kg}}{1\text{m}} + \frac{3\text{kg} \cdot 4\text{kg}}{1\text{m}} \right) = -1,73 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

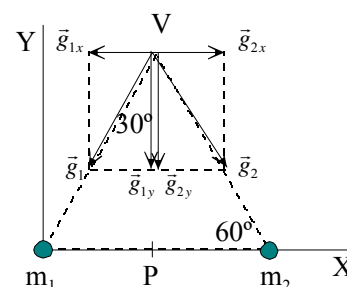
Que lógicamente tiene signo negativo. Ya que un agente externo tiene que realizar un trabajo contra la fuerza gravitatoria que se almacena en forma de energía potencial gravitatoria.



4. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado hay colocadas sendas masas iguales de 3 kg cada una. Calcula el vector campo gravitatorio en el otro vértice. Determina el vector fuerza que actúa sobre una masa de 5 kg colocada en ese vértice. Indica el valor de la energía transformada al trasladar la masa de 5 kg desde el vértice hasta el punto medio del lado que une las masas de 3 kg.

Se elige un sistema de referencia con el lado del triángulo que contiene las masas sobre el eje X y en el origen una de ellas. Se denominan m_1 y m_2 a los dos masas iguales y m a la masa que se traslada. Las dos masas generan un campo gravitatorio del mismo módulo en el otro vértice.

$$g_1 = g_2 = \frac{G \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}^2}$$



Las componentes en el eje X de los campos anteriores se anulan por simetría y las componentes en el eje Y se refuerzan. Como los ángulos de un triángulo equilátero son de 60° , resulta que:

$$g_{1y} = g_{2y} = g_1 \cdot \text{sen } 60^\circ = \frac{G \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}^2} \cdot \text{sen } 60^\circ$$

El módulo del campo gravitatorio en el otro vértice es:

$$g_T = 2 \cdot g_1 = 2 \cdot \frac{G \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}^2} \cdot \text{sen } 60^\circ = 2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}^2} \cdot \text{sen } 60^\circ = 3,46 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

$$\text{Vectorialmente: } \vec{g}_T = -3,46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Soluciones unidad 2: Campo gravitatorio 2º Bachillerato 2008

El vector fuerza que actúa sobre la masa de 5kg colocada en el vértice libre es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 5\text{kg} \cdot (-3,46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}) = -1,72 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La energía involucrada en el proceso se resuelve a través del cálculo del potencial.

El potencial gravitatorio que generan las dos masas iguales m_1 y m_2 en el otro vértice es una magnitud escalar (siempre de signo negativo) y cuyo valor es:

$$V_v = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left(-\frac{G \cdot m_1}{r_v} \right) = -2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 3\text{kg}}{1\text{m}} = -4,0 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

El potencial en el punto, P, medio del lado que contiene las masas iguales es:

$$V_p = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left(-\frac{G \cdot m_1}{r_p} \right) = -2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 3\text{kg}}{0,5\text{m}} = -8,0 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

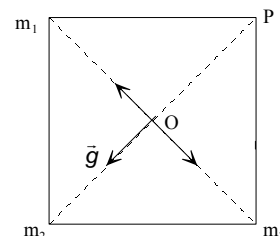
Aplicando las relaciones entre el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria y el potencial, resulta que:

$$\begin{aligned} W_{F_{\text{gravitatoria}} \text{ v} \rightarrow \text{p}} &= -\Delta E_p = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_p - V_v) = \\ &= -5 \text{ kg} \cdot [-8,0 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg} - (-4,0 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg})] = +2,00 \cdot 10^{-9} \text{ J} \end{aligned}$$

El proceso es espontáneo. La fuerza gravitatoria realiza un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada al sistema.

5. Tres masas iguales de 1 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula el módulo del campo gravitatorio en el centro del cuadrado. Determina el potencial gravitatorio en el vértice libre y en el centro del cuadrado. Calcula el trabajo realizado al trasladar un objeto de 10 kg de masa desde el centro del cuadrado hasta el vértice libre.

La geometría del ejercicio indica que los campos creados por las masas situadas en la misma diagonal se anulan. El campo gravitatorio total es igual al creado por la masa situada en el vértice opuesto al vértice libre P.



Este campo tiene la dirección de la diagonal que pasa por el punto P y sentido hacia la masa. Su módulo es:

$$g = \frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 1\text{kg}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \right)^2} = 1,33 \cdot 10^{-10} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

El potencial gravitatorio en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas en ese punto.

$$V_p = -2 \frac{G \cdot m}{r_1} - \frac{G \cdot m}{r_2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\text{kg} \left(\frac{2}{1\text{m}} + \frac{1}{\sqrt{2}\text{m}} \right) = -1,80 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_o = -3 \frac{G \cdot m}{r_1} = -3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\text{kg} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{m}} = -2,83 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

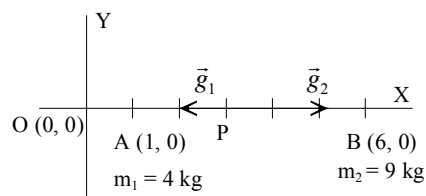
Aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{O \rightarrow P} = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_p - V_o) = -10 \text{ kg} \cdot (-1,80 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg} + 2,83 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}) = -1,03 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

6. Una partícula de 4 kg de masa se coloca en el punto de coordenadas A (1, 0) y otra de 9 kg de masa se coloca en el punto B (6, 0). ¿Hay algún punto en el que se anule el campo gravitatorio? Calcula sus coordenadas. Calcula la energía involucrada en el proceso de trasladar una masa de 5 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C (3,0).

Soluciones unidad 2: Campo gravitatorio 2º Bachillerato 2008

Una masa puntual genera un campo gravitatorio de dirección la radial y sentido hacia la masa considerada. El campo gravitatorio en un punto es la suma vectorial de los campos gravitatorios generados por cada una de las masas. Por tanto el campo se anula en un punto situado entre las dos masas. La distancia entre las dos masas es 5 m.



El punto P está situado sobre el eje X y dista x m del punto A y 5 - x m del B. Como en ese punto los módulos de los campos generados por cada masa son iguales, se tiene:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|; \frac{G \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot m_2}{r_2^2}; \frac{4 \text{ kg}}{x^2} = \frac{9 \text{ kg}}{(5-x)^2}$$

Operando: $2 \cdot (5 - x) = 3 \cdot x \Rightarrow x = 2 \text{ m}$; por tanto, las coordenadas de P son: P (3, 0)

En primer lugar se calcula el potencial gravitatorio en los puntos considerados, teniendo en cuenta que el potencial en un punto es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$V_O = V_{O1} + V_{O2} = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G \left(\frac{4 \text{ kg}}{1 \text{ m}} + \frac{9 \text{ kg}}{6 \text{ m}} \right) = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = -3,67 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_C = V_{C1} + V_{C2} = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G \left(\frac{4 \text{ kg}}{2 \text{ m}} + \frac{9 \text{ kg}}{3 \text{ m}} \right) = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = -3,34 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

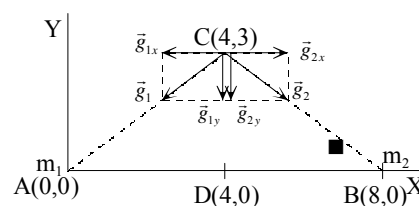
Aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{O \rightarrow C} = -\Delta E_p = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_C - V_O) = -5 \text{ kg} (-3,34 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg} + 3,67 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}) = -1,65 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

7. Dos masas puntuales $m_1 = m_2 = 10 \text{ kg}$ están colocadas en los puntos A (0 m, 0 m) y B (8 m, 0 m). Calcula el vector campo gravitatorio en el punto C (4 m, 3 m). ¿Qué fuerza actúa sobre una masa de $m_3 = 100 \text{ g}$ colocada en C? Calcula la energía transformada al trasladar la masa m_3 desde el punto C hasta el punto D (4 m, 0 m). Es espontáneo el proceso, interpreta el signo obtenido.

Cada una de las masas mayores genera en el punto C un campo gravitatorio cuyo módulo es:

$$g = G \frac{m}{r^2} = G \frac{m}{x^2 + y^2}$$



En el diagrama de la figura se observa que las componentes en X del campo gravitatorio se anulan y que las componentes en Y se refuerzan. Este campo tiene la dirección la de la recta que une los puntos C y D y su sentido es hacia el punto D. Su módulo es:

$$g_{\text{total}} = 2 \cdot g_y = 2 \cdot g \cdot \sin \varphi = 2 \cdot G \frac{m}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Sustituyendo: } g_{\text{total}} = 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10 \text{ kg}}{(4 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} \frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2}} = 4,27 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$$

$$\text{Vectorialmente: } \vec{g}_{\text{total}} = -4,27 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}$$

Aplicando la definición de intensidad del campo en un punto resulta que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}_{\text{total}} = 0,1 \text{ kg} \cdot (-4,27 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j} \text{ N/kg}) = -4,27 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Aplicando la definición de potencial gravitatorio en un punto. El potencial generado en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas.

$$V_C = -2 \cdot G \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10 \text{kg}}{\sqrt{(4\text{m})^2 + (3\text{m})^2}} = -2,67 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

$$V_D = -2 \cdot G \frac{m}{x} = -2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10 \text{kg}}{4\text{m}} = -3,34 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

Aplicando la ley de la energía potencial

$$W_{\text{Fcampo } C \rightarrow D} = -\Delta E_p = -m \cdot \Delta V = -m \cdot (V_D - V_C) = -0,1 \text{ kg} \cdot (-3,34 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg} + 2,67 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}) = 6,7 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

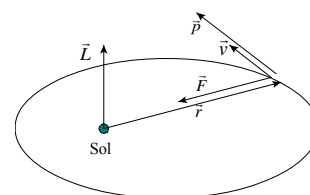
El proceso es espontáneo, ya que las masas están más cerca unas de otras en la posición final que en la inicial. Las fuerzas del campo realizan un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada a la nueva distribución.

8. El planeta Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6,99 \cdot 10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3,88 \cdot 10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4,60 \cdot 10^{10}$ m. En el perihelio de Mercurio calcula su velocidad orbital, su energía cinética, potencial y mecánica y los módulos de su momento lineal y angular. De las magnitudes indicadas anteriormente, ¿cuáles son iguales en el afelio?

Masa de Mercurio = $3,18 \cdot 10^{23}$ kg; Masa del Sol: $1,99 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular de Mercurio respecto del Sol es una cantidad constante a lo largo de la órbita.

$$\vec{L}_{\text{afelio}} = \vec{L}_{\text{perihelio}}$$



Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$$r_{\text{afelio}} \cdot v_{\text{afelio}} = r_{\text{perihelio}} \cdot v_{\text{perihelio}} \Rightarrow v_{\text{perihelio}} = 5,90 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

La velocidad orbital es un vector tangente a la trayectoria, por lo que no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de momento lineal: $\vec{p}_{\text{perihelio}} = m_{\text{mercurio}} \cdot \vec{v}_{\text{perihelio}}$

En módulo: $p_{\text{perihelio}} = m_{\text{Mercurio}} \cdot v_{\text{perihelio}} = 1,88 \cdot 10^{28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

El momento lineal es un vector tangente a la trayectoria, luego no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{mercurio}} \cdot v_{\text{perihelio}}^2 = 5,53 \cdot 10^{32} \text{ J}$

Que no se conserva a lo largo de la trayectoria, ya que el módulo de la velocidad no permanece constante.

La energía potencial gravitatoria asociada a esa posición es: $E_p = -\frac{G \cdot m_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{mercurio}}}{r_{\text{perihelio}}} = -9,2 \cdot 10^{32} \text{ J}$

Que tampoco es constante a lo largo de la trayectoria porque la distancia no lo es.

La energía mecánica es igual a la suma de las energías cinética y potencial gravitatoria.

$$E = E_c + E_p = -3,66 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

Cantidad negativa, ya que Mercurio está ligado al Sol. Esta cantidad permanece constante a lo largo de la trayectoria porque la interacción gravitatoria es una fuerza conservativa.

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$$\vec{L}_{\text{perihelio}} = \vec{r}_{\text{perihelio}} \wedge \vec{p}_{\text{perihelio}} \Rightarrow L_{\text{perihelio}} = r_{\text{perihelio}} \cdot p_{\text{perihelio}} = 8,63 \cdot 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Es un vector perpendicular al plano de la órbita y cuyo sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el del avance de un sacacorchos al voltear el vector de posición sobre el vector velocidad por el camino más corto.

Este vector permanece constante a lo largo de toda la trayectoria como corresponde a una fuerza central, ya que el momento de la fuerza que actúa sobre Mercurio respecto del Sol es igual a cero, el vector de posición y el vector fuerza son paralelos.

9. Un meteorito de 60 kg de masa cae desde un punto situado a una altura igual al radio de la Tierra con una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál será la velocidad del meteorito al caer en la superficie terrestre si despreciamos la fricción con la atmósfera? $M_{\text{Tierra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\text{Tierra}} = 6370 \text{ km}$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot R_T} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}; v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G \cdot M_T}{R_T} = v_{\text{final}}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}$$

$$\text{Despejando: } v_{\text{final}}^2 = v_{\text{inicial}}^2 + \frac{G \cdot M_T}{R_T}$$

$$\text{Sustituyendo: } v_{\text{final}} = \sqrt{v_{\text{inicial}}^2 + \frac{G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{(40 \text{ m/s})^2 + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6370 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

10. Un objeto de masa $m = 1000 \text{ kg}$ se acerca en dirección radial a un planeta, de radio $R_P = 6000 \text{ km}$, que tiene una gravedad $g = 10 \text{ m/s}^2$ en su superficie. Cuando se observa este objeto por primera vez se encuentra a una distancia $r_0 = 6 R_P$ del centro del planeta. ¿Qué energía potencial tiene ese objeto cuando se encuentra a la distancia r_0 ? Determina la velocidad inicial del objeto v_0 , o sea cuando está a la distancia r_0 , sabiendo que llega a la superficie del planeta con una velocidad $v = 12 \text{ km/s}$

La energía potencial inicial asociada a la posición del meteorito es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_p \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M_p \cdot m}{6 \cdot R_p} = -\frac{G \cdot M_p \cdot m \cdot R_p}{6 \cdot R_p^2} = -\frac{g \cdot m \cdot R_p}{6} = -\frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 6000 \cdot 10^3 \text{ m}}{6} = -1,0 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 - \frac{G \cdot M_p \cdot m}{r_0} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G \cdot M_p \cdot m}{R_p}; v_0^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_p}{6 \cdot R_p} = v_{\text{final}}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_p}{R_p}$$

$$\text{Despejando: } v_0^2 = v_{\text{final}}^2 - \frac{5 \cdot G \cdot M_p}{3 \cdot R_p} = v_{\text{final}}^2 - \frac{5 \cdot G \cdot M_p \cdot R_p}{3 \cdot R_p^2} = v_{\text{final}}^2 - \frac{5}{3} g \cdot R_p$$

$$\text{Sustituyendo: } v_0 = \sqrt{(12 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 - \frac{5}{3} 10 \text{ m/s}^2 \cdot 6000 \cdot 10^3 \text{ m}} = 6633 \text{ m/s}$$

11. En la superficie de un planeta de 2 000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 3 m/s². Calcula la masa del planeta. ¿Hasta qué altura se elevará un objeto que se lance verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 2 km/s?

Igualando las definiciones de peso según la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton, se tiene:

$$P = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \Rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3 \text{ m/s}^2 \cdot (2 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2} = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; E_{\text{mecánica superficie}} = E_{\text{mecánica posición final}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_O \cdot v_{\text{superficie}}^2 - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{R_P} = 0 - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{r}$$

$$\text{Operando: } \frac{v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}{2 \cdot R_P} = - \frac{G \cdot M_P}{r} \Rightarrow r = \frac{-2 \cdot R_P \cdot G \cdot M_P}{v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}$$

$$\text{Sustituyendo: } r = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 1,8 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ m} - 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 1,8 \cdot 10^{23} \text{ kg}} = 3 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\text{Con lo que la altura que alcanza es: } h = r - R = 3 \cdot 10^6 \text{ m} - 2 \cdot 10^6 \text{ m} = 1 \cdot 10^6 \text{ m}$$

12. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. ¿Qué altura máxima alcanzará? Calcula la velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular. R_T = 6 370 km

Si se prescinde del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \Psi \quad E_{c, \text{superficie}} + E_{p, \text{superficie}} = E_{c, \text{final}} + E_{p, \text{final}}$$

La energía cinética y potencial en la superficie de la Tierra se transforman en energía potencial gravitatoria asociada a su posición final.

$$\frac{1}{2} m_s \cdot v_{\text{superficie}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = 0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

$$\text{Operando: } \frac{v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T - 2 \cdot G \cdot M_T}{2 \cdot R_T} = - \frac{G \cdot M_T}{R_T + h} \quad \Psi \quad \frac{R_T + h}{G \cdot M_T} = \frac{2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T} \quad 0$$

$$\text{Despejando: } h = \frac{2 \cdot G \cdot M_T \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T} - R_T = \frac{v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T^2}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T} \quad 0$$

$$\text{Como: } g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \quad 0, \text{ se tiene que: } h = \frac{v_{\text{superficie}}^2}{2 \cdot g_0 - \frac{v_{\text{superficie}}^2}{R_T}} = \frac{v_{\text{superficie}}^2 \cdot R_T}{2 \cdot g_0 \cdot R_T - v_{\text{superficie}}^2} \quad 0$$

$$\text{Sustituyendo: } h = \frac{(3 \text{ 000 m/s})^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} - (3 \text{ 000 m/s})^2} \quad 0 = 4,95 \cdot 10^5 \text{ m}$$

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \quad G \frac{M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Despejando: } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 4,95 \cdot 10^5 \text{ m}}} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

13. Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa, ¿cuánto valdría la velocidad de escape desde su superficie?

Un cuerpo queda desligado del campo gravitatorio creado por otro cuerpo cuando su energía mecánica asociada a una posición es como mínimo igual a cero. En este caso llega hasta el infinito, en el que la energía potencial es cero, con velocidad nula.

La energía mecánica asociada a un cuerpo en la superficie de un planeta es igual a la suma de la energía cinética y potencial. Llamando v_e a la velocidad comunicada para que se escape del planeta, tenemos:

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = 0; \frac{1}{2} m_s v_e^2 - \frac{G m_s m_{\text{planeta}}}{R_{\text{planeta}}} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G m_{\text{planeta}}}{R_{\text{planeta}}}}$$

$$\text{Y para la Tierra: } v_{e,\text{Tierra}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Si ahora se reduce el radio de la Tierra a la mitad conservado su masa, entonces la velocidad de escape desde su superficie se es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_{\text{planeta}}}{R_{\text{planeta}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_T}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot G \cdot m_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot g_{0,T} \cdot R_T} = \sqrt{2} \cdot v_{e,T}$$

14. Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente una partícula con una velocidad igual al doble de su velocidad de escape. ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy lejos de la Tierra?

En primer lugar se determina la velocidad de escape en la superficie de la Tierra. En ese punto la energía mecánica asociada a la partícula es igual a cero.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G M_T \cdot m}{R_T} = 0 \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G M_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Por lo que la velocidad inicial de la partícula es: $v = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$

Una vez lanzada la partícula solamente actúa la interacción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva durante su desplazamiento. En puntos muy alejados de la Tierra, la energía potencial gravitatoria asociada a ella es igual a cero, por lo que aplicando la energía de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Tierra y un punto muy alejado, resulta:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G M_T \cdot m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G M_T \cdot m}{r_{\infty}}$$

Sustituyendo la velocidad inicial por su valor y operando, resulta que:

$$\frac{1}{2} 4 \cdot 2 g_0 \cdot R_T - g_0 \cdot R_T = \frac{1}{2} v_{\text{final}}^2 - 0 \Rightarrow v_{\text{final}} = \sqrt{6 \cdot g_0 \cdot R_T} = \sqrt{6 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = 19400 \text{ km}$$

15. Desde la superficie de la Luna se lanza un objeto con una velocidad igual a su velocidad de escape, calcula a qué distancia del centro de la Luna se ha reducido su velocidad a la mitad. $R_{\text{Luna}} = 1738 \text{ km}$; $g_{0,\text{Luna}} = 1,62 \text{ m/s}^2$.

Para que un objeto se escape de la atracción lunar la energía mecánica en su superficie tiene que ser igual a cero.

$$E_{c,\text{superficie}} + E_{p,\text{superficie}} = 0; \frac{1}{2} m_{\text{objeto}} \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot m_{\text{objeto}}}{R_{\text{Luna}}} = 0$$

$$\text{Despejando: } v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Luna}}}{R_{\text{Luna}}}} = \sqrt{2 \cdot g_{0,\text{Luna}} \cdot R_{\text{Luna}}}$$

En el movimiento del objeto desde la superficie de la Luna hasta el punto P que dista una distancia r del centro de la Luna en el que la velocidad del objeto se reduce a la mitad se conserva la energía mecánica asociada al objeto.

$$E_{c, \text{superficie}} + E_{p, \text{superficie}} = E_{c, \text{posición}} + E_{p, \text{posición}}$$

$$\frac{1}{2} m_{\text{objeto}} \cdot v_{\text{superficie}}^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot m_{\text{objeto}}}{R_{\text{Luna}}} = \frac{1}{2} m_{\text{objeto}} \cdot v_{\text{posición}}^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot m_{\text{objeto}}}{r}$$

La velocidad en la superficie es la de escape y la velocidad en la posición r es la mitad de la anterior, por tanto:

$$\frac{1}{2} \left(v_{\text{escape}}^2 - \frac{v_{\text{escape}}^2}{4} \right) = G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{Luna}}} - \frac{1}{r} \right); \quad \frac{3}{8} v_{\text{escape}}^2 = G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{Luna}}} - \frac{1}{r} \right)$$

Sustituyendo la velocidad de escape por su valor:

$$\frac{3}{8} \frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Luna}}}{R_{\text{Luna}}} = G \cdot M_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{Luna}}} - \frac{1}{r} \right); \quad \frac{3}{4 \cdot R_{\text{Luna}}} = \frac{1}{R_{\text{Luna}}} - \frac{1}{r}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{4 \cdot R_{\text{Luna}}}$$

Por tanto la distancia pedida es: $r = 4 \cdot R_{\text{Luna}}$

16. Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a un planeta. ¿Por qué valor hay que multiplicar su velocidad para que se escape de la atracción gravitatoria en esa posición?

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \quad G \frac{M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}$$

Que es la velocidad del satélite cuando la órbita es estable.

Para que el satélite se escape desde esa posición se tiene que cumplir que su energía mecánica es igual a cero.

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}$$

$$\text{Comparando los dos valores de la velocidad: } \frac{v_{\text{escape}}}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}}{\sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}} = \sqrt{2} \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{2} \cdot v$$

Si se multiplica la velocidad orbitada por $\sqrt{2}$ el satélite se escapa desde su posición.

17. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre y su masa la mitad. Calcule la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta, en función de sus correspondientes valores terrestres.

La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es:

$$g = \frac{G \cdot m}{R^2} = \frac{G \cdot \frac{M_{\text{Tierra}}}{2}}{\left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{3} \right)^2} = \frac{9}{2} \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2} = \frac{9}{2} g_{0, \text{Tierra}}$$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie del planeta.

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m}{R_{\text{planeta}}} = 0 \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{R_{\text{planeta}}}}$$

La velocidad de escape en la superficie de la Tierra es:

$$v_{\text{escape, Tierra}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}} = \sqrt{2 \cdot g_{0, \text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}$$

Y la velocidad de escape en el planeta es:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Planeta}}}{R_{\text{Planeta}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \frac{M_{\text{Tierra}}}{3}}{\frac{R_{\text{Tierra}}}{3}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}} = \sqrt{3 \cdot g_{0, \text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}}$$

Y en función de la velocidad de escape de la Tierra:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{3 \cdot \frac{2}{2} \cdot g_{0, \text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_{\text{escape, Tierra}}$$

18. Un satélite de 350 kg de masa se encuentra en una órbita circular de 15000 km de radio alrededor de la Tierra. Calcula la energía del satélite en la órbita. $R_T = 6370$ km

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r}}$$

El satélite en su órbita tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria.

$$E_{\text{órbita}} = E_{p, \text{órbita}} + E_{c, \text{órbita}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r} + \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \cdot v_{\text{órbita}}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r} + \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_{\text{Tierra}}^2 \cdot m_{\text{satélite}}}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \frac{350 \text{ kg}}{15000 \cdot 10^3 \text{ m}} = -4,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

19. Una estación espacial se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra. Su masa es de 10000 kg y su velocidad de 4,2 km/s. Calcula el radio de la órbita y la energía potencial gravitatoria de la estación. $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene a la estación en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Despejando: } r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(4,2 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2} = 2,26 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La energía potencial gravitatoria asociada a la posición de la nave es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 10000 \text{ kg}}{2,26 \cdot 10^7 \text{ m}} = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

20. Para observar la Tierra, un satélite de 1000 kg de masa, que está inicialmente en una órbita circular a 630 km de la superficie, pasa a otra que está solo a 130 km. Calcula el cociente entre los períodos de revolución en cada órbita. El cambio en la energía potencial del satélite debido al campo gravitatorio terrestre. La energía potencial, ¿aumenta o disminuye? $R_T = 6370 \text{ km}$; $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Aplicando la tercera ley de Kepler a las dos órbitas del satélite:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 630 \cdot 10^3)^3}{(6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 130 \cdot 10^3)^3}} = 1,12$$

La energía potencial gravitatoria en las respectivas órbitas es:

$$E_{p1} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1000 \text{ kg}}{6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 630 \cdot 10^3 \text{ m}} = -5,72 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E_{p2} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_2} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1000 \text{ kg}}{6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 130 \cdot 10^3 \text{ m}} = -6,16 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La variación de la energía potencial gravitatoria es:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -6,16 \cdot 10^{10} \text{ J} + 5,72 \cdot 10^{10} \text{ J} = -4,4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La variación es negativa ya que la energía potencial gravitatoria disminuye según se acerca el objeto a la superficie de la Tierra.

21. ¿Qué relación existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de una satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta? ¿Cuál es la relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica?

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r , alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma \vec{F} = m_{\text{satélite}} \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v_{\text{órbita}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}$$

La energía cinética del satélite es: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{satélite}} \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}$

La energía potencial gravitatoria en la posición de la órbita es: $E_p = -\frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}$

La energía cinética siempre tiene el signo positivo, mientras que la energía potencial gravitatoria tiene siempre signo negativo.

Dividiendo ambas expresiones, se tiene:

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}{-\frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow E_c = -\frac{1}{2} E_p$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y la potencial gravitatoria.

$$E_{\text{Total}} = E_c + E_p = -\frac{1}{2} E_p + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

22. Un pequeño satélite de 1500 kg de masa, gira alrededor de la Luna orbitando en una circunferencia de 3 veces el radio de la Luna. Si la masa de la Luna es de $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ y su radio 1740 km, calcula la energía mecánica asociada al satélite en su órbita. ¿Cuánto vale la velocidad de escape desde la superficie de la Luna? La masa de la Luna es $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ y su radio 1740 km.

a) Aplicando la ley de Gravitación Universal y la segunda ley de Newton al movimiento circular, se tiene, con M la masa de la Luna:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{G \cdot M}{r} = v^2$$

Utilizando la relación entre la velocidad y el período: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$,

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(3 \cdot R_L)^3}{G \cdot M_{Luna}}} = 6 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot R_{Luna}^3}{G \cdot M_{Luna}}}$$

La energía mecánica asociada al satélite en su posición, energía de enlace, es igual a la suma de su energía cinética y de su energía potencial gravitatoria.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

$$\text{Sustituyendo: } E_{mecánica} = -\frac{1}{6} \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_{satélite}}{R_{Luna}}$$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie de la Luna.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Luna}}{R_{Luna}}}$$

23. Un satélite de masa 200 kg se encuentra en órbita circular de radio r alrededor del centro de la Tierra. Si la energía potencial a esa distancia es de $-2 \cdot 10^9$ J. Calcular la velocidad del satélite. Datos: $R_T = 6400$ km.

La energía potencial gravitatoria de un satélite a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m \cdot R_T^2}{r \cdot R_T^2} = -\frac{g \cdot m \cdot R_T^2}{r}$$

$$\text{Despejando: } r = -\frac{g \cdot m \cdot R_T^2}{E_p} = -\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 200 \text{ kg} \cdot (6400 \cdot 10^3 \text{ m})^2}{-2 \cdot 10^9 \text{ J}} = 4,0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r , alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma \vec{F} = m_{satélite} \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_T \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v_{órbita}^2}{r} \Rightarrow v_{órbita} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$\text{Operando: } v_{órbita} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot R_T^2}{r \cdot R_T^2}} = \sqrt{\frac{g \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6400 \cdot 10^3 \text{ m})^2}{4,0 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 3,17 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

24. Se desea poner en órbita un satélite geostacionario de 25 kg. Calcula el radio de la órbita y las energías cinética, potencial y mecánica del satélite en la órbita. $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

Se denomina órbita geostacionaria a la órbita en la que el período de traslación de un satélite es igual al período de rotación de la Tierra.

$$T = 24 \text{ h} = 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Estos satélites mantienen su posición relativa respecto de un punto de la Tierra, por lo que se utilizan como repetidores de las señales electromagnéticas en comunicación.

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r , y como: $v = \frac{2 \pi \cdot r}{T}$ y $g_0 = \frac{G \cdot m_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}$, se

tiene que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_{Tierra} \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_{Tierra}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

$$\text{Despejando: } r^3 = \frac{G \cdot m_{\text{Tierra}} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_{\text{Tierra}}^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Sustituyendo se tiene que el radio de la órbita es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6 \cdot 370 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot (8,64 \cdot 10^4 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42 \cdot 200 \text{ km}$$

El valor de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} = \frac{1}{2} 50 \text{ kg} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{42200 \cdot 10^3 \text{ m}} = 1,18 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Y el de la energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 50 \text{ kg}}{42200 \cdot 10^3 \text{ m}} = -2,36 \cdot 10^8 \text{ J}$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y de la potencial gravitatoria.

$$E_{\text{total}} = E_c + E_p = 1,18 \cdot 10^8 \text{ J} - 2,36 \cdot 10^8 \text{ J} = -1,18 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Que tiene signo negativo ya que el satélite está enlazado con la Tierra.

25. Se desea poner en órbita circular un satélite meteorológico de 1000 kg de masa a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. Calcula la velocidad, el periodo y aceleración que debe tener en la órbita. ¿Qué trabajo hay que realiza para poner en órbita el satélite?

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G \frac{M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}$, se tiene que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_{\text{Tierra}}^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 300 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 7,72 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$\text{El período de revolución es: } T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 300 \cdot 10^3 \text{ m})}{7,72 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 5 \cdot 429 \text{ s} = 1,51 \text{ horas}$$

$$\text{La aceleración normal en la órbita es: } a = \frac{v^2}{r} = \frac{(7,72 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 300 \cdot 10^3 \text{ m}} = 8,94 \text{ m/s}^2$$

b) Aplicando la ley de la conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, se tiene que el trabajo realizado por los motores es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$$W_{\text{realizado}} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{\text{mecánica final}} - E_{\text{mecánica inicial}} = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}}$$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{\text{órbita}} = E_{p, \text{órbita}} + E_{c, \text{órbita}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r} + \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \cdot v_{\text{órbita}}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor: $v_{\text{orbital}}^2 = \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r}$

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r} + \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_{\text{Tierra}}^2 \cdot m_{\text{satélite}}}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \frac{1000 \text{ kg}}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 300 \cdot 10^3 \text{ m}} = -2,98 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial gravitatoria.

$$E_{\text{superficie}} = E_{p,\text{superficie}} = -\frac{GM_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{R_{\text{Tierra}}} = -g_0 \cdot R_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}$$

$$\text{Sustituyendo: } E_{\text{superficie}} = -9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg} = -6,24 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Por tanto, la energía transformada para poner al satélite en órbita es:

$$W_{\text{realizado}} = \Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}} = -2,98 \cdot 10^{10} \text{ J} - (-6,24 \cdot 10^{10} \text{ J}) = 3,26 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

26. La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura $h = 390 \text{ km}$ sobre la superficie terrestre, siendo su masa $m = 415$ toneladas. a) Calcule su período de rotación en minutos así como la velocidad con la que se desplaza. b) ¿Qué energía es necesaria para llevarla desde su órbita actual a otra a una altura el doble? ¿Cuál sería el período de rotación en esa nueva órbita?

a) El radio de la órbita es: $r = R_T + 390 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 390 \cdot 10^3 \text{ m} = 6,76 \cdot 10^6 \text{ m}$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_{\text{ISS}} \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r^2} = m_{\text{ISS}} \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, resulta que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{r}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{6,76 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7,67 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

De igual forma, se tiene que el período de rotación es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(6,76 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}} = 5,54 \cdot 10^3 \text{ s} = 92 \text{ min}$$

b) La energía asociada a un satélite en órbita es igual a su energía de enlace, es decir, a la suma de la energía cinética y potencial.

$$E_{\text{órbita}} = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{ISS}} \cdot v^2 - \frac{G \cdot m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r}$$

Sustituyendo a la velocidad orbital por $v^2 = \frac{G \cdot m_T}{r}$, y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$ se tiene que:

$$E_{\text{órbita}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{ISS}} \cdot \frac{G \cdot m_T}{r} - \frac{G \cdot m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{\text{ISS}}}{r}$$

Al trasladar a un satélite desde una órbita de radio r_1 a otra de radio r_2 , se cumple que:

$$W_{\text{cambio de órbita}} = \Delta E = E_{\text{órbita } 2} - E_{\text{órbita } 1} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{\text{ISS}}}{r_2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{\text{ISS}}}{r_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_{\text{ISS}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Los radios de las dos órbitas son:

$$r_1 = R_T + 390 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 390 \cdot 10^3 \text{ m} = 6,76 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_2 = R_T + 2 \cdot 390 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 2 \cdot 390 \cdot 10^3 \text{ m} = 7,15 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Sustituyendo, la energía involucrada en el proceso es:

$$W_{\text{cambio órbita}} = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot 415 \cdot 10^3 \text{ kg} \left(\frac{1}{6,76 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{7,15 \cdot 10^6 \text{ m}} \right) = 6,7 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Lógicamente de signo positivo, la energía mecánica asociada a una órbita es mayor cuanto más externa es.

El período en la nueva órbita es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(7,15 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}} = 6,02 \cdot 10^3 \text{ s} = 100 \text{ min}$$

Cuanto más alejada está la órbita más tiempo se tarda en recorrerla, de acuerdo con la tercera ley de Kepler.

27. La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Marte es $3,7 \text{ m/s}^2$. El radio de la Tierra es 6370 km y la masa de Marte es el 11% de la masa de la Tierra. Calcula el radio del planeta Marte y la velocidad de escape desde su superficie.

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es: $g = \frac{G \cdot m}{R^2}$

La relación entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de la Tierra y la superficie de Marte es:

$$\frac{g_{\text{Tierra}}}{g_{\text{Marte}}} = \frac{\frac{G \cdot m_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}}{\frac{G \cdot m_{\text{Marte}}}{R_{\text{Marte}}^2}} = \frac{m_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Marte}}^2}{m_{\text{Marte}} \cdot R_{\text{Tierra}}^2} = \frac{m_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Marte}}^2}{\frac{11}{100} m_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}^2} = \frac{100 \cdot R_{\text{Marte}}^2}{11 \cdot R_{\text{Tierra}}^2}$$

Despejando y sustituyendo, resulta que:

$$R_{\text{Marte}} = \sqrt{\frac{11 \cdot g_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Tierra}}^2}{100 \cdot g_{\text{Marte}}}} = \frac{R_{\text{Tierra}}}{10} \sqrt{\frac{11 \cdot g_{\text{Tierra}}}{g_{\text{Marte}}}} = \frac{6370 \text{ km}}{10} \sqrt{\frac{11 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{3,7 \text{ m/s}^2}} = 3438 \text{ km}$$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie de Marte.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Marte}}}{R_{\text{Marte}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{Marte}} \cdot R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Marte}}^2}} = \sqrt{2 \cdot g_{\text{Marte}} \cdot R_{\text{Marte}}}$$

Sustituyendo: $v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot 3,7 \text{ m/s}^2 \cdot 3,44 \cdot 10^6 \text{ m}} = 5045 \text{ m/s}$

INVESTIGA

1. ¿Cómo se les llevan los suministros a los astronautas que están permanentemente en órbita?

Los suministros de material a la estación se transporta con los cohetes Soyuz rusos, con los transbordadores espaciales norteamericanos o con los vehículos ATV lanzados por los cohetes Ariane de Europa.

2. ¿Qué tipo de combustible utilizan los cohetes que colocan a los satélites en órbita?

El cohete europeo Ariane y los transbordadores espaciales utilizan hidrógeno y oxígeno. Los Soyuz rusos usan una variante de queroseno llamada syntin.

3. ¿Cómo es la vida en un ambiente de ingravidez?

Los astronautas reciben adiestramiento para realizar todas las tareas cotidianas: trasladarse, comer, asearse, trabajar o dormir. Todos los objetos deben estar sujetos a algo, en un ambiente de ingravidez nada es más pesado que otra cosa.

TEST DE AUTOEVALUACIÓN

1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) El potencial gravitatorio es una magnitud vectorial. b) El potencial gravitatorio es una magnitud cuyo signo es siempre negativo. c) El trabajo para transportar una masa por una superficie equipotencial es siempre positivo. d) Las superficies equipotenciales no se pueden cortar.

a) Falso

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar.

b) Verdadero

c) Falso

El trabajo para transportar un objeto por una superficie equipotencial es igual a cero, y que la diferencia de potencial entre dos puntos es cero.

d) Verdadero.

Si se cortaran habrías puntos con dos valores del campo, perpendiculares a las superficies que se cortan.

2. Completa la siguiente frase: Las líneas de campo gravitatorio son _____ al vector campo y para una masa puntual son _____ su sentido es _____.

Las líneas de campo gravitatorio son tangentes al vector campo y para una masa puntual son radiales su sentido es hacia la masa.

3. La energía necesaria para separar dos partículas de 2 kg de masa situadas a una distancia de 1 m hasta una distancia de 3 m es: a) $+ 1,8 \cdot 10^{-10}$ J; b) $- 1,8 \cdot 10^{-10}$ J; c) 0 J; d) $- 3,6 \cdot 10^{-10}$ J.

La solución correcta es la b)

El trabajo realizado para separar dos masas es igual a la variación de la energía potencial gravitatoria.

$$E_{p\text{ inicial}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{2\text{kg} \cdot 2\text{kg}}{1\text{m}} = -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_{p\text{ final}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{2\text{kg} \cdot 2\text{kg}}{3\text{m}} = -8,9 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p\text{ final}} - E_{p\text{ inicial}}) = -(-8,9 \cdot 10^{-11} \text{ J} + 2,7 \cdot 10^{-10} \text{ J}) = -1,8 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

El proceso no es espontáneo.

4. Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa, el módulo del campo gravitatorio en su superficie es: a) $2 \cdot g_0$; b) $4 \cdot g_0$; c) $g_0/2$; d) g_0 .

La solución correcta es la b)

$$\text{En efecto: } g' = \frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{G \cdot M}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 4 \frac{G \cdot M}{R^2} = 4 \cdot g_0$$

5. La velocidad de escape desde la superficie de un planeta que tiene forma esférica con un radio de 3 000 km en el que la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s² es igual a: a) 6000 m/s; b) 4000 m/s; c) 5000 m/s; d) 3000 m/s.

La solución correcta es la a)

El valor numérico de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta coincide con el valor de la intensidad del campo gravitatorio en su superficie.

$$g = \frac{G \cdot m}{R^2} \Rightarrow m = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

La velocidad de escape es la que hace igual a cero a la energía mecánica de un objeto situado en la superficie del astro.

$$E_{\text{mecánica superficie}} = E_{\text{mecánica } \infty} = 0; E_c \text{ superficie} + E_p \text{ superficie} = 0;$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_{\text{objeto}} \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot m_{\text{astro}} \cdot m_{\text{objeto}}}{R} = 0;$$

$$\text{Despejando: } v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_{\text{astro}}}{R}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 6 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ m}} = 6 \text{ 000 m/s}$$

6. El potencial gravitatorio en el punto medio del segmento que une a dos masa de 1 kg situadas a 4 m de distancia es: a) 0J/kg; b) 6,67·10⁻¹¹J/kg; c) - 6,67·10⁻¹¹J/kg; d) 0,5 J/kg

La solución correcta es la c)

La distancia de las masas al punto es de 2 m. El potencial gravitatorio es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$V = V_1 + V_2 = -2 \cdot \frac{G \cdot m}{r} = -2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 1 \text{ kg}}{2 \text{ m}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ J/kg}$$

7. El campo gravitatorio terrestre se reduce a la mitad de su valor en la superficie de la Tierra a una distancia del centro de la Tierra de: a) R_{Tierra}/2; b) 2 · R_{Tierra}; c) √2 · R_{Tierra}; d) 4 · R_{Tierra}.

La solución correcta es la c)

La relación de los módulos del campo en ese punto y en la superficie de la Tierra es:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\frac{G \cdot M}{r^2}}{\frac{G \cdot M}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{r^2}; \frac{g_0}{g} = \frac{R_T^2}{r^2}; r^2 = 2 \cdot R_T \Rightarrow r = \sqrt{2} \cdot R_T$$

8. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) El momento angular del planeta respecto de la estrella es una cantidad constante. b) La velocidad de un satélite es menor cuando pasa por la posición más próxima al planeta. c) La energía de enlace de un satélite es siempre positiva. d) La energía mecánica asociada a un satélite tiene su valor más elevado cuando pasa por la posición más próxima al planeta.

a) Verdadero.

En caso contrario la órbita no sería estable.

b) Falso.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, ley de las áreas, la velocidad es mayor cuanto más cerca esté el satélite al planeta.

c) Falso.

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r , alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma \vec{F} = m_{\text{satélite}} \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v_{\text{órbita}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r}}$$

Se denomina energía de enlace de un satélite a su energía mecánica asociada a esa órbita.

$$E_{\text{órbita}} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_{\text{satélite}} \cdot v_{\text{órbita}}^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}$$

Sustituyendo a la velocidad por su valor en la órbita y operando:

$$E_{\text{órbita}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{satélite}} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}}}{r} - \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_{\text{Tierra}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r}$$

Que es una cantidad con signo negativo porque el satélite está ligado al planeta.

d) Falso

La interacción gravitatoria es una fuerza conservativa, por ello la energía mecánica del satélite se conserva a lo largo de toda la órbita.

9. Completa la siguiente frase: Los satélites artificiales se lanzan desde _____ y hacia el _____ con el fin de aprovechar _____.

Completa la siguiente frase: Los satélites artificiales se lanzan desde el ecuador terrestre y hacia el este con el fin de aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra.

10. Para trasladar un satélite de 100 kg de masa que esta situado en una órbita de radio $2 \cdot R_{\text{Tierra}}$ a una órbita de radio $5 \cdot R_{\text{Tierra}}$, la energía involucrada es: a) $2,1 \cdot 10^8$ J; b) $-2,1 \cdot 10^8$ J; c) $1,56 \cdot 10^9$ J; d) $4,2 \cdot 10^8$ J.

La solución correcta es la a)

Cálculo de la velocidad de un satélite en una órbita.

La velocidad del satélite en su órbita se determina aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v_{\text{órbita}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$\text{En la órbita}_1 = 3R_T: v_{\text{órbita}, 1} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{3 \cdot R_T}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot R_T}{3 \cdot R_T^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} g_0 \cdot R_T}$$

$$\text{Operando de la misma forma en la órbita}_2 = 5R_T \text{ es: } v_{\text{órbita}, 2} = \sqrt{\frac{1}{5} g_0 \cdot R_T}$$

Todo objeto en órbita tiene asociada una energía mecánica debido a su posición respecto de la Tierra y a su velocidad, que se denomina energía de enlace.

$$E_{\text{órbita}} = \frac{1}{2} m_s \cdot v_{\text{órbita}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} = \frac{1}{2} m_s \frac{G \cdot M_T}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r}$$

Cálculo de la energía intercambiada para pasar de una órbita a otra.

Soluciones unidad 2: Campo gravitatorio 2º Bachillerato 2008

$$W_{\text{Fexterna}} = \Delta E = E_{\text{orbita 2}} - E_{\text{orbita 1}} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_1} = \frac{1}{2} G \cdot M_T \cdot m_s \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Sustituyendo los valores de los radios de las órbitas:

$$\Delta E = \frac{1}{2} G \cdot M_T \cdot m_s \left[\frac{1}{3 \cdot R_T} - \frac{1}{5 \cdot R_T} \right] = \frac{1}{2} G \cdot M_T \cdot m_s \frac{5 - 3}{15 \cdot R_T} = \frac{1}{15} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T}$$

Sustituyendo, se tiene que: $\Delta E = \frac{1}{15} g_0 \cdot m_s \cdot R_T$

Sustituyendo las diferentes magnitudes queda: $\Delta E = \frac{1}{15} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 50 \text{ kg} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ J}$

Física

Unidad didáctica 3

Movimiento vibratorio

SOLUCIONES UNIDAD 3. MOVIMIENTO VIBRATORIO

CUESTIONES INICIALES

1. Enumera varios ejemplos de movimientos periódicos e identifica alguna de sus magnitudes características.

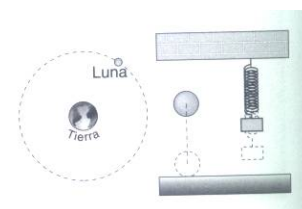
Son ejemplos de movimientos periódicos: el movimiento de la Tierra alrededor del Sol y alrededor de sí misma, el del extremo de la manecilla de un reloj, el de la lenteja de un péndulo, en de las copas de los árboles.

Una magnitud característica de estos movimientos es el tiempo que tardan los objetos en realizar un recorrido completo y el número de recorridos completos que recorren en la unidad de tiempo.

2. Dibuja las trayectorias que describen los siguientes objetos: la Luna, una pelota que bota, un cuerpo que cuelga de un muelle y oscila arriba y abajo. Dibuja los vectores velocidad y fuerza en varias posiciones de la trayectoria de los movimientos anteriores. Compara sus direcciones y sentidos.

Para la Luna: el vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria y el vector fuerza siempre está dirigido hacia la Tierra.

Para la pelota: el vector velocidad tiene sentido hacia arriba al subir y hacia abajo al bajar, el vector fuerza (peso) tiene sentido siempre hacia abajo.



Para el muelle: el vector velocidad puede tener sentido hacia arriba o hacia abajo, el vector fuerza siempre tiene sentido contrario al desplazamiento en torno a la posición central de equilibrio.

3.)Cuál es la misión del péndulo de un reloj?)De qué factores depende el período de su movimiento?

La misión del péndulo es la de calibrar los mecanismos del reloj. Su período se mantiene estable ya que una masa, pesas, al descender compensa el rozamiento. Su período depende de su longitud y de la aceleración de la gravedad.

ACTIVIDADES FINALES

1. La ecuación general del movimiento de una partícula que describe un movimiento vibratorio armónico simple, en unidades del SI, es: $x = 0,10 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t + \pi/2)$. ¿Cuál es el valor de la amplitud y de la frecuencia del movimiento? Calcula velocidad en el instante $t = 2$ s.

Comparando con la ecuación general $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$, se tiene que: $A = 0,1$ m
 $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = \pi \text{ rad/s} \Rightarrow \nu = \pi/2 \text{ Hz}$

La expresión de la velocidad es:

$$v = 0,10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot t + \pi/2) \text{ m/s} \Rightarrow v_{t=2\text{s}} = 0,10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot 2 + \pi/2) = 0 \text{ m/s}$$

2. Un objeto oscila según un movimiento armónico simple dado por $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$. Si el valor de la amplitud de la oscilación es de 6 cm, y la aceleración del objeto es 24 cm/s^2 cuando la posición es $x = -4$ cm, calcula la aceleración cuando $x = 1$ cm y la velocidad máxima del objeto.

Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración de una partícula, resulta que:

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t); \quad a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x$$

Aplicando las condiciones que se indican, resulta que la pulsación, ω , es:

$$a = -\omega^2 \cdot x; \quad 24 \text{ cm/s}^2 = -\omega^2 \cdot (-4 \text{ cm}) \Rightarrow \omega = 2,45 \text{ rad/s}$$

Las expresiones de la posición, velocidad y aceleración son:

$$x = 6 \text{ cm} \cdot \sin(2,45 \text{ rad/s} \cdot t);$$

$$v = 6 \text{ cm} \cdot 2,45 \text{ rad/s} \cdot \cos(2,45 \text{ rad/s} \cdot t) = 14,7 \text{ cm/s} \cdot \cos(2,45 \text{ rad/s} \cdot t)$$

$$a = -(2,45 \text{ rad/s})^2 \cdot x = -6 \text{ rad/s}^2 \cdot x$$

La aceleración en la posición pedida es: $a = -6 \text{ rad/s}^2 \cdot 1 \text{ cm} = -6 \text{ cm/s}^2$

La velocidad máxima es: $v_{\text{máxima}} = 14,7 \text{ cm/s}$

3. Un objeto que oscila con una frecuencia angular $\omega = 8,0 \text{ rad/s}$, se encuentra en el instante inicial, $t = 0$, en la posición $x_0 = 4 \text{ cm}$ y lleva una velocidad de $v_0 = -25 \text{ cm/s}$. Escribe la expresión de la posición x en función del tiempo.

Las expresiones generales de la posición y velocidad de un objeto que vibra con movimiento armónico simple son:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0); \quad v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Dividiendo ambas expresiones, resulta que: $\frac{v}{x} = -\omega \tan(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Sustituyendo las condiciones iniciales: $\frac{-25 \text{ cm/s}}{4 \text{ cm}} = -8,0 \text{ rad/s} \cdot \tan(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

Despejando, la fase inicial es: $\tan \varphi_0 = 0,78125 \Rightarrow \varphi_0 = 0,66 \text{ rad}$

Sustituyendo en la ecuación de la posición inicial, resulta que la amplitud del movimiento es:

$$4 \text{ cm} = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + 0,66 \text{ rad}) \Rightarrow A = 5,08 \text{ cm}$$

La expresión pedida es: $x(t) = 5,08 \cdot \cos(8,0 \cdot t + 0,66) \text{ cm}$

4. La expresión general del movimiento de una partícula que describe un movimiento vibratorio armónico es: $y_t = 0,265 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$ en unidades del SI. Determina la amplitud, la pulsación, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento. Calcula la diferencia de fase entre el instante inicial y el instante 12 s. Deduce la ecuación de la velocidad y calcula los instantes en los que adquiere su valor máximo.

Comparando la ecuación dada con la expresión general del movimiento: $y_t = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

$$A = 0,265 \text{ m}; \quad \omega = 6 \cdot \pi \text{ rad/s}; \quad v = \frac{\omega}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = \frac{6 \cdot \pi \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 3 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{v} = \frac{1}{3} \text{ s}; \quad \varphi_0 = \pi \text{ rad}$$

En el instante inicial la particular está en el centro de la oscilación y se dirige hacia elongaciones negativas: $y_0 = 0,265 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot 0 + \pi) = 0 \text{ m}$

La diferencia fase entre los instantes pedidos es:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 6 \cdot \pi \cdot 12 + \pi - (6 \cdot \pi \cdot 0 - \pi) = 36 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad en fase}$$

De otra forma multiplicando y dividiendo por el período: $\Delta t = 12 \text{ s} \cdot \frac{T}{1/3 \text{ s}} = 36 \cdot T$

Han transcurrido 36 oscilaciones completas.

Soluciones unidad 3: Movimiento Vibratorio 2º Bachillerato 2008

La ecuación de la velocidad es: $v_t = 1,59 \cdot \pi \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$ m/s $\Rightarrow v_{\text{máximo}} = 1,59 \cdot \pi$ m/s

Su valor es máximo cada vez que pase por el origen que es el instante inicial y cada medio período. En efecto, el valor de la velocidad es máximo si:

$$\cos(6 \cdot \pi \cdot t + \pi) = \pm 1 \Rightarrow 6 \cdot \pi \cdot t + \pi = n \cdot \pi; \quad 6 \cdot t + 1 = n \Rightarrow t = \frac{n-1}{6}$$

Y poniendo en función del período: $t = \frac{n-1}{3 \cdot 2} = (n-1) \frac{T}{2}$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

5. Un objeto que tiene una masa de 10 g pende de un muelle y describe un movimiento armónico simple con una amplitud de 10 cm y un período de 0,1 s. En el instante inicial el muelle está estirado y el objeto ocupa la posición más alejada del centro de vibración. Deduce la expresión general de la posición del objeto. Escribe las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración y calcula sus valores máximos.

La ecuación general del movimiento es: $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Para calcular el desfase se tiene que en el instante $t = 0$ el objeto está en $y = -A$, por lo que:

$$-A = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0); \quad \cos \varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \pi \text{ rad}$$

La pulsación es: $\omega = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0,1 \text{ s}} = 20 \cdot \pi \text{ rad/s}$

La expresión general de la posición del objeto es: $y_t = 10 \text{ cm} \cdot \cos(20 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t + \pi \text{ rad})$

La expresión de la velocidad es: $v_t = \frac{dy}{dt} = -200 \cdot \pi \text{ cm/s} \cdot \sin(20 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t + \pi \text{ rad})$

Y su valor máximo: $v_{\text{máximo}} = 200 \cdot \pi \text{ cm/s}$

La expresión de la aceleración es: $a_t = \frac{dv}{dt} = -4000 \cdot \pi^2 \text{ cm/s}^2 \cdot \cos(20 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t + \pi \text{ rad})$

Y su valor máximo: $a_{\text{máximo}} = 4000 \cdot \pi^2 \text{ cm/s}^2$

6. La aguja de una máquina de coser realiza un movimiento vibratorio armónico simple con un recorrido de 8 mm y da 20 puntadas cada 10 s. Cuando se conecta el interruptor, la aguja se encuentra en la posición más alejada de la tela (arriba del todo). Escribe las expresiones de la posición, velocidad y aceleración del extremo de la aguja e indica sus valores máximos.

En primer lugar se determinan las constantes del movimiento.

La amplitud es igual a la mitad del recorrido completo: $A = 4 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

La frecuencia es: $\nu = 20 \text{ puntadas}/10 \text{ s} = 2 \text{ Hz}$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}$; $T = 1/\nu = 0,5 \text{ s}$

Si se utiliza para la descripción del movimiento la función coseno la fase inicial es: $\nu_0 = 0 \text{ rad}$, y si se utiliza la función seno entonces es: $\nu_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

En efecto en el instante inicial la posición del extremo de la aguja es $y_0 = +A$, por tanto:

$$y_0 = +A = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \nu_0) \quad \Psi \quad \cos \nu_0 = +1 \quad \Psi \quad \nu_0 = 0 \text{ rad}$$

$$y_0 = +A = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \nu_0) \quad \Psi \quad \sin \nu_0 = +1 \quad \Psi \quad \nu_0 = \pi/2 \text{ rad}$$

A continuación se seguirá, por sencillez, utilizando la función coseno.

a) $y_t = A \cdot \cos(\omega \cdot t) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t) \text{ m}$

$$v_t = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot [-\sin(4 \cdot \pi \cdot t)] = -16 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -16 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t) = -64 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s}^2$$

b) Sus valores máximos son:

$$y_{\text{máximo}} = 4 \text{ A } 10^{-3} \text{ m}; v_{\text{máximo}} = 16 \text{ A } 10^{-3} \text{ A } \pi \text{ m/s}; a_{\text{máximo}} = 64 \text{ A } 10^{-3} \text{ A } \pi^2 \text{ m/s}^2$$

7. Representa gráficamente el movimiento vibratorio armónico simple de una partícula que queda descrito por la ecuación: $y = 5 \cdot \cos(10 \cdot t + \pi/2)$, en unidades SI. Representa gráficamente otro que tenga una amplitud doble y una frecuencia la mitad del anterior.

Comparando la expresión anterior con la un movimiento armónico simple: $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, se tiene que las constantes del movimiento son:

$$A = 5 \text{ m}; \omega = 10 \text{ rad/s}; \varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}; v = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{10 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}; T = \frac{1}{v} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

Para representar gráficamente la función anterior frente al tiempo se construye la siguiente tabla de valores y se representa la elongación frente al tiempo.

t (s)	0	$T/4 = \pi/20$	$T/2 = \pi/10$	$3 \cdot T/4 = 3 \cdot \pi/20$	$T = \pi/5$
$\omega \cdot t$ (rad)	0	$\pi/2$	π	$3 \cdot \pi/2$	$2 \cdot \pi$
$\omega \cdot t + \varphi_0$ (rad)	$\pi/2$	π	$3 \cdot \pi/2$	$2 \cdot \pi$	$2 \cdot \pi + \pi/2$
y (m)	0	-5	0	5	0

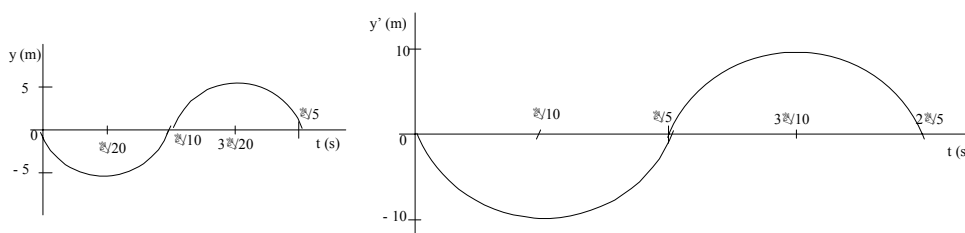
Las constantes del segundo movimiento son:

$$A' = 2 \cdot A = 10 \text{ m}; \omega' = \omega/2 = 5 \text{ rad/s}; v = v'/2 = 5/(2 \cdot \pi) \text{ Hz}; T' = 2 \cdot T = 2 \cdot \pi/5 \text{ s}$$

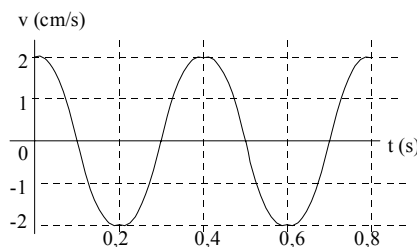
Y La ecuación del movimiento es: $y = 10 \cdot \cos(5 \cdot t + \pi/2)$

Construyendo la correspondiente tabla de valores, se tiene:

t (s)	0	$T'/4 = \pi/10$	$T'/2 = \pi/5$	$3 \cdot T'/4 = 3 \cdot \pi/10$	$T' = 2 \cdot \pi/5$
$\omega' \cdot t$ (rad)	0	$\pi/2$	π	$3 \cdot \pi/2$	$2 \cdot \pi$
$\omega' \cdot t + \varphi_0$ (rad)	$\pi/2$	π	$3 \cdot \pi/2$	$2 \cdot \pi$	$2 \cdot \pi + \pi/2$
y' (m)	0	-10	0	10	0



8. La figura adjunta representa gráficamente la velocidad frente al tiempo del movimiento vibratorio armónico de una partícula de 0,1 kg de masa a lo largo al eje OX. Escribe la ecuación de la elongación de la partícula en función del tiempo y calcula los valores de la energía cinética y potencial elástica en el instante 0,05 s.



El período del movimiento son 0,4 s, por lo que la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,4} = 5 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La amplitud se calcula con su relación con la velocidad máxima: $v_{\text{máxima}} = 2 \text{ cm/s}$

$$v_{\text{máxima}} = A \cdot \omega; 2 \text{ cm/s} = A \cdot 5 \cdot \pi \text{ rad} \Rightarrow A = 0,127 \text{ cm}$$

Como la velocidad inicial es máxima, la partícula está situada, en ese instante, en la posición central y se dirige hacia elongaciones positivas. Por tanto, si se usa la función seno entonces la fase inicial es $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$.

$$x = 0,127 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}(5 \cdot \pi \cdot t) \text{ m} \Rightarrow x_{t=0,05 \text{ s}} = 0,127 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}(5 \cdot \pi \cdot 0,05) = 9,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$v = 0,127 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot \pi \cdot \cos(5 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s} \Rightarrow v_{t=0,05 \text{ s}} = 1,99 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(5 \cdot \pi \cdot 0,05) = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

La energía cinética en ese instante es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot (1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s})^2 = 9,9 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Y la energía potencial elástica es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot (5 \cdot \pi \text{ rad/s})^2 \cdot (9,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 = 9,9 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

En ese instante coinciden los valores de las dos energías.

9. Colgado de un soporte hay un resorte de constante $K = 40 \text{ N/m}$ del que cuelga una masa de 1 kg . En estas circunstancias y en equilibrio, la masa dista 1 m del soporte.)Cuál es la longitud del resorte cuando no suspende ninguna masa? Ahora se incrementa la masa con otra de $0,5 \text{ kg}$. Partiendo del punto anterior, se libera el sistema.)Cuál es la frecuencia de la oscilación?

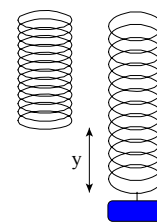
a) La deformación del resorte se determina aplicando la ley de Hooke:

$$F = K \Delta y \text{ y } \Psi \text{ m A } g = K \Delta y$$

$$\text{Despejando: } \Delta y = \frac{m \cdot g}{K} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{40 \text{ N/m}} = 0,245 \text{ m}$$

La longitud del resorte cuando no se suspende ningún cuerpo es:

$$\text{longitud} = 1 \text{ m} - 0,245 \text{ m} = 0,755 \text{ m}$$



$$\text{b) La frecuencia es: } \left[\begin{array}{l} K = m \cdot \omega^2 \\ \omega = 2 \pi \cdot \nu \end{array} \right] \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{40 \text{ N/m}}{1,5 \text{ kg}}} = 0,82 \text{ Hz}$$

10. Una partícula inicia un movimiento armónico simple en el extremo de su trayectoria y tarda $0,1 \text{ s}$ en llegar al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es de 20 cm , calcula el período del movimiento y la pulsación. ¿Cuál es la posición de la partícula 1 s después de iniciado el movimiento?

La distancia entre el extremo y el centro de la trayectoria es igual a la amplitud del movimiento y el tiempo que tarda en recorrer esa distancia es la cuarta parte del período, por tanto:

$$A = 20 \text{ cm}; T = 4 \cdot 0,1 \text{ s} = 0,4 \text{ s}$$

$$\text{La pulsación del movimiento es: } \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0,4 \text{ s}} = 5 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La ecuación general de la posición en un movimiento vibratorio armónico simple es:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

La diferencia de fase se calcula aplicando las condiciones iniciales del ejercicio, inicialmente su posición es el extremo de su trayectoria que supongamos es el positivo.

$$y(t=0) = A = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0); \cos \varphi_0 = 1 \quad \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

La ecuación del movimiento es: $y(t) = 20 \text{ cm} \cdot \cos(5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t)$

Y en el instante pedido resulta que: $y(t = 1 \text{ s}) = 20 \text{ cm} \cdot \cos(5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) = -20 \text{ cm}$

La partícula está en el otro extremo de la trayectoria.

En efecto la relación entre el tiempo transcurrido y el período es: $t = 1 \text{ s} = \frac{1 \text{ s}}{0,4 \text{ s}} T = 2,5 T$

Han transcurrido dos períodos y medio, por lo que la partícula está en oposición de fase con el instante inicial, en el otro extremo de la trayectoria.

11. Calcula en función de la amplitud la elongación de un movimiento vibratorio armónico simple en el instante en el que la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo.

Las ecuaciones generales de la posición y velocidad del movimiento son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0); v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \rightarrow v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$$

Cuando la velocidad tiene la mitad de su valor máximo:

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{A \cdot \omega}{2} \Rightarrow \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$$

$$Y \text{ posición es: } x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = A \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)} = A \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12. Una partícula describe un movimiento armónico simple de 20 cm de amplitud. Si alcanza su velocidad máxima, de $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en el instante inicial, ¿Cuál será la aceleración máxima de la partícula? ¿Cuáles serán la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $t = 1 \text{ s}$?

La amplitud es: $A = 20 \text{ cm}$

Las expresiones generales de la elongación, velocidad y aceleración de la partícula son:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0); v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0); a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Como en el instante inicial la velocidad es máxima, se tiene que la fase inicial es:

$$\cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 1 \quad \Psi \quad \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Del valor de la máxima velocidad se deducen el resto de las constantes del movimiento.

$$v_{\text{máxima}} = A \cdot \omega = 5 \text{ m/s} \quad \Psi \quad \omega = \frac{v_{\text{max}}}{A} = \frac{5 \text{ m/s}}{0,2 \text{ m/rad}} = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración y sus valores en el instante $t = 1 \text{ s}$ son:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = 20 \text{ cm} \cdot \sin(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) \quad \Psi \quad y_{t=1 \text{ s}} = 20 \text{ cm} \cdot \sin(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) = -2,65 \text{ cm}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 20 \text{ cm} \cdot 25 \text{ s}^{-1} \cdot \cos(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) \quad \Psi \quad v_{t=1 \text{ s}} = 500 \text{ cm/s} \cdot \cos(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) = 495,6 \text{ cm/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -500 \text{ cm/s} \cdot 25 \text{ s}^{-1} \cdot \sin(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) \quad \Psi \quad a_{t=1 \text{ s}} = -1,25 \cdot 10^4 \text{ cm/s} \cdot \sin(25 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s}) = -1,656 \cdot 10^3 \text{ cm/s}^2$$

Y cuyo valor máximo es: $a_{\text{máxima}} = 1,25 \cdot 10^4 \text{ cm/s}^2$

13. Un objeto realiza un movimiento vibratorio armónico simple. Escriba la ecuación de dicho movimiento en unidades del SI, si su aceleración máxima es igual a $5\pi^2 \text{ cm/s}^2$, el periodo de las

oscilaciones es 2 s y la elongación del punto al iniciarse el movimiento era 2,5 cm..

a) La expresión general de un movimiento vibratorio armónico simple es: $x_t = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \text{ s}} = \pi \text{ s}^{-1}$

La amplitud del movimiento se deduce de la expresión de la aceleración máxima:

$$a_{\text{máxima}} = A \cdot \omega^2 \Rightarrow A = \frac{a_{\text{máxima}}}{\omega^2} = \frac{5 \cdot \pi^2 \text{ cm/s}^2}{\pi^2 \text{ s}^{-1}} = 5 \text{ cm}$$

La fase inicial se calcula sustituyendo las condiciones iniciales en la ecuación general:

$$x_{x=0} = 5 \text{ cm} \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 \text{ s} + \varphi_0) = 2,5 \text{ cm}; \text{sen } \varphi_0 = 0,5 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/6 \text{ rad}$$

La expresión pedida es: $x_t = 5 \text{ cm} \cdot \text{sen}(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi/6 \text{ rad})$

14. Escribe la ecuación general del movimiento vibratorio armónico de una partícula sabiendo que su velocidad es 3 cm/s cuando la elongación es 2,4 cm, que la velocidad es 2 cm/s cuando su elongación es 2,8 cm y que la elongación al iniciarse el movimiento era nula.

Para resolver esta cuestión hay que expresar la velocidad en función de la posición. En ausencia de rozamiento la energía mecánica del oscilador se conserva, por lo que para cualquier posición se tiene:

$$2 A K A A^2 = 2 A m A v^2 + 2 A K A x^2$$

Como $K = mA \omega^2$, se obtiene la expresión: $v^2 = \omega^2 A (A^2 - x^2)$

Sustituyendo los valores del ejercicio, resulta que:

$$\left. \begin{aligned} (3 \text{ cm/s})^2 &= \omega^2 \cdot [A^2 - (2,4 \text{ cm})^2] \\ (2 \text{ cm/s})^2 &= \omega^2 \cdot [A^2 - (2,8 \text{ cm})^2] \end{aligned} \right\} \frac{9}{4} = \frac{A^2 - 5,76 \text{ cm}^2}{A^2 - 7,84 \text{ cm}^2}$$

$$\text{Operando: } 9 \cdot A^2 - 70,56 \text{ cm}^2 = 4 \cdot A^2 - 23,04 \text{ cm}^2; 5 \cdot A^2 = 47,52 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 3,08 \text{ cm}$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones del sistema, resulta que la frecuencia angular es:

$$(3 \text{ cm/s})^2 = \omega^2 [(3,08 \text{ cm})^2 - (2,4 \text{ cm})^2] \Rightarrow \omega = 1,55 \text{ rad/s}$$

Eligiendo la función seno para describir el movimiento, en el instante inicial la fase es igual a 0 rad, la expresión del movimiento es:

$$x_t = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = 3,08 \text{ cm} \cdot \text{sen}(1,55 \text{ rad/s} \cdot t)$$

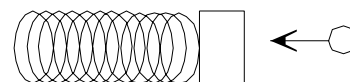
15. Un objeto que tiene una masa de 20 g choca contra un bloque, que inicialmente está en reposo, quedando adherido a él. El bloque tiene una masa de 1,98 kg y está unido a un resorte que se puede desplazar horizontalmente sin rozamiento. De resultados del choque el conjunto se pone a vibrar con una frecuencia de 3 Hz y una amplitud de 50 cm. Calcula la velocidad del objeto pequeño antes del choque y la velocidad y aceleración máximas del sistema después del choque.

La ecuación general de la posición de un movimiento vibratorio armónico simple es:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Y la de la velocidad es: $v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Cuyo valor máximo es: $v_{\text{máximo}} = A \cdot \omega = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot v = 0,5 \text{ m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ Hz} = 3 \cdot \pi \text{ m/s}$



La velocidad máxima del conjunto se logra en el momento del impacto.

La ecuación de la aceleración es: $a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega^2 \cdot (-\text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0))$

Cuyo valor máximo es: $a_{\text{máximo}} = A \cdot \omega^2 = A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 = 0,5 \text{ m} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ Hz})^2 = 18 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$

En el momento del choque se conserva la cantidad de movimiento del sistema. Se elige un sistema de referencia con el eje X la horizontal, por lo que:

$$\Delta \vec{p} = 0; \vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}} \Rightarrow \vec{p}_{\text{objeto}} + \vec{p}_{\text{bloque}} = \vec{p}_{\text{conjunto}}$$

Como el bloque está inicialmente en reposo y asignando el signo positivo al sentido inicial de la bala, resulta que:

$$m_{\text{objeto}} \cdot v_{\text{objeto}} = m_{\text{conjunto}} \cdot v_{\text{conjunto}}; 0,02 \text{ kg} \cdot v_{\text{objeto}} = (1,98 \text{ kg} + 0,02 \text{ kg}) \cdot 3 \cdot \pi \text{ m/s}$$

Despejando, la velocidad del objeto antes del choque es: $v_{\text{objeto}} = 300 \cdot \pi \text{ m/s}$

16. Un bloque de 50 gramos de masa está unido a un muelle de constante elástica 35 N/m y oscila sobre una superficie horizontal sin rozamientos con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio, calcula la fuerza que actúa sobre el bloque, la aceleración del bloque y su velocidad.

La fuerza se calcula aplicando la ley de Hooke, su sentido es el opuesto a la deformación.

$$F = -K \cdot x = -35 \text{ N/m} \cdot 0,01 \text{ m} = -0,35 \text{ N}$$

Aplicando la segunda ley de Newton se calcula la aceleración, que tiene el sentido de la fuerza.

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-0,35 \text{ N}}{0,05 \text{ kg}} = -7 \text{ m/s}^2$$

La velocidad se calcula aplicando la ley de conservación de la energía mecánica, la energía mecánica asociada a un extremo es igual a la energía mecánica en cualquier posición.

$$\frac{1}{2} K \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\text{Despejando: } v = \pm \sqrt{\frac{K \cdot (A^2 - x^2)}{m}} = \pm \sqrt{\frac{35 \text{ N/m} \cdot ((0,04 \text{ m})^2 - (0,01 \text{ m})^2)}{0,05 \text{ kg}}} = \pm 1,025 \text{ m/s}$$

17. La fuerza máxima que actúa sobre una partícula que realiza un movimiento armónico simple es $2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ y la energía total es de $5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. Escribe la ecuación del movimiento de esa partícula si el período es de 4 s y la fase inicial es de 30° . ¿Cuánto vale la velocidad al cabo de 1 s de comenzar el movimiento?

Aplicando las ecuaciones de la fuerza máxima y de la energía mecánica:

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \\ F = K \cdot A \end{array} \right\} \frac{E}{F} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 2 \frac{E}{F} = 2 \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ J}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ N}} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{La frecuencia angular es: } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \text{ s}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$\text{La fase inicial es: } \varphi_0 = 30^\circ = 30^\circ \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

Eligiendo para la descripción la función coseno, también puede ser la función seno, la ecuación del movimiento es:

$$x = 0,5 \cdot \cos(\pi/2 \cdot t + \pi/6) \text{ m}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v = -0,5 \cdot \pi/2 \cdot \text{sen}(\pi/2 \cdot t + \pi/6) \text{ m/s} \Rightarrow v_{t=1s} = -0,5 \cdot \pi/2 \cdot \text{sen}(\pi/2 \cdot 1 + \pi/6) = 0,68 \text{ m/s}$$

18. Una partícula describe un movimiento vibratorio armónico simple de periodo T y amplitud A, siendo nula su elongación en el instante inicial. Calcule el cociente entre sus energías cinética y potencial en los instantes de tiempo $t = T/12$, $t = T/8$ y $t = T/6$

Hay que encontrar una relación que ligue las expresiones de las energías en función del tiempo.

La expresión general de la elongación del movimiento es: $x_t = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

En el instante inicial: $x_{t=0} = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

Como $K = m \cdot \omega^2$, las expresiones generales de la velocidad, energía potencial y energía cinética son:

$$x_t = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t); E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)$$

$$v_t = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t); E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$

Dividiendo término a término se tiene la relación entre las energías en función del tiempo:

$$\frac{E_p}{E_c} = \frac{\text{sen}^2(\omega \cdot t)}{\cos^2(\omega \cdot t)} = \tan^2(\omega \cdot t) \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{1}{\tan^2(\omega \cdot t)}$$

Como: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, resulta que:
$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} t\right)}$$

Para $t = T/12 \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{12}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 3$

Para $t = T/8 \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{8}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$

Para $t = T/6 \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{6}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}$

19. Una partícula realiza un movimiento vibratorio armónico simple de periodo T y amplitud A. Calcula el cociente entre sus energías cinética y potencial cuando su elongación es $x = A/4$, $x = A/2$ y $x = A$.

Hay que encontrar una relación que ligue las expresiones de las energías en función de la posición.

La energía total de un oscilador armónico es: $E_T = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$, por lo que las expresiones generales de las energías potencial y cinética son:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2; E_c = E_T - E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (A^2 - x^2)$$

Dividiendo término a término se tiene la relación entre las energías en función de la elongación:

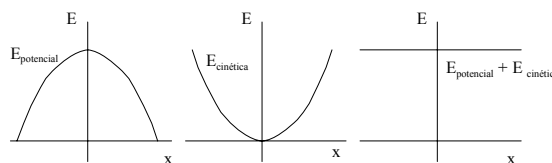
$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} = \frac{A^2}{x^2} - 1$$

Si $x = A/4 \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{A^2}{\left(\frac{A}{4}\right)^2} - 1 = 15$

Si $x = A/2 \Rightarrow \frac{E_c}{E_p} = \frac{A^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^2} - 1 = 3$

Si $x = A \Rightarrow$ Toda la energía está en forma de energía potencial, la elongación es máxima y la velocidad es igual a cero.

20. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la energía frente a la posición para un oscilador armónico?



La energía total asociada a una partícula que vibra con un movimiento armónico simple es:

$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$$

La energía total es independiente de la posición, luego la gráfica correcta es la c).

La energía potencial del oscilador es: $E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$, por tanto, la gráfica a) es incorrecta porque la energía potencial es máxima en los extremos e igual a cero en el centro, $x = 0$.

La energía cinética de la partícula es: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, por tanto, la gráfica b) también es incorrecta porque la energía cinética es máxima en el centro, máxima velocidad, e igual a cero en los extremos.

21. Una masa de 1 kg oscila unida a un resorte de constante $k = 5 \text{ N/m}$, con un movimiento vibratorio armónico simple de amplitud 10^{-2} m . Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, calcule qué fracción de la energía mecánica es cinética y qué fracción es potencial. ¿Cuánto vale la elongación en el punto en el cual la mitad de la energía mecánica es cinética y la otra mitad potencial?

La energía mecánica de un oscilador armónico es igual a la suma de su energía potencial elástica, asociada a la posición x , y de su energía cinética, asociada a su velocidad v .

Las expresiones de estas energías son: $E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$; $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Cuando la partícula pasa por los extremos de la vibración toda la energía es de tipo potencial ($v = 0$) y cuando pasa por el centro toda la energía es de tipo cinética ($x = 0$). Por lo que la energía total de la partícula se puede escribir:

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{máxima}}^2$$

a) Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, $x = A/2$, se tiene que:

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} K \left(\frac{A}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} K \frac{A^2}{4} = \frac{E_T}{4}$$

La energía potencial es un cuarto de la energía total.

El resto corresponde a la energía cinética: $E_c = \frac{3}{4} E_T$

b) Si los valores de la energía potencial y cinética son iguales, entonces la energía potencial es igual a la mitad de la energía mecánica.

$$E_p = \frac{E}{2}; \frac{1}{2} \cdot K x^2 = \frac{\frac{1}{2} K \cdot A^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2}$$

Despejando, la elongación en la posición en la que se igualan las energías es:

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} 10^{-2} \text{ m}$$

22. Un péndulo simple está formado por un hilo de longitud $L = 99,2 \text{ cm}$ y una bolita que oscila en horizontal con una amplitud $A = 6,4 \text{ cm}$ y un período $T = 2,00 \text{ s}$. Calcula la intensidad del campo gravitatorio, g , en ese lugar. Determina y representa de forma gráfica la

velocidad de la bolita en función del tiempo, $v(t)$. Toma como origen de tiempo, $t = 0$, cuando la bolita pasa por su posición central de equilibrio.

a) El período de oscilación de un péndulo para pequeñas amplitudes es: $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\text{Despejando: } g = 4 \cdot \pi^2 \frac{L}{T^2} = 4 \cdot \pi^2 \frac{0,992\text{m}}{(2,00\text{s})^2} = 9,79\text{m/s}^2 = 9,79\text{N/kg}$$

b) Para ángulos pequeños, se puede considerar que el movimiento de la bolita del péndulo es un movimiento armónico simple, por lo que su posición en el tiempo es:

$$x_t = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\text{Y su velocidad: } v_t = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

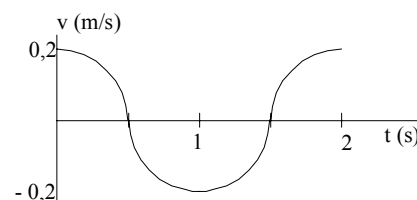
$$\text{La pulsación es: } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2,00\text{s}} = \pi \text{ rad/s}$$

Como en el instante inicial la bolita pasa por la posición más baja, su velocidad es máxima y por ello la fase inicial es: $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$.

$$\text{La expresión de la velocidad es: } v_t = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos(\pi \cdot t)$$

$$\text{Y en el instante inicial su velocidad es: } v_{t=0} = \pi \cdot 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 0,20 \text{ m/s}$$

Al representar gráficamente la función $v(t)$, se tiene presente que la velocidad está comprendida entre los valores máximos $v_{\text{máxima}} = \pm 0,20 \text{ m/s}$. Inicialmente la partícula tiene su velocidad máxima y que sus sucesivos valores se repiten con un período de $2,00 \text{ s}$.



23. Un péndulo simple que realiza pequeñas oscilaciones tiene un período de $2,000 \text{ s}$ cuando está situado en un punto al nivel del mar. Cuando lo situamos en lo alto de una montaña, su período es de $2,002 \text{ s}$. Calcula la altura de la montaña. $R_T = 6\,370 \text{ km}$.

El período de oscilación de un péndulo simple para ángulos muy pequeños depende de la aceleración de la gravedad del lugar. La aceleración de la gravedad de un lugar depende de su distancia respecto del centro de la Tierra, por lo que conocida la relación entre los períodos de un péndulo en dos lugares, se puede conocer la relación entre sus distancias al centro de la Tierra.

Aplicando las relaciones: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$; $g = \frac{G \cdot M_T}{r^2}$ a los dos lugares resulta que:

$$\frac{T_{\text{mar}}}{T_{\text{montaña}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_0}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_{\text{montaña}}}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{montaña}}}{g_0}} = \sqrt{\frac{\frac{G \cdot M_T}{r^2}}{\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}}} = \frac{R_T}{r}$$

$$\text{Despejando y sustituyendo: } r = R_T \frac{T_{\text{montaña}}}{T_{\text{mar}}} = 6\,370 \text{ km} \frac{2,002\text{s}}{2,000\text{s}} = 6\,376,37 \text{ km}$$

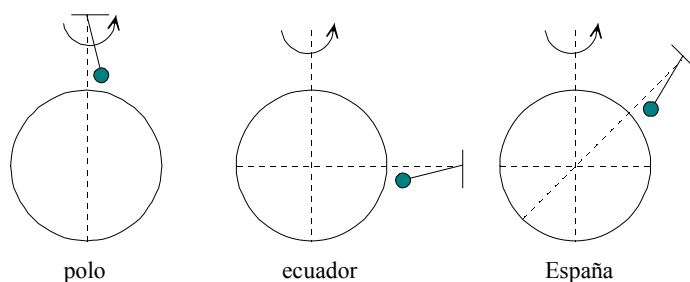
$$\text{Y restando el radio de la Tierra: } h = r - R_T = 6\,376,37 \text{ km} - 6\,370 \text{ km} = 6,37 \text{ km} = 6\,370 \text{ m}$$

INVESTIGA

1. ¿Por qué el péndulo describe una rotación completa en los polos?

El péndulo rota en los polos una vuelta completa al día porque su plano de oscilación es paralelo el

eje de la Tierra.



2. ¿Por qué no rota en el ecuador?

Justo lo contrario sucede en el ecuador, donde la vertical del péndulo es perpendicular al eje de rotación del planeta y, por tanto, no es posible detectar dicha rotación.

En las latitudes intermedias, el movimiento del péndulo resulta de una combinación de los casos anteriores.

TEST DE AUTOEVALUACIÓN

1. **Completa la frase: En un movimiento vibratorio armónico, una partícula recorre _____ y actúa una fuerza _____ al desplazamiento y sentido hacia _____.**

En un movimiento vibratorio armónico, una partícula recorre indefinidamente un segmento y actúa una fuerza proporcional al desplazamiento y sentido hacia el centro de la trayectoria.

2. **Justifica si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas: a) La amplitud de un movimiento vibratorio es igual a la elongación de la partícula. b) Dos estados de vibración están en fase cuando la diferencia de sus fases es un múltiplo de $2 \cdot \pi$ rad. c) La aceleración de un movimiento vibratorio armónico es proporcional a la posición y del mismo signo. d) El período de vibración del movimiento de una partícula adosada a un muelle es proporcional a la masa de la partícula.**

a) Falso.

La amplitud de un movimiento vibratorio armónico simple es igual a la máxima elongación de la partícula.

b) Verdadero.

Dos estados de vibración están en fase si: $\Delta\phi = n \cdot 2 \cdot \pi$ rad ($n = 0, 1, 2, \dots$)

c) Falso.

La aceleración es proporcional a la posición, pero sus signos son opuestos: $a = -\omega^2 \cdot x$

d) Falso.

El período de vibración del movimiento de una partícula adosada a un muelle es proporcional a la

raíz cuadrada de la masa: $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

3. **Un péndulo tarda un segundo en dar una oscilación completa en un lugar en el que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. La longitud de ese péndulo es: a) 1 m; b) 1,6 m; c) 20 cm; d) 0,8 m.**

La solución correcta es la b).

Despejando la longitud en la ecuación del período, resulta que:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{T^2 \cdot g}{2 \cdot \pi} = \frac{(1s)^2 \cdot 9,8m/s^2}{2 \cdot \pi} = 1,6m$$

4. Un objeto de 1 kg de masa se une a un muelle horizontal de constante elástica $K = 15 \text{ N/m}$. Si se desplaza 2 cm de la posición central y se libera, la velocidad máxima que alcanza el objeto es: a) $7,7 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$; b) $0,77 \text{ cm/s}$; c) 1 m/s ; d) $1,54 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$.

La solución correcta es la a)

Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica, la energía potencial elástica en un extremo de la vibración es igual a la energía cinética del objeto en el centro del recorrido.

$$2 A K A A^2 = 2 A m A v_{\text{máxima}}^2 \quad \Psi \quad v_{\text{máxima}} = A \sqrt{\frac{K}{m}} = 0,02m \sqrt{\frac{15 \text{ N/m}}{1 \text{ kg}}} = 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

5. Un objeto unido a un muelle vibra con un período igual a T . Si se duplica la masa del objeto y la amplitud, el período del movimiento pasa a ser: a) T ; b) $2 \cdot T$; c) $4 \cdot T$; d) $\sqrt{2} \cdot T$.

La solución correcta es la d)

El período con el que oscila un resorte lineal es independiente de la longitud del muelle en reposo, L , y de la amplitud, A , de las oscilaciones.

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Al duplicar la masa y estirarlo una cantidad $2 \cdot A$, resulta que:

$$T' = 2 A \pi \sqrt{\frac{m'}{K}} = 2 A \pi \sqrt{\frac{2 \cdot m}{K}} = \sqrt{2} \cdot 2 A \pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{2} \cdot A T$$

6. Una partícula realiza 90 vibraciones por segundo con una amplitud de 10 mm. La velocidad máxima de la partícula es: a) $5,66 \text{ m/s}$; b) $2,83 \text{ m/s}$; c) $11,32 \text{ m/s}$; d) 10 mm/s .

La solución correcta es la a)

$$\left. \begin{array}{l} v_{\text{máxima}} = A\omega \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow v_{\text{máxima}} = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 90 \text{ Hz} = 5,66 \text{ m/s}$$

7. La ecuación general de la posición de una partícula que recorre un movimiento vibratorio armónico simple es en unidades del SI es: $x = 3 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$. La frecuencia con la que está animada la partícula es: a) 2 Hz ; b) 1 Hz ; c) 4 Hz ; d) 3 Hz .

La respuesta correcta es la a)

Comparando la ecuación dada con la expresión general del movimiento: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, se deduce que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 4 \cdot \pi \Rightarrow \nu = 2 \text{ Hz}$$

8. Completa la frase: Para ángulos _____, el período del movimiento de un péndulo es _____ de la amplitud y de la _____ de la partícula.

Para ángulos pequeños, el período del movimiento de un péndulo es independiente de la amplitud y de la masa de la partícula.

9. Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones: a) La energía cinética de una partícula que vibra es máxima en los extremos de la vibración. b) Cualquier fuerza que actúe sobre un sistema que vibra le hace entrar en resonancia. c) El período de oscilación de un péndulo es proporcional a la aceleración de la gravedad. d) El período de vibración de un muelle es mayor cuanto más se le separe de la posición central de equilibrio.

a) Falso.

En los extremos de la vibración la velocidad es igual a cero y, por ello, también es igual a cero la energía cinética.

b) Falso.

Un sistema entra en resonancia cuando la fuerza externa actúa con una frecuencia igual a la frecuencia de vibración del sistema.

c) Falso.

El período de oscilación de un péndulo es: $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, luego es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.

d) Falso.

El período de vibración de un muelle es independiente de la amplitud del movimiento.

10. La ecuación general de un movimiento vibratorio en unidades del SI es:

$y = 0,265 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$. Cuando la partícula pasa por la posición $y = 0,1$ m, su velocidad es: a) $\pm 4,63$ m/s; b) $4,63$ m/s; c) $-9,26$ m/s; d) $\pm 0,265$ m/s.

La solución correcta es la b)

Aplicando la relación: $2 A K A A^2 = 2 A m A v^2 + 2 A K A y^2$ y como $K = mA \omega^2$, se obtiene la expresión:

$$v = \forall \omega A \sqrt{A^2 - y^2} = \forall 6 A \pi \text{ rad/s} A \sqrt{(0,265 \text{ m})^2 - (0,1 \text{ m})^2} = \forall 1,47 A \pi \text{ m/s} = \forall 4,63 \text{ m/s}$$

Física

Unidad didáctica 4

Movimiento ondulatorio

SOLUCIONES UNIDAD 4. MOVIMIENTO ONDULATORIO

CUESTIONES INICIALES

1. Al agitar una cuerda por un extremo se observa que una perturbación se propaga a lo largo de la misma.) De qué forma el extremo de la cuerda contagia su movimiento a toda ella?

La cuerda es un medio continuo, por lo que al agitarla cada punto está sometido a una tensión y arrastra al que tiene al lado.

2.) Crees que cuando levantamos la voz, nuestras palabras llegan antes a nuestros interlocutores que si hablamos más bajo?

No, la velocidad de propagación del sonido no depende de lo intenso que éste sea.

4. Al golpear un objeto se escucha un sonido si se está cerca de él.) Por qué no se oye nada a partir de una cierta distancia?

Al vibrar un objeto transmite energía al medio que le rodea en las tres direcciones. Al avanzar la onda, deben ponerse más partículas en movimiento por lo que se atenúa y al cabo de una cierta distancia no tiene la suficiente amplitud como para ser escuchado .

ACTIVIDADES FINALES

1. Una onda transversal, de 6 cm de amplitud, se propaga con una velocidad de 2 m/s y una frecuencia de 4 Hz, hacia la derecha del observador. En el instante inicial, el origen de coordenadas está situado a + 6 cm de la posición central de vibración. Deduce la ecuación general del movimiento y determina la posición de un punto situado a 1 m del origen en el instante $t = 2$ s. Deduce las expresiones generales de la velocidad y de la aceleración con que vibran las partículas del medio. Calcula la diferencia de fase para una partícula cualquiera entre dos instantes separados por un tiempo de 0,625 s.

La expresión general de un movimiento ondulatorio es: $y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$

Como en el instante inicial el origen del sistema de referencia está en la posición más alejada de la central, se tiene que:

$$y_{x=0,t=0} = 6 \text{ cm} = 6 \text{ cm} \cdot \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_0); 1 = \cos \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 4 \cdot \pi \cdot 4 \text{ Hz} = 8 \cdot \pi \text{ rad/s}$

$$\text{El período es: } T = \frac{1}{v} = \frac{1}{4 \text{ Hz}} = 0,25 \text{ s}$$

$$\text{La longitud de onda es: } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ Hz}} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{Y el número de ondas es: } k = \frac{\omega}{v} = \frac{8 \cdot \pi \text{ rad/s}}{2 \text{ m/s}} = 4 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo en la expresión general, la ecuación general del movimiento es:

$$y_{x,t} = 0,06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$$

Y la posición del punto considerado en el instante pedido es:

$$y_{x=1,t=2} = 0,06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot 2 - 4 \cdot \pi \cdot 1) = 0,06 \cdot \cos(12 \cdot \pi) = 0,06 \text{ m}$$

Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración, se tienen las expresiones pedidas.

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,06 \cdot 8 \cdot \pi \cdot [-\text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)] = -0,48 \cdot \pi \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) \text{ SI}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0,48 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \pi \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) = -3,84 \cdot \pi^2 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) \text{ SI}$$

Comparando el tiempo transcurrido con el período, encontramos que:

$$\Delta t = 0,625 \text{ s} = \frac{0,625 \text{ s}}{0,25 \text{ s}} T = 2,5T$$

Luego los instantes están en oposición de fase.

De otra forma, se llega a la misma conclusión:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 8 \cdot \pi \cdot t_2 - 4 \cdot \pi \cdot x - (8 \cdot \pi \cdot t_1 - 4 \cdot \pi \cdot x) = 8 \cdot \pi (t_2 - t_1) = 8 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot 0,625 \text{ s} = 5 \cdot \pi \text{ rad}$$

2. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: $y = 0,2 \cos(2t - 0,1x)$, en unidades SI. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación. Determina el estado de vibración, velocidad y aceleración de una partícula situada en $x = 0,2 \text{ m}$ en el instante $t = 0,5 \text{ s}$.

a) Comparando la expresión de la onda con la expresión general: $y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ se tiene para la longitud de onda que:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 0,1 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{0,1 \text{ m}^{-1}} = 20 \cdot \pi \text{ m}$$

Y la velocidad de propagación es: $v = \lambda \cdot \nu = \frac{2 \cdot \pi}{k} \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2 \text{ rad/s}}{0,1 \text{ m}^{-1}} = 20 \text{ m/s}$

b) Sustituyendo en la ecuación de la onda se tiene que la elongación de la partícula en ese instante es:

$$y_{x,t} = 0,2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0,1 \cdot x) \Rightarrow y = 0,2 \cdot \cos(2 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 0,2) = 0,11 \text{ m}$$

Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$$v_{x,t} = \frac{dy}{dt} = -0,2 \cdot 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot t - 0,1 \cdot x) \Rightarrow v = -0,4 \cdot \text{sen}(2 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 0,2) = -0,33 \text{ m/s}$$

Aplicando la definición de aceleración de vibración:

$$a_{x,t} = \frac{dv}{dt} = -0,4 \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0,1 \cdot x) \Rightarrow a = -0,8 \cdot \cos(2 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 0,2) = -0,446 \text{ m/s}^2$$

3. Una varilla sujeta por un extremo vibra con una frecuencia de 400 Hz y con una amplitud de 10^{-3} m . La vibración se propaga en el aire a 340 m/s. Escribe la ecuación de ese movimiento ondulatorio armónico. ¿Qué elongación tendrá un punto que diste del origen 0,85 m al cabo de 3 s de comenzar la vibración?

La frecuencia angular ω es: $\omega = 2 \pi \nu = 2 \pi \cdot 400 \text{ Hz} = 800 \pi \text{ rad/s}$

El número de ondas k es: $k = \frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{2 \pi}{v \cdot T} = \frac{\omega}{v} = \frac{800 \pi \text{ rad/s}}{340 \text{ m/s}} = \frac{40}{17} \pi \text{ m}^{-1}$

a) La ecuación que describe el movimiento es:

$$y(x, t) = A \text{ sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) = 10^{-3} \text{ sen}(800 \pi t - \frac{40}{17} \pi x) = 10^{-3} \text{ sen} 40 \pi (20 t - \frac{1}{17} x) \text{ metros}$$

b) Sustituyendo en la ecuación general:

$$y(0,85 \text{ m}; 3 \text{ s}) = 10^{-3} \cdot \text{sen} 40 \pi (20 \cdot 3 - \frac{1}{17} \cdot 0,85) = 10^{-3} \cdot \text{sen} 40 \pi \cdot 59,95 = 0 \text{ m}$$

4. Una onda armónica en un hilo tiene una amplitud de 0,015 m, una longitud de onda de 2,4 m y una velocidad de 3,5 m/s. Determina el período, la frecuencia y el número de onda. Escribe la función de onda, tomando como sentido positivo del eje X el sentido de propagación de la onda.

a) El período es: $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2,4 \text{ m}}{3,5 \text{ m/s}} = \frac{24}{35} \text{ s}$

La frecuencia es: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{35}{24} \text{ Hz}$

El número de onda k es: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2,4 \text{ m}} = \frac{5}{6} \pi \text{ m}^{-1}$

b) La frecuencia angular es: $\omega = 2\pi\nu = \frac{35}{12} \pi \text{ rad/s}$

La ecuación pedida es: $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = 0,015 A \sin\left(\frac{35}{12} \pi t - \frac{5}{6} \pi x\right) \text{ m}$

Operando: $y(x, t) = 0,015 A \sin\left(\frac{5}{6} \pi \left(\frac{7}{2} t - x\right)\right) \text{ m}$

5. Escribe la ecuación de una onda que se propaga en una cuerda (en sentido negativo del eje X) y que tiene las siguientes características: 0,5 m de amplitud, 250 Hz de frecuencia, 200 m/s de velocidad de propagación y la elongación inicial en el origen es nula. Calcula la máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.

Si la onda se propaga hacia la izquierda y en el instante inicial la elongación del origen es igual a cero, entonces la ecuación general es: $y_{x,t} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$

La amplitud es: $A = 0,5 \text{ m}$

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 250 \text{ Hz} = 500 \cdot \pi \text{ rad/s}$

El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{v}{\nu}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 250 \text{ Hz}}{200 \text{ m/s}} = 2,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$

La ecuación pedida es: $y_{x,t} = 0,5 \text{ m} \cdot \sin(500 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t + 2,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot x)$

b) La expresión de la velocidad de vibración es: $v_{x,t} = \frac{dy_{x,t}}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x)$

Y su valor máximo es: $v_{\text{máxima}} = A \cdot \omega = 0,5 \text{ m} \cdot 500 \cdot \pi \text{ rad/s} = 250 \cdot \pi \text{ m/s}$

6. Una onda transversal y sinusoidal de la forma: $y = A \sin(kx + \omega t)$, tiene una frecuencia de 50 Hz y se desplaza con una velocidad de 0,32 m/s. En el instante inicial la velocidad de la partícula situada en el origen tiene un valor de 4 m/s. Indica el sentido de propagación de la onda a lo largo del eje X. Calcule la amplitud, el número de onda y la frecuencia angular ω .

a) La onda se propaga hacia el sentido de las X negativas.

b) La frecuencia angular es: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ rad/s}$

El número de ondas k es:
$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = \frac{v}{\nu} \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}}{0,32 \text{ m/s}} = 312,5 \pi \text{ m}^{-1}$$

La ecuación que describe la perturbación es: $y = A \sin(kx + \omega t) = A \sin(312,5 \pi x - 100 \pi t)$

La velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$$v = \frac{dy}{dt} = A \omega \cos(\omega x - \omega t)$$

A partir de las condiciones de contorno:

$$v_{t=0, x=0} = A \omega \cos 0 = 4 \pi A = 0,0127 \text{ m} = 12,7 \text{ mm}$$

7. A una playa llegan 15 olas por minuto y se observa que tardan 5 minutos en llegar desde un barco anclado en el mar a 600 m de la playa. Tomando como origen de coordenadas un punto de la playa, escribe la ecuación de onda, en el SI, si la amplitud de las olas es de 50 cm y la fase inicial es nula. Si sobre el agua a una distancia 300 m de la playa existe una boya, que sube y baja según pasan las olas, calcule su velocidad en cualquier instante de tiempo ¿Cual es su velocidad máxima?

Se supondrá que las olas del mar se comportan como un movimiento ondulatorio

De los datos iniciales se deducen los valores de la frecuencia y de la velocidad de propagación.

$$v = \frac{15 \text{ olas}}{60 \text{ s}} = 0,25 \text{ Hz}; \quad v = \frac{600 \text{ m}}{5 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min}} = 2 \text{ m/s}$$

a) La frecuencia angular y el número de ondas son:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot 0,25 \text{ Hz} = 0,5 \cdot \pi \text{ rad/s}; \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{0,5 \cdot \pi \text{ rad/s}}{2 \text{ m/s}} = 0,25 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

La expresión de la ecuación de ondas, suponiendo que se propagan hacia la derecha del observador, es:

$$y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0,50 \text{ m} \cdot \cos(0,5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t - 0,25 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot x)$$

b) La expresión general de la velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$$v_{x,t} = \frac{dy}{dt} = -0,25 \cdot \pi \text{ m/s} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t - 0,25 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot x) \text{ m/s}$$

Y la velocidad del punto $x = 300 \text{ m}$ es:

$$v_{x=300, t} = -0,25 \cdot \pi \text{ m/s} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t - 0,25 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot 300 \text{ m})$$

$$v_{x=300, t} = -0,25 \cdot \pi \text{ m/s} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot t - 75 \cdot \pi)$$

Su valor máximo es: $v_{\text{máximo}} = 0,25 \cdot \pi \text{ m/s}$

8. La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda expresada en unidades del SI es: $y_{x, t} = 0,06 A \cos[2 A \pi (4 A t - 2 A x)] \text{ m}$. Representa gráficamente los movimientos vibratorios de las partículas situadas en $x = 0 \text{ m}$, $x = 1 \text{ m}$ y $x = 1,25 \text{ m}$

El período y la longitud de onda se determinan comparando la expresión dada con la general.

$$y_{x, t} = A \cos(\omega t - k x)$$

$$\omega = 8 \cdot \pi \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{8 \cdot \pi \text{ rad/s}} = 0,25 \text{ s}$$

$$k = 4 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{4 \cdot \pi \text{ m}^{-1}} = 0,5 \text{ m}$$

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en $x = 0 \text{ m}$ y $x = 1 \text{ m}$ es:

$$\Delta\phi = \Delta x \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\lambda} = 1 \text{ m} \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0,5 \text{ m}} = 4 \cdot \pi \text{ rad}, \text{ las dos partículas vibran en fase.}$$

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en $x = 0 \text{ m}$ y $x = 1,25 \text{ m}$ es:

$$\Delta\phi = \Delta x \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\lambda} = 1,25 \text{ m} \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0,5 \text{ m}} = 5 \cdot \pi \text{ rad} = 2 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad} + \pi \text{ rad}, \text{ las dos partículas vibran en oposición de}$$

fase.

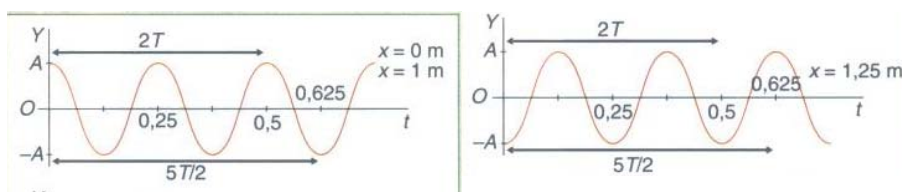
Para la representación gráfica, se determina la elongación en el instante inicial de las partículas y se tiene en cuenta que las vibraciones se repiten a lo largo del tiempo con un período $T = 0,25$ s.

$$y_{x=0, t=0} = 0,06 \text{ A} \cos 2 \text{ A} \pi (4 \text{ A} 0 - 2 \text{ A} 0) = 0,06 \text{ m}$$

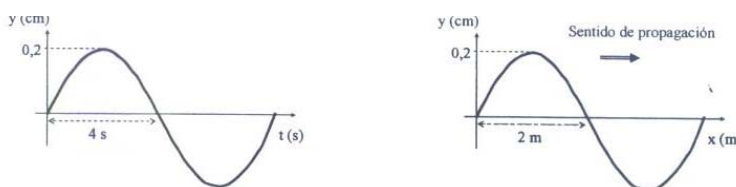
La elongación es máxima y positiva.

$$y_{x=1; t=0} = 0,06 \text{ A} \cos 2 \text{ A} \pi (4 \text{ A} 0 - 2 \text{ A} 1) = 0,06 \text{ m}, \text{ pues está en fase con el anterior.}$$

$y_{x=1,25; t=0} = 0,06 \text{ A} \cos 2 \text{ A} \pi (4 \text{ A} 0 - 2 \text{ A} 1,25) = -0,06 \text{ m}$, está en oposición de fase con los anteriores.



9. En las figuras se representa la variación de la posición, y , de un punto de una cuerda vibrante en función del tiempo, t , y de su distancia, x , al origen, respectivamente. Deduce la ecuación de onda y determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto de la cuerda.



a) De las representaciones gráficas se deduce que la onda se propaga hacia la derecha y que las constantes del movimiento son:

$$A = 0,2 \text{ cm}; T = 8 \text{ s}; \lambda = 4 \text{ m}; \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{8 \text{ s}} = 0,25 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \text{ m}} = 0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

$$y_{x,t} = A \cdot \text{sen} (\omega \cdot t - k \cdot x) = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{sen} (0,25 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t - 0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot x)$$

b) La velocidad de propagación de la onda es una cantidad que depende del medio de transmisión.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{0,25 \cdot \pi \text{ s}^{-1}}{0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de vibración depende de la posición del punto a lo largo de la cuerda.

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos ((0,25 \cdot \pi \text{ s}^{-1} \cdot t - 0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1} \cdot x))$$

10. Una onda se propaga por la parte negativa del eje X con una longitud de onda de 20 cm, una frecuencia de 25 Hz, una amplitud de 3 cm y fase inicial igual a cero. Escribe la ecuación de la onda e indica el instante en el que un punto que se encuentra a 2,5 cm del origen alcanza, por primera vez, una velocidad nula.

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 25 \text{ Hz} = 50 \pi \text{ rd/s}$

El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0,2 \text{ m}} = 10 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$

La ecuación general de la onda, como se desplaza hacia la parte negativa del eje X, es:
 $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x) = 0,03 \cdot \text{sen}(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot x) \text{ m}$

La ecuación general de la velocidad de vibración es:

$$v_{x,t} = 1,5 \cdot \pi \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot x)$$

Y la ecuación con la que vibra el punto $x = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ es:

$$v_{x=2,5 \text{ cm}; t} = 1,5 \cdot \pi \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}) = 1,5 \cdot \pi \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t + 0,25 \cdot \pi)$$

La velocidad es igual a cero cuando:

$$\cos(50 \cdot \pi \cdot t + 0,25 \cdot \pi) = 0 \Rightarrow 50 \cdot \pi \cdot t + 0,25 \cdot \pi = \pi/2$$

Despejando: $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

11. En el centro de una piscina circular de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. La longitud de onda es de 0,50 m y tarda 12 s en llegar a la orilla. Calcula la frecuencia del movimiento ondulatorio. ¿Cuál es la amplitud del mismo si al cabo de 0,25 s la elongación en el origen es de 4 cm? Determina la elongación en el instante $t = 12 \text{ s}$ en un punto situado a 6 m del foco emisor.

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 \text{ m}}{12 \text{ s}} = 0,5 \text{ m/s}$

La frecuencia y período de la perturbación son: $v = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,5 \text{ m/s}}{0,5 \text{ m}} = 1 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{v} = \frac{1}{1 \text{ Hz}} = 1 \text{ s}$

Si se supone que en el instante inicial el centro de la piscina está en reposo, entonces $\varphi_0 = 0$ y se tiene que la expresión del movimiento vibratorio del origen es:

$$y_{x=0; t} = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot v \cdot t + 0)$$

Sustituyendo: $4 \text{ cm} = A \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0,25) \Rightarrow A = 4 \text{ cm}$

La fase del movimiento es:

$$\varphi = \omega \cdot t - k \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{0,5 \text{ m}} x = 2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x$$

La diferencia de fase entre el origen en el instante inicial y la orilla en el instante 12 s es:

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_{\text{orilla}} = (2 \cdot \pi \cdot t_0 - 4 \cdot \pi \cdot x_0) - (2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) = \\ = 2 \cdot \pi (t_0 - t) - 4 \cdot \pi (x_0 - x) = 2 \cdot \pi \cdot 12 \text{ s} - 4 \cdot \pi \cdot 6 \text{ m} = 0 \text{ rad}$$

Las dos estados de vibración están en fase, por lo que la elongación de la orilla en ese instante es:

$$y_{x=6 \text{ m}; t=12 \text{ s}} = 0 \text{ m}$$

12. Un foco sonoro emite una onda armónica de amplitud 10 pascuales y frecuencia 250 Hz. La onda se propaga en la dirección positiva del eje Y con velocidad $v = 340 \text{ m/s}$ y en el instante inicial, $t = 0$, la presión es máxima en el foco emisor. Escribe la ecuación $\Psi(y, t)$ de la onda sonora. ¿Cuál es la variación de la presión respecto del equilibrio de un punto situado a 1,5 m del foco en el instante $t = 3 \text{ s}$?

La expresión general de una onda armónica propagándose hacia la parte positiva del eje Y es:

$$\Psi(t) = \Psi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot y + \varphi_0)$$

La amplitud es: $\Psi_0 = 10 \text{ Pa}$

Soluciones unidad 4: Movimiento Ondulatorio 2º Bachillerato 2008

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 250 \text{ Hz} = 500 \pi \text{ rad/s}$

El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 250 \text{ Hz}}{340 \text{ m/s}} = 1,47 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$

Para calcular el desfase, se aplican las condiciones de máxima presión en el foco en el instante inicial:

$$\Psi_{y=0; t=0} = 10 \text{ Pa} \cdot \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_0) = 10 \text{ Pa}; \cos \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

La ecuación de la onda sonora es: $\Psi(t) = 10 \cdot \cos(500 \cdot \pi \cdot t - 1,47 \cdot \pi \cdot y)$

Y la variación respecto del equilibrio en el punto es instante pedidos es:

$$\Psi_{y=1,5; t=3} = 10 \cdot \cos(500 \cdot \pi \cdot 3 - 1,47 \cdot \pi \cdot 1,5) = 8 \text{ Pa}$$

13. Dos corchos que flotan en la superficie del agua de un estanque son alcanzados por una onda que se produce en dicha superficie, tal que los sucesivos frentes de onda son rectas paralelas entre sí que avanzan perpendicularmente a la recta que une ambos corchos. Se observa que los corchos realizan 8 oscilaciones en 10 segundos, y que oscilan en oposición de fase. Sabiendo que la distancia entre los corchos es 80 cm y que ésta es la menor distancia entre puntos que oscilan en oposición de fase, calcular la velocidad de propagación de la onda en el agua.

La frecuencia del movimiento es: $\nu = \frac{8 \text{ oscilaciones}}{10 \text{ s}} = 0,8 \text{ Hz}$

Los puntos más próximos que vibran en oposición de fase están separados por media longitud de onda.

Por tanto: $\frac{\lambda}{2} = 80 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 160 \text{ cm}$

La velocidad de propagación de la onda es: $v = \lambda \cdot \nu = 160 \text{ cm} \cdot 0,8 \text{ Hz} = 128 \text{ cm/s}$

14. Cierta onda está descrita por la ecuación: $\psi(x, t) = 0,002 \text{ A sen}(t - x/4)$, todo expresado en unidades del S.I. Determina la frecuencia de la onda, su velocidad de propagación y la distancia entre dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 120°.

Comparando la expresión dada con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$\psi_{x,t} = A \text{ sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s} = 2 \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 0,159 \text{ Hz}; \quad k = \frac{1}{4} \text{ m}^{-1} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 8 \cdot \pi \text{ m}$$

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1 \text{ rad/s}}{\frac{1}{4} \text{ m}^{-1}} = 4 \text{ m/s}$

A una distancia de una longitud de onda le corresponde una diferencia de fase de $2 \cdot \pi \text{ rad}$ (360°).

$$\Delta x = 120^\circ \frac{\lambda}{360^\circ} = \frac{\lambda}{3} = \frac{8 \cdot \pi}{3} \text{ m}$$

15. Una onda transversal se propaga según la ecuación: $y = 4 \text{ A sen } 2 \text{ A } \pi \text{ A } [(t/4) + (x/1,8)]$ (en unidades SI) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración máxima de un punto alcanzado por la onda. Calcula la diferencia de fase, en un instante dado, de dos puntos separados 1 m en la dirección de avance de la onda.

a) Reescribiendo la ecuación de la onda dada y comparándola con la expresión general, se tiene:

$$y_{x,t} = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{0,9} x\right) \text{ unidades SI}; \quad y_{x,t} = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}; \quad k = \frac{\pi}{0,9} \text{ m}^{-1}$$

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}}{\frac{\pi}{0,9} \text{ m}^{-1}} = 0,45 \text{ m/s}$

Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$$v = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{0,9} x \right) = 2 \cdot \pi \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{0,9} x \right) \text{ m/s}$$

Su valor máximo es: $v_{\text{máximo}} = 2 \cdot \pi \text{ m/s}$

b) A una distancia de λ m le corresponde una diferencia de fase de $2 \cdot \pi$ rad. La longitud de onda es:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{0,9} \text{ m}^{-1}} = 1,8 \text{ m}$$

La diferencia de fase pedida es: $\Delta\phi = \Delta x \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\lambda} = 1 \text{ m} \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1,8 \text{ m}} = \frac{\pi}{0,9} \text{ rad} = \frac{10}{9} \pi \text{ rad}$

16. Una onda armónica se propaga por un medio unidimensional con una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 350 m/s. ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos del medio para que un instante vibren con una diferencia de fase de 60° ? ¿Para un cierto punto, cuál es la diferencia de fase, para un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?

La longitud de onda de la perturbación es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{350 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0,7 \text{ m}$

A una distancia igual a la longitud de onda le corresponde un desfase de $2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ$, por tanto:

$$\Delta x = \Delta\phi \frac{\lambda}{360^\circ} = 60^\circ \frac{0,7 \text{ m}}{360^\circ} = 0,12 \text{ m}$$

De igual forma a un intervalo de tiempo igual al período le corresponde un desfase de $2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ$, por tanto:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{500 \text{ Hz}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Delta\phi = \Delta T \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{T} = 10^{-3} \text{ s} \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = \pi \text{ rad}, \text{ los instantes están en oposición de fase.}$$

17. Un foco sonoro emite una energía de $1,5 \cdot 10^2 \text{ J}$ cada minuto, observándose una amplitud de 2 mm a una distancia de 10 m del foco. Calcula la intensidad a 10 m y a 20 m del foco. ¿Cuál es la amplitud a 20 m del foco?

La intensidad de onda esférica a una distancia R del foco es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot \Delta t} = \frac{1,5 \cdot 10^2 \text{ J}}{4 \cdot \pi (10 \text{ m})^2 \cdot 60 \text{ s}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}; \quad I_2 = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{1,5 \cdot 10^2 \text{ W}}{4 \cdot \pi (20 \text{ m})^2 \cdot 60 \text{ s}} = 0,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Al duplicar la distancia al foco, la intensidad se divide por cuatro.

La relación entre las amplitudes es: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{20 \text{ m}}{10 \text{ m}} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{2 \text{ cm}}{2} = 1 \text{ cm}$

Al duplicarse la distancia al foco, la amplitud se divide por dos.

18. Se desea aislar acústicamente una sala, cubriendo sus paredes con un material absorbente. Para ello, se utiliza un cierto material en el que la intensidad del sonido se reduce a la mitad cuando atraviesa 1 cm de material. La intensidad máxima que puede pasar al exterior es 1

pW/cm². ¿Cuál es el grosor del material aislante que debe emplearse si la intensidad interior puede alcanzar hasta 20 pW/cm²?

Aplicando la ley de la absorción se calcula el valor del coeficiente de absorción del material.

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}; \frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 1 \text{ cm}}; -\text{Ln } 2 = -\beta \cdot 1 \text{ cm} \Rightarrow \beta = \text{Ln } 2 \text{ cm}^{-1}$$

Aplicando otra vez la ley anterior, se calcula el espesor del material a utilizar.

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}; 1 \text{ pW} \cdot \text{cm}^{-2} = 20 \text{ pW} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot e^{-\text{Ln } 2 \text{ cm}^{-1} \cdot x}$$

$$\text{Operando: } \text{Ln } \frac{1}{20} = -\text{Ln } 2 \text{ cm}^{-1} \cdot x \Rightarrow x = 4,32 \text{ cm}$$

19. Un haz de ondas posee una intensidad de 10⁻² W/m² al incidir sobre un medio absorbente de 1 m de espesor. Si a la salida del medio la intensidad se ha reducido a la cuarta parte calcula el coeficiente de absorción del medio. ¿Cuál es el espesor necesario para que la intensidad se reduzca en un 10 %?

El coeficiente de absorción se calcula aplicando la ley de la absorción para ondas planas.

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}; I_0/4 = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 1 \text{ m}}; \text{Ln } 1 - \text{Ln } 4 = -\beta \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow \beta = 1,39 \text{ m}^{-1}$$

Si la intensidad se reduce en un 10 %, significa que la intensidad final es: $I = 0,9 \cdot I_0$, aplicando otra vez la ley anterior, resulta que:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}; 0,9 \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{-1,39 \text{ m}^{-1} \cdot x}; \text{Ln } 0,9 = -1,39 \text{ m}^{-1} \cdot x \Rightarrow x = 0,076 \text{ m}$$

20. Dos sonidos tienen niveles de intensidades sonoras de 50 dB y 70 dB respectivamente. Calcula la relación entre sus intensidades físicas.

Aplicando la definición de nivel de intensidad sonora, $NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, se tiene que las intensidades físicas respectivas son:

$$50 \text{ dB} = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}; 70 \text{ dB} = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0};$$

$$\text{Restando: } 20 \text{ dB} = 10 \cdot \left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right); 2 = \log I_2 - \log I_1$$

$$\text{Operando: } 2 = \log \frac{I_2}{I_1}; 10^2 = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 = 100 \cdot I_1$$

El segundo sonido es cien veces más intenso que el primero.

21. En un partido de fútbol, un espectador canta gol con un nivel de intensidad sonora 40 dB. ¿Cuál sería el nivel de intensidad sonora si gritaran a la vez y con la misma intensidad sonora los 10 000 espectadores que se encuentran viendo el partido? Dato: $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

La intensidad con la que emite un espectador se compara con la intensidad umbral mediante la ecuación del nivel de intensidad sonora.

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{NS}{10}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

La intensidad total es igual a la suma de las intensidades de todas las fuentes de sonido:

$$I_t = 10\,000 \cdot I = 10\,000 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 = 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

Aplicando a esta intensidad la ecuación del nivel de intensidad sonora, resulta que el nivel de intensidad sonora resultante es:

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-4} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 80 \text{ dB}$$

22. Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6} W. Calcula el nivel de intensidad sonora, expresado en dB, a 1 m del foco. ¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad sonora se ha reducido a la mitad del valor anterior? Dato: $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

La intensidad física a la distancia de 1 m es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} = \frac{10^{-6} \text{ J}}{4 \cdot \pi \cdot (1 \text{ m})^2} = 7,96 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{El nivel de intensidad sonora es: } NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{7,96 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 49 \text{ dB}$$

Al alejarse de la fuente disminuye la intensidad y el nivel de intensidad sonora. Cuando este se ha reducido a la mitad, la intensidad física es:

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}; \frac{49 \text{ dB}}{2} = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \Rightarrow I = 2,82 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

Y la distancia a la que está el punto de la fuente es:

$$I_2 = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}; 2,82 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2 = \frac{10^{-6} \text{ J}}{4 \cdot \pi r^2} \Rightarrow r = 16,9 \text{ m}$$

INVESTIGA

1. Describe brevemente el efecto piezoeléctrico.

Pierre Curie descubrió, en 1880, que al aplicar una presión a dos caras paralelas de ciertos cristales de cuarzo, aparecen cargas de distinto signo en las caras perpendiculares a aquellas en las que se aplica la presión, siendo la carga tanto mayor cuanto más elevada sea la presión. Si en vez de presionar sobre las caras, se las somete a tracción se invierte el signo de las cargas.

Y al revés, si se aplica una diferencia de potencial alterna a las caras de una lámina de cuarzo, se originan en las caras perpendiculares tracciones y compresiones con la consiguiente variación del espesor en la lámina. Estas fluctuaciones del espesor tienen una amplitud que alcanza su valor máximo cuando la frecuencia de la corriente coincide con la frecuencia de vibración del cuarzo, pues entra en resonancia, haciéndose las vibraciones más intensas. Estas vibraciones se transmiten al medio que rodea al cristal de cuarzo originando los ultrasonidos.

2. ¿Cuándo se comenzó a desarrollar el sonar de los barcos?

Durante la Primera Guerra Mundial, Paul Langevin recibió el encargo, del ministro de la guerra francés, de un proyecto para la detección de submarinos que no se llegó a poner a punto por la finalización de la misma.

TEST DE AUTOEVALUACIÓN

1. Completa la siguiente frase: El sonido es una onda _____ producida por la propagación en _____ del _____ de un objeto.

El sonido es una onda longitudinal de presión producida por la propagación en un medio elástico

del movimiento vibratorio de un objeto.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) La frecuencia que tiene una onda en un medio depende de las propiedades de éste. b) El sonido necesita un medio material para propagarse. c) Para una cuerda dos instantes separados por un tiempo igual a tres veces el período están en oposición de fase. d) La intensidad de una onda esférica decrece proporcionalmente con la distancia al foco.

a) Falsa.

La frecuencia y la potencia de una onda son características del foco emisor.

b) Verdadero.

El sonido es una onda longitudinal de presión y por ello no se puede propagar por el vacío.

c) Falso.

La ecuación de las ondas armónicas unidimensionales es periódica respecto del tiempo, por ello para una posición concreta dos instantes separados por un múltiplo entero del período están en fase.

d) Falso.

La intensidad de una onda esférica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

3. La velocidad de propagación por una cuerda de una onda de ecuación $y = 0,2 \cdot \cos(2 \cdot t + 0,1 \cdot x)$, unidades del SI, es: a) 20 m/s; b) 2 m/s; c) 0,1 m/s; d) 0,2 m/s.

La solución correcta es la a)

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2 \text{ rad/s}}{0,1 \text{ m}^{-1}} = 20 \text{ m/s}$$

4. La ecuación $y = 0,05 \cdot \sin(50 \cdot t - 200 \cdot x)$ es la de una onda transversal, en unidades del SI, que se propaga por una cuerda. La velocidad de vibración del punto situado a 50 cm del origen en el instante 2 s es: a) 200 m/s; b) 2 m/s; c) 2,5 m/s; d) 0 m/s.

La solución correcta es la c)

La ecuación general de la velocidad es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,05 \cdot 50 \cdot \cos(50 \cdot t - 200 \cdot x) \Rightarrow v_{x=0,5; t=2} = 0,05 \cdot 50 \cdot \cos(50 \cdot 2 - 200 \cdot 0,5) = 2,5 \text{ m/s}$$

5. Un tren de ondas tiene una intensidad de 20 W/m^2 cuando penetra en un medio de coeficiente de absorción $\beta = 20 \text{ m}^{-1}$. Después de atravesar 3,5 cm de material, su intensidad será: a) 0 W/m^2 ; b) 10 W/m^2 ; c) 15 W/m^2 ; d) 5 W/m^2 .

La solución correcta es la b).

Aplicando la ecuación que relaciona la intensidad de una onda con el espesor de material atravesado, resulta que:

$$I = I_0 A e^{-\beta \cdot x} = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} e^{-20 \text{ m}^{-1} \cdot 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10 \text{ W/m}^2$$

La intensidad de la onda se ha reducido a la mitad.

6. Una partícula transmite a un medio no absorbente una energía de 10 J cada 5 s. La intensidad en un punto situado a 50 cm del foco es: a) 2 W/m^2 ; b) 50 W/m^2 ; c) 1 W/m^2 ; d) $0,64$

W/m^2 .

La solución correcta es la d).

La intensidad de la onda es: $I = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta t} = \frac{10 J}{4 \cdot \pi \cdot (0,5 m)^2 \cdot 5 s} = 0,64 W/m^2$

7. Completa la frase: La energía que transporta una onda es función del _____ de la frecuencia, del _____ de la amplitud y de _____ de las partículas que vibran.

La energía que transporta una onda es función del cuadrado de la frecuencia, del cuadrado de la amplitud y de la masa de las partículas que vibran.

8. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) Una onda transporta masa y energía. b) El sonido es una onda transversal. c) La velocidad de propagación de una onda depende de las propiedades del medio transmisor. d) Dos puntos de una cuerda separados por una distancia igual a la longitud de onda están en fase.

a) Falsa.

Una onda no transporta materia, transmite energía y cantidad de movimiento.

b) Falsa.

El sonido es una onda longitudinal.

c) Verdadero.

Para un mismo tipo de onda, su velocidad de propagación depende de las propiedades del medio transmisor.

d) Verdadero.

La ecuación de las ondas armónicas unidimensionales es periódica respecto de la posición, de forma que los puntos separados por un múltiplo entero de la longitud de onda están en fase.

9. Una onda transversal tiene que tiene una amplitud de 0,2 m y una longitud de onda de $20 \cdot \pi$ m, se propaga con una velocidad de 20 m/s. Si inicialmente el origen se encuentra en su máxima elongación, la elongación de un punto que se encuentra a 0,2 m del origen en el instante 0,5 s es: a) 0,11 m; b) 0 m; c) 0,2 m; d) 0,05 m.

La solución correcta es la a).

El número de onda es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{20 \cdot \pi m} = 0,1 m^{-1}$

La frecuencia angular es: $\omega = k \cdot v = 0,1 m^{-1} \cdot 20 m/s = 2 rad/s$

Como en el instante inicial el origen está en la máxima elongación, la fase inicial es igual a cero cuando se usa para la descripción la función seno.

$y_{x,t} = 0,2 m \cdot \cos(2 \cdot t - 0,1 \cdot x) \Rightarrow y_{x=0,2; t=0,5} = 0,2 m \cdot \cos(2 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 0,2) = 0,11 m$

10. Una cuerda de 8 m de longitud es recorrida por una perturbación cuya longitud de onda mide 65 cm. La diferencia de fase entre los extremos de la cuerda es: a) π rad; b) 112° ; c) 360° ; d) $\pi/2$ rad

La solución correcta es la b).

Dos elementos de la cuerda separados por una distancia igual a la longitud de onda se corresponde con una diferencia de fase de $360^\circ = 2 \cdot \pi$ rad.

Soluciones unidad 4: Movimiento Ondulatorio 2º Bachillerato 2008

$$\Delta\varphi = \Delta x \frac{360^\circ}{\lambda} = 8\text{m} \frac{360^\circ}{0,65\text{m}} = 12,31 \cdot 360^\circ = 12 \cdot 360^\circ + 0,31 \cdot 360^\circ = 12 \cdot 360^\circ + 112^\circ$$

Por lo que la diferencia de fase es equivalente a: $\Delta\varphi = 112^\circ$

Física

Unidad didáctica 5

**Fenómenos ondulatorios
mecánicos**

SOLUCIONES UNIDAD 5. FENÓMENOS ONDULATORIOS MECÁNICOS

CUESTIONES INICIALES

1. Seguro que alguna vez has escuchado el fenómeno del eco, ¿serías capaz de explicar cómo se produce?

Las ondas sonoras que se forman al hablar si encuentran una superficie adecuada, y a la distancia conveniente, en la que se reflejan, vuelven por el mismo camino, lo que permite que nos escuchemos a nosotros mismos con un cierto retraso.

2. ¿Por qué se escucha la voz de unas personas situadas al otro lado de una esquina, aunque no las veamos?

La longitud de onda del sonido está comprendida entre unos cm y varios m, por lo que puede bordear obstáculos tales como las esquinas de los edificios. Sin embargo la longitud de onda de la luz es del orden del 6×10^{-7} m y por tanto no puede bordear esos obstáculos.

3. Si observamos pasar los automóviles, cuando estamos parados en el arcén de una carretera, percibimos distinto sonido cuando se acercan que al alejarse. ¿A qué crees que es debido?

La sensación sonora que nos transmite el oído depende de la frecuencia con la que fluctúa el aire que está en contacto con el tímpano. Esta frecuencia percibida depende del movimiento relativo entre el foco y el observador.

ACTIVIDADES FINALES

1. Un sonido se propaga por el aire con una longitud de onda de 2 m y una velocidad de 340 m/s. ¿Cuál será la longitud de onda cuando se propague por el agua con una velocidad de 1500 m/s?

Cuando la onda pasa de un medio a otro su frecuencia permanece constante.

$$v_{\text{aire}} = v_{\text{agua}} \cdot \frac{\lambda_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{agua}}}; \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = \frac{1500 \text{ m/s}}{\lambda_{\text{agua}}} \Rightarrow \lambda_{\text{agua}} = 8,8 \text{ m}$$

2. Una onda de frecuencia 4 Hz se propaga por un medio con velocidad $v_1 = 2$ m/s e incide sobre la frontera con otro medio diferente con ángulo de incidencia $i = 30^\circ$. En el segundo medio la velocidad de propagación de la onda es $v_2 = 2,5$ m/s. Calcula el ángulo de refracción y la longitud de onda en este segundo medio.

Aplicando la ley de Snell: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}; \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } r} = \frac{2 \text{ m/s}}{2,5 \text{ m/s}} \Rightarrow r = 39^\circ$

Cuando la onda pasa de un medio a otro permanece constante su frecuencia.

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{2,5 \text{ m/s}}{4 \text{ Hz}} = 0,625 \text{ m}$$

3. Una perturbación de 2 cm de longitud de onda, que se desplaza por el agua con una velocidad de 0,5 m/s, accede a un medio más profundo con un ángulo de incidencia de 30° respecto de la norma a la superficie de separación de los dos medios. Si la longitud de onda de dicha perturbación en el segundo medio es de 2,4 cm, calcula la velocidad de propagación

en el segundo medio y la dirección de propagación.

Cuando la onda pasa de un medio a otro su frecuencia permanece constante.

$$v_1 = v_2; \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}; \frac{0,5\text{m/s}}{2\text{cm}} = \frac{v_2}{2,4\text{cm}} \Rightarrow v_2 = 0,6\text{m/s}$$

Aplicando la ley de Snell, se tiene que el ángulo de refracción es:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}; \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } r} = \frac{0,5\text{m/s}}{0,6\text{m/s}} \Rightarrow r = 36,87^\circ$$

4. Una onda sonora tiene por ecuación $y = 1,2 \cdot \cos [2 \cdot \pi \cdot (170 \cdot t - 0,5 \cdot x)]$ Pa. Si encuentra en su camino un automóvil, ¿sufrirá el fenómeno de la difracción?

Para deducirlo hay que comparar las dimensiones del automóvil con la longitud de onda de las ondas.

$$k = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ m}^{-1} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Como ambas magnitudes son del mismo orden si que se manifiesta el fenómeno de la difracción.

5. Dos ondas sonoras coherentes tienen una frecuencia de 2 000 Hz y se propagan con una velocidad de 340 m/s. Calcula la diferencia de fase en un punto del medio de propagación situado a 10 m de una fuente y a 27 m de la otra. Justifica si la interferencia en ese punto es constructiva o destructiva.

La longitud de onda del sonido es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\text{m/s}}{2000\text{Hz}} = 0,17\text{m}$

Aplicando la relación entre la diferencia de fase y las respectivas distancias a los focos:

$$\Delta\varphi = k \cdot (r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi}{0,17\text{m}} (27\text{m} - 10\text{m}) = 100 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

Las dos perturbaciones llegan en fase, por lo que la interferencia es constructiva.

6. Dos altavoces, considerados puntuales, reciben una señal del mismo amplificador y emiten ondas sonoras en fase. Si la velocidad del sonido es de 350 m/s, calcula la frecuencia más pequeña para que la interferencia en un punto que dista 2,47 m de un altavoz y 2,12 m del otro sea constructiva. ¿Cuál será la frecuencia más pequeña para que la interferencia sea destructiva?

a) La interferencia de dos ondas coherentes es constructiva en todos los puntos del medio para los cuales la diferencia de distancias a los focos es un múltiplo de la longitud de onda.

$$r_1 - r_2 = n \cdot \lambda \text{ con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Como los caminos son distintos, la frecuencia más pequeña es cuando $n = 1$, y como $v = \lambda \cdot \nu$, resulta que:

$$r_1 - r_2 = \lambda = \frac{v}{\nu}; 2,47\text{m} - 2,12\text{m} = \frac{350\text{m/s}}{\nu} \Rightarrow \nu = 1000 \text{ Hz}$$

b) La interferencia de dos ondas coherentes es destructiva en todos los puntos del medio para los cuales la diferencia de distancias a los focos es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

$$r_1 - r_2 = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La frecuencia más pequeña es cuando $n = 0$, y como $v = \lambda \cdot \nu$, resulta que:

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2 \cdot \nu} ; 2,47\text{m} - 2,12\text{m} = \frac{350\text{m/s}}{2 \cdot \nu} \Rightarrow \nu = 500\text{ Hz}$$

7. Dos ondas sonoras de ecuación $y = 1,2 \cdot \cos [2 \cdot \pi \cdot (170 \cdot t - 0,5 \cdot x)]$ Pa, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m del otro foco. Calcula la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado. Determina la amplitud de la perturbación total en citado punto en cualquier instante.

La diferencia de fase con la que llegan las ondas al punto considerado es:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 2 \cdot \pi (170 \cdot t - 0,5 \cdot 20) \\ \varphi_2 &= 2 \cdot \pi (170 \cdot t - 0,5 \cdot 25) \end{aligned} \right\} \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 5 = 5 \cdot \pi \text{ rad}$$

Las ondas llegan al punto considerado en oposición de fase.

En ese punto la interferencia de las dos ondas es destructiva y por tanto está permanentemente en reposo, por lo que su amplitud siempre es igual a cero.

8. De una onda estacionaria con los extremos fijos se sabe que los antinodos están separados por una distancia de 1,5 m. Calcula la longitud de onda de las ondas sinusoidales que interfieren para dar lugar a dicha onda estacionaria.

La distancia entre dos antinodos o vientres es igual a la mitad de la longitud de onda.

$$1,5\text{m} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 3\text{m}$$

9. Por una cuerda tensa se transmiten simultáneamente dos ondas transversales cuyas ecuaciones utilizando el sistema internacional son: $y_1 = 0,04 \cdot \sin (10 \cdot x - 600 t)$, $y_2 = 0,04 \cdot \sin (10 \cdot x + 600 \cdot t)$. Escribe la expresión de la onda estacionaria formada y calcula la distancia entre dos nodos.

a) Aplicando el principio de superposición:

$$y = y_1 + y_2 = 0,04 \cdot \sin (10 \cdot x - 600 t) + 0,04 \cdot \sin (10 \cdot x + 600 \cdot t)$$

Aplicando la relación: $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ y como: $\cos a = \cos (-a)$, resulta que:

$$y = 0,08 \cdot \sin (10 \cdot x) \cdot \cos (600 \cdot t)$$

b) La distancia entre dos nodos es igual a mitad de la longitud de onda.

$$k = 10 \text{ m}^{-1}; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{10 \text{ m}^{-1}} = \frac{\pi}{5} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{nodos}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi/5 \text{ m}}{2} = 0,314 \text{ m}$$

10. La ecuación $y_{x,t} = 0,02 \cdot \sin (4 \cdot \pi \cdot x) \cdot \cos (6 \cdot \pi \cdot t)$, donde x e y están expresados en m y t en s, representa a la función de onda de una onda estacionaria en una cuerda. Determina el máximo desplazamiento y la máxima velocidad de los puntos de la cuerda situados en las posiciones: $x_1 = 1,10 \text{ m}$; $x_2 = 0,25 \text{ m}$ y $x_3 = 0,5 \text{ m}$.

El desplazamiento y la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda dependen de su posición.

a) $x_1 = 1,10 \text{ m}$

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$$y_{x=1,10\text{m};t} = 0,02 \cdot \sin (4 \cdot \pi \cdot 1,10) \cdot \cos (6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m} = 0,019 \cdot \cos (6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m} \Rightarrow y_{\text{máximo}} = 0,019 \text{ m}$$

Y su velocidad es :

$$v_{x=1,10\text{ m}; t} = \frac{dy}{dt} = -0,019 \cdot 6 \cdot \pi \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s} = -0,036 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s} \Rightarrow v_{\text{máxima}} = 0,36 \text{ m/s}$$

b) $x_2 = 0,25 \text{ m}$

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$$y_{x=0,25\text{ m}; t} = 0,02 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot 0,25) \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m} = 0 \text{ m/s}$$

Este punto es un nodo y por ello está permanentemente en reposo.

b) $x_2 = 0,50 \text{ m}$

Sustituyendo esta posición en la ecuación general:

$$y_{x=0,25\text{ m}; t} = 0,02 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot 0,50) \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot t) \text{ m} = 0 \text{ m/s}$$

También es un nodo y por ello está permanentemente en reposo.

11. Una onda estacionaria responde a la ecuación: $y = 8 \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot \cos(2 \cdot t)$, con x e y en cm y t en s . Calcula el desplazamiento máximo de la partícula situada en la posición $x = 2,3 \text{ cm}$ y determina las posiciones de los nodos y de los vientres o antinodos.

La ecuación de la elongación del punto considerado es:

$$y_{x=2,3\text{ cm}} = 8 \cdot \sin(3 \cdot 2,3) \cdot \cos(2 \cdot t) = 4,6 \cdot \cos(2 \cdot t) \text{ cm} \Rightarrow y_{x=2,3\text{ cm}; \text{máximo}} = 4,6 \text{ cm}$$

Los nodos son los puntos del medio que están permanentemente en reposo, por lo que:

$$y = 0; \sin(3 \cdot x) = 0; 3 \cdot x = n \cdot \pi \text{ cm} \Rightarrow x_{\text{nodos}} = n \cdot \frac{\pi}{3} \text{ cm} \text{ con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Los vientres o antinodos son los puntos en los que el desplazamiento es máximo.

$$y = \text{máximo}; \sin(3 \cdot x) = \pm 1; 3 \cdot x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\text{vientres}} = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{6} \text{ cm} \text{ con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

12. La ecuación $y = 0,10 \cdot \cos(0,5 \cdot \pi \cdot x) \cdot \sin(50 \cdot \pi \cdot t)$ representa la función de onda de una onda estacionaria que se propaga por una cuerda en unidades del SI. Calcula la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a la onda anterior. Determina la distancia entre dos vientres consecutivos.

a) Al comparar la ecuación dada con la ecuación general de una onda estacionaria:

$$y = 2 \cdot A \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ resulta que:}$$

$$2 \cdot A = 0,10 \text{ m} \Rightarrow A = 0,05 \text{ m}$$

$$k = 0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{0,5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}} = 4 \text{ m}; \omega = 50 \cdot \pi \text{ rad/s}; v = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{50 \cdot \pi \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi} = 25 \text{ Hz}$$

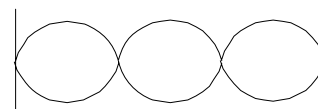
$$v = \lambda \cdot v = 4 \text{ m} \cdot 25 \text{ Hz} = 100 \text{ m/s}$$

b) La distancia entre dos vientres es igual a la mitad de la longitud de onda.

$$\Delta x_{\text{vientres}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{4 \text{ m}}{2} = 2 \text{ m}$$

13. Una onda se propaga con una velocidad de 660 m/s por una cuerda colocada en una guitarra. Si al agitar la cuerda se forma una onda estacionaria de 4 nodos y el sonido emitido tiene una frecuencia de 990 Hz . Determina la longitud de la cuerda.

Si la onda forma cuatro nodos entonces la longitud de la cuerda contiene tres veces a media longitud de onda.



$$L = 3 \frac{\lambda}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{\lambda} \\ L = 3 \frac{v}{2} = \frac{3 \cdot 660 \text{ m/s}}{2 \cdot 990 \text{ Hz}} = 1 \text{ m} \end{array} \right.$$

14. La ecuación: $y = 0,02 \cdot \text{sen}((10 \cdot \pi/3) \cdot x) \cdot \cos(40 \cdot \pi \cdot t)$, unidades del SI, describe a una onda estacionaria que se propaga por una cuerda. Determina las magnitudes características: amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de las ondas que dan lugar a la onda estacionaria. Sitúa las posiciones de los nodos y calcula la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos. Determina la expresión general de la velocidad de vibración de cualquier punto en cualquier instante y en particular la velocidad máxima con la que vibra el punto situado a 1,35 m del origen del sistema de referencia.

a) Comparando la ecuación general de una onda estacionaria: $y = 2 \cdot A \cdot \text{sen}(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$, se tiene:

$$2 \cdot A = 0,02 \text{ m} \Rightarrow A = 0,01 \text{ m}$$

$$k = 10 \cdot \pi/3 \text{ m}^{-1}; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{10 \cdot \pi}{3} \text{ m}^{-1}} = 0,6 \text{ m}; \omega = 40 \cdot \pi \text{ rad/s}; v = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{40 \cdot \pi \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi} = 20 \text{ Hz}$$

$$v = \lambda \cdot \nu = 0,6 \text{ m} \cdot 20 \text{ Hz} = 12 \text{ m/s}$$

b) Los nodos están permanentemente en reposo $y = 0$ es decir cuando: $\text{sen}((10 \cdot \pi/3) \cdot x) = 0$.

$$\text{sen}((10 \cdot \pi/3) \cdot x) = 0; (10 \cdot \pi/3) \cdot x = n \cdot \pi \Rightarrow x = n \cdot \frac{3}{10} \text{ m} \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

c) La distancia entre un nodo y un vientre es igual a la cuarta parte de la longitud de onda.

$$\Delta x_{\text{nodo-ventre}} = \frac{\lambda}{4} = \frac{0,6 \text{ m}}{4} = 0,15 \text{ m}$$

d) La expresión de la velocidad de vibración de las partículas es:

$$v_{x,t} = \frac{dy}{dt} = -0,8 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10 \cdot \pi}{3} x\right) \cdot \text{sen}(40 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s}$$

La velocidad con la que vibra el punto considerado es:

$$v_{x=1,35 \text{ m}, t} = -0,8 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(\frac{10 \cdot \pi}{3} 1,35 \text{ m}\right) \cdot \text{sen}(40 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s} = -0,8 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \text{sen}(40 \cdot \pi \cdot t) \text{ m/s}$$

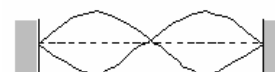
Su valor máximo: $v_{\text{máximo}} = 0,8 \cdot \pi \text{ m/s}$, lógico ya que es un vientre.

15. Una cuerda tensa, fija por sus dos extremos, tiene una longitud $L = 1,2 \text{ m}$. Cuando esta cuerda se excita transversalmente a una frecuencia de 80 Hz, se forma una onda estacionaria con dos vientres. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda. ¿Para qué frecuencia inferior a la dada se formará otra onda estacionaria en la cuerda? Representa esta onda.

a) La onda estacionaria que se propaga por una cuerda fija por los extremos tiene nodos en esos extremos. Como la cuerda presenta dos vientres, el número de nodos es igual a tres y la longitud de la cuerda es igual a la longitud de onda de la onda estacionaria formada.

$$L = \lambda = 1,2 \text{ m}$$

La velocidad de propagación es: $v = \lambda \cdot \nu = 1,2 \text{ m} \cdot 80 \text{ Hz} = 96 \text{ m/s}$



b) La onda de menor frecuencia es la que tiene dos nodos en los extremos y solamente un vientre.

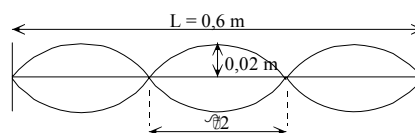
En este caso la longitud de la cuerda es igual a la mitad de la longitud de onda.

$$L = \lambda/2; 1,2 \text{ m} = \lambda/2 \Rightarrow \lambda = 2,4 \text{ m}$$

Y la frecuencia es: $v = \frac{v}{\lambda} = \frac{96 \text{ m/s}}{2,4 \text{ m}} = 40 \text{ Hz}$

16. Una cuerda de 60 cm de longitud tiene sus dos extremos fijos y oscila en un modo con dos nodos internos y una frecuencia de 200 Hz. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcula la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda. ¿Cuál es la máxima velocidad del punto central de la cuerda. Determina la amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 5 cm de uno de sus extremos.

En la cuerda fija por los extremos se forma la onda estacionaria de la figura adjunta, de donde se deduce que la longitud de la cuerda contiene 3 similitudes de onda por lo que:



$$L = 3 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} L = \frac{2}{3} 0,60 \text{ m} = 0,40 \text{ m}$$

La velocidad de propagación de la onda por la cuerda es: $v = \lambda \cdot \nu = 0,4 \text{ m} \cdot 200 \text{ Hz} = 80 \text{ m/s}$

La ecuación general de una onda estacionaria es: $y = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot x)$

Y la velocidad de vibración de un elemento de la cuerda es:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2 \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot x)$$

Siendo su valor máximo: $v_{\text{máximo}} = -2 \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(k \cdot x) = -2 \cdot A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x\right)$

Como el punto central es un vientre de coordenada $x = 0,3 \text{ m}$, resulta que:

$$v_{x=0,3; \text{máximo}} = -2 \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 200 \text{ Hz} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0,4 \text{ m}} 0,3 \text{ m}\right) = 50,27 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación general de la onda estacionaria al punto considerado, resulta que:

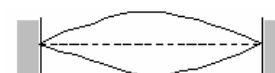
$$y = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot x)$$

La amplitud resultante de un punto de la cuerda es: $A_r = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x)$

Y para el punto considerado: $A_{r(x=5 \text{ cm})} = 2 \cdot 0,02 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0,4 \text{ m}} 0,05 \text{ m}\right) = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

17. Una cuerda de 3 m de longitud está sujeta por los extremos vibra con una frecuencia de 252 Hz. La siguiente frecuencia de vibración es de 336 Hz. Calcula la frecuencia fundamental de vibración.

En una cuerda fija por los extremos se cumple que su longitud es igual a un múltiplo de la mitad de la longitud de onda:



$$L = n \frac{\lambda}{2}; \lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Que se corresponden con las siguientes frecuencias de vibración.

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2 \cdot L}{n}} = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Si la frecuencia de 252 Hz es el armónico n , la de 336 Hz es la $n + 1$.

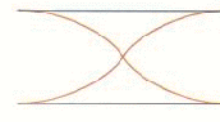
$$\left. \begin{aligned} v_n &= n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 252 \text{ Hz} \\ v_{n+1} &= (n+1) \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 336 \text{ Hz} \end{aligned} \right\} \frac{252 \text{ Hz}}{336 \text{ Hz}} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow n = 3$$

Y su relación con la fundamental: $v_3 = 3 \cdot v_1$; $252 \text{ Hz} = 3 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = 84 \text{ Hz}$

18. Un tubo sonoro tiene una longitud de 0,68 m y se encuentra con sus extremos abiertos a la atmósfera. Calcula la menor frecuencia de excitación sonora para la que se formen ondas estacionarias en su interior. Cuál es el valor de la longitud de onda? Representa la onda estacionaria dentro del tubo.

En un tubo sonoro se forman vientres en los extremos abiertos. La onda estacionaria que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo de la semilongitud de onda.

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$



Para la frecuencia fundamental $n = 1$, por tanto: $L = \frac{\lambda}{2}$; $0,68 \text{ m} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 1,36 \text{ m}$

Y la frecuencia fundamental es: $v = \lambda \cdot \nu$; $340 \text{ m/s} = 1,36 \text{ m} \cdot \nu \Rightarrow \nu = 250 \text{ Hz}$

19. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano cerrado por un extremo es de 220 Hz. Calcula la longitud del tubo.

En un tubo sonoro se forma un vientre en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. La onda estacionaria que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda.

$$L = (2 \cdot n + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4 \cdot L}{2 \cdot n + 1}$$



Y la frecuencia fundamental, $n = 0$, es: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4 \cdot L}{2 \cdot n + 1}} = (2 \cdot n + 1) \frac{v}{4 \cdot L} \Rightarrow \nu_1 = \frac{v}{4 \cdot L}$

Sustituyendo: $220 \text{ Hz}_1 = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot L} \Rightarrow L = 0,39 \text{ m}$

20. Un tubo sonoro tiene una longitud de 68 cm y está cerrado por un extremo. Calcula la menor frecuencia de excitación sonora para la que se formen ondas estacionarias en su interior. Cuál es el valor de la longitud de onda? Representa la onda estacionaria dentro del tubo.

En un tubo sonoro se forma un vientre en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. La onda estacionaria que se forma es tal que la longitud del tubo es igual a un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda.

$$L = (2 \cdot n + 1) \frac{\lambda}{4}$$



Para la frecuencia fundamental $n = 1$, por tanto: $L = \frac{\lambda}{4}$; $0,68 \text{ m} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 2,72 \text{ m}$

Y la frecuencia fundamental es: $\nu = \lambda \cdot \nu$; $340 \text{ m/s} = 2,72 \text{ m} \cdot \nu \Rightarrow \nu = 125 \text{ Hz}$

21. El silbato de un tren, que se desplaza con una velocidad de 108 km/h, emite con una frecuencia de 60 Hz. Calcula la frecuencia que percibirá un observador en reposo al acercarse y al alejarse el tren.

La velocidad del vehículo es: $v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$.

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acerca el tren. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y la del vehículo + 30 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 60 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+ 30 \text{ m/s})} = 65,8 \text{ Hz}$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se aleja el tren. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y la del vehículo - 30 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 60 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (- 30 \text{ m/s})} = 55,1 \text{ Hz}$$

22. Una sirena de una fábrica emite con una frecuencia de 500 Hz. Calcula la frecuencia que percibirá un observador cuando se acerque a la sirena con una velocidad de 10 m/s y cuando se aleja de ella con la misma velocidad.

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acerca a la sirena. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual + 10 m/s y la del foco 0 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 500 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (+ 10 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}} = 514,7 \text{ Hz}$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se aleja de la sirena. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a - 10 m/s y la del foco 0 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 500 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (-10 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 00 \text{ m/s}} = 485,3 \text{ Hz}$$

23. Una ambulancia que lleva una velocidad de 40 m/s, y su sirena emite un sonido con una frecuencia de 400 Hz, se cruza con un automóvil que transita en sentido contrario con una velocidad de 25 m/s. ¿Qué frecuencia percibirá el conductor del automóvil cuando se aproximan los vehículos y cuando se alejan?

a) El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acercan los vehículos. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador + 25 m/s y la de la ambulancia + 40 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 400 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 25 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+ 40 \text{ m/s})} = 487 \text{ Hz}$$

b) El observador percibe un sonido de una frecuencia menor cuando se alejan los vehículos. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador - 25 m/s y la de la ambulancia - 40 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 400 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (-25 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - (- 40 \text{ m/s})} = 332 \text{ Hz}$$

24. El conductor de un vehículo, que lleva una velocidad de 30 m/s, hace sonar el claxon que emite en una frecuencia de 300 Hz. Si frente al vehículo hay una montaña, calcula la frecuencia del eco que percibe el conductor.

En este ejemplo se presenta un efecto Doppler doble. En primer lugar un foco móvil, el vehículo, emite ondas sonoras hacia un receptor fijo, la montaña. A continuación la pared reflectora hace de

emisor fijo, y el conductor de receptor en movimiento.

a) En el primer efecto Doppler, el foco, que tiene una velocidad de + 30 m/s, se acerca al observador, en reposo, por lo que la frecuencia que recibe la montaña es mayor que la emitida.

$$v_1 = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 300 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+30 \text{ m/s})} = 329 \text{ Hz}$$

b) En el segundo efecto Doppler, el observador se acerca, con una velocidad de + 30 m/s, hacia un foco, en reposo, que emite ondas sonoras con una frecuencia de 329 Hz, por lo que vuelve a aumentar la frecuencia percibida..

$$v_2 = v_1 \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 329 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + (+30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}} = 358 \text{ Hz}$$

25. Un observador situado en el andén de una estación percibe el sonido del silbato de un tren que se acerca con una frecuencia de 704 Hz y al alejarse aprecia que la frecuencia es de 619 Hz. Calcula la velocidad del tren y la frecuencia del silbato.

Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y que la velocidad del tren cuando se acerca es + v_{foco} y cuando se aleja $- v_{\text{foco}}$.

$$\text{Al acercarse: } v_{\text{acercarse}} = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}}; 704 \text{ Hz} = v \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+v_{\text{foco}})}$$

$$\text{Al alejarse: } v_{\text{alejarse}} = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}}; 619 \text{ Hz} = v \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (-v_{\text{foco}})}$$

$$\text{Dividiendo miembro a miembro: } \frac{704 \text{ Hz}}{619 \text{ Hz}} = \frac{\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - v_{\text{foco}}}}{\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + v_{\text{foco}}}}; \frac{704 \text{ Hz}}{619 \text{ Hz}} = \frac{340 \text{ m/s} + v_{\text{foco}}}{340 \text{ m/s} - v_{\text{foco}}}$$

$$\text{Despejando: } v_{\text{foco}} = 21,8 \text{ m/s}$$

Y sustituyendo, se tiene que la frecuencia del silbato es:

$$704 \text{ Hz} = v \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+21,8 \text{ m/s})} \Rightarrow v = 659 \text{ Hz}$$

26. Un observador está en reposo, justifica cualitativamente si el sonido que percibe al acercarse un vehículo es más grave o más agudo.

Cuando un foco sonoro se acerca a un observador en reposo, el foco intenta alcanzar a las ondas que emite y el observador recibe más ondas en la unidad de tiempo y percibe una frecuencia aparente mayor que la real de la fuente, tornándose el sonido más agudo.

INVESTIGA

1. ¿Cómo se gestó la construcción del avión Concorde?

La construcción de avión supersónico Concorde fue fruto de la colaboración de Francia y el Reino Unido. Las primeras pruebas de vuelo se realizaron en 1969, alcanzándose velocidades de Mach 2. Estas pruebas desataron la euforia en las compañías aéreas europeas y norteamericanas que llegaron a encargar más de 100 unidades. Los primeros vuelos comerciales se realizaron en 1976.

2. ¿Cuáles fueron sus rutas comerciales?

Las primeras rutas fueron Londres-Bahrein y París-Río de Janeiro. Inicialmente las autoridades norteamericanas fueron reticentes a que el Concorde aterrizara en suelo norteamericano, justificándose por los problemas medioambientales que generaba.

La crisis del petróleo de los años 1970, condujo a una crisis financiera en las compañías aéreas, lo que motivó que las compañías norteamericanas cancelaran sus pedidos. Posteriormente Estados Unidos autorizó los vuelos supersónicos solamente para pasajeros y se abrieron las rutas Nueva York-París y Nueva York-Londres. La duración media del vuelo de estos itinerarios era de unas tres horas y media.

3. ¿En qué año se dejó de utilizar? ¿Por qué se retiró del servicio?

El Concorde dejó de volar en el año 2003, después de 27 años de historia. El avión dejó de estar en servicio debido a la carestía del combustible y del mantenimiento del avión. Además, en el año 2000 se produjo el primer y único accidente de un Concorde. Durante un despegue se le incendió un depósito del ala al pisar con una de las ruedas una chapa que había sobre la pista. Ello hizo que se estrellara, provocando 113 muertes en el accidente.

La compañía francesa Air France ha considerado que estos aviones supersónicos deben formar parte del patrimonio de la humanidad y ha donado cuatro de sus cinco aparatos a distintas instituciones que los conservarán y los mostrarán al público.

TEST DE EVALUACIÓN

1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) En la reflexión de una onda el ángulo de incidencia es mayor que el de reflexión. b) Dos ondas son coherentes cuando tienen la misma longitud de onda. c) La frecuencia aparente de un foco sonoro aumenta cuando se aproxima al observador. d) En un punto se produce una interferencia constructiva cuando la diferencia de distancias a los focos es un múltiplo de la longitud de onda.

a) Falso.

En la reflexión de una onda los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

b) Falso.

Dos ondas son coherentes cuando su diferencia de fase es constante a lo largo del tiempo.

c) Verdadero.

La frecuencia aparente de un foco sonoro aumenta cuando se aproxima al observador, ya que el observador recibe más ondas que cuando ambos están a la misma distancia relativa.

d) Verdadero.

Una interferencia es constructiva cuando: $r_1 - r_2 = n \cdot \lambda$.

2. Completa la frase: La refracción es el cambio de _____ que experimenta _____ al pasar de un medio a otro en el que se modifica _____.

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda al pasar de un medio a otro en el que se modifica su velocidad de propagación.

3. La ecuación $y = 0,2 \cdot \sin(10 \cdot \pi \cdot x) \cdot \cos(40 \cdot \pi \cdot t)$, en unidades SI, es la de una onda estacionaria. La frecuencia de las ondas que dan lugar a ella es: a) $40 \cdot \pi$ Hz; b) $10 \cdot \pi$ Hz; c)

20 Hz; d) 10 Hz.

La solución correcta es la c).

Comparando la ecuación anterior con la ecuación general de una onda estacionaria, se tiene:

$$y = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 40 \cdot \pi \text{ rad/s} \Rightarrow \nu = 20 \text{ Hz}$$

4. Dos focos sonoros vibran en el aire en fase con una frecuencia de 500 Hz. Cuando la perturbación llega a un punto situado a 5 m de un foco y a 5,17 m del otro, la diferencia de fases: a) 0 rad; b) $\pi/2$ rad; c) π rad; d) 360° .

La solución correcta es la b).

La longitud de onda del sonido es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0,68 \text{ m}$

Aplicando la relación entre la diferencia de fase y las respectivas distancias a los focos:

$$\Delta\phi = k \cdot (r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2 \cdot \pi}{0,68 \text{ m}} (5,17 \text{ m} - 5 \text{ m}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

5. Una onda que se propaga por la superficie del agua con una velocidad de 5 cm/s, accede a una zona en la que se propaga con una velocidad de 6 cm/s. Si el ángulo de incidencia es de 30° , el de refracción es: a) 37° ; b) 25° ; c) 45° ; d) 30° .

La solución correcta es la a).

Aplicando la ley de Snell, se tiene que: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}; \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } r} = \frac{5 \text{ cm/s}}{6 \text{ cm/s}} \Rightarrow r = 37^\circ$

6. La ecuación: $y = 5 \cdot \cos(10 \cdot \pi \cdot t) \cdot \cos(\pi \cdot x)$, con x en cm y t en s, describe una onda estacionaria. La separación de dos nodos es: a) 10 cm; b) π cm; c) 5 cm; d) 1 cm.

La solución correcta es la d).

La longitud de onda es: $\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi \text{ cm}^{-1}} = 2 \text{ cm}$

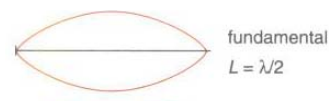
La separación entre dos nodos es igual a la mitad de la longitud de onda: $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{2 \text{ cm}}{2} = 1 \text{ cm}$

7. Una cuerda de 70 cm de longitud vibra con los dos extremos fijos. Si la velocidad de propagación de las ondas es de 616 m/s, la frecuencia fundamental de vibración es: a) 400 Hz; b) 313 Hz; c) 440 Hz; d) 616 Hz.

La solución correcta es la c).

Si la cuerda está fija por los dos extremos, su longitud es igual a un múltiplo de medias longitudes de onda.

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$



Como $v = \lambda \cdot \nu$, y como para frecuencia fundamental $n = 1$, resulta que:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2 \cdot L}{n}} = \frac{616 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,7 \text{ m}} = 440 \text{ Hz}$$

8. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) En una onda estacionaria hay puntos del medio que están permanentemente en reposo. b) La frecuencia percibida disminuye al acercarse el observador al foco. c) La longitud de una cuerda fija por los dos extremos es un múltiplo impar de la cuarta parte de longitud de onda de la onda estacionaria formada. d) Cuando una onda accede a un medio por el que se propaga más despacio, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia.

a) Verdadero.

Los nodos están permanentemente en reposo.

b) Falso.

Al acercarse el observador al foco se reciben más ondas que si estuviera en reposo y por ello aumenta la frecuencia percibida.

c) Falso.

En los extremos de una cuerda fija tienen que formarse dos nodos por lo que: $L = n \cdot \lambda/2$. La longitud de la cuerda es un múltiplo de la semilongitud de onda.

d) Falso.

Aplicando la ley de Snell: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}$, si $v_1 > v_2 \Rightarrow \text{sen } i > \text{sen } r$, entonces $i > r$ y la dirección de propagación de la onda se acerca a la recta normal.

9. Completa la frase: La difracción es _____ que experimenta una onda cuando se interpone en su camino _____, cuyo tamaño es del mismo orden que _____.

La difracción es la distorsión que experimenta una onda cuando se interpone en su camino un orificio, o un obstáculo, cuyo tamaño es del mismo orden que el de su longitud de onda.

10. La sirena de un vehículo emite un sonido con una frecuencia de 500 Hz. Si el vehículo se acerca con una velocidad de 108 km/h a un observador en reposo, la frecuencia sonora que percibe éste es: a) 608 Hz; b) 392 Hz; c) 548 Hz; d) 108 Hz.

La solución correcta es la c).

La velocidad del vehículo es: $v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$.

El observador percibe un sonido de una frecuencia mayor cuando se acerca el automóvil. Aplicando la ecuación general del efecto Doppler, se tiene que la velocidad del observador es igual a cero y la del vehículo + 30 m/s.

$$v' = v \frac{v + v_{\text{observador}}}{v - v_{\text{foco}}} = 500 \text{ Hz} \frac{340 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - (+ 30 \text{ m/s})} = 548 \text{ Hz}$$

Física

Unidad didáctica 6
Campo eléctrico

SOLUCIONES UNIDAD 6. CAMPO ELÉCTRICO

CUESTIONES INICIALES

1) **Por qué razón unos trocitos de papel se adhieren a un bolígrafo previamente frotado en la manga de un jersey?**

La varilla electrizada crea un campo eléctrico que al actuar sobre las moléculas polares del papel, separa sus cargas y las alinea. Como la alineación se opone al campo externo, en la zona del papel próxima a la varilla aparece una carga inducida de signo contrario al de ésta. A continuación la atracción de cargas de distinto signo es la responsable de que los trozos de papel ligeros se acerquen a la varilla.

2. **La carga eléctrica es una propiedad de la materia. Sin embargo, cuando interactúan dos objetos extensos no se tiene en cuenta la interacción eléctrica, ¿por qué?**

La materia considerada macroscópicamente es eléctricamente neutra. Por ello, la interacción eléctrica entre dos objetos es igual a cero.

3. **¿Cuál es la primera diferencia que se encuentra entre la interacción entre cargas eléctricas y la interacción entre masas?**

La interacción entre masas es siempre atractiva. Sin embargo la interacción entre cargas eléctricas puede ser atractiva o repulsiva, dependiendo del signo de las mismas.

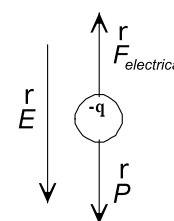
ACTIVIDADES FINALES

1. **Una partícula que tiene una masa de 1,5 g y una carga eléctrica de $-24 \mu\text{C}$ está en equilibrio en el seno de un campo eléctrico vertical. Calcula el módulo y el sentido del campo eléctrico.**

Sobre la partícula actúan su peso y la fuerza eléctrica. Como se encuentra en reposo, entonces la fuerza eléctrica tiene sentido contrario al peso. La fuerza eléctrica que actúa sobre las cargas negativas tiene sentido contrario al campo, por tanto el campo eléctrico tiene el mismo sentido que el peso.

$$\sum F_y = 0; F_{\text{eléctrica}} + P = 0; F_{\text{eléctrica}} = P; |q| \cdot E = m \cdot g$$

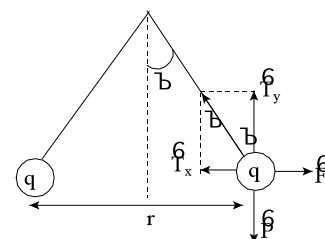
$$\text{Sustituyendo: } 24 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot E = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow E = 612,5 \text{ N/C}$$



2. **En los extremos de dos hilos de masa despreciable y longitud $L = 1 \text{ m}$ están sujetas dos pequeñas esferas de masa $m = 10 \text{ g}$ y carga q . Los hilos forman un ángulo de 30° con la vertical. Dibuja el diagrama de las fuerzas que actúan sobre las esferas y determine el valor de la carga q . Si se duplica el valor de las cargas, pasando a valer $2q$, ¿qué valor deben tener las masas para que no se modifique el ángulo de equilibrio de 30° ?**

Sobre cada una de las bolas actúan su peso, la tensión del hilo y la fuerza eléctrica. Aplicando la condición de equilibrio de traslación se tiene que:

$$\sum F = 0; \begin{cases} T_x = F_{\text{eléctrica}} \\ T_y = P \end{cases}, \begin{cases} T \cdot \sin \varphi = \frac{K \cdot |q| \cdot |q|}{r^2} \\ T \cdot \cos \varphi = m \cdot g \end{cases}$$



$$\text{Dividiendo: } \text{tag } \varphi = \frac{K \cdot q^2}{m \cdot g \cdot r^2} \Rightarrow q = r \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \text{tag } \varphi}{K}}$$

Si la longitud del hilo es L y como cada bola se separa de la vertical un ángulo φ , la distancia entre ellas es: $r = 2 \cdot L \cdot \text{sen } \varphi$. Sustituyendo:

$$q = 2 \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \text{tag } 30^\circ}{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Las dos cargas tienen el mismo signo, positivo o negativo.

Utilizando la ecuación de la tangente del ángulo en la situación inicial y en la modificada que se denota como prima y como la distancia entre las cargas es la misma en los dos casos, resulta que:

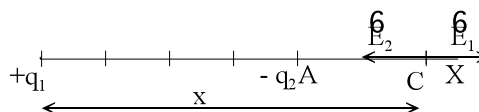
$$\left. \begin{array}{l} \text{tag } \varphi = \frac{K \cdot q^2}{m \cdot g \cdot r^2} \\ \text{tag } \varphi = \frac{K \cdot q'^2}{m' \cdot g \cdot r^2} \end{array} \right\} 1 = \frac{q^2 \cdot m'}{m \cdot q'^2} \Rightarrow m' \cdot q^2 = m \cdot q'^2$$

$$\text{Por tanto: } m' \cdot q^2 = m \cdot (2 \cdot q)^2 \quad m' = 4 \cdot m$$

Las masas de las partículas se deben multiplicar por cuatro.

3. En el origen de coordenadas hay una carga eléctrica $q_1 = +27 \text{ nC}$ y en el punto A (4, 0) otra carga eléctrica $q_2 = -3 \text{ nC}$. a) ¿Hay algún punto del espacio en el que se anule el campo eléctrico? Determinalo.

De la situación de las cargas se deduce que el campo eléctrico se anulará en algún punto de la recta que las une, es decir, en el eje X.



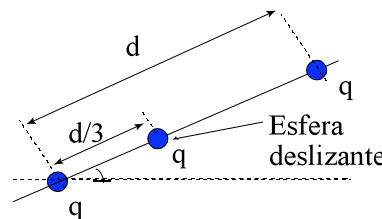
Sea x la coordenada de un punto C en el que se anula el campo. Los módulos de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas deben ser iguales.

$$E_1 = E_2; \frac{K \cdot q_1}{r_1^2} = \frac{K \cdot q_2}{r_2^2}; \frac{27 \text{ nC}}{x^2} = \frac{3 \text{ nC}}{(x - 4)^2};$$

$$9(x - 4)^2 = x^2; 3Ax - 12 = x \quad Y \quad x = 6 \text{ m}$$

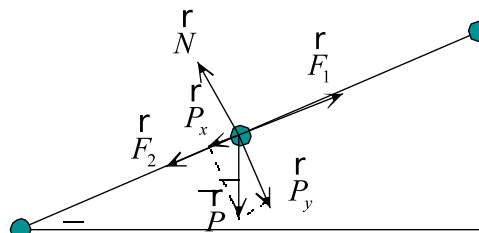
El punto C en el que se anula el campo eléctrico tiene de coordenadas C (6, 0)

4. Tres pequeñas esferas metálicas provistas de un orificio central se engarzan en un hilo de fibra aislante. Las dos esferas de los extremos se fijan a la fibra separadas una distancia $d = 50 \text{ cm}$, mientras que la intermedia puede desplazarse libremente entre ambas a lo largo del hilo. La masa de dichas esferas es $m = 30 \text{ g}$ y se cargan con la misma carga $q = 1 \mu\text{C}$. Calcula la posición de equilibrio de la esfera intermedia en el caso de que la fibra se coloque horizontalmente. Si se coloca colocamos ahora el hilo de manera que forme un cierto ángulo $\alpha > 0$ con la horizontal se observa que la esfera intermedia se coloca a una distancia $d/3$ de la inferior tal como indica la figura. Calcule el valor del ángulo α .



Si la fibra está horizontal la esfera intermedia está en equilibrio cuando se coloque a la misma distancia de las otras dos, es decir, cuando está situada en el punto medio del segmento que une a las dos esferas de los extremos.

Como las bolitas tienen cargas del mismo signo, se repelen unas de las otras. Sobre la bolita intermedia actúa: su peso, la fuerza normal con que actúa la fibra, la fuerza con que le repele la carga inferior y la fuerza con que lo hace la bola superior. En estas condiciones la bolita está en equilibrio.



Se elige un sistema de referencia con el eje X paralelo a la dirección del hilo y el eje Y la perpendicular a dicho hilo. Descomponiendo el peso en componentes y aplicando las condiciones de equilibrio, resulta que:

$$\sum \vec{F}_x = 0; \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P}_x = 0; F_1 = F_2 + P_x;$$

Aplicando la ley de Coulomb: $\frac{K \cdot |q|^2}{(d/3)^2} - \frac{K \cdot |q|^2}{(2d/3)^2} = m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha$

Operando: $\frac{9K \cdot |q|^2}{d^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{27K \cdot |q|^2}{4 \cdot d^2 \cdot m \cdot g}$

Sustituyendo: $\alpha = \text{arc sen} \frac{27 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2}{4 \cdot (0,5 \text{ m})^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 55,74^\circ$

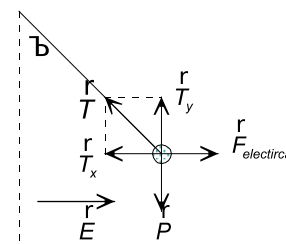
5. Una partícula, que tiene una masa de 0,5 g y una carga de 3,6 μC cuelga de un hilo en el seno de un campo eléctrico horizontal de módulo 800 N/C. Calcula el ángulo que forma el hilo con la vertical.

Sobre la bolita actúan su peso, la fuerza eléctrica y la tensión del hilo. Eligiendo un sistema de referencia con el eje X la horizontal y el eje Y la vertical y aplicando la condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_x = 0; \vec{T}_x + \vec{F}_{\text{eléctrica}} = 0; T_x = F_{\text{eléctrica}} \Rightarrow T \cdot A \cdot \text{sen} \theta = |q| \cdot A \cdot E$$

$$\sum \vec{F}_y = 0; \vec{T}_y + \vec{P} = 0; 0 \cdot T_y = P \Rightarrow T \cdot A \cdot \text{cos} \theta = m \cdot A \cdot g$$

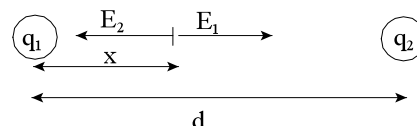
Dividiendo: $\text{tg} \theta = \frac{|q| \cdot E}{m \cdot g} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 800 \text{ N/C}}{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \theta = 30,4^\circ$



6. Dos cargas de + 1 μC y + 4 μC están fijas en sendos puntos que distan 6 cm. ¿Dónde podría dejarse libremente una carga de + 3 μC para que permaneciera en reposo? Calcula la energía potencial de esa carga. Si se desplaza la carga de + 3 μC perpendicularmente a la línea que une a las otras dos, ¿volverá a la posición de equilibrio? Dibuja las fuerzas que actúan.

a) La carga de + 3 μC permanece en reposo en aquellos puntos en los que el campo sea nulo. Como las dos cargas fijas tienen el mismo signo, el campo eléctrico es nulo en algún punto situado en el segmento que une las cargas.

Supongamos que este punto P está situado a una distancia x de la carga $q_1 = + 1 \mu\text{C}$. En este punto los módulos de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas fijas son iguales.



$$E_1 = E_2; K \frac{q_1}{r_1^2} = K \frac{q_2}{r_2^2}; \frac{1 \mu\text{C}}{x^2} = \frac{4 \mu\text{C}}{(6-x)^2}$$

Operando: $6 - x = 2x \Rightarrow x = 2 \text{ m}$

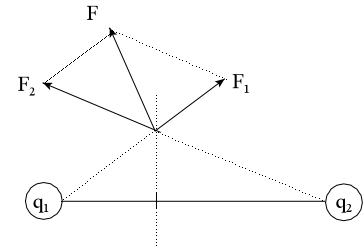
La carga permanece en reposo en el segmento que las une y a 2 m de la de 1 μC.

b) La energía potencial asociada a esa carga es, la suma de las energías potenciales asociadas a la presencia de cada una de las otras dos cargas.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \kappa \frac{q_1 q_3}{r_1} + \kappa \frac{q_2 q_3}{r_2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{C} \left[\frac{1 \cdot 10^{-6} \text{C}}{2 \text{m}} + \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{C}}{4 \text{m}} \right] = 40,5 \cdot 10^{-3} \text{J}$$

c) Al desplazar la carga perpendicularmente a la posición de equilibrio, actúa una fuerza sobre la carga que tiende a alejarla de la posición de las otras dos.



Para conocer su módulo, dirección y sentido, habría que calcular las componentes de cada una de las fuerzas y sumarlas vectorialmente. El dibujo es simplemente esquemático.

7. Si el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ¿pueden existir cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razone la respuesta.

Según la ley de Gauss el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada en dicha superficie: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon}$

Por tanto, dentro de la superficie pueden existir cargas eléctricas, pero de suma de las positivas y de las negativas tiene que ser igual a cero.

8. Aplicando el teorema de Gauss obtén razonadamente el flujo del campo eléctrico sobre la superficie de un cubo de lado a en los siguientes casos: a) Una carga q se coloca en el centro del cubo. b) La misma carga q se coloca en un punto diferente del centro pero dentro del cubo. c) La misma carga q se coloca en un punto fuera del cubo.

La ley de Gauss dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada en dicha superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon}$$

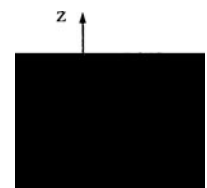
Un cubo es una superficie cerrada y el flujo del campo eléctrico a través de sus caras no depende del lugar en el que se sitúen las cargas en su interior. Por tanto, en los casos a y b el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie del cubo es el mismo.

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon}$$

En el caso c el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie del cubo es igual a cero, ya que la carga está situada en el exterior. Todas las mismas líneas de campo eléctrico que penetran en la superficie del cubo salen de ella.

$$\Phi_E = 0$$

9. Un cubo de lado 0,3 m está colocado con un vértice en el origen de coordenadas, como se muestra la figura. Se encuentra en el seno de un campo eléctrico no uniforme, que viene dado por $\vec{E} = (-5x \hat{i} + 3zk \hat{k}) \text{N/C}$. Halla el flujo eléctrico a través de las seis caras del cubo. Determina la carga eléctrica total en el interior del cubo. Nota: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$



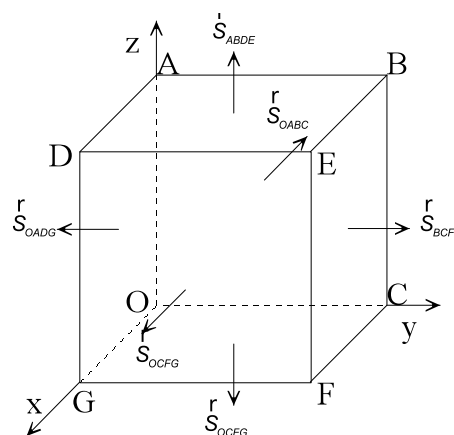
Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

a) Se define flujo de un campo eléctrico a través de una superficie

$$\text{como: } \Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \varphi$$

Las caras del cubo tienen de módulo $S = 0,09 \text{ m}^2$ y sus expresiones vectoriales son:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{ABDE} &= S \cdot \vec{k}; & \vec{S}_{OCFG} &= S \cdot (-\vec{k}) \\ \vec{S}_{EBCF} &= S \cdot \vec{j}; & \vec{S}_{OGDA} &= S \cdot (-\vec{j}) \\ \vec{S}_{DEFG} &= S \cdot \vec{i}; & \vec{S}_{OABC} &= S \cdot (-\vec{i}) \end{aligned}$$



A través de las caras OABC y DEFG solamente atraviesa el flujo del campo eléctrico debido a su componente x ($\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$).

$$\Phi_{OABC} = (-5 \cdot 0 \cdot \vec{i}) \cdot \frac{N}{C} \cdot 0,09 \cdot (-\vec{i}) \text{ m}^2 = 0 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C};$$

$$\Phi_{DEFG} = (-5 \cdot 0,3 \cdot \vec{i}) \cdot \frac{N}{C} \cdot 0,09 \cdot \vec{i} \text{ m}^2 = -0,135 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C}$$

El flujo del campo eléctrico a través de las caras OADG y BCFE es igual a cero, y que el campo no tienen componente a lo largo del eje Y ($\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$)

A través de las caras ABED y OCFG solamente atraviesa el flujo del campo eléctrico debido a su componente z ($\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$).

$$\Phi_{OCFG} = 3 \cdot 0 \cdot \vec{k} \cdot \frac{N}{C} \cdot 0,09 \cdot (-\vec{k}) \text{ m}^2 = 0 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C}; \quad \Phi_{BEDA} = 3 \cdot 0,3 \cdot \vec{k} \cdot \frac{N}{C} \cdot 0,09 \cdot \vec{k} \text{ m}^2 = 0,081 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C}$$

El flujo total es igual a la suma de los flujos que pasan por todas las caras:

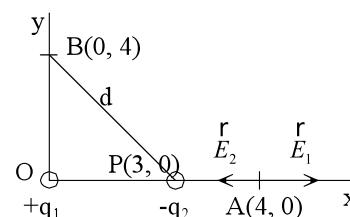
$$\Phi = -0,135 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C} + 0,081 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C} = -0,054 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C}$$

b) La ley de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada en dicha superficie.

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon} \Rightarrow Q_{\text{interior}} = \Phi_E \cdot \epsilon = -0,054 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot \text{m}^2} = -4,8 \cdot 10^{-13} C$$

10. Una carga positiva, $q_1 = 8A10^{-9} C$, está fija en el origen de coordenadas, mientras que otra carga, $q_2 = -10^{-9} C$, se halla, también fija, en el punto (3, 0), estando todas las coordenadas expresadas en m. Determina el campo eléctrico, debido a ambas cargas, en el punto A (4, 0) y el trabajo que las fuerzas del campo realizan para desplazar una carga puntual $q = -2A10^{-9} C$, desde A hasta el punto B (0, 4). Comente el resultado que obtenga.

a) Una carga puntual genera un campo eléctrico en un punto del espacio de módulo $E = K \frac{|q|}{r^2}$, de dirección la recta que une la carga con el punto y de sentido alejándose de la carga si es positiva y hacia ella si es negativa.



La expresión vectorial de los campos que crean cada una de las cargas eléctricas en el punto A son:

$$\vec{E}_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C^2} \frac{8 \cdot 10^{-9} C}{(4\text{m})^2} \vec{i} = 4,5 \frac{N}{C} \vec{i}; \quad \vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot \text{m}^2}{C^2} \frac{10^{-9} C}{(1\text{m})^2} (-\vec{i}) = -9 \frac{N}{C} \vec{i}$$

Aplicando el principio de superposición, el campo total es la suma vectorial de los dos campos.

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 4,5 \cdot \vec{i} N/C - 9,5 \cdot \vec{i} N/C = -4,5 \cdot \vec{i} N/C$$

b) La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, el trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar una carga es igual a la variación de la energía potencial eléctrica asociadas a las dos distribuciones de las cargas cambiada de signo. Para determinar ese trabajo se calcula el potencial eléctrico en los puntos A y B en ausencia de la carga que se traslada y posteriormente la variación de la energía potencial.

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A)$$

El potencial eléctrico en un punto es iguala a la suma de los potenciales eléctricos que crean cada una de las cargas.

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = \frac{K \cdot q_1}{r_{1A}} + \frac{K \cdot q_2}{r_{2A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{8 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{4 \text{ m}} + \frac{-10^{-9} \text{ C}}{1 \text{ m}} \right) = 9 \text{ V}$$

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = \frac{K \cdot q_1}{r_{1B}} + \frac{K \cdot q_2}{r_{2B}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{8 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{4 \text{ m}} + \frac{-10^{-9} \text{ C}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 7,2 \text{ V}$$

El trabajo que se intercambia en el proceso es:

$$W_{A \rightarrow B} = -q \cdot (V_B - V_A) = -(-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}) \cdot (7,2 \text{ V} - 9 \text{ V}) = -3,6 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

El proceso no es espontáneo, un agente externo realiza un trabajo para trasladar a la carga de signo negativo desde el punto A hasta el B que se almacena en forma de energía potencial eléctrica.

11. Una partícula que tiene una carga eléctrica de 1 μC está situada en el origen de coordenadas. Calcula el trabajo realizado al llevar otra partícula de carga eléctrica 10^{-8} C desde el infinito hasta un punto situado a 30 cm de la primera carga.

La energía potencial eléctrica asociada a las cargas separadas es igual a cero: $E_{p, \infty} = 0$

Y cuando está a 30 cm de distancia es:

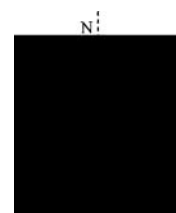
$$E_{p \text{ final}} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 10^{-8} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{\text{Feléctrica}} = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ final}} - E_{p \text{ inicial}}) = -(3 \cdot 10^{-4} \text{ J} - 0 \text{ J}) = -3 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

El proceso no es espontáneo como corresponde a acercar cargas eléctricas del mismo signo.

12. Sobre la circunferencia máxima de una esfera de radio $R = 10 \text{ m}$ están colocadas equidistantes entre sí seis cargas positivas iguales y de valor $q = 2 \mu\text{C}$. Calcula el campo y el potencial debidos al sistema de cargas en uno cualquiera de los polos (puntos N y S) y en el centro O de la esfera.

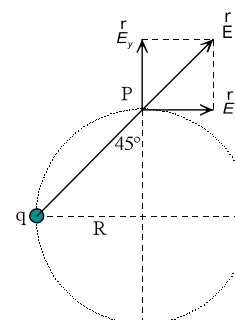


La distancia de cada carga a los polos es: $r = \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$

a) Todas las cargas generan en los polos un campo del mismo módulo.

$$E = \frac{K \cdot |q|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(10 \cdot \sqrt{2} \text{ m})^2} = 90 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en el polo N, el eje Y la dirección de los polos y el eje X una perpendicular. Las componentes en el eje X se anulan por simetría y las componentes en Y se refuerzan.



Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

El campo total tiene la dirección del eje que une los polos y su sentido es hacia el exterior de la esfera.

$$E_{\text{polo}} = 6 \cdot E \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot 90 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 270 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

El potencial eléctrico en el polo es igual a la suma de los potenciales eléctricos generados por cada carga.

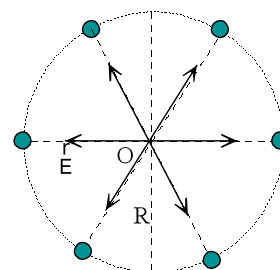
$$V_{\text{polo}} = 6 \cdot V = 6 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = 6 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{C}}{10 \cdot \sqrt{2} \text{m}} = 54 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{2} \text{V}$$

b) El campo eléctrico en el centro de la esfera es igual a cero, ya que por simetría se anulan los de cada dos cargas eléctricas opuestas.

$$E_{\text{centro}} = 0$$

El potencial eléctrico en el centro es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas eléctricas.

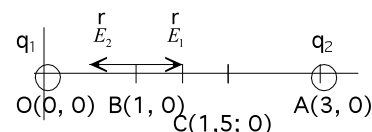
$$V_{\text{centro}} = 6 \cdot V = 6 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = 6 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{C}}{10 \text{m}} = 10800 \text{V}$$



13. Dos cargas positivas q_1 y q_2 se encuentran situadas en los puntos de coordenadas (0,0) y (3,0) respectivamente. Sabiendo que el campo eléctrico es nulo en el punto (1,0) y que el potencial electrostático en el punto intermedio entre ambas vale $9 \cdot 10^4 \text{V}$, determina el valor de dichas cargas. Las coordenadas están expresadas en metros.

a) Los módulos de los campos eléctricos son iguales en el punto en el que se anula el campo.

$$E_1 = E_2; \frac{K \cdot |q_1|}{r_1^2} = \frac{K \cdot |q_2|}{r_2^2}; \frac{q_1}{(1\text{m})^2} = \frac{q_2}{(2\text{m})^2}$$



El potencial eléctrico en un punto es igual a la suma de los potenciales eléctricos generados por cada una de las cargas.

$$V_C = V_{1C} + V_{2C} = \frac{K \cdot q_1}{r_1} + \frac{K \cdot q_2}{r_2}; 9 \cdot 10^4 \text{V} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot q_1}{1,5\text{m}} + \frac{9 \cdot 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot q_2}{1,5\text{m}}$$

Operando en las dos ecuaciones se tiene el sistema:

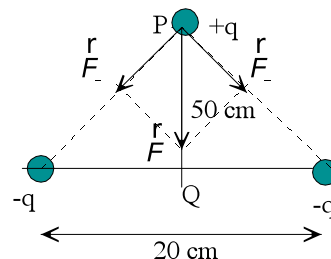
$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot q_1 = q_2 \\ q_1 + q_2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \end{array} \right\} \Rightarrow q_1 = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{C} \text{ y } q_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{C}$$

14. Dos cargas puntuales de $-10^{-3} \mu\text{C}$ se encuentran sobre el eje de abscisas a una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm de la vertical del punto medio que une las cargas anteriores se coloca una partícula de masa 1 g y con una carga de $10^{-3} \mu\text{C}$. Calcula la velocidad de esta partícula cuando pasa por en punto medio del segmento que une las dos primeras cargas.

Sea P el punto donde está inicialmente la carga positiva y Q el punto medio del segmento que une las cargas negativas.

La fuerza resultante que actúa sobre la carga positiva tiene la dirección de la mediatriz del segmento que une las cargas y sentido hacia el punto Q.

El potencial eléctrico en los puntos P y Q en ausencia de la carga positiva es:



$$V_P = 2 \cdot K \frac{q}{r_P} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \frac{-10^{-3} \cdot 10^{-6} C}{\sqrt{(0,1m)^2 + (0,5m)^2}} = -35,3 V$$

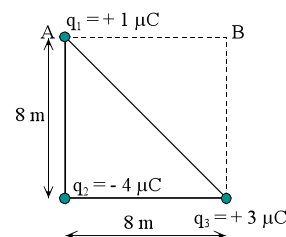
$$V_Q = 2 \cdot K \frac{q}{r_Q} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \frac{-10^{-3} \cdot 10^{-6} C}{0,1m} = -180 V$$

Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \Delta E_c = -\Delta E_p; \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -q \cdot (\Delta V) = -q \cdot (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})$$

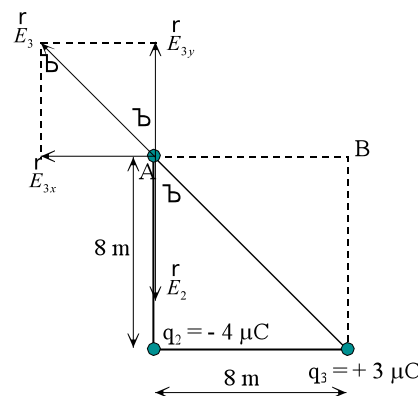
$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot v^2 = -10^{-3} \cdot 10^{-6} C \cdot (-180 V - (-35,5 V)) \Rightarrow v = 0,017 \text{ m/s}$$

15. Se tienen tres cargas situadas cada una de ellas en tres de los vértices de un cuadrado de 8 m de lado tal como indica la figura. Calcula la fuerza resultante (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre la carga situada en el vértice A y el trabajo necesario para trasladar la carga situada en el vértice A hasta el punto B. Interpreta el signo obtenido.



En primer lugar se calcula el campo eléctrico que crean en el punto A las cargas q_2 y q_3 , para posteriormente calcular la fuerza que actúa sobre cualquier carga colocada en ese lugar.

Se elige un sistema de referencia con el eje X conteniendo al segmento que une las cargas q_2 y q_3 y el eje Y conteniendo al segmento que une la carga q_2 con el punto A.



Cálculo del módulo del campo eléctrico que genera la carga q_2 en el punto A.

$$E_2 = \frac{K \cdot |q_2|}{r_2^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(8\text{m})^2} = 5,625 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\text{Vectorialmente: } \vec{E}_2 = -5,625 \cdot 10^2 \cdot \hat{j} \text{ N/C}$$

Cálculo del módulo del campo eléctrico que genera la carga q_3 en el punto A.

$$E_3 = \frac{K \cdot |q_3|}{r_2^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{\left(\sqrt{(8\text{m})^2 + (8\text{m})^2}\right)^2} = 2,109 \cdot 10^2 \text{ N/C}$$

Las componentes de este campo eléctrico en el sistema de referencia elegido son:

$$E_{3x} = E_3 \cdot \sin \varphi = 2,109 \cdot 10^2 \text{ N/C} \cdot \frac{8\text{m}}{\sqrt{(8\text{m})^2 + (8\text{m})^2}} = 1,491 \cdot 10^2 \text{ N/C}$$

$$E_{3y} = E_3 \cdot \cos \varphi = 2,109 \cdot 10^2 \text{ N/C} \cdot \frac{8\text{m}}{\sqrt{(8\text{m})^2 + (8\text{m})^2}} = 1,491 \cdot 10^2 \text{ N/C}$$

$$\text{Cuyas expresiones vectoriales son: } \vec{E}_3 = (1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{i} + 1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{j}) \text{ N/C}$$

Aplicando el principio de superposición el campo total es la suma vectorial de todos los campos.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -5,625 \cdot 10^2 \cdot \hat{j} \text{ N/C} + (1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{i} + 1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{j}) \text{ N/C} = (-1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{i} - 4,134 \cdot 10^2 \cdot \hat{j}) \text{ N/C}$$

La fuerza que actúa sobre la carga q_1 colocada en A es:

$$\vec{F}_A = q \cdot \vec{E}_A = 1 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot (-1,491 \cdot 10^2 \cdot \hat{i} - 4,134 \cdot 10^2 \cdot \hat{j}) \text{ N/C} = (-1,491 \cdot 10^{-4} \cdot \hat{i} - 4,134 \cdot 10^{-4} \cdot \hat{j}) \text{ N}$$

Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

El trabajo para trasladar la carga q_1 desde el punto A hasta el B es igual a la variación de la energía potencial eléctrica asociada a las dos distribuciones cambiada de signo. Para determinar ese trabajo se calcula al potencial eléctrico en los puntos A y B en ausencia de la carga q_1 y posteriormente la variación de la energía potencial.

El potencial eléctrico en el punto es igual a la suma de los potenciales eléctricos que crean en ese punto cada una de las vargas. Los potenciales eléctricos en los puntos A y B debidos a las cargas eléctricas q_2 y q_3 son:

$$V_A = \frac{K \cdot q_2}{r_{A2}} + \frac{K \cdot q_3}{r_{A3}} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \left(\frac{(-4 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{8 \text{ m}} + \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{\sqrt{(8 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}} \right) = -2,113 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{K \cdot q_2}{r_{B2}} + \frac{K \cdot q_3}{r_{B3}} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \left(\frac{(-4 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{\sqrt{(8 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}} + \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{8 \text{ m}} \right) = 1,930 \cdot 10^2 \text{ V}$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A) = -1 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot (1,93 \cdot 10^2 \text{ V} - (-2,113 \cdot 10^3 \text{ V})) = -2,306 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

El proceso no es espontáneo, un agente externo realiza un trabajo para trasladar la carga eléctrica q_1 desde el punto A hasta el B, que se emplea en aumentar la energía potencial de la distribución final respecto de la inicial.

16. Calcula la velocidad que adquiere una partícula α después de ser acelerada por una diferencia de potencial de 100 000 V. Datos: $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $q_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

El campo eléctrico es conservativo, por lo que aplicando la ley de conservación de la energía mecánica:

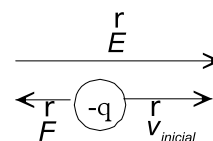
$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \Delta E_c = -\Delta E_p; \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -q \cdot \Delta V$$

Como las partículas positivas se mueven de forma espontánea hacia potenciales decrecientes, resulta que:

$$\frac{1}{2} \cdot 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot v^2 = -3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (-100\,000 \text{ V}) \Rightarrow v = 3,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

17. Un electrón, que lleva una velocidad de $6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, penetra en un campo eléctrico uniforme y su velocidad se anula después de recorrer una distancia de 20 cm. Calcula el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico.

Como el electrón se frena, la fuerza eléctrica lleva la dirección de la velocidad inicial y sentido contrario. Por tanto, el campo eléctrico tiene la misma dirección y sentido que la velocidad inicial.



Como ya se ha deducido la dirección y sentido del campo, se trabajará en valores absolutos. Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica: $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = |q \cdot \Delta V|; \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (6 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot |\Delta V| \Rightarrow |\Delta V| = 102,4 \text{ V}$$

$$|\Delta V| = |E \cdot \Delta r|; 102,4 \text{ V} = E \cdot 0,2 \text{ m} \Rightarrow E = 512 \text{ N/C}$$

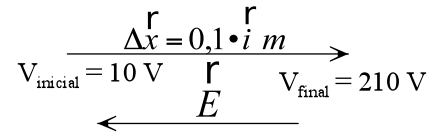
18. En una región del espacio hay un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo de eje X. Si trasladamos una carga $q = +0,5 \text{ C}$ desde un punto cuyo potencial es de 10 V a otro punto situado 10 cm a su derecha, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es $W = -100 \text{ J}$. Calcula el potencial en el segundo punto y el valor del vector campo eléctrico en dicha región. ¿Qué significado físico tiene el que el trabajo que realiza la fuerza eléctrica tenga signo negativo?

La fuerza eléctrica es conservativa, por lo que aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{F \text{ eléctrica}} = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})$$

Sustituyendo: $-100 \text{ J} = -0,5 \text{ C} \cdot (V_{\text{final}} - 10 \text{ V}) \Rightarrow V_{\text{final}} = 210 \text{ V}$

El campo eléctrico tiene la dirección y sentido de los potenciales decrecientes. En efecto aplicando la relación entre el campo y el potencial y como el desplazamiento $\Delta \vec{x} = 0,1 \cdot \vec{i} \text{ m}$ tiene la misma dirección que el campo eléctrico y como éste es uniforme ya que la variación del potencial con la distancia es constante, se tiene que:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}}{\Delta x} = -\frac{210 \text{ V} - 10 \text{ V}}{0,1 \text{ m}} = -2000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$


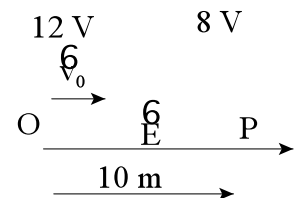
$$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{210 \text{ V} - 10 \text{ V}}{0,1 \text{ m}} = -2000 \cdot \vec{i} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Las cargas positivas se trasladan de forma espontánea en el sentido del campo, por ello para trasladar una carga positiva en sentido contrario al campo un agente externo tiene que realizar un trabajo, el trabajo de la fuerza eléctrica es negativo, contra las fuerzas del campo que se emplea en aumentar la energía potencial asociada a la carga eléctrica dentro del campo.

19. En una región del espacio hay un campo eléctrico de dirección la del eje de las abscisas. Si al origen de coordenadas se le asigna un potencial de 12 V, entonces el punto P situado a 10 m del origen tiene un potencial de 8 V. Determina la expresión vectorial del campo eléctrico. Si en el origen de coordenadas se lanza un electrón con una velocidad inicial de $1,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ y de dirección y sentido los del citado eje, determina: la energía cinética del electrón, en el origen, expresada en eV y la velocidad con la que llega al punto P. Comenta el resultado obtenido. Datos: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

El campo tiene el sentido de potenciales decrecientes. Al avanzar según el eje de las abscisas las líneas del campo y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido. Por tanto, el módulo del campo eléctrico es:

$$E \cdot \cos \varphi = -\frac{\Delta V}{\Delta r}; E = -\frac{8 \text{ V} - 12 \text{ V}}{10 \text{ m}} = 0,4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



La expresión vectorial del campo es: $\vec{E} = 0,4 \cdot \vec{i} \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Recordando que: $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, se tiene la energía cinética del electrón en el origen de coordenadas es:

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,19 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 = 6,44 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Que expresada en eV: $E_c = 6,44 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 4 \text{ eV}$

El electrón se frena al entrar en la región dominada por el campo eléctrico. La fuerza eléctrica que actúa sobre el electrón es conservativa, por lo que se aplica la ley de la conservación de la energía mecánica.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; E_{c,P} - E_{c,O} = -\Delta E_p = -q_e \Delta V$$

Operando: $E_{c,P} - 2 m_e v_0^2 = -q_e \Delta V$

La carga del electrón tiene signo negativo.

$$E_{c,P} = 2 m_e v_0^2 - (-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (-4 \text{ V}) = 0$$

El electrón llega al punto considerado con velocidad igual a cero.

Comentario: Si el electrón sale del origen con una energía cinética de 4 eV y se frena con una

Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

diferencia de potencial de 4 V, lo lógico es que se detenga. La variación de su energía potencial ha sido de 4 eV, que se obtiene a costa de disminuir su energía cinética. A continuación el electrón regresa por el mismo camino y pasa por el origen de coordenadas con una velocidad igual a la inicial, pero con sentido contrario. Se transforma la energía potencial en energía cinética.

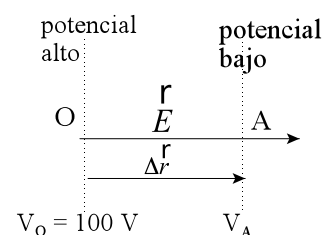
20. En una región del espacio hay un campo eléctrico constante de módulo 500 N/C, de dirección paralela al eje X y sentido hacia la derecha: $\vec{E} = 500 \hat{i}$ N/C, si al origen de coordenadas O (0, 0) le asignamos un potencial de 100 V, determina el potencial en el punto A (4 m, 0). Calcula el módulo, dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre un electrón colocado en el punto A (4 m, 0). Si se deja en libertad al electrón en el punto A (4 m, 0), calcula su velocidad cuando pase por el origen de coordenadas. Datos: $m_{\text{electrón}} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

a) Aplicando la relación entre el campo y el potencial, resulta que:

$$\Delta V = V_A - V_O = - \vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$$

Sustituyendo: $V_A - 100 \text{ V} = - 500 \cdot \hat{i} \text{ N/C} \cdot 4 \cdot \hat{i} \text{ m}$

Despejando: $V_A = - 1 900 \text{ V}$



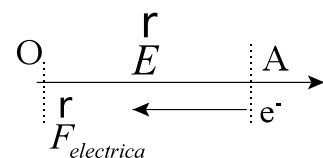
b) Aplicando la definición de campo eléctrico:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 500 \cdot \hat{i} \text{ N/C} = -8 \cdot 10^{-17} \cdot \hat{i} \text{ N}$$

c) Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica:

$$2 \text{ A m A } v^2 = |q| \text{ A } |\Delta V| \text{ Y}$$

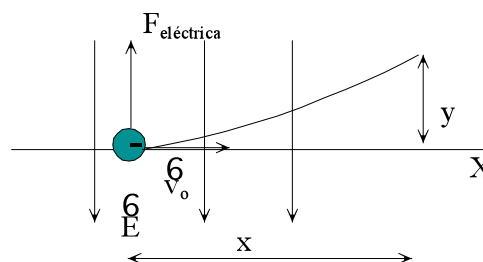
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot |q| \cdot |\Delta V|}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2 000 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 2,65 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$



21. Un electrón que lleva una velocidad de $1 \cdot 10^6$ m/s incide perpendicularmente en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E} = - 1000 \cdot \hat{j}$ N/C. Representa mediante un esquema la acción de este campo eléctrico sobre los electrones y dibuja su posible trayectoria indicando si se desvían por encima o por debajo de la dirección inicial del electrón. Deduce la ecuación de la trayectoria y calcula la desviación vertical del electrón después de recorrer 15 cm horizontalmente. $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Sobre estos electrones actúa una fuerza perpendicular a su trayectoria y sentido opuesto al del campo eléctrico. Por tanto, los electrones están afectados de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical uniformemente acelerado.

La composición de estos movimientos hace que se desvíen por encima del eje X siguiendo una trayectoria parabólica.



d) Si se elige como origen del sistema de referencia el punto del eje X en el que comienza a actuar al campo eléctrico vertical, la posición horizontal y vertical del electrón en cualquier instante es:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{aligned} \right\}; t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m \cdot v_0^2} x^2; y = \text{constante} \cdot x^2; \text{ Ecuación de una parábola.}$$

Sustituyendo: $y = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ N/C}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2} (0,15 \text{ m})^2 = 2 \text{ m}$

INVESTIGA**1. ¿Por qué la banda transportadora y el rodillo inferior deben construirse con materiales aislantes diferentes?**

Los materiales de la banda transportadora y del rodillo inferior deben ser distintos para que puedan electrizar por fricción. La combinación de ambos materiales permite acumular cargas eléctricas positivas o negativas en la esfera metálica.

2. ¿En qué principio de basa la acumulación de cargas eléctricas en la esfera conductora exterior?

En un conductor metálico la carga eléctrica se acumula en su superficie y por tanto el campo eléctrico en su interior es igual a cero. Por ello no se produce una repulsión entre las cargas eléctricas depositadas en la esfera metálica y las que se transportan a través de los alambres metálicos superiores.

3. ¿Cuál es la misión de los hilos metálicos colocados en las proximidades de las zonas de la banda transportadora que tocan a los rodillos?

Los hilos metálicos actúan como diminutos pararrayos por los que se produce una descarga eléctrica que facilitan el paso de la carga eléctrica desde tierra a la banda transportadora y de esta a la esfera conductora.

TEST DE EVALUACIÓN**1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La interacción entre cargas eléctricas no depende del medio en el que se coloquen. b) El trabajo que realiza la fuerza eléctrica depende de la trayectoria. c) Las líneas de campo eléctrico son tangentes a las superficies equipotenciales. d) El potencial eléctrico en un punto puede ser positivo o negativo.**

a) Falso.

La interacción entre cargas eléctricas depende, a través de la constante de Coulomb K , del medio en el que se coloque las cargas. El mayor valor de la constante es el del vacío.

b) Falso.

La fuerza electrostática es conservativa, por lo que el trabajo que realiza la fuerza eléctrica solo depende de las posiciones inicial y final de la carga eléctrica que se traslada.

c) Falso.

Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

d) Verdadero.

El potencial eléctrico en un punto puede ser positivo o negativo, según sea el signo de la carga eléctrica: $V = K \frac{Q}{r}$

2. Completa la frase: El potencial eléctrico en un punto es una magnitud _____ y representa el _____ que realiza la fuerza eléctrica al trasladar _____ desde esa posición hasta

_____.

El potencial eléctrico en un punto es una magnitud escalar y representa el trabajo que realiza la fuerza eléctrica al trasladar a la unidad de carga positiva desde esa posición hasta el infinito.

3. Dos cargas eléctricas $q_1 = -6 \mu\text{C}$ y $q_2 = 3 \mu\text{C}$ están situadas a una distancia de 2 m. El trabajo que realiza la fuerza eléctrica para separarlas a una distancia infinita es: a) 0 J; b) +0,081 J; c) -0,081 J; d) 90 J.

La solución correcta es la c).

La energía potencial eléctrica asociada a dos cargas separadas por una distancia r representa el trabajo que realiza la fuerza eléctrica para separarlas infinitamente.

$$E_{p, \text{inicial}} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{\text{inicial}}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(-6 \cdot 10^{-6} \text{C}) \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{C}}{2 \text{m}} = -0,081 \text{ J}$$

$$E_{p, \text{final}} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{\infty}} = 0 \text{ J}$$

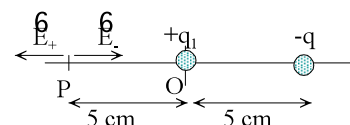
El trabajo que realiza la fuerza eléctrica en el proceso de separación de las cargas es:

$$W_{F \text{ eléctrica (i6f)}} = -\Delta E_p = -(E_{p, \text{final}} - E_{p, \text{inicial}}) = -[0 - (-0,081)] = -0,081 \text{ J}$$

4. En el punto (5 cm, 0 cm) se coloca una carga de $-4 \mu\text{C}$. Si el campo eléctrico se anula en el punto (-5 cm, 0 cm), la carga eléctrica en el origen de coordenadas es: a) $-1 \mu\text{C}$; b) $1 \mu\text{C}$; c) $4 \mu\text{C}$; d) $2 \mu\text{C}$.

La solución correcta es la b).

La carga eléctrica del origen de coordenadas tiene que tener signo positivo.



En el punto P se igualan los módulos de los campos eléctricos:

$$E_+ = E_-; \frac{K \cdot |q_1|}{r_1^2} = \frac{K \cdot |q_2|}{r_2^2}; |q_1| \cdot (10 \text{ cm})^2 = 4 \mu\text{C} \cdot (5 \text{ cm})^2 \Rightarrow q_1 = 1 \mu\text{C}$$

5. Un protón se abandona en un campo eléctrico uniforme de módulo 5 V/m. Si la masa de la partícula es $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, su velocidad después de recorrer 4 cm es: a) $6,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; b) $12,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; c) 3,2 m/s; d) $3,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

La solución correcta es la a).

Como el campo eléctrico es uniforme el trabajo que realiza la fuerza electrostática para transportar a la carga se puede calcular con la expresión:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = q \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = q A E \Delta r A \cos \eta = 1,6 A 10^{-19} \text{ C} A 5 \text{ V/m} A 0,04 \text{ m} = 3,2 A 10^{-20} \text{ J}$$

Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica cinética y como la velocidad inicial de la partícula es igual a cero, resulta que:

$$W = \Delta E_c = 2 A m A v^2; 3,2 A 10^{-20} \text{ J} = 2 A 1,67 A 10^{-27} \text{ kg} A v^2$$

$$\text{Despejando: } v = 6,2 A 10^3 \text{ m/s}$$

6. La distancia entre dos puntos es 5 cm y la diferencia de potencial entre ellos es 20 V. El módulo del campo eléctrico es: a) 5 N/C; b) 100 V/m; c) 4 V/m; d) 400 N/C.

La solución correcta es la d).

Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies de potencial. Aplicando la relación entre el campo y el potencial.

$$|E| = \frac{|\Delta V|}{|\Delta r|} = \frac{20 \text{ V}}{0,05 \text{ m}} = 400 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

En campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes.

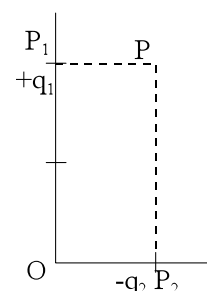
7. Dos cargas, $q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ y $q_2 = -4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ están fijas en los puntos $P_1 (0, 2)$ y $P_2 (1, 0)$, respectivamente. El trabajo necesario para desplazar una carga $q = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ desde el punto $O (0, 0)$ hasta el punto $P (1, 2)$ es: a) $16,2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; b) $-8,1 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; c) $8,1 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; - $16,2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

La solución correcta es la c).

El trabajo que realiza la fuerza eléctrica para trasladar la carga no depende de la trayectoria seguida y es igual a la variación de la energía potencial electrostática cambiada de signo. Para calcular la variación de la energía potencia electrostática se calcula el potencial electrostático en cada punto.

$$V_O = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2 \text{ m}} + \frac{-4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{1 \text{ m}} \right) = -27000 \text{ V}$$

$$V_P = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{1 \text{ m}} + \frac{-4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2 \text{ m}} \right) = 0 \text{ V}$$



Aplicando la ley de la energía potencial:

$$W_{O \rightarrow P} = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V = -q (V_P - V_O) = -(-3 \cdot 10^{-6} \text{ C}) \cdot (0 - (-27000 \text{ V})) = +8,1 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

8. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) Las líneas de campo eléctrico no se pueden cortar. b) La energía potencial eléctrica puede ser positiva o negativa. c) La unidad de campo eléctrico es el V/m. d) La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica tiene la misma dirección y sentido que el campo eléctrico.

a) Verdadero.

Si las líneas de campo eléctrico se cortaran, supondría que en un punto se pueden trazar dos tangentes distintas a una línea de campo y entonces el campo eléctrico tendría dos valores distintos en un mismo punto.

b) Verdadero.

Si las cargas eléctricas tienen el mismo signo, entonces la energía potencial eléctrica es positiva y si

tienen distinto signo es negativa: $E_p = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{r}$

c) Verdadero.

$$\text{En efecto: } 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

d) Falso.

La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica tiene la misma dirección que el campo eléctrico y el mismo sentido si la carga tiene signo positivo y el contrario cuando tiene sentido negativo.

9. Completa la frase: Las líneas del campo eléctrico se trazan de forma que el vector _____ es _____ a ellas en cada punto y por convenio salen de _____ y se dirigen hacia _____ .

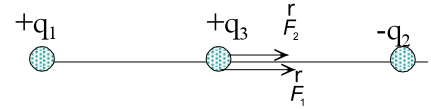
Soluciones unidad 6: Campo eléctrico 2º Bachillerato 2008

Las líneas del campo eléctrico se trazan de forma que el vector campo eléctrico es tangente a ellas en cada punto y por convenio salen de las cargas positivas y se dirigen hacia las cargas negativas.

10. Dos cargas eléctricas $q_1 = 5 \mu\text{C}$ y $q_2 = -3 \mu\text{C}$ están situadas en el vacío a una distancia de 20 cm. La fuerza que actúa sobre otra carga $q_3 = 2 \mu\text{C}$ colocada en el punto medio del segmento que las une es: a) 14,4 N; b) 7,2 N; c) 28,8 N; d) 4,5 N.

La solución correcta es la a).

Las dos cargas q_1 y q_2 actúan con fuerzas de la misma dirección y sentido sobre la carga q_3 . Aplicando el principio de superposición el módulo de la fuerza es:



$$F = F_1 + F_2 = \frac{K \cdot |q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2} + \frac{K \cdot |q_2| \cdot |q_3|}{r_{23}^2} = \frac{K \cdot |q_3|}{r^2} \cdot (|q_1| + |q_2|)$$

Sustituyendo: $F = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0,1\text{m})^2} (5 \cdot 10^{-6} \text{ C} + 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}) = 14,4 \text{ N}$

Física

Unidad didáctica 7
Campo magnético

SOLUCIONES UNIDAD 7. CAMPO MAGNÉTICO

CUESTIONES INICIALES

1. Mediante los fenómenos de electrización se separan las cargas negativas de las positivas. ¿Crees que al cortar un imán por la mitad se separa el polo norte del polo sur?

Es imposible separar los polos de una barra imán. Siempre que se corta una barra imán, cada trozo obtenido se comporta como un nuevo imán por muy pequeños que sean los pedazos.

2. Describe el funcionamiento de una brújula.

La brújula es un pequeño imán que puede girar libremente y por tanto alinearse con el campo magnético terrestre. Por la misma razón sirve para detectar la presencia de cualquier campo magnético.

3. ¿Existe alguna diferencia entre un imán permanente y un electroimán?

En los electroimanes el campo magnético es más intenso que en los imanes naturales.

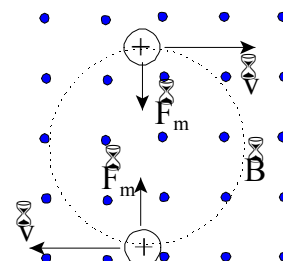
ACTIVIDADES FINALES

1. Un protón es acelerado, a lo largo del eje X, desde el reposo por una diferencia de potencial de 15000 V. A continuación accede perpendicularmente a un campo magnético de 0,4 T, perpendicular al plano del papel y dirigido hacia el observador. Dibuja en un esquema la trayectoria de la partícula y calcula el radio y el período de su órbita.

El campo eléctrico que acelera al protón es conservativo, por lo que la velocidad de la partícula se determina aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10000 \text{ V}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$



Al penetrar la partícula en el campo magnético actúa la fuerza de Lorentz, perpendicular al vector velocidad y si ambos son perpendiculares inicialmente entonces el protón describe una trayectoria circular.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; F_{\text{Lorentz}} = m \cdot \frac{v^2}{R}; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90^\circ = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Despejando: } R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,7 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,4 \text{ T}} = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Y el periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{|q| \cdot B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,4 \text{ T}} = 1,64 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

2. Un electrón y un protón acceden, con la misma velocidad, perpendicularmente a una zona en la que existe un campo magnético. Calcula la relación entre sus velocidades angulares.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular de una partícula:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; F_{\text{Lorentz}} = m \cdot \frac{v^2}{R}; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90^\circ = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

La velocidad angular de una partícula es: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q| \cdot B}{m}$

Aplicándolo al protón y al electrón y como su carga eléctrica tiene el mismo valor:

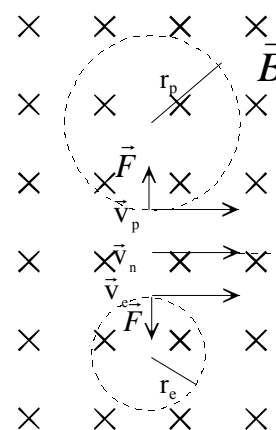
$$\frac{\omega_e}{\omega_p} = \frac{\frac{|q| \cdot B}{m_e}}{\frac{|q| \cdot B}{m_p}} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 1830$$

3. Un protón, un electrón y un neutrón penetran con la misma velocidad y en el mismo punto en una zona en la que existe un campo magnético uniforme perpendicular a su trayectoria. Dibuja esquemáticamente la trayectoria descrita por cada una de esas partículas en la zona en la que existe campo. Indica cuál de estas trayectorias presenta el mayor radio de curvatura y cuál el mayor período de rotación. Razona las respuestas.

Cuando una partícula cargada penetra en un campo magnético actúa sobre ella la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$, de dirección la perpendicular al plano que determinan los vectores \vec{v} y \vec{B} y sentido el indicado por la regla del producto vectorial.

Si el campo magnético es uniforme y la dirección del vector velocidad es perpendicular a él, entonces la fuerza de Lorentz proporciona una aceleración normal que le obliga a la partícula a describir describe una trayectoria circular contenida en un plano perpendicular al campo magnético.

En el caso que concierne el neutrón no está afectado por el campo magnético ya que no tiene carga y el protón y el electrón describen trayectorias circulares recorridas en sentidos contrarios.



Aplicando la segunda ley de Newton a una partícula cargada y como el vector velocidad y el vector campo magnético son perpendiculares, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90^\circ = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

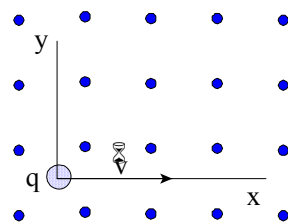
El protón y el electrón llevan la misma velocidad y tienen el mismo valor absoluto de su carga $R_p = \frac{m_p \cdot v}{|q| \cdot B}; R_e = \frac{m_e \cdot v}{|q| \cdot B}$ y como el protón tiene una masa mayor que el electrón, el radio de la órbita del protón es mayor que el de la órbita del electrón.

De la ecuación anterior se deduce la velocidad angular y el período del movimiento.

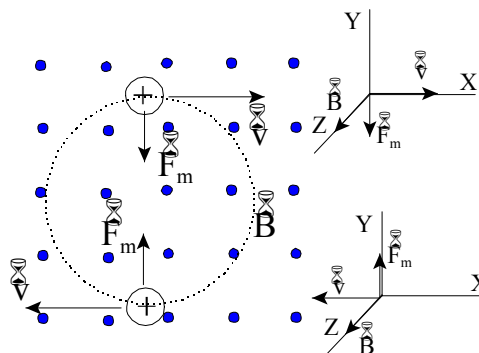
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q| \cdot B}{m} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{|q| \cdot B}$$

Y para cada partícula los períodos del movimiento son: $T_p = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_p}{|q| \cdot B}; T_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_e}{|q| \cdot B}$, por lo que el período del protón en su órbita es mayor que el del electrón.

4. Un ion de carga $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ y masa $9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ se acelera desde del reposo mediante una diferencia de potencial de 3000 V y a continuación penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de $0,12 \text{ T}$ como el mostrado en la figura. Sabiendo que el ion describe un movimiento circular uniforme cuando está sumergido en el campo, se pide: a) Dibuje el sentido de la trayectoria del ion y represente, en dos puntos opuestos de esa trayectoria, un esquema con los vectores que intervienen en el problema. b) La velocidad con la que se mueve el ion dentro del campo magnético y el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula.



a) Sobre la partícula actúa la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, de dirección la de la perpendicular al plano formado por los vectores campo magnético y velocidad y sentido el indicado por la regla del sacacorchos al voltear la velocidad sobre el campo magnético siguiendo el camino más corto.



b) El campo eléctrico que acelera al ion es conservativo, por lo que la velocidad de la partícula se determina aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 3000 \text{ V}}{9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} = 9,9 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Al penetrar la partícula en el campo magnético actúa la fuerza de Lorentz, perpendicular al vector velocidad y el ion describe una trayectoria circular.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular del ion, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; F_{\text{Lorentz}} = m \cdot \frac{v^2}{R}; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90^\circ = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Despejando: } R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} = \frac{9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9,9 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,12 \text{ T}} = 0,496 \text{ m}$$

5. Un chorro de partículas formadas por protones, deuterones y partículas alfa de la misma energía cinética penetran perpendicularmente en un campo magnético uniforme. La carga eléctrica del protón y del deuterón es igual a la del electrón y la de la partícula alfa es el doble de la del electrón. Si una partícula alfa tiene una masa doble que la del deuterón y cuatro veces la del protón, calcula la relación entre el radio de la órbita del deuterón y la del protón y entre el radio de la órbita de la partícula alfa y la del protón.

Aplicando la segunda ley de Newton a una partícula cargada y como el vector velocidad y el vector campo magnético son perpendiculares, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90^\circ = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

La energía cinética de una partícula es: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}}$

$$\text{Operando en las ecuaciones anteriores: } R = \frac{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}}}{|q| \cdot B} = \frac{\sqrt{2 \cdot m \cdot E_c}}{|q| \cdot B}$$

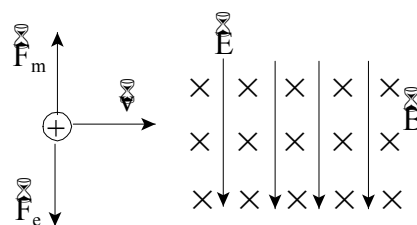
Como las partículas tienen la misma energía cinética, aplicando las relaciones entre las cargas eléctricas y las masas resulta que:

$$\frac{R_D}{R_P} = \frac{\frac{\sqrt{2 \cdot m_D \cdot E_c}}{|q_D| \cdot B}}{\frac{\sqrt{2 \cdot m_P \cdot E_c}}{|q_P| \cdot B}} = \frac{\sqrt{m_D} \cdot |q_P|}{\sqrt{m_P} \cdot |q_D|} = \frac{\sqrt{2 \cdot m_P} \cdot |q_P|}{\sqrt{m_P} \cdot |q_P|} = \sqrt{2}$$

De igual forma:
$$\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\frac{\sqrt{2 \cdot m_\alpha \cdot E_c}}{|q_\alpha| \cdot B}}{\frac{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}}{|q_p| \cdot B}} = \frac{\sqrt{m_\alpha} \cdot |q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot |q_\alpha|} = \frac{\sqrt{4 \cdot m_p} \cdot |q_p|}{\sqrt{m_p} \cdot 2 \cdot |q_p|} = 1$$

6. Un chorro de protones se desplaza horizontalmente sin desviarse por un selector de velocidades, en el que el campo eléctrico tiene de módulo $2 \cdot 10^3$ N/C de dirección la vertical y sentido hacia abajo. Si el módulo del campo magnético es igual a 0,5 T, calcula la velocidad de los protones. ¿Qué dirección y sentido tiene el campo magnético? Representa en un diagrama todos los vectores.

La fuerza eléctrica tiene el mismo sentido que el campo eléctrico, ya que la carga del protón tiene signo positivo. Por tanto, la fuerza magnética tiene que tener la dirección de la vertical y sentido hacia arriba.



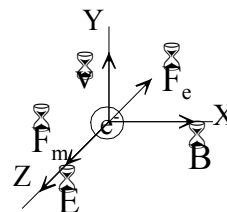
De las reglas del producto vectorial se deduce que el campo magnético es perpendicular al plano del papel y su sentido es hacia dentro.

$$\vec{F}_{\text{magnética}} + \vec{F}_{\text{eléctrica}} = 0$$

En módulo: $|q| \cdot v \cdot B = |q| \cdot E \Rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N/C}}{0,5 \text{ T}} = 4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

7. Un electrón que lleva una velocidad de $\vec{v} = 10 \cdot \vec{j}$ m/s penetra en una región del espacio en la que actúa un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 20 \cdot \vec{k}$ N/C y un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{i}$ T. Despreciando los efectos del campo gravitatorio, dibuja las fuerzas que actúan sobre el electrón y calcula el módulo del campo magnético para que la partícula se mueva con movimiento rectilíneo uniforme.

La figura adjunta representa las fuerzas que actúan sobre el electrón en el sistema de referencia elegido.



Las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre el electrón, teniendo en cuenta que su carga eléctrica tiene signo negativo son:

$$\vec{F}_{\text{eléctrica}} = q \cdot \vec{E} = -|q_e| \cdot 20 \cdot \vec{k} \text{ N/C}$$

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -|q_e| \cdot \left((10 \cdot \vec{j} \text{ m/s}) \times (B_0 \cdot \vec{i} \text{ T}) \right) = -|q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) \text{ T} \cdot \text{m/s}$$

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = -|q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot (-\vec{k}) \text{ N/C} = |q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \cdot \vec{k} \text{ N/C}$$

Para que el electrón no se desvíe de su trayectoria los módulos de las fuerzas magnética y eléctrica tienen que ser iguales.

$$F_{\text{eléctrica}} = F_{\text{magnética}}; |q_e| \cdot 20 \text{ N/C} = |q_e| \cdot 10 \cdot B_0 \text{ N/C} \quad B_0 = 2 \text{ T}$$

8. Un chorro de iones es acelerado por una diferencia de potencial de 10 000 V, antes de penetrar en un campo magnético de 1 T. Si los iones describen una trayectoria circular de 5 cm de radio, determina su relación carga-masa.

La variación de la energía cinética que experimentan los iones es: $2 A m A v^2 = |q| A \Delta V$

Aplicando la segunda ley de Newton a la zona donde actúa el campo magnético, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando la velocidad en las ecuaciones anteriores e igualando, se tiene:

$$\frac{2 \cdot |q| \cdot \Delta V}{m} = \frac{|q|^2 \cdot R^2 \cdot B^2}{m^2}$$

La relación carga masa es: $\frac{|q|}{m} = \frac{2 \cdot \Delta V}{R^2 \cdot B^2} = \frac{2 \cdot 10\,000 \text{ V}}{(5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m} \cdot (1 \text{ T})^2} = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$

9. Las *Des* de un ciclotrón tienen un radio de 70 cm y están inmersas en un campo magnético de 0,3 T. Determina la frecuencia de la diferencia de potencial alterna que se aplica entre las *Des* para acelerar a un protón. Calcula la velocidad del protón a la salida del ciclotrón y su energía cinética expresada en eV.

Dentro de las *Des* actúa un campo magnético perpendicularmente a la velocidad del protón que le obliga recorrer una semicircunferencia. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

El período del movimiento es: $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,3 \text{ T}} = 02,17 A 10^{-7} \text{ s}$

El campo eléctrico en el espacio entre las *Des* cambia de sentido en un tiempo igual a la mitad del período, 2 T, que es igual a lo que tarda el protón en recorrer cada una de las *Des*. Por tanto, el período y la frecuencia de la diferencia de potencial alterna coinciden con los de la trayectoria del protón:

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,17 \cdot 10^{-7} \text{ s}} = 4,6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

La velocidad con la que sale expulsado depende del radio de la última órbita:

$$v_{\text{máxima}} = \frac{q \cdot R \cdot B}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,70 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ T}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 2,02 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

La energía cinética de la partícula a la salida del aparato es:

$$E_c = 2 A m A v^2 = 2 A 1,66 A 10^{-27} \text{ kg} A (2,02 A 10^7 \text{ m/s})^2 = 3,4 A 10^{-13} \text{ J}$$

Y expresada en eV: $E_c = 3,4 A 10^{-13} \text{ J} A \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 2,1 A 10^6 \text{ eV} = 2,1 \text{ MeV}$

10. Sobre un hilo de 5 cm de longitud que lleva una intensidad de la corriente eléctrica de 5 A actúa una fuerza de 0,1 N. Calcula el módulo del campo magnético que actuando perpendicularmente al hilo produce esa fuerza.

El módulo de la fuerza que actúa sobre el hilo es: $F = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen } \varphi$

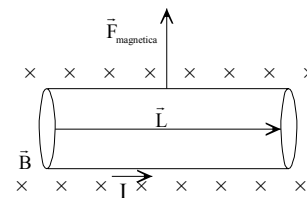
Sustituyendo: $0,1 \text{ N} = 5 \text{ A} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot B \cdot \text{sen } 90 \Rightarrow B = 0,4 \text{ T}$

11. Un cable de 0,5 m de longitud transporta una intensidad de la corriente eléctrica de 2 A, según la dirección positiva del eje X. Si el cable está colocado perpendicularmente en un campo magnético de 0,25 T, que penetra en el plano del papel, calcula el módulo de la fuerza que actúa sobre el cable y representa en un diagrama todas las magnitudes vectoriales implicadas.

Sobre el conductor actúa una fuerza que queda determinada por la ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$

Su módulo es: $F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \varphi = 2 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 0,25 \text{ T} \cdot \sin 90 = 0,25 \text{ N}$

La dirección y sentido se determinan por las reglas del producto vectorial, su dirección es la vertical y su sentido hacia arriba.



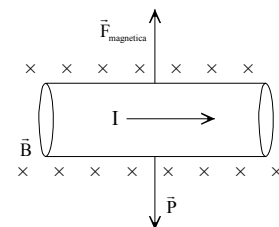
12. Un segmento horizontal de un conductor de 25 cm de longitud y 20 g de masa por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica de 10 A se encuentra en equilibrio en un campo magnético uniforme, también horizontal y perpendicular al conductor. Calcula el valor del campo magnético y representa gráficamente la corriente, el campo magnético y las fuerzas que actúan sobre el conductor.

El peso tiene dirección la vertical y sentido hacia abajo, la fuerza magnética tiene sentido contrario al peso. Si el campo magnético penetra en el plano del papel, la intensidad de la corriente eléctrica se dirige hacia la derecha.

Como el conductor está en equilibrio: $P = F_{\text{magnética}}$; $m \cdot g = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \varphi$

Sustituyendo:

$$20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 10 \text{ A} \cdot 0,25 \text{ m} \cdot B \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow B = 7,84 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$



13. Sobre el eje X está situado un alambre de 9 cm de longitud que transporta una intensidad de la corriente eléctrica de 1 A. Si el conductor se encuentre inmerso en un campo magnético de 0,02 T de intensidad situado en el plano XY y formando un ángulo de 30° con el eje X, ¿qué fuerza actúa sobre el cable? Representala en un diagrama.

Las expresiones de los diferentes vectores, en el sistema de referencia de la figura son:

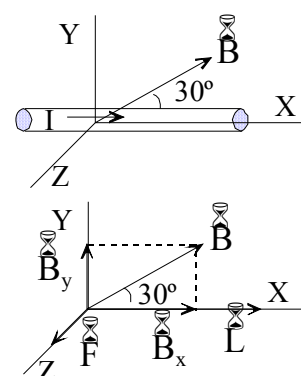
$$\vec{L} = 0,09 \cdot \vec{i} \text{ m}; \quad \vec{B} = (0,02 \cdot \cos 30^\circ \cdot \vec{i} + 0,02 \cdot \sin 30^\circ \cdot \vec{j}) \text{ T}$$

La componente B_x del campo es paralela al conductor y por ello no actúa con ninguna fuerza. Solamente actúa sobre el conductor la componente B_y del campo.

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = 1 \text{ A} \cdot (0,09 \cdot \vec{i} \text{ m} \times 0,02 \cdot \sin 30^\circ \cdot \vec{j}) \text{ T}$$

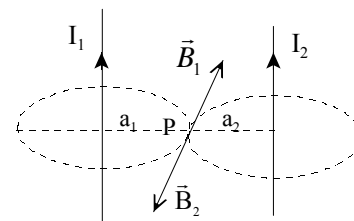
Aplicando las reglas del producto vectorial, resulta que la fuerza que actúa sobre el conductor es:

$$\vec{F} = 9 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{k} \text{ N}$$



14. Dos conductores rectos y paralelos están separados por una distancia de 9 cm y están recorridos en el mismo sentido por sendas intensidades de la corriente eléctrica de 1 A y 2 A. ¿A qué distancia de los conductores se anula el campo magnético?

Cada conductor genera un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en ellos y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.



El campo magnético solamente se anula en un punto situado en el segmento que une a los conductores.

Si ese punto está a una distancia a_1 del conductor I_1 y a una distancia a_2 del conductor I_2 , entonces:

$$a_1 + a_2 = 9 \text{ cm}$$

Aplicando la ley de Biot y Savart para un conductor rectilíneo, denominando $I_1 = 1 \text{ A}$ e $I_2 = 2 \text{ A}$ e igualando los módulos del campo magnético, resulta que:

$$B_1 = B_2; \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot a_1} = \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot a_2} \Rightarrow \frac{1 \text{ A}}{a_1} = \frac{2 \text{ A}}{a_2}$$

Operando y agrupando las ecuaciones, se tiene el sistema de ecuaciones:

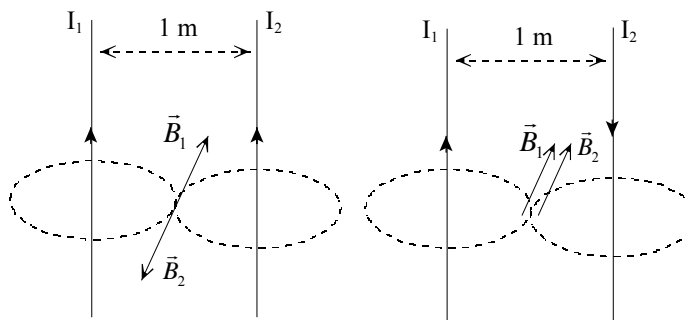
$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ A} \cdot a_2 = 2 \text{ A} \cdot a_1 \\ a_1 + a_2 = 9 \text{ cm} \end{array} \right\} \Psi a_1 = 30 \text{ cm}$$

El campo magnético se anula en el segmento que une a los conductores y a una distancia de 3 cm del conductor por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica $I_1 = 1 \text{ A}$.

15. Dos hilos rectilíneos indefinidos paralelos separados una distancia de 1 m transportan corrientes de intensidad I_1 e I_2 . Cuando las corrientes circulan en el mismo sentido el campo magnético en un punto medio vale $2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$, mientras que cuando circulan en sentidos opuestos dicho campo vale $6 \cdot 10^{-6} \text{ T}$. Calcule el valor de las intensidades I_1 e I_2 .

Un hilo rectilíneo por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica, genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo.

En la región del plano situada entre los dos conductores, los campos magnéticos son perpendiculares al plano del papel y su sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el del giro de un tornillo que avance según el sentido de la corriente eléctrica.



Cuando la intensidad de la corriente eléctrica tiene el mismo sentido, los dos campos tienen sentido contrario y si la intensidad de la corriente tiene distinto sentido, entonces los dos campos tienen el mismo sentido.

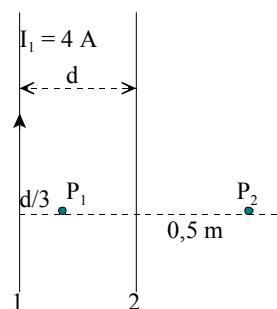
El módulo del campo magnético generado por un conductor a una distancia r de él es: $B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Aplicando la ecuación anterior y como el punto considerado está a la misma distancia de los dos conductores, resulta que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{mismo sentido: } \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} - \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} \\ \text{sentido opuesto: } \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} + \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mu \cdot (I_1 - I_2) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} \\ \mu \cdot (I_1 + I_2) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot (I_1 - I_2) = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} \\ 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot (I_1 + I_2) = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 - I_2 = 5 \text{ A} \\ I_1 + I_2 = 15 \text{ A} \end{array} \Rightarrow I_1 = 10 \text{ A}; I_2 = 5 \text{ A}$$

16. Se tienen dos conductores rectilíneos, paralelos e indefinidos, separados por una distancia d . Por el conductor 1 circula una intensidad de 4 A en el sentido mostrado en la figura. a) Determine el valor y sentido de la intensidad que debe circular por el conductor 2 de forma que el campo magnético resultante en el punto P_1 se anule. b) Si la distancia que separa los dos conductores es $d = 0,3$ m, calcule el campo magnético B (módulo, dirección y sentido) producido por los dos conductores en el punto P_2 , en la situación anterior. Nota: Los conductores y los puntos P_1 y P_2 están contenidos en el mismo plano.

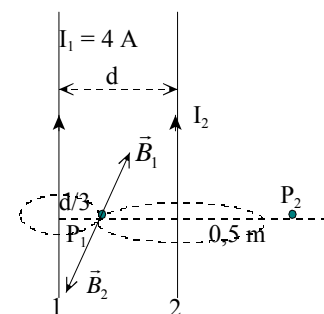


a) Cada conductor genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en ellos y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica.

Los dos conductores generan en el punto P_1 campos magnéticos perpendiculares al plano del papel. El conductor 1 lo genera hacia dentro, por lo que el conductor 2 lo debe generar hacia afuera y por ello el sentido de la corriente eléctrica en él debe ser el mismo que en el conductor 1.

Aplicando la ley de Biot y Savart para un conductor rectilíneo e igualando los módulos del campo magnético, resulta que:

$$B_1 = B_2; \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1} = \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2} \Rightarrow \frac{4 \text{ A}}{d/3} = \frac{I_2}{2d/3}$$



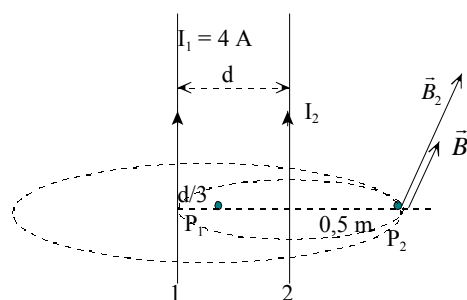
Despejando el módulo de la intensidad es: $I_2 = 8 \text{ A}$

b) Los dos conductores generan en el punto P_2 campos magnéticos perpendiculares al plano del papel y sentido hacia dentro, por lo que sus módulos se suman.

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1} + \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2}$$

Operando y sustituyendo:

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2}{2 \cdot \pi} \left(\frac{4 \text{ A}}{0,8 \text{ m}} + \frac{8 \text{ A}}{0,5 \text{ m}} \right) = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



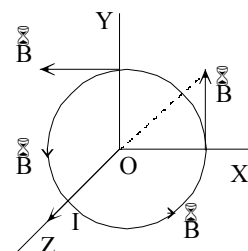
17. Un conductor rectilíneo transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje Z. Calcula la fuerza que actúa sobre un protón situado a 50 cm del conductor cuando se dirige hacia el conductor con una velocidad de $2 \cdot 10^5$ m/s. ¿Se modifica la energía cinética del protón?

Soluciones unidad 7: Campo magnético 2º Bachillerato 2008

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido en un punto P a una distancia a del conductor, se determina aplicando la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 10 \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ m}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas en el conductor y situadas en planos perpendiculares al mismo. El vector campo magnético es tangente a las líneas de campo y su sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.



Si el conductor está situado en el eje Z y el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica es el sentido positivo de dicho eje, $\vec{I} = 10 \cdot \vec{k} \text{ A}$, las líneas de campo están situadas en el plano XY del sistema de referencia de la figura.

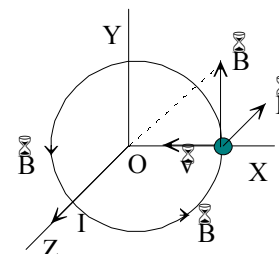
Si el punto en el que se localiza el protón tiene de coordenadas (0,5; 0, 0) m, entonces la expresión del vector campo magnético en ese punto es: $\vec{B} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot \vec{j} \text{ T}$

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en el seno de un campo magnético queda determinada por la ley Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

La expresión del vector velocidad es: $\vec{v} = 2 \cdot 10^5 \cdot (-\vec{i}) \text{ m/s}$

Y la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (-2 \cdot 10^5 \cdot \vec{i} \text{ m/s} \times 4 \cdot 10^{-6} \cdot \vec{j} \text{ T}) = 1,28 \cdot 10^{-19} \cdot (-\vec{k}) \text{ N}$$



La fuerza que actúa sobre el electrón tiene la dirección del conductor y sentido contrario a la intensidad de la corriente eléctrica.

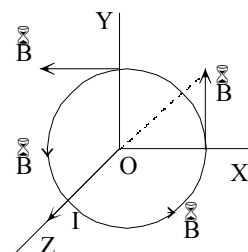
La fuerza es perpendicular al vector velocidad, y por tanto no se modifica esta y por ello la fuerza magnética no realiza trabajo y no se modifica la energía cinética de la partícula.

18. Por un conductor rectilíneo muy largo circula una intensidad de la corriente eléctrica de 20 A. Un electrón está situado a 1 cm de eje del conductor y se traslada con una velocidad de $5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Calcula la fuerza que actúa sobre el electrón cuando se mueve paralelamente al conductor y en el mismo sentido que la intensidad de la corriente eléctrica.

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido en un punto P a una distancia a del conductor, se determina aplicando la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 20 \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas en el conductor y situadas en planos perpendiculares al mismo. El vector campo magnético es tangente a las líneas de campo y su sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica.



Si el conductor está situado en el eje Z y el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica es el sentido positivo de dicho eje, $\vec{I} = 20 \cdot \vec{k} \text{ A}$, las líneas de campo están situadas en el plano XY del

sistema de referencia de la figura.

Si el punto en el que se localiza el electrón tiene de coordenadas $(10^{-2}, 0, 0)$ m, entonces la expresión del vector campo magnético en ese punto es: $\vec{B} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}$ T

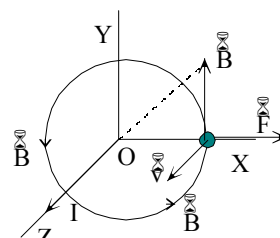
La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en el seno de un campo magnético queda determinada por la ley Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

La expresión del vector velocidad es: $\vec{v} = 5 \cdot 10^6 \cdot \vec{k}$ m/s

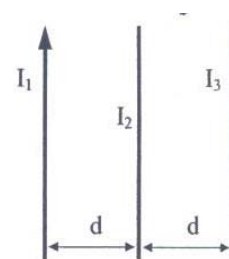
Y la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (5 \cdot 10^6 \cdot \vec{k} \text{ m/s} \times 4 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} \text{ T}) = 3,2 \cdot 10^{-16} \cdot \vec{i} \text{ N}$$

La fuerza que actúa sobre el electrón tiene el sentido perpendicular al conductor y alejándose de él.



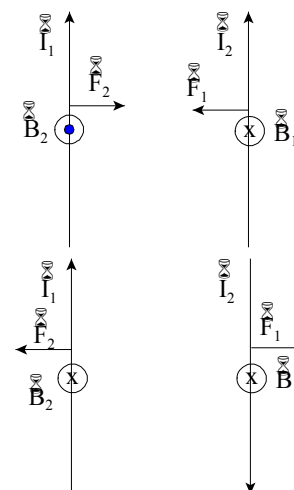
19. La figura muestra tres conductores paralelos y rectilíneos por los que circulan las corrientes I_1 , I_2 e I_3 respectivamente. La corriente I_1 tiene el sentido indicado en la figura. Sabiendo que la fuerza neta por unidad de longitud sobre el conductor 2 (debida a los conductores 1 y 3) y sobre el conductor 3 (debida a los conductores 1 y 2) son ambas nulas, razone el sentido de las corrientes I_2 e I_3 y calcule sus valores en función de I_1 .



Un hilo rectilíneo por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica, genera un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y situadas en un plano perpendicular a él. El sentido del campo magnético es el indicado por la regla de la mano derecha que coincide con el del giro de un sacacorchos que avanza según el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica. Aplicando la ley de Biot y Savart, el módulo del campo magnético generado por un conductor a una distancia r de él es:

$$B_1 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Al colocar otro conductor, por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica I_2 , a una distancia r del primero, los conductores interactúan con fuerzas del mismo módulo y dirección, pero de sentidos contrarios y que se calculan aplicando la segunda ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$.



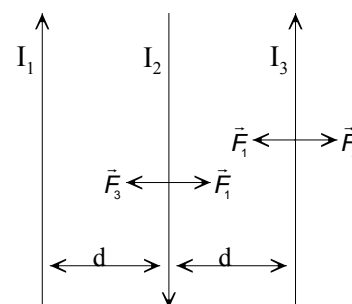
Como los conductores están colocados paralelamente, se tiene que los módulos de estas fuerzas, que forman un par de acción y reacción, son:

$$F_2 = F_1 = L \cdot I_2 \cdot B_1 = L \cdot I_2 \cdot \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{L}{r}, \text{ con } L \text{ la longitud de los conductores}$$

Estas fuerzas tienen por dirección la de la perpendicular a los hilos y sentido el indicado por la regla de Maxwell del producto vectorial, de forma que corrientes eléctricas del mismo sentido se atraen y si son de sentido contrario se repelen.

Con estas consideraciones se deduce que las intensidades de las corrientes eléctrica I_1 e I_3 tiene que tener el mismo sentido y que la intensidad I_2 tiene que tener sentido opuesto al de las anteriores.

Las intensidades I_1 e I_3 tienen que tener el mismo valor, ya que de



otra forma los módulos de las fuerzas con las que actúan sobre la intensidad I_2 no serían iguales. El valor de la intensidad de la corriente eléctrica I_2 tiene que ser igual a la mitad del valor de I_1 , ya que está a una distancia de I_3 igual a la mitad de la distancia a la que está I_1 .

En efecto: los módulos de las fuerzas que actúan sobre la intensidad I_3 tienen que ser iguales.

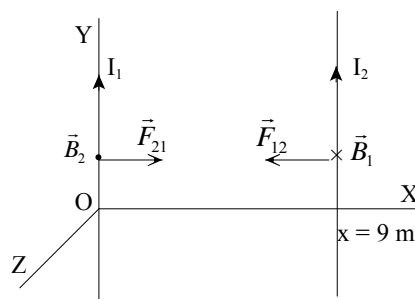
$$F_1 = F_2; \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_1 \cdot I_3 \cdot \frac{L}{2 \cdot d} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot \frac{L}{d} \Rightarrow \frac{I_1}{2} = I_2$$

20. Dos alambres paralelos e infinitamente largos están situados en el plano XY. Uno de los alambres coincide con la recta $x = 0$ (eje Y) por el que circula una intensidad de la corriente eléctrica $I_1 = 2$ A y por el otro alambre que coincide con la recta $x = 9$ m circula una intensidad de la corriente eléctrica de $I_2 = 1$ A. Calcula la fuerza que actúa sobre cada uno de los alambres y por unidad de longitud: módulo, dirección y sentido.

Se elige como sistema de referencia el indicado en la figura adjunta.

El conductor I_1 crea un campo magnético B_1 , cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el conductor y cuyo sentido está indicado por el giro de un tornillo que avanza con la corriente. En los puntos en los que se localiza el conductor I_2 tiene sentido hacia dentro del plano del papel y cuyo módulo es:

$$B_1 = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \frac{I_1}{r}$$



Este campo magnético actúa sobre el conductor I_2 , mediante una fuerza magnética de dirección la de la perpendicular a los conductores y sentido hacia el conductor I_1 , regla del producto vectorial.

El módulo es esta fuerza es: $F_{1 \rightarrow 2} = L_2 \cdot I_2 \cdot B_1 \cdot \sin \nu = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} I_1 \cdot I_2 \frac{L_2}{r}$

De igual forma y aplicando la ley de acción y reacción el conductor I_2 atrae al conductor I_1 con una fuerza $F_{2 \rightarrow 1}$ del mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.

Sustituyendo, y si los conductores están situados en el vacío, el módulo de la fuerza de atracción es:

$$F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2}{2 \cdot \pi} 2 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \frac{L}{9 \text{ m}} = 0,44 \cdot 10^{-7} \cdot L \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

21. Calcula el campo magnético en el interior de un solenoide de 400 espiras y de 25 cm de longitud por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica de 2 A.

Aplicando la ecuación del campo magnético en el interior de un solenoide, resulta que:

$$B = \mu \frac{N}{L} I = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \frac{400 \text{ espiras}}{0,25 \text{ m}} 2 \text{ A} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

INVESTIGA

1. ¿Por qué el fenómeno de las auroras polares es más frecuente en los polos de la Tierra?

El fenómeno de las auroras polares es más frecuente en los polos magnéticos, ya que, al igual que en una barra imán, allí el campo magnético es más intenso.

Una partícula cargada cuando interacciona con el campo magnético terrestre adquiere una

trayectoria helicoidal, debida a la fuerza de Lorentz, y es guiada por las líneas del campo magnético terrestre hacia los polos magnéticos de la Tierra. Dado que el campo magnético aumenta cerca de los polos de la Tierra, las partículas se mueven de un lado a otro en recorridos helicoidales entre los polos norte y sur de la Tierra.

Las partículas se acumulan en unas zonas denominadas cinturones de Van Allen y son evitadas por las misiones espaciales tripuladas, porque su radiación puede dañar el organismo humano.

Esta región se extiende desde algunos cientos de kilómetros sobre la Tierra hasta unos 48.000 a 64.000 km. La mayor parte de los protones de alta energía (mayor de 10 MeV) se encuentran en el cinturón interior a una altitud de 3.200 km; los electrones están más concentrados en un cinturón exterior que se extiende a muchos radios de la Tierra en el espacio. La estación espacial está solamente a 500 km de la superficie de la Tierra, lo bastante lejos de los citados cinturones.

2. ¿A qué se deben los diferentes colores de las auroras polares?

Las auroras ocurren cuando partículas cargadas, protones y electrones, procedentes del Sol, son guiadas por el campo magnético de la Tierra e inciden en la atmósfera cerca de los polos. Cuando esas partículas chocan con los átomos y moléculas de oxígeno y nitrógeno, que constituyen los componentes más abundantes del aire, parte de la energía de la colisión excita esos átomos y cuando se desexcitan emiten luz visible.

El oxígeno es responsable de los colores verde y amarillo, mientras que el nitrógeno es el responsable de las coloraciones roja y azul.

El proceso es similar al que ocurre en los tubos de neón de los anuncios. En ellos el gas se excita por corrientes eléctricas y al desexcitarse envía la típica luz rosa que todos conocemos. En una pantalla de televisión un haz de electrones controlado por campos eléctricos y magnéticos incide sobre la misma, haciéndola brillar en diferentes colores dependiendo del revestimiento químico de los productos fosforescentes contenidos en el interior de la pantalla.

3. ¿Crees que el fenómeno de las auroras polares es exclusivo de la Tierra? ¿Es posible en otros planetas?

El fenómeno de las auroras polares se da en cualquier planeta que tenga campo magnético. Las auroras han sido observadas en los planetas del sistema solar con el telescopio Hubble.

TEST DE EVALUACIÓN

1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) Las líneas de campo magnético son abiertas. b) Dos corrientes eléctricas del mismo sentido se atraen. c) La constante permeabilidad magnética no depende del medio. d) Un campo magnético no interaccionan sobre un conductor situado paralelamente al campo.

a) Falso

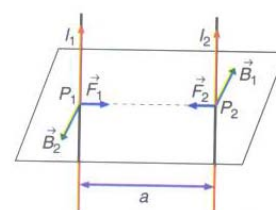
Las líneas de campo magnético forman siempre bucles cerrados.

b) Verdadero.

Dos corrientes eléctricas del mismo sentido se atraen.

c) Falso.

La constante permeabilidad magnética puede ser mayor, menor o igual a la



del vacío.

d) Verdadero

El módulo de la fuerza con la que actúa un campo magnético sobre un conductor es:

$$F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \varphi$$

Si el campo magnético y el conductor son paralelos entonces $\sin \varphi = 0$ y por tanto $F = 0$

2. Completa la siguiente frase: La dirección del campo magnético en un punto es la que indica _____ y su sentido es el que señala _____

La dirección del campo magnético en un punto es la que indica la aguja de una brújula colocada en ese punto y su sentido es el que señala el polo norte de la brújula.

3. En un selector de velocidades el campo eléctrico es 1200 V. Si las partículas que llevan una velocidad de $2 \cdot 10^3$ m/s no se desvían de su trayectoria, el módulo del campo magnético es: a) 6 T; b) 0,6 T; c) 3 T; d) 1,2 T.

La solución correcta es la b).

Para que una partícula no se desvíe los módulos de las fuerzas eléctrica y magnética tienen que ser iguales:

$$F_{\text{eléctrica}} = F_{\text{magnética}}; |q| \cdot E = |q| \cdot v \cdot B \Rightarrow B = \frac{E}{v} = \frac{1200 \text{ V}}{2 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 0,6 \text{ T}$$

4. Dos alambres rectilíneos están situados paralelamente a una distancia de 10 cm. Si por ellos pasan corrientes eléctricas de 2 A y de 5 A, la fuerza con la que interaccionan por cada metro de conductor es: a) 2 N/m; b) $4 \cdot 10^{-5}$ N/m; c) 0 N; d) $2 \cdot 10^{-5}$ N/m.

La solución correcta es la d)

Si las intensidades de las corrientes eléctricas tienen el mismo sentido la fuerza es atractiva y si tienen sentido contrario entonces la fuerza es repulsiva. El módulo de la fuerza de la interacción es:

$$F = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} I_1 \cdot I_2 \frac{L}{a}$$

$$\text{Y por unidad de longitud: } \frac{F}{L} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot a} I_1 \cdot I_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 2 \text{ A} \cdot 5 \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 0,1 \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$

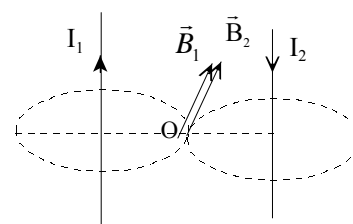
5. Dos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos, están separados por una distancia de 10 cm y recorridos por intensidades de la corriente eléctrica iguales de 2 A, pero de sentido contrario. El módulo del campo magnético en el punto medio del segmento que une los dos conductores es: a) 0 T; b) 1,6 T; c) $1,6 \cdot 10^{-5}$ T; d) $0,8 \cdot 10^{-5}$ T.

La solución correcta es la c).

El módulo del campo magnético que crea un conductor rectilíneo, indefinido a una distancia a del mismo es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

En el punto medio entre los dos conductores, O, los campos magnéticos tienen la misma dirección y sentido. Como las distancias e intensidades son iguales, resulta que el módulo del campo magnético es:



$$B = B_1 + B_2 = 2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = 2 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 2 \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 0,05 \text{ m}} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

6. Un hilo conductor de 20 cm de longitud y por el que pasa una intensidad de la corriente eléctrica de 0,5 A está situado en un campo magnético de $3 \cdot 10^{-2}$ T cuya dirección forma un ángulo de 30° con la dirección del hilo. El módulo de la fuerza magnética que actúa sobre el hilo es: a) $1,5 \cdot 10^{-3}$ N; b) 0 N; c) $3 \cdot 10^{-3}$ N; d) $7,5 \cdot 10^{-4}$ N.

La solución correcta es la a)

El módulo de la fuerza que actúa sobre el hilo es:

$$F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \varphi = 0,5 \text{ A} \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ T} \cdot \sin 30^\circ = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

7. Una partícula de $10 \mu\text{C}$ accede con una velocidad de 10^3 m/s perpendicularmente a un campo magnético de 10^{-4} T. El módulo de la fuerza que actúa sobre la partícula es: a) 10^{-6} N; b) 0 N; c) $2 \cdot 10^{-6}$ N; d) 10^2 N.

La solución correcta es la a)

Aplicando la ley de Lorenz, el módulo de la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin \varphi = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \sin 90^\circ = 10^{-6} \text{ N}$$

8. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) El trabajo que realiza la fuerza magnética sobre una partícula cargada es igual a cero. b) Dos corrientes eléctricas de sentidos contrarios se atraen. c) Un campo magnético no actúa sobre una carga eléctrica en reposo. d) Una partícula que accede perpendicularmente a un campo magnético, recorre una trayectoria circular.

a) Verdadero

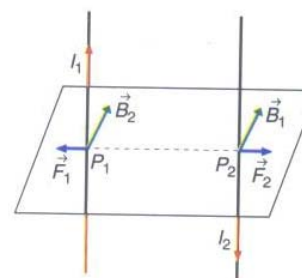
La fuerza magnética que actúa sobre una partícula es siempre perpendicular al desplazamiento y por tanto el trabajo realizado es igual a cero.

b) Falso

Dos corrientes eléctricas de sentidos contrarios se repelen.

c) Verdadero.

El módulo de la fuerza con la que actúa un campo magnético sobre una partícula cargada es: $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin \varphi$. Si la partícula está en reposo, entonces la fuerza es igual a cero.



d) Verdadero.

La expresión de la fuerza con la que actúa un campo magnético sobre una partícula es: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

El vector fuerza es perpendicular al los vectores velocidad y campo magnético.

Si inicialmente los vectores velocidad y campo magnético son perpendiculares, el vector fuerza proporciona la aceleración normal que obliga a que la partícula describa una trayectoria circular. Si el vector velocidad no fueran perpendicular al campo magnético, entonces la trayectoria sería helicoidal.

9. Completa la siguiente frase: En el exterior de una barra imán las líneas de campo magnético salen _____ y entran _____; el bucle se cierra por dentro de la barra desde _____.

Soluciones unidad 7: Campo magnético 2º Bachillerato 2008

En el exterior de una barra imán las líneas de campo magnético salen del polo norte y entran por el polo sur; el bucle se cierra por dentro de la barra desde el polo sur al polo norte.

10. Un protón, de masa $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, que lleva una velocidad de 10 000 m/s accede perpendicularmente a un campo magnético de 10^{-2} T. El radio de la órbita es: a) 1 m; b) 1 mm; c) 1 cm; d) 0,5 cm.

La solución correcta es la c).

Si los vectores velocidad y campo magnético son perpendiculares, el vector fuerza es perpendicular a la trayectoria y por ello el protón describe un movimiento circular y como el módulo de la fuerza es constante, el movimiento es uniforme.

El módulo de la fuerza de Lorentz es: $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ$

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular del electrón:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; F_{\text{Lorentz}} = m \cdot \frac{v^2}{R}; |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Despejando: } R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^4 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{-2} \text{ T}} = 0,01 \text{ m}$$

Física

Unidad didáctica 8

Inducción electromagnética

SOLUCIONES UNIDAD 8. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

CUESTIONES INICIALES

1. Describe las transformaciones energéticas que se realizan en una central hidroeléctrica.

El agua del embalse almacena energía potencial gravitatoria que se transforma en energía cinética del agua. Al chocar el agua con los álabes de una turbina, parte de su energía cinética se transforma en energía cinética de rotación. A continuación, esta energía cinética de rotación se transforma en energía eléctrica.

2. Sobre una carga que se mueve, con una velocidad que forma un determinado ángulo con un campo magnético, actúa una fuerza. ¿Crees que actuará alguna fuerza sobre los electrones de valencia de un conductor que se mueve en el seno de un campo magnético?

Sobre los electrones libres de metal, al estar animados con la misma velocidad que el conductor, actúa la fuerza de Lorentz.

3. ¿Por qué se realiza el suministro de energía eléctrica a nuestros hogares con corriente alterna y no con corriente continua?

Las pérdidas de energía durante el transporte de la energía eléctrica son menores cuanto más elevada es la diferencia de potencial.

La diferencia de potencial de la corriente continua no se puede modificar; algo se realiza con suma facilidad en la corriente alterna con el uso de transformadores. Por tanto, se puede producir energía eléctrica a una diferencia de potencial bajo, transformarla a una diferencia de potencial alto para el transporte y volver a reducir la diferencia de potencial en el centro de consumo.

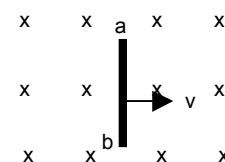
ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula el flujo del campo magnético que atraviesa una bobina de 100 espiras de 40 cm^2 de superficie cuyo eje forma un ángulo de 60° con la dirección de un campo magnético uniforme de $2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ de módulo.

Aplicando la definición de flujo de un campo magnético:

$$\Phi_B = N \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N A B \cos \theta = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

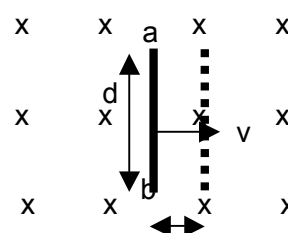
2. Una barra conductora de longitud $d = 1,5 \text{ m}$ se mueve con una velocidad constante $v = 4 \text{ m/s}$ perpendicularmente a un campo magnético de módulo $B = 0,5 \text{ T}$, tal y como se representa en la figura adjunta. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la barra conductora? Justifica cuál de los extremos a o b de la barra conductora está a un potencial eléctrico más alto.



En un tiempo igual a t la barra recorre una distancia $x = v \cdot t$.

El flujo del campo magnético que atraviesa la superficie barrida por la barra en ese tiempo t , como el vector campo magnético es paralelo al vector superficie, es:

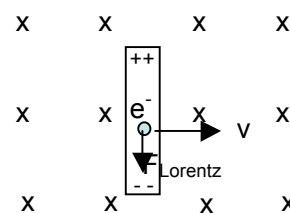
$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot d \cdot x = B \cdot d \cdot v \cdot t$$



Aplicando la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - B \cdot d \cdot v = - 0,5 \text{ T} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 4 \text{ m/s} = - 3 \text{ V}$$

Al moverse la barra hacia la derecha, sobre los electrones de la barra actúa la fuerza de Lorentz, de dirección la de la barra y sentido hacia el extremo inferior, b. Lo que se traduce en un desequilibrio, con acumulación de cargas negativas en la parte inferior y positivas en la superior. Por tanto el extremo superior, a, está a un potencial eléctrico mayor que el inferior, b.



3. Una bobina circular, formada por 100 espiras de 5 cm de radio, se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético de 0,24 T. Determina la fem inducida en la bobina en los casos siguientes referidos a un intervalo de tiempo igual a 0,05 s: se duplica el campo magnético; se anula el campo magnético; se invierte el sentido del campo magnético; se gira la bobina 90° en torno al eje paralelo al campo magnético; se gira la bobina 90° en torno al eje perpendicular al campo magnético.

Inicialmente el ángulo η que forman los vectores campo magnético y superficie es igual a cero.

$$\Phi_{B,1} = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N A B \cos \eta = 100 A \cdot 0,24 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,05 \text{ m})^2 \cos 0^\circ = 0,06 A \pi \text{ Wb}$$

a) Si se duplica el campo magnético, se duplica el flujo que atraviesa la bobina.

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{2 \cdot \Phi_{B,1} - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = - \frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = - \frac{0,06 \cdot \pi \text{ Wb}}{0,05 \text{ s}} = - 1,2 \cdot \pi \text{ V}$$

b) Si se anula el campo magnético, el flujo final es igual a cero.

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{0 - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{0,06 \cdot \pi \text{ Wb}}{0,05 \text{ s}} = 1,2 \cdot \pi \text{ V}$$

c) Al invertir el sentido del campo, el flujo final es igual al inicial cambiado de signo.

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{(- \Phi_{B,1}) - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0,06 \cdot \pi \text{ Wb}}{0,05 \text{ s}} = 2,4 \cdot \pi \text{ V}$$

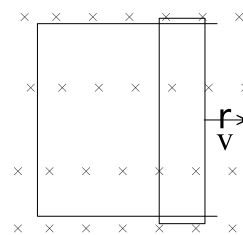
d) No cambia la orientación entre la bobina y el campo magnético.

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = 0$$

e) El flujo final es igual a cero, ya que los dos vectores son perpendiculares.

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{0 - \Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,1}}{\Delta t} = \frac{0,06 \cdot \pi \text{ Wb}}{0,05 \text{ s}} = 1,2 \cdot \pi \text{ V}$$

4. La varilla conductora de la figura adjunta tiene una longitud de 40 cm y se desplaza paralelamente a sí misma y sin rozamiento, con una velocidad de 2,5 cm/s, sobre un conductor en forma de U, de 10 Ω de resistencia eléctrica, situado en el interior de un campo magnético de 0,2 T. Calcula la fuerza magnética que actúa sobre los electrones de la barra y el campo eléctrico en su interior. Halla la fuerza electromotriz que aparece entre los extremos de la varilla y la intensidad de la corriente eléctrica que recorre el circuito y su sentido.)Qué fuerza externa hay que aplicar para mantener el movimiento

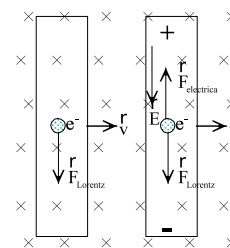


de la varilla? Calcula la potencia necesaria para mantener ese movimiento y la potencia degradada en forma de calor en la resistencia eléctrica del circuito.

Sobre cada electrón del conductor actúa la fuerza de Lorentz, de dirección la de la varilla y sentido, hacia abajo.

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

En módulo : $F = |q| A v A B = 1,6 A 10^{-19} C A 0,025 \text{ m/s } A 0,2 \text{ T} = 8,0 A 10^{-22} \text{ N}$



Como consecuencia de la separación de cargas se origina un campo eléctrico en el interior del conductor. Siempre que la velocidad del conductor sea constante los módulos de la fuerza magnética y de la fuerza eléctrica que actúan sobre los electrones son iguales.

$$F_{\text{Lorentz}} = F_{\text{eléctrica}}; |q| A v A B = |q| A E \text{ Y } E = v A B = 0,025 \text{ m/s } A 0,2 \text{ T} = 5 A 10^{-3} \text{ N/C}$$

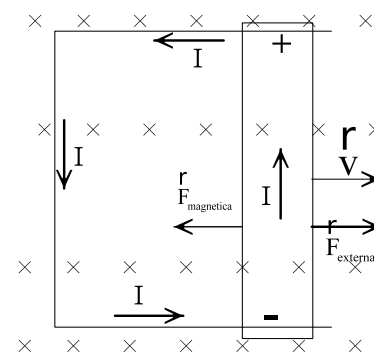
El sentido del campo eléctrico dentro del conductor es desde las cargas positivas a las negativas, es decir, el contrario al de la fuerza eléctrica.

La fuerza electromotriz inducida se determina aplicando la relación entre el campo y el potencial eléctricos. Su valor absoluto es:

$$|\varepsilon| = E A L = 5 A 10^{-3} \text{ N/C } A 0,4 \text{ m} = 2,0 A 10^{-3} \text{ V}$$

Siempre que el conductor se mueva con velocidad constante, la fuerza electromotriz es estable y se origina una corriente eléctrica, cuyo sentido convencional es el contrario al del movimiento de los electrones. Aplicando la ley de Ohm.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{10 \Omega} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$



Al moverse la varilla aumenta el flujo del campo magnético que penetra en la espira. Por la ley de Lenz, la intensidad de la corriente inducida gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj, ya que de esta forma genera un campo magnético inducido que tiene sentido contrario al inductor y así se opone al variación del flujo magnético que la atraviesa.

Sobre la varilla, recorrida por la intensidad de la corriente eléctrica I , actúa una fuerza magnética de sentido opuesto al del vector velocidad. Para mantener su movimiento hay que aplicar una fuerza externa de sentido contrario al de la fuerza magnética, es decir, del mismo sentido que el del vector velocidad. Esta fuerza es la que realiza el trabajo necesario para mantener la corriente eléctrica por el circuito. Su módulo es:

$$F_{\text{externa}} = I A L A B = 2 \text{ m } A 10^{-4} \text{ A } A 0,4 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ T} = 1,6 A 10^{-5} \text{ N}$$

La potencia con la que actúa un agente externo para mantener el movimiento de varilla es:

$$P_{\text{mecánica}} = \vec{F}_{\text{externa}} \cdot \vec{v} = 1,6 A 10^{-5} \text{ N } A 0,025 \text{ m/s} = 4,0 A 10^{-7} \text{ W}$$

Esta potencia que suministra la varilla como generador, se transforma en forma de calor en la resistencia eléctrica del circuito.

$$P_{\text{eléctrica}} = I^2 A R = (2 \cdot 10^{-4} \text{ A})^2 A 10 \Omega = 4,0 A 10^{-7} \text{ W}$$

5. Un solenoide de 20Ω de resistencia eléctrica, está formado por 500 espiras circulares de 2,5 cm de diámetro. El solenoide está situado en un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo el eje del solenoide paralelo a la dirección del campo. Si el campo magnético disminuye uniformemente hasta anularse en 0,1 s, determina: a) El flujo inicial que atraviesa el solenoide

y la fuerza electromotriz inducida. b) La intensidad de la corriente eléctrica recorrida por el solenoide y la carga eléctrica transportada en ese intervalo de tiempo.

El radio de las espiras es: 1,25 cm

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$$\Phi_{B, \text{inicial}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \varphi = 500 \cdot 0,3 \text{ T} \cdot \pi \cdot (1,25 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 0^\circ = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Aplicando la ley de Fraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{\Phi_{B, \text{final}} - \Phi_{B, \text{inicial}}}{\Delta t} = - \frac{0 - 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}}{0,1 \text{ s}} = 0,74 \text{ V}$$

Aplicando la ley de Ohm: $\varepsilon = R \cdot I$; $0,74 \text{ V} = 20 \Omega \cdot I \Rightarrow I = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ A}$

Y la carga eléctrica transportada es: $Q = I \cdot t = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot 0,1 = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

6. En una región del espacio hay un campo magnético cuyo módulo varía con el tiempo según la ecuación: $B(t) = 1,5 \cdot (1 - 0,9 \cdot t) \text{ T}$. En esa misma región se sitúa una espira circular de cobre de radio $a = 15 \text{ cm}$, colocada de forma que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Calcula el flujo del campo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y la fuerza electromotriz inducida en la espira.

Aplicando la definición del flujo del campo magnético y como la superficie de la espira permanece constante y como el vector campo magnético y el vector superficie son paralelos en todo instante, se tiene:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = 1,5 \cdot (1 - 0,9 \cdot t) \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 3,38 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot (1 - 0,9 \cdot t) \text{ Wb}$$

La fuerza electromotriz inducida en la espira se calcula aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - 3,38 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot (-0,9) = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

7. El flujo magnético que atraviesa una espira varía con el tiempo, en unidades del SI, según la expresión $\Phi = 3 \cdot t^2 - 10 \text{ t}^4$. Calcula el valor de la fuerza electromotriz inducida en el instante $t = 2 \text{ s}$.

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - (6 \cdot t - 40 \cdot t^3)$ en unidades SI

Y en el instante pedido: $\varepsilon_{t=2} = - (6 \cdot 2 - 40 \cdot 2^3) \text{ V} = - 308 \text{ V}$

8. Un campo magnético uniforme de 0,2 T forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 espiras y 4 cm de radio. a) Calcula el flujo magnético que atraviesa la bobina. b) Si el campo magnético desciende linealmente a cero en 2 s, ¿cuál es el valor de la fuerza electromotriz inducida?

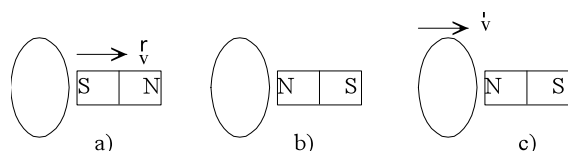
Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$$\Phi_{B, \text{inicial}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \varphi = 300 \cdot 0,2 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,04 \text{ m})^2 \cdot \cos 30^\circ = 0,26 \text{ Wb}$$

Aplicando la ley de Fraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

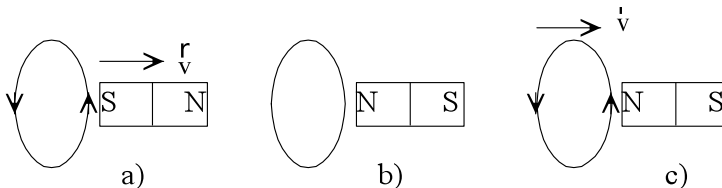
$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{\Phi_{B, \text{final}} - \Phi_{B, \text{inicial}}}{\Delta t} = - \frac{0 - 0,26 \text{ Wb}}{2 \text{ s}} = 0,13 \text{ V}$$

9. Se tiene una espira circular y una barra imán. Justifica el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica inducida en la espira en los tres casos



representados en la figura adjunta.

Al alejar el polo sur de la barra imán, disminuye el flujo magnético que la atraviesa y la corriente gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético inducido del mismo sentido que el inductor y se opone a la variación del flujo magnético.



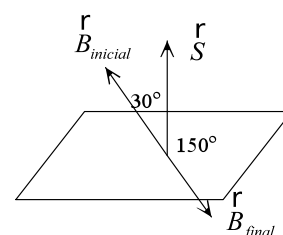
En la figura central no se genera corriente eléctrica, ya que no hay variación del flujo magnético.

Al acercar la espira al polo norte de la barra imán, aumenta el flujo magnético que la atraviesa y la corriente gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético inducido de sentido contrario que el inductor y se opone a la variación del flujo magnético.

10. Considérese una espira conductora, cuadrada y horizontal, de 10 m de lado. Un campo magnético uniforme, de 10^{-7} T, atraviesa la espira de abajo hacia arriba formando un ángulo de 30° con la vertical ascendente. A continuación invertimos el sentido de ese campo, empleando 0,1 s en tal proceso. Calcular: a) el flujo magnético del campo inicial. b) La fuerza electromotriz inducida, generada por la inversión.

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$$\Phi_{B, \text{inicial}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi = 10^{-7} \text{ T} \cdot (10 \text{ m})^2 \cdot \cos 30^\circ = 8,66 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$



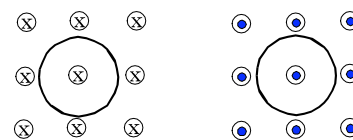
Aplicando la ley de Faraday y como el flujo del campo magnético final es igual al flujo inicial pero cambiado de signo, se tiene:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{\Phi_{B, \text{final}} - \Phi_{B, \text{inicial}}}{\Delta t} = - \frac{-2 \cdot \Phi_{B, \text{inicial}}}{0,1 \text{ s}} = \frac{2 \cdot 8,66 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{0,1 \text{ s}} = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

11. Una bobina circular está inmersa en un campo magnético uniforme B, de valor 1 T. Este campo es paralelo al eje de la bobina y, por tanto, perpendicular al plano que contiene a cada espira. La bobina posee 100 espiras, tiene un diámetro de $2 \cdot 10^{-2}$ m y una resistencia de 50 Ω . Supongamos que, repentinamente, se invierte el sentido del campo B. Calcular entonces el valor Q de la carga total que pasa a través de la bobina.

El flujo que atraviesa la superficie de la espira pasa de su valor máximo a su valor mínimo. Si inicialmente el vector campo magnético y el vector superficie forman un ángulo de 0° , en la situación final es de 180° . Por tanto:

$$\Phi_{B, \text{inicial}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \quad \text{y} \quad \Phi_{B, \text{final}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B \cdot S$$



Aplicando la ley de Faraday, la ley de Ohm y la definición de intensidad de la corriente, se tiene:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = I \cdot R = \frac{Q}{\Delta t} R$$

La carga transportada es: $Q = - \frac{\Delta \Phi_B}{R}$

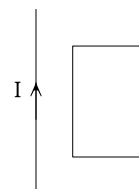
Para el caso que nos ocupa: $Q = - \frac{\Delta \Phi_B}{R} = - \frac{-B \cdot S - B \cdot S}{R} = \frac{2 \cdot B \cdot S}{R}$

Y para una bobina con N de espiras: $Q = \frac{2 \cdot B \cdot N \cdot S}{R}$

Sustituyendo: $Q = \frac{2 \cdot 1\text{T} \cdot 100 \cdot \pi \cdot (10^{-2}\text{m})^2}{50\ \Omega} = 1,3 \cdot 10^{-3}\text{ Culombios (C)}$

La carga es independiente del tiempo que tarde en producirse la variación del flujo. Si la variación es rápida la intensidad es elevada y si es lenta la intensidad es pequeña.

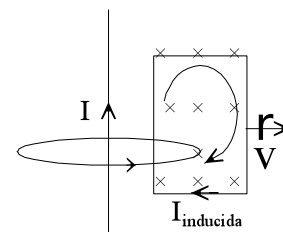
12. La figura adjunta muestra un hilo conductor rectilíneo y una espira conductora. Por el hilo pasa una corriente continua. Justifica si se inducirá corriente en la espira en los casos siguientes: a) La espira se encuentra en reposo. b) La espira se mueve hacia arriba paralelamente al hilo. c) La espira se mueve hacia la derecha.



El hilo por el que pasa corriente genera en su entorno un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica. En el ejemplo penetran en el papel en la posición de la espira.

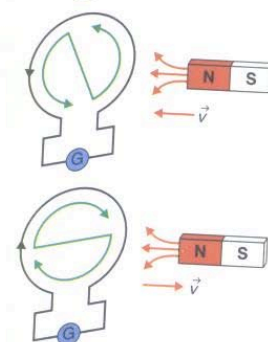
En los casos a y b no hay variación del flujo del campo magnético que atraviesa la espira y por ello no se induce ninguna corriente eléctrica.

En el caso c hay una disminución del flujo del campo magnético que atraviesa a la espira y se genera una corriente inducida que se opone a la causa que la produce reforzando el campo magnético en esa posición y por ello se induce una corriente eléctrica en el sentido de las agujas del reloj.



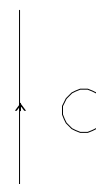
13. Razona el sentido de la corriente inducida en una espira cuando se acerca el polo norte de una barra imán a una espira y cuando se aleja el plano de la espira del citado polo norte de la barra imán.

Al acercar el polo norte de una barra imán a una espira aumenta el flujo del campo magnético que pasa a su través. Según la ley de Lenz, el campo magnético producido por la corriente inducida se opone al aumento del flujo magnético que la atraviesa, por lo que tiene sentido contrario al del campo magnético inductor. Ello se logra produciendo una corriente inducida, vista desde el imán, que circule en sentido contrario al de las agujas del reloj; es decir, aparece un polo norte en la cara de la espira enfrentada a la barra imán.



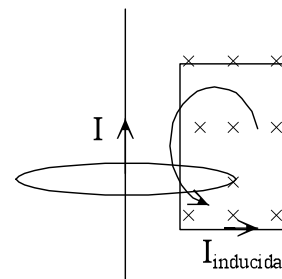
Si se aleja el polo norte de la barra imán disminuye el flujo del campo magnético que atraviesa la espira. La corriente inducida cambia de sentido y se opone a la disminución de flujo generando un campo magnético del mismo sentido que el inductor. El sentido de la, intensidad es el mismo que el de las agujas del reloj, así el campo magnético inducido en la espira presenta su polo sur en la cara enfrentada a la barra imán.

14. Por un hilo conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de intensidad constante. ¿Se induce alguna corriente en la espira conductora que aparece en la figura? Si dicha intensidad no fuera constante sino que aumentara con el tiempo ¿se induciría corriente en la espira? Indique en su caso el sentido en el que circularía la



corriente inducida. Nota El hilo y la espira están contenidos en el mismo plano, y ambos en reposo.

El hilo por el que pasa corriente genera en su entorno un campo magnético, cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo y cuyo sentido es el indicado por el giro de un sacacorchos que avanza según la intensidad de la corriente eléctrica. En el ejemplo penetran en el papel en la posición de la espira.



En el primer caso, no hay variación de la intensidad ni movimiento relativo entre el hilo y la espira. Por ello no hay variación del flujo del campo magnético que atraviesa a la espira y no se induce ninguna intensidad de la corriente eléctrica.

Al aumentar la intensidad de la corriente eléctrica aumenta el módulo del campo magnético en la zona de la espira y aumenta el flujo del campo magnético que la atraviesa. De acuerdo con la ley de Lenz se genera una intensidad de la corriente eléctrica que gira en sentido contrario al de las agujas del reloj. De esta forma genera un campo magnético que sale del plano del papel, hacia el observador, y así se opone al aumento de flujo del campo inductor.

15. En el plano XY se tiene una espira circular de 2 cm de radio. Simultáneamente se tiene un campo magnético uniforme cuya dirección forma un ángulo de 30° con el semieje positivo y cuyo módulo es $B = 3 \cdot e^{-t/2}$ T, donde t es el tiempo. Calcula el flujo del campo magnético y la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante $t = 0$ s. Indica mediante un dibujo, el sentido de la corriente inducida en la espira en ese instante.

Aplicando la definición de flujo del campo magnético a través de una superficie:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi = 3 \cdot e^{-t/2} \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cos 30^\circ = 3,26 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2} \text{ Wb}$$

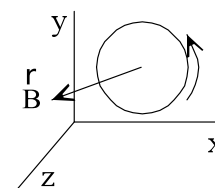
Y en el instante inicial: $\Phi_{B,0} = 3,26 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$

Aplicando la ley de Faraday y como el flujo del campo magnético final es igual a cero:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -3,26 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-t/2} = 1,63 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-t/2} \text{ V}$$

Y en el instante inicial: $\varepsilon_{t=0} = 1,63 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

El flujo del campo magnético disminuye en el transcurso del tiempo. Aplicando la ley de Lenz la intensidad de la corriente inducida debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esta forma genera un campo magnético inducido del mismo sentido que el inductor y así se opone a la variación de flujo



16. Una espira circular se coloca en una zona de campo magnético uniforme B_0 perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia adentro tal como se muestra en la figura. Determine en qué sentido circulará la corriente inducida en la espira en los siguientes casos: a) aumentamos progresivamente el radio de la espira manteniendo el valor del campo. b) mantenemos el valor del radio de la espira pero vamos aumentando progresivamente el valor del campo. Razone su respuesta en ambos casos.



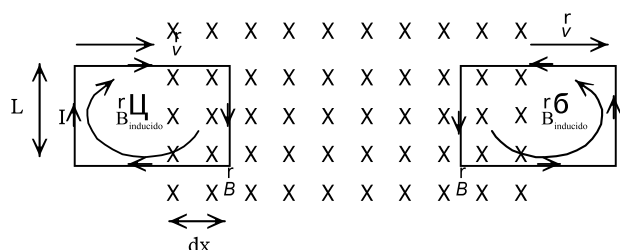
Si se aumenta al radio de la espira, aumentan las líneas de campo magnético que la atraviesan y

según la ley de Lenz, la intensidad de la corriente eléctrica debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esa forma genera dentro de la espira un campo magnético dirigido hacia el observador que se opone a la variación del flujo del campo magnético.

c) Lo mismo que el apartado b). Si aumenta el valor del campo magnético, aumentan las líneas de campo magnético que la atraviesan y según la ley de Lenz, la intensidad de la corriente eléctrica debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esa forma genera dentro de la espira un campo magnético dirigido hacia el observador que se opone a la variación del flujo del campo magnético.

17. Una espira cuadrada de 30 cm de lado, se mueve con velocidad constante de 10 m/s y penetra en un campo magnético de 0,5 T perpendicularmente al plano de la espira y dirigido hacia el observador. a) Explique, razonadamente, qué ocurre en la espira desde que comienza a entrar en la región del campo. ¿Qué ocurrirá si la espira, una vez en el interior del campo, saliera del mismo? b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira mientras está entrando en el campo?

Al penetrar la espira dentro del campo magnético aumenta el flujo magnético que la atraviesa. Por la ley de Lenz, el campo magnético inducido es de signo contrario al campo inductor y por ello la intensidad de la corriente tiene el sentido de las agujas del reloj.



Cuando la espira está completamente dentro del campo magnético desaparece la corriente inducida, pues no hay variación del flujo del campo magnético.

Al salir del campo magnético hay una disminución del flujo del campo magnético. La espira se opone a la variación del flujo, apareciendo una corriente inducida de sentido contrario al de las agujas del reloj. Así se genera un campo magnético del mismo sentido que el campo inductor.

El flujo elemental que atraviesa la espira al penetrar en el campo magnético es:

$$d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B A dS \cdot \cos 0^\circ = B \cdot dS$$

Si el conductor tiene una longitud L y se traslada una distancia dx con velocidad constante, entonces:

$$dS = L A dx; \quad dx = v A dt$$

Como el flujo magnético que atraviesa la superficie que delimita el conductor disminuye al aumentar la distancia recorrida, resulta que:

$$d\Phi_B = - B A L A dx = - B A L A v A dt$$

Aplicando la ley de Faraday: la fuerza electromotriz que se induce en la espira es:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - B A L A v = - 0,5 \text{ T} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s} = - 1,5 \text{ V}$$

18. Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente horizontal, gira a 1200 rpm, en torno a uno de sus lados, en un campo magnético uniforme de 0,2 T, de dirección vertical. a) Calcula el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira. b) Cómo se modifica la fuerza electromotriz inducida en la espira si se reduce la velocidad de rotación a la mitad?

a) La frecuencia en unidades SI es: $\nu = 1200 \text{ rpm} = 20 \text{ Hz}$

El flujo del campo magnético que atraviesa la espira es:

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos \theta = N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Su valor máximo es: $\varepsilon_0 = B \cdot S \cdot \omega = B \cdot S \cdot 2 \cdot \pi \cdot v = 0,2 \text{ T} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ Hz} = 0,08 \cdot \pi \text{ V}$

b) Si la velocidad de rotación se reduce a la mitad, la frecuencia lo hace en la misma proporción y la fuerza electromotriz inducida es también la mitad.

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0/2 = 0,04 \cdot \pi \text{ V}$$

19. Un alternador está formado por un cuadro 200 espiras cuadradas de 5 cm de lado, situado en el seno de un campo magnético de 0,5 T de módulo. Calcula la velocidad angular con la que deben girar las espiras para generar una fuerza electromotriz inducida de 230 V de valor máximo. ¿Cuál es el valor de la frecuencia de dicha corriente?

El flujo del campo magnético que atraviesa el cuadro del alternador es:

$$\Phi_B = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \theta = N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Su valor máximo es: $\varepsilon_0 = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$

Sustituyendo: $230 \text{ V} = 200 \text{ espiras} \cdot 0,5 \text{ T} \cdot (0,05 \text{ m})^2 \cdot \omega \Rightarrow \omega = 920 \text{ rad/s}$

La frecuencia de la corriente es la misma que la frecuencia de giro del alternador:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v; 920 \text{ rad/s} = 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow v = 146,4 \text{ Hz}$$

20. Si se aumenta la velocidad de giro de un alternador, indica cómo se modifica la diferencia de potencial, intensidad, potencia y frecuencia de la corriente eléctrica producida.

Aplicando la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida en un generador es:

$$\varepsilon = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = N \cdot B \cdot S \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot v \cdot t)$$

Con N el número de espiras del cuadro, B el campo magnético, S la superficie de cada espira, ω la velocidad angular de giro y v la frecuencia de giro.

Por tanto, un aumento de la frecuencia de giro produce un aumento de la diferencia de potencial.

Si el circuito externo es el mismo, por la ley de Ohm, $I = \frac{V}{R}$, un aumento de la diferencia de potencial produce un aumento de la intensidad que recorre el circuito externo.

En el circuito externo, lo que se mantiene constante es su resistencia eléctrica y la característica del generador es su diferencia de potencial. Como $P = I \cdot V = \frac{V^2}{R}$, un aumento de la diferencia de potencial proporciona más potencia al circuito.

Como en cada vuelta del cuadro la fuerza electromotriz inducida y la intensidad cambian dos veces de sentido, en cada segundo las dos magnitudes cambian $2 \cdot v$ veces de sentido. Por tanto, un aumento de la frecuencia de giro produce un aumento mayor de la frecuencia de la corriente alterna.

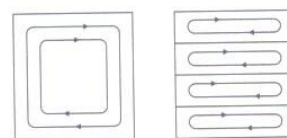
INVESTIGA**1. ¿Por qué se les llama corrientes parásitas o turbillonarias?**

Cuando un campo magnético variable intersecta un conductor, o viceversa. El movimiento relativo causa una circulación de electrones, produciendo una corriente eléctrica dentro del conductor. Estas corrientes son más intensas cuanto mayor sea la variación del flujo del campo magnético dentro del conductor y mayor sea su conductividad.

Se les llama corrientes parásitas porque generalmente son indeseables ya que llevan asociada una pérdida de potencia eléctrica por efecto Joule. Se denominan también turbillonarias ya que forman circuitos cerrados dispersos por todo el material, a modo de torbellinos.

2. ¿Por qué los núcleos de hierro de los transformadores se componen de láminas unidas?

Como puede observarse en la figura adjunta, el que los núcleos de hierro de las bobinas de los transformadores estén laminados limita las corrientes de Foucault dentro del material.



Estas pérdidas son minimizadas utilizando núcleos con materiales magnéticos que tengan baja conductividad eléctrica, como por ejemplo ferrita, o utilizando delgadas hojas de material magnético, conocido como laminados. Los electrones no pueden atravesar la capa aisladora entre los laminados y por lo tanto no pueden circular en arcos abiertos grandes.

3. Cita alguna de las aplicaciones de las corrientes de Foucault

Las corrientes de Foucault se utilizan en los hornos de inducción para todo tipo de metales, cocinas vitrocerámica de inducción, sistemas de disminución de la velocidad en vehículos pesados y trenes.

La cocción por inducción posee numerosas ventajas respecto a los sistemas tradicionales. El calentamiento de los recipientes es más rápido que con otros sistemas. El riesgo de sufrir quemaduras es más reducido debido a la menor temperatura de la zona de cocción de la superficie de la placa. Esta menor temperatura de la placa redonda en una limpieza más fácil. Tienen una mayor eficiencia energética ya que el foco de calor se adapta al tamaño del recipiente.

TEST DE EVALUACIÓN

1. Completa la frase: La presencia de _____ en una espira se debe a la _____ de las líneas de campo magnético _____.

La presencia de una corriente inducida en una espira se debe a la variación de las líneas de campo magnético que la atraviesan.

2. Justifica si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas: a) Aparece una corriente inducida en una espira cuando se coloca cerca de un potente imán. b) El flujo de un campo magnético a través de una superficie cerrada es igual a cero. c) Si a una espira se le acerca el polo norte de un imán, la intensidad inducida, vista desde el imán, gira en el sentido de las agujas del reloj. d) El valor de la fuerza electromotriz inducida en una espira depende de cómo se produzca la variación del flujo magnético.

a) Falso.

Si no hay movimiento relativo no se produce corriente inducida, pues no hay variación del flujo magnético a través de la espira.

b) Verdadero.

Le flujo de un campo magnético a través de una superficie cerrada es igual a cero porque al ser cerradas las líneas de campo magnético, las mismas líneas que entran en la superficie salen de ella.

c) Falso.

La intensidad de la corriente inducida debe girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj para así crear un campo magnético de sentido contrario al inductor y así oponerse a la variación del flujo magnético.

d) Falso.

Según la ley de Faraday, el valor de la fuerza electromotriz inducida en una espira es independiente de las causas que provoquen la variación del flujo magnético.

3. Una barra conductora de longitud 1 m se mueve con una velocidad constante $v = 2$ m/s perpendicularmente a un campo magnético de módulo $B = 0,5$ T. El campo eléctrico en su interior es: a) 1,5 N/C; b) 0,5 N/C; c) 1 N/C; d) 0 N/C.

La solución correcta es la c)

En el equilibrio la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones y la fuerza con la que actúa el campo eléctrico tienen el mismo módulo:

$$F_{\text{Lorentz}} = F_{\text{eléctrica}}; |q| \cdot v \cdot B = |q| \cdot E \Rightarrow E = v \cdot B = 2 \text{ m/s} \cdot 0,5 \text{ T} = 1 \text{ N/C}$$

4. Una bobina de 1000 espiras de 10 cm de radio está colocada perpendicularmente a un campo magnético de 0,3 T. El flujo magnético que la atraviesa es: a) 9,4 Wb; b) 0,94 Wb; c) $9,4 \cdot 10^{-3}$ Wb; d) 4,7 Wb.

La solución correcta es la a)

Aplicando la definición del flujo de un campo magnético:

$$\Phi = N \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta = 1000 \cdot 0,3 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot \cos 0^\circ = 9,4 \text{ Wb}$$

5. En una bobina de 20 espiras se induce una fuerza electromotriz de 1 V. En las mismas condiciones, en una bobina de 40 espiras se inducirá una fuerza electromotriz de: a) 0,5 V; b) 1 V; c) 4 V; d) 2 V.

La solución correcta es la d)

Según la ley de Faraday la fuerza electromotriz inducida es proporcional al número de espiras de la bobina, por lo que la fuerza electromotriz inducida en la segunda bobina se multiplica por dos.

6. Una bobina de 100 espiras de 1 cm de radio se encuentra situada perpendicularmente en el seno de un campo magnético de 0,5 T. Si el campo magnético se anula en 1 ms, la fuerza electromotriz inducida es: a) 157 V; b) 1,57 V; c) 0,15 V; d) 15,7 V.

La solución correcta es la d)

El flujo del campo magnético inicial que atraviesa la bobina es:

$$\Phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 0,5T \cdot \pi \cdot (0,01m)^2 \cdot \cos 0^\circ = 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

El flujo magnético final es igual a cero.

Aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = - \frac{\Phi_{B,\text{final}} - \Phi_{B,\text{inicial}}}{\Delta t} = - \frac{0 \text{ Wb} - 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}}{10^{-3} \text{ s}} = 15,7 \text{ V}$$

7. Un alternador de 10 espiras de 5 cm de lado gira con una frecuencia de 100 Hz en un campo magnético de 0,8 T. Si la resistencia eléctrica es de 70 Ω, el valor máximo de la intensidad es: a) 0,9 A; b) 0,18 A; c) 1,8 A; d) 0,36 A.

La solución correcta es la b)

El flujo del campo magnético que atraviesa el cuadro del alternador es:

$$\Phi_B = N \cdot B \cdot A \cdot S \cdot A \cdot \cos n = N \cdot B \cdot A \cdot S \cdot A \cdot \cos (\omega \cdot A \cdot t)$$

Aplicando la ley de Faraday: $\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d[N \cdot B \cdot S \cdot \cos (\omega \cdot t)]}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin (\omega \cdot t)$

Aplicando la ley de Ohm: $\varepsilon = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{N \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} \sin (\omega \cdot A \cdot t)$

Cuyo valor máximo es:

$$I_0 = \frac{N \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot v \cdot N \cdot B \cdot S}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ espiras} \cdot 0,8 \text{ T} \cdot (0,05 \text{ m})^2}{70 \Omega} = 0,18 \text{ A}$$

8. Completa la frase: El _____ de la intensidad de la corriente eléctrica inducida es tal que _____ creado por ella se _____ del flujo magnético que la produce.

El sentido de la intensidad de la corriente eléctrica inducida es tal que el campo magnético creado por ella se opone a la variación del flujo magnético que la produce.

9. Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones: a) El valor de la fuerza electromotriz inducida en un circuito no depende de la rapidez de la variación del flujo magnético. b) Si se acerca un imán a una espira, al alejarlo la corriente inducida cambia de sentido. c) Un alternador y una dinamo produce corriente alterna, pero por métodos diferentes. d) La fuerza electromotriz inducida en una espira depende de la cantidad de espiras que posea.

a) Falso

El valor de la fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual a la rapidez de la variación del flujo magnético que pasa a su través.

b) Verdadero.

Si se acerca un imán a una espira, al alejarlo la corriente inducida cambia de sentido, es una de las experiencias de Faraday.

c) Falso.

Un alternador produce corriente alterna y una dinamo produce corriente continua. La única diferencia entre los dos aparatos es la conexión del circuito externo a los terminales de la espira que se mueve en el seno de un campo magnético.

d) Verdadero.

La fuerza electromotriz inducida en una espira depende de la cantidad de espiras que posea ya que así lo indica la ley de Faraday.

10. Una espira de 10 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético de 0,2 T. Si la espira gira 90° en torno a un diámetro en 1 ms, la fuerza electromotriz inducida es: a) 3,2 V; b) 6,3 V; c) 12,6 V; d) 1,5 V.

La solución correcta es la b)

El flujo del campo magnético inicial que atraviesa la bobina es:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi = 0,2 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot \cos 0^\circ = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

El flujo magnético final es igual a cero.

$$\text{Aplicando la ley de Faraday: } \varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{B,\text{final}} - \Phi_{B,\text{inicial}}}{\Delta t} = -\frac{0 \text{ Wb} - 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-3} \text{ s}} = 6,3 \text{ V}$$

Física

Unidad didáctica 9

La luz y sus propiedades

SOLUCIONES UNIDAD 9. LA LUZ Y SUS PROPIEDADES

CUESTIONES INICIALES

1.) Qué diferencias hay entre las ondas luminosas y las ondas sonoras?

Las ondas luminosas son ondas electromagnéticas transversales, que se propagan con diferente velocidad por los medios materiales transparentes y que, además, pueden propagarse por el vacío, donde lo hacen a la velocidad constante de 300 000 km/s.

Las ondas sonoras son ondas de naturaleza mecánica, son longitudinales, no se propagan por el vacío y su velocidad depende del medio y de otras variables, como, por ejemplo, la temperatura.

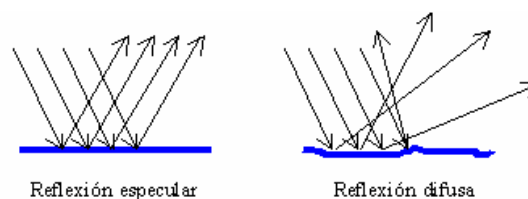
2.) En qué consiste el fenómeno del arco iris?

El arco iris se debe a la dispersión de la luz en las gotas de lluvia cuando el Sol está a nuestra espalda. Las gotas de lluvia separan la luz blanca incidente en las luces elementales de diferentes colores (rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta) caracterizados por su respectiva longitud de onda.

3. La nieve refleja casi toda la luz que incide en su superficie. ¿Por qué no nos vemos reflejados en ella?

La nieve no forma una superficie plana y pulida de modo que la reflexión que produce su superficie no es especular sino difusa.

Esto quiere decir que un haz de rayos incidentes paralelos se reflejan en todas las direcciones y el ojo no puede percibir una imagen reflejada.



ACTIVIDADES FINALES

1. Deduce que para un rayo de luz que atraviesa dos medios materiales se cumple la relación $\lambda_1 \cdot n_1 = \lambda_2 \cdot n_2$.

La relación entre la velocidad de propagación de la luz en un medio con su frecuencia es: $v = \lambda \cdot \nu$

Si la luz se propaga de un medio 1 a otro medio 2, y como la frecuencia es una característica del foco y no del medio, se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \lambda_1 \cdot \nu \\ v_2 = \lambda_2 \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

Aplicando la definición de índice de refracción: $n = \frac{c}{v}$ y sustituyendo:

$$\frac{\frac{c}{n_1}}{\lambda_1} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\lambda_2}; \frac{1}{n_1 \cdot \lambda_1} = \frac{1}{n_2 \cdot \lambda_2} \Rightarrow n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2$$

2. La longitud de onda de luz láser roja helio-neón en el aire es de 632,8 nm. Calcula la longitud de onda y la velocidad con la que se propaga por un vidrio de índice de refracción 1,5.

La frecuencia de una radiación no depende del medio de propagación por ser una característica de la fuente emisora. La velocidad de propagación y la longitud de onda dependen del medio transmisor. Como la velocidad de propagación de la luz en el vacío es prácticamente iguala a la del aire, resulta:

$$v = \frac{c}{\lambda_{\text{vacío}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4,73 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Aplicando la definición de índice de refracción de un medio respecto del vacío, se tiene:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{c}{v_{\text{vidrio}}} \Rightarrow v_{\text{vidrio}} = \frac{c}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{c}{v_{\text{vidrio}}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}} \cdot v}{\lambda_{\text{vidrio}} \cdot v} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{\lambda_{\text{vidrio}}} \Rightarrow \lambda_{\text{vidrio}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{632,8 \text{ nm}}{1,5} = 421,9 \text{ nm}$$

3. Una luz monocromática tiene una longitud de onda de 633 nm en el aire y de 474 nm en el humor acuoso del interior del ojo humano. Calcula el índice de refracción del humor acuoso del ojo humano. Determina la frecuencia de la radiación y la velocidad de propagación de esa luz por el ojo.

La relación entre la velocidad de propagación de la luz en un medio con su frecuencia es: $v = \lambda \cdot \nu$
 $c = \lambda_{\text{aire}} \cdot \nu$; $v_{\text{ojo}} = \lambda_{\text{humor acuoso}} \cdot \nu$

Como la frecuencia es una característica del foco y no del medio, resulta que:

$$c = \lambda_{\text{aire}} \cdot \nu; 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 633 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \nu \Rightarrow \nu = 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{v_{\text{ojo}}}{\lambda_{\text{humor acuoso}}}; \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{633 \text{ nm}} = \frac{v_{\text{ojo}}}{474 \text{ nm}} \Rightarrow v_{\text{ojo}} = 2,246 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Y el índice de refracción es: } n_{\text{humor acuoso}} = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,246 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,34$$

4. Determina la velocidad de la luz en el etanol teniendo en cuenta que su índice de refracción absoluto es $n = 1,36$. Un haz de luz roja cuya longitud de onda en el aire es de 695 nm penetra en dicho alcohol. Si el ángulo de incidencia es de 30° , ¿cuál es el ángulo de refracción? ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del haz de luz en el alcohol?

$$\text{Aplicando la definición de índice de refracción: } n = \frac{c}{v}; 1,36 = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{v} \Rightarrow v = 2,21 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Aplicando la ley de Snell: } n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{alcohol}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 30^\circ = 1,36 \cdot \sin r \Rightarrow r = 21,57^\circ$$

$$\text{La frecuencia de la luz es la misma en el aire que en el alcohol: } \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{695 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4,32 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{Y la longitud de onda es: } \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2,21 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,32 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 5,12 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 512 \text{ nm}$$

5. Un rayo de luz que se propaga por el aire incide con un ángulo de 40° con la recta normal a la superficie de separación con un medio en el ángulo de refracción es de 26° con la citada recta normal. Calcula el índice de refracción del medio.

Aplicando la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{medio}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 40^\circ = n_{\text{medio}} \cdot \sin 26^\circ \Rightarrow n_{\text{medio}} = 1,47$$

6. La ecuación $E_{x,t} = 10^{-3} \text{ A} \cos(5 \text{ A } 10^{10} \text{ A } t - 200 \text{ A } x)$, en unidades del SI, representa la propagación del campo eléctrico de una onda electromagnética plana por un medio determinado. Este campo eléctrico está confinado en el plano XY. Calcula la frecuencia y la longitud de onda de esa onda electromagnética. Determina el índice de refracción del medio. Escribe la expresión del campo magnético de la onda e indica en que plano está confinado.

La expresión general de un campo eléctrico es: $E_{x,t} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$

Comparando ambas expresiones, resulta que:

$$\omega = 5 \text{ A } 10^{10} \text{ rad/s} = 2 \text{ A } \pi \text{ A } v \Psi v = 8 \text{ A } 10^9 \text{ Hz}; k = 200 \text{ m}^{-1} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \Psi \lambda = 3,1 \text{ A } 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{La velocidad de propagación es: } c = \lambda \text{ A } v = \frac{\omega}{k} = \frac{5 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}}{200 \text{ m}^{-1}} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Y el índice de refracción del medio es: } n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,2$$

Las ondas que describen los campos eléctrico y magnético están en fase y sus módulos están relacionados por:

$$E_0 = v \cdot B_0; 10^{-3} \text{ N/C} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot B_0 \Rightarrow B_0 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ T}$$

La ecuación del campo magnético es: $B_{x,t} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cos(5 \text{ A } 10^{10} \text{ A } t - 200 \text{ A } x)$

Está confinado en el plano ZX los vectores \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación.

7. Una onda electromagnética que tiene una longitud de onda de 10 nm está polarizada linealmente y se propaga en el vacío en el sentido positivo del eje OX. Si la amplitud del campo eléctrico es $E_0 = 24 \text{ N/C}$ y vibra en el plano XY, escribe las ecuaciones vectoriales del campo eléctrico y del campo magnético.

Las constantes que permiten describir las ecuaciones de los campos son:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{10 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 2 \cdot 10^8 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

$$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = c \cdot k = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \pi \text{ m}^{-1} = 6 \cdot 10^{16} \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La amplitud del campo magnético es:

$$E_0 = c \cdot B_0; 24 \text{ N/C} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot B_0 \Rightarrow B_0 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

El campo eléctrico vibra en el plano XY y perpendicular al eje X, y su expresión vectorial es:

$$\vec{E}_{x,t} = 24 \text{ N/C} \cdot \cos(6 \cdot 10^{16} \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot x) \vec{j} \text{ en unidades SI}$$

El campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación, luego vibra en el plano ZX y su expresión vectorial es:

$$\vec{B}_{x,t} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ T} \cdot \cos(6 \cdot 10^{16} \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot x) \vec{k} \text{ en unidades SI}$$

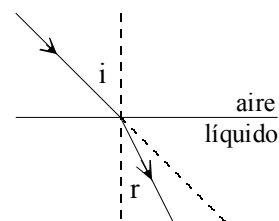
8. Un rayo luminoso incide sobre una superficie plana de separación aire-líquido. Cuando el ángulo de incidencia es de 45° el de refracción vale 30° ¿Qué ángulo de refracción se produciría si el haz incidiera con un ángulo de 60° .

a) Aplicando la ley de Snell a la primera refracción se calcula el índice de refracción del líquido.

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{líquido}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 45^\circ = n_{\text{líquido}} \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow n_{\text{líquido}} = 1,4$$

Aplicando nuevamente la ley de Snell a la segunda refracción se calcula el nuevo ángulo de refracción:

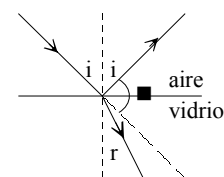
$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{líquido}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 60^\circ = 1,4 \cdot \sin r \Rightarrow r = 38,2^\circ$$



9. Un rayo de luz se propaga por el aire e incide con un ángulo de 30° con la dirección normal a la superficie de un vidrio. Si el índice de refracción en el vidrio es 1,5. Calcula el ángulo que forman el rayo reflejado y el rayo refractado.

El ángulo de reflexión es de 30° y el de refracción se calcula aplicando la ley de Snell.

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 30 = 1,5 \cdot \sin r \Rightarrow r = 19,47^\circ$$



Si φ es el ángulo pedido, de la figura adjunta se deduce que:

$$i + \varphi + r = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ - 30^\circ - 19,47^\circ = 130,53^\circ$$

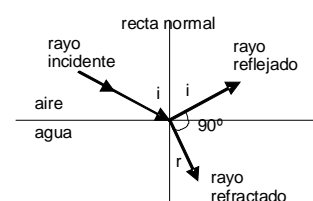
10. Un rayo de luz incide sobre una superficie plana de un vidrio con un índice de refracción $n=1,5$. Si el ángulo formado por el rayo reflejado y el refractado es de 90° , calcule los ángulos de incidencia y de refracción.

Como el ángulo de reflexión, i , es igual al ángulo de incidencia, de la figura adjunta se deduce que:

$$180^\circ = i + 90^\circ + r; 90^\circ = i + r \Rightarrow r = 90^\circ - i$$

Aplicando la ley de Snell a la refracción, resulta que:

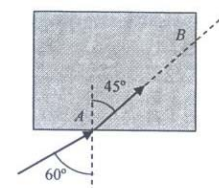
$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin r$$



$$\text{Sustituyendo: } 1 \cdot \sin i = 1,5 \cdot \sin (90^\circ - i) \Rightarrow \sin i = 1,5 \cdot \cos i$$

$$\text{Operando: } \text{tag } i = 1,5 \Rightarrow i = \text{arc tg } 1,5 = 56,31^\circ; r = 90^\circ - i = 33,69^\circ$$

11. Sobre un prisma cúbico de índice de refracción n situado en el aire incide un rayo luminoso con un ángulo de 60° . El ángulo que forma el rayo emergente con la normal es de 45° . Determina el índice de refracción n del prisma. ¿Qué ángulo forman entre sí la dirección del rayo incidente en A con la dirección del rayo emergente en B de la figura?

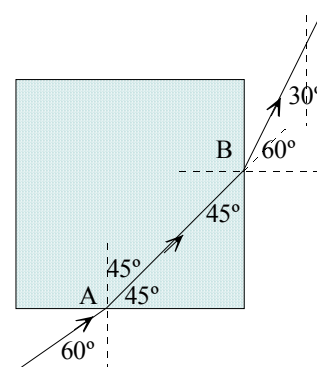


a) Aplicando la ley de Snell a la refracción que se produce en el punto A, se tiene que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{prisma}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin 60^\circ = n_{\text{prisma}} \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow n_{\text{prisma}} = 1,225$$

b) El ángulo de incidencia en el punto B es de 45° , aplicando la ley de la refracción a este punto:

$$n_{\text{prisma}} \cdot \sin i = n_{\text{aire}} \cdot \sin r; 1,225 \cdot \sin 45^\circ = 1 \cdot \sin r \Rightarrow r = 60^\circ$$



El rayo incidente forma un ángulo de 60° con la vertical y el emergente lo forma de 30° . Por tanto, las direcciones de estos rayos forman entre

sí un ángulo de 30° .

12. Una capa de aceite, de índice de refracción $n_{\text{aceite}} = 1,45$ flota sobre una capa de agua de índice de refracción $n_{\text{agua}} = 1,33$. Un rayo de luz penetra desde el aire en el aceite con un ángulo de 40° respecto de la recta normal. Calcula el ángulo de refracción dentro del agua y presenta en un esquema la trayectoria de los rayos.

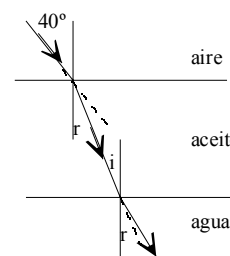
Aplicando la ley de Snell a las dos refracciones que se producen, resulta que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i_{\text{aire}} = n_{\text{aceite}} \cdot \sin r_{\text{aceite}}; 1 \cdot \sin 40^\circ = 1,45 \cdot \sin r_{\text{aceite}} \Rightarrow r_{\text{aceite}} = 26,3^\circ$$

El ángulo de incidencia en la superficie del agua es el mismo que el ángulo de refracción en el aceite. Por tanto:

$$n_{\text{aceite}} \cdot \sin i_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}} \cdot \sin r_{\text{agua}}; 1,45 \cdot \sin 26,3^\circ = 1,33 \cdot \sin r_{\text{agua}}$$

Despejando: $r_{\text{agua}} = 28,9^\circ$



13. Una capa de aceite flota sobre una capa de agua de índice de refracción $n_{\text{agua}} = 1,33$. Un rayo de luz incide desde el aire formando un ángulo de $30,4^\circ$ respecto de la recta normal en el punto de incidencia. El rayo se refracta en el aceite e incide en la superficie del agua formando un ángulo de 20° respecto de la recta normal. Calcula el índice de refracción del aceite y el ángulo de refracción en el agua.

El ángulo de refracción en la superficie del aceite es el mismo que el incidencia en la superficie del agua.

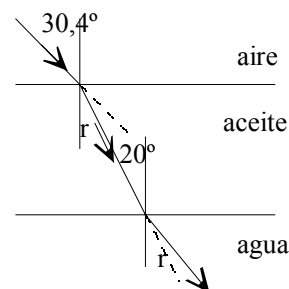
$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i_{\text{aire}} = n_{\text{aceite}} \cdot \sin r_{\text{aceite}}; 1 \cdot \sin 30,4^\circ = n_{\text{aceite}} \cdot \sin 20^\circ$$

Despejando: $n_{\text{aceite}} = 1,48$

Aplicando la ley de Snell a la segunda refracción:

$$n_{\text{aceite}} \cdot \sin i_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}} \cdot \sin r_{\text{agua}}; 1,48 \cdot \sin 20^\circ = 1,33 \cdot \sin r_{\text{agua}}$$

Despejando: $r_{\text{agua}} = 22,4^\circ$



14. Un rayo de luz atraviesa una lámina, de 5 cm de espesor, de un material transparente de índice refracción $n = 1,4$. Deduce que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente. Calcula el desplazamiento que ha experimentado el rayo emergente respecto del rayo incidente cuando el ángulo de incidencia es de 30° .

El rayo incide desde el aire en una cara con un ángulo i_1 y se refracta, acercándose a la normal, con un ángulo r_1 , pasando al interior; atraviesa la lámina e incide en la parte interior de la otra cara con un ángulo i_2 refractándose, alejándose de la normal, saliendo al aire con un ángulo emergente r_2 .

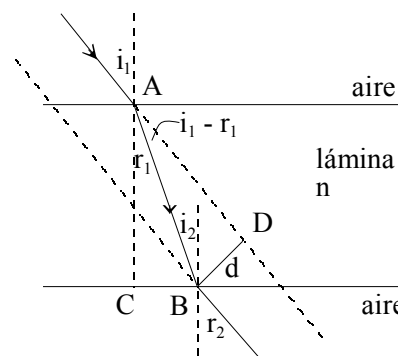
a) Aplicando la ley de Snell a las dos refracciones que se producen en las caras de la lámina, se tiene:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i_1 = n_{\text{lámina}} \cdot \sin r_1; n_{\text{lámina}} \cdot \sin i_2 = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_2$$

De la figura se deduce que: $r_1 = i_2$, y por tanto:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i_1 = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_2 \Rightarrow i_1 = r_2$$

Luego el rayo emergente sale de la lámina paralelo al incidente pero desplazado lateralmente una distancia igual a d .



b) Aplicando la ley de Snell a la primera cara se obtiene el valor del ángulo de refracción r_1 .

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i_1 = n_{\text{lámina}} \cdot \text{sen } r_1; 1 \cdot \text{sen } 30^\circ = 1,4 \cdot \text{sen } r_1 \Rightarrow r_1 = 20,92^\circ$$

Del triángulo rectángulo ACB de la figura se obtiene la distancia AB recorrida por el rayo dentro de la lámina:

$$AB = \frac{AC}{\cos r_1} = \frac{5 \text{ cm}}{\cos 20,92^\circ} = 5,35 \text{ cm}$$

Del triángulo rectángulo ADB de la figura se obtiene el desplazamiento lateral BD.

$$d = BD = AB \cdot \text{sen } (i_1 - r_1) = 5,35 \text{ cm} \cdot \text{sen } (30^\circ - 20,92^\circ) = 0,84 \text{ cm}$$

15. Demostrar que dos rayos paralelos que inciden sobre una lámina plana, reflejándose uno de ellos en la primera cara de la lámina y el otro en la segunda, después de haberse refractado en su paso por la primera, salen otra vez al medio de incidencia siendo paralelos.

El rayo que se refleja en la primera lámina se refleja con un ángulo igual al de incidencia: i_1 .

Para el segundo rayo que refracta en la primera cara se cumple la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i_1 = n_{\text{lámina}} \cdot \text{sen } r_1$$

Al llegar a la segunda cara se refleja con un ángulo de incidencia i_2 y el ángulo de reflexión también es i_2 .

De la figura se deduce que $r_1 = i_2$ y que $i_2 = r_3$

Por tanto el ángulo de incidencia, al pasar al aire del rayo que se refleja en la segunda cara es:

$$i_3 = i_2 = r_1$$

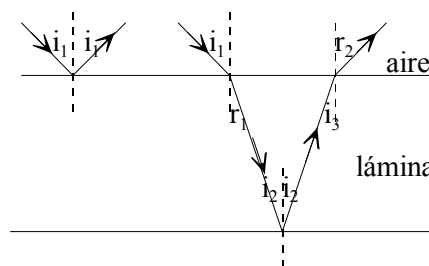
Aplicando la ley de Snell a esta refracción: $n_{\text{lámina}} \cdot \text{sen } i_3 = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } r_2$;

Operando: $n_{\text{lámina}} \cdot \text{sen } r_1 = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } r_2$

Comparando esta ecuación con la de la primera refracción se deduce que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i_1 = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } r_2 \Rightarrow i_1 = r_2$$

Y por tanto los dos rayos son paralelos.



16. Un rayo de luz monocromática incide sobre una cara lateral de un prisma de vidrio de índice de refracción $\sqrt{2}$ y cuya base es un triángulo equilátero. Calcula el ángulo con el que emerge el rayo del prisma si el ángulo de incidencia es de 30° . Dibuja un esquema gráfico con la trayectoria de los rayos.

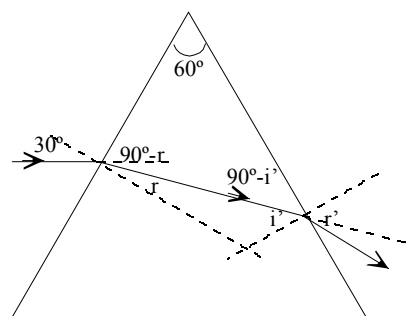
Como la base del prisma es un triángulo equilátero, el ángulo entre cualquiera de sus caras es de 60° .

El ángulo de refracción dentro del prisma se calcula aplicando la ley de Snell al rayo incidente a la cara del prisma.

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } 30^\circ = n_{\text{prisma}} \cdot \text{sen } r; 1 \cdot \text{sen } 30^\circ = \sqrt{2} \cdot \text{sen } r \Rightarrow r = 20,71^\circ$$

Es el ángulo de refracción en la primera cara del prisma.

Del triángulo formado por la trayectoria del rayo dentro del prisma y uno de sus vértices se deduce el valor del ángulo de incidencia en la segunda cara.



$$180^\circ = 90^\circ - r + 60^\circ + 90^\circ - i'; r + i' = 60^\circ \Rightarrow i' = 60^\circ - 20,7^\circ = 39,3^\circ$$

Volviendo a aplicar la ley de Snell a esta segunda reflexión resulta que el ángulo de emergencia es:
 $n_{\text{vidrio}} \cdot \sin i' = n_{\text{aire}} \cdot \sin r'$; $\sqrt{2} \cdot \sin 39,3^\circ = 1 \cdot \sin r' \Rightarrow r' = 63,6^\circ$

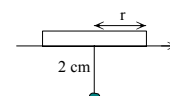
17. El ángulo límite de la luz amarilla de 589 nm en el diamante es de 24,4°. Calcula el índice de refracción del diamante y la velocidad de propagación de esa radiación en su interior.

Aplicando la ley de Snell cuando la luz pasa del diamante al aire, resulta que:

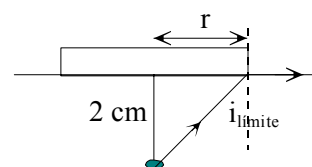
$$n_{\text{diamante}} \cdot \sin 24^\circ = 1 \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow n_{\text{diamante}} = 2,42$$

$$\text{Aplicando la definición de índice de refracción: } n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,42} = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

18. Perpendicularmente a un disco de corcho y en su centro se clava un alfiler que sobresale 2 cm. El dispositivo se coloca flotando en el agua de un recipiente con el alfiler hacia abajo. Si el agua tiene un índice de refracción $n = 1,33$, calcula el radio mínimo del disco para que no se pueda ver la cabeza del alfiler desde fuera del agua.



La cabeza del alfiler no se ve desde el exterior si el corcho tapa a todos los rayos que se refractan en la superficie del agua. Es decir el disco debe ocultar aquellos rayos cuyo ángulo de incidencia sea menor que el ángulo límite. Para los demás rayos se produce el fenómeno de la reflexión total.



$$\text{Aplicando la ley de Snell: } n_{\text{agua}} \cdot \sin i_{\text{límite}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90^\circ$$

$$\text{Despejando: } i_{\text{límite}} = \arcsin \frac{1}{1,33} = 48,75^\circ$$

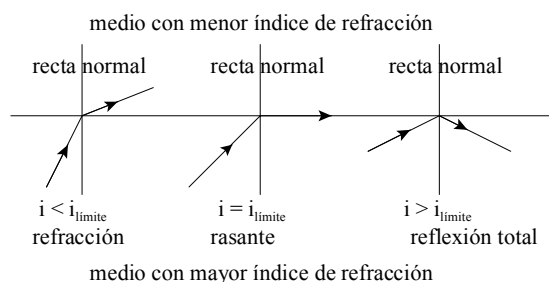
$$\text{De la figura se deduce que: } \tan i_{\text{límite}} = \frac{r}{2 \text{ cm}} \Rightarrow r = 2 \text{ cm} \cdot \tan 48,75^\circ = 2,28 \text{ cm}$$

19. Un rayo de luz verde pasa de una placa de vidrio de índice de refracción $n = 1,5$ al aire. La longitud de onda de la luz en la placa es $333 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Calcula la longitud de onda de la luz verde en el aire y el ángulo crítico a partir del cual se produce la reflexión total.

La frecuencia de una radiación es una cantidad constante ya que solo depende del foco emisor. La longitud de onda siempre aumenta al pasar de un medio transmisor al vacío. Aplicando la definición de índice de refracción de un medio, se tiene:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_{\text{aire}} \cdot v}{\lambda_{\text{vidrio}} \cdot v} \Rightarrow \lambda_{\text{aire}} = n \cdot \lambda_{\text{vidrio}} = 1,5 \cdot 333 \text{ nm} = 499,5 \text{ nm} = 499,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

b) El ángulo crítico, $i_{\text{límite}}$, es aquel para el cual el rayo refractado sale rasante a la superficie de separación de ambos medios: $r = 90^\circ$. A este fenómeno se llama **reflexión total** porque, para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite, la luz no se refracta, sino que se refleja totalmente en la superficie de separación de los dos medios.

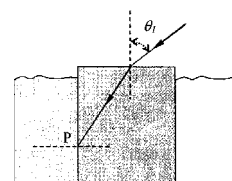


Aplicando la ley de Snell, resulta que:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin i_{\text{límite}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90^\circ$$

$$\text{Despejando: } \operatorname{sen} i_{\text{límite}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow i_{\text{límite}} = 41,81^\circ$$

20. Sobre una de las caras de un bloque rectangular de vidrio de índice de refracción $n_2 = 1,5$ incide un rayo de luz formando un ángulo θ_1 con la normal al vidrio. Inicialmente, el bloque se encuentra casi totalmente inmerso en agua, cuyo índice de refracción es 1,33. Halle el valor del ángulo θ_1 para que en un punto P de la cara normal a la de incidencia se produzca la reflexión total. Si se elimina el agua que rodea al vidrio, halle el nuevo valor del ángulo θ_1 en estas condiciones y explique el resultado obtenido.



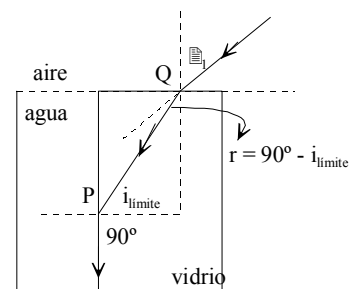
a) Sea Q el punto en el que incide la luz en el bloque de vidrio.

Aplicando la ley de Snell en el punto P se calcula el ángulo límite del vidrio frente al agua.

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \operatorname{sen} i_{\text{límite}} = n_{\text{agua}} \cdot \operatorname{sen} 90^\circ;$$

$$1,5 \cdot \operatorname{sen} i_{\text{límite}} = 1,33 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow i_{\text{límite}} = 62,46^\circ$$

Para ángulos de incidencia, en el punto P, mayores que $62,46^\circ$ se produce la reflexión total en esta cara



El ángulo de refracción, r, en la superficie aire-vidrio es:

$$r = 90 - i_{\text{límite}} = 90 - 62,46^\circ = 27,54^\circ$$

Luego el ángulo r debe ser menor que $27,54^\circ$.

Aplicando la ley de Snell en el punto Q, resulta que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = n_{\text{vidrio}} \cdot \operatorname{sen} 27,54^\circ; 1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = 1,5 \cdot \operatorname{sen} 27,54^\circ \Rightarrow \theta_1 = 43,91^\circ$$

Por tanto el ángulo de incidencia en el punto Q debe ser menor que $43,91^\circ$, para que se produzca el fenómeno descrito.

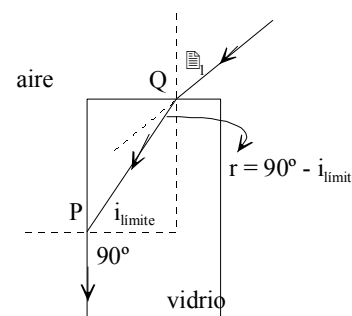
b) Se elimina el agua.

Aplicando la ley de Snell en el punto P se calcula el ángulo límite del vidrio frente al aire.

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \operatorname{sen} i_{\text{límite}} = n_{\text{aire}} \cdot \operatorname{sen} 90^\circ;$$

$$1,5 \cdot \operatorname{sen} i_{\text{límite}} = 1 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow i_{\text{límite}} = 41,81^\circ$$

Para ángulos de incidencia, en el punto P, mayores que $41,81^\circ$ se produce la reflexión total en esta cara



El ángulo de refracción, r, en la superficie aire-vidrio es:

$$r = 90 - i_{\text{límite}} = 90 - 41,81^\circ = 48,19^\circ$$

Luego el ángulo r debe ser menor que $48,19^\circ$.

Aplicando la ley de Snell en el punto Q, resulta que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = n_{\text{vidrio}} \cdot \operatorname{sen} 48,19^\circ; 1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = 1,5 \cdot \operatorname{sen} 48,19^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_1 = 1,118$$

Como el seno de un ángulo no puede ser nunca mayor que la unidad, se concluye que el rayo no puede salir por la cara lateral, perpendicular a la cara incidente, es decir para cualquier ángulo de incidencia, el rayo nunca sale del cubo, sufre reflexiones totales dentro de él.

21. Un prisma de vidrio tiene por base un triángulo isósceles, cuyas caras iguales forman entre sí un ángulo de 90°. Un rayo láser incide perpendicularmente a una de las caras iguales, (cateto). Si el prisma se coloca en el aire, calcula el índice de refracción mínimo del vidrio para que el rayo salga por la otra cara del prisma, (el otro cateto) que es igual a la primera. Dibuja la trayectoria de los rayos. Dibuja la trayectoria del mismo rayo anterior cuando el prisma se sumerge en agua de índice de refracción 1,33.

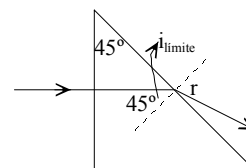
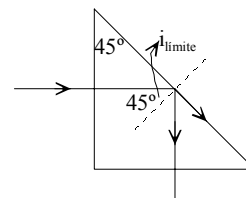
Para que el rayo salga por el otro cateto debe sufrir la reflexión total, para ello el ángulo límite debe ser 45°. Aplicando la ley de Snell:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin i_{\text{límite}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90^\circ; n_{\text{vidrio}} \cdot \sin 45^\circ = 1$$

$$n_{\text{vidrio}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow n_{\text{vidrio}} = \sqrt{2}$$

Al sumergir el prisma en el agua y aplicando la ley de Snell en el punto de incidencia de la hipotenusa y como $i = 45^\circ$, se tiene:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin 45^\circ = n_{\text{agua}} \cdot \sin r; \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,33 \cdot \sin r \Rightarrow r = 48,75^\circ$$



22. Se tiene un prisma de vidrio de índice de refracción $\sqrt{2}$ y cuya base es un triángulo equilátero. ¿Con qué ángulo incidirá un rayo de una en una de las caras para que al propagarse dentro el prisma sufra en otra de las caras el fenómeno de la reflexión total?

Un rayo de luz incide con un ángulo i en una de las caras, se refracta con un ángulo r y se propaga dentro del prisma. Al llegar a la siguiente cara sufre el fenómeno de la reflexión total.

Por tanto aplicando la ley de Snell en esta segunda cara, se tiene que:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin i_{\text{límite}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90^\circ; \sqrt{2} \cdot \sin i_{\text{límite}} = 1 \cdot \sin 90^\circ$$

$$\text{Despejando: } i_{\text{límite}} = 45^\circ$$

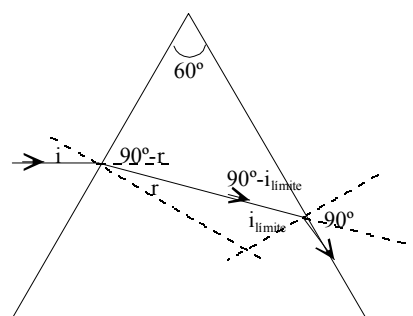
Del triángulo formado por la trayectoria del rayo dentro del prisma y uno de sus vértices se deduce el valor del ángulo de refracción en la primera cara.

$$180^\circ = 90^\circ - r + 60^\circ + 90^\circ - i_{\text{límite}}; r + i_{\text{límite}} = 60^\circ \Rightarrow r = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

Aplicando la ley de Snell a la primera refracción resulta que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin i = n_{\text{prisma}} \cdot \sin r; 1 \cdot \sin i = \sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ \Rightarrow i = 21,5^\circ$$

Para ángulos de incidencia menores que $21,5^\circ$ se produce el fenómeno de la reflexión total en la otra cara.



23. Dos focos luminosos emiten en el vacío luces monocromáticas y coherentes con una frecuencia de $5 \cdot 10^{14}$ Hz. ¿Qué tipo de interferencia se producirá en un punto cuya diferencia de distancia a las fuentes es $1,2 \cdot 10^{-6}$ m?

$$\text{La longitud de onda de la luz emitida es: } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

Para calcular el tipo de interferencia hay que relacionar la distancia con la longitud de onda.

$$\Delta r = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \frac{\lambda}{600 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 2 \cdot \lambda$$

Las ondas llegan en fase y la interferencia es constructiva.

24. Dos fuentes luminosas emiten en el vacío luces monocromáticas y coherentes con una frecuencia de $3,75 \cdot 10^{14}$ Hz. ¿Qué tipo de interferencia se producirá en un punto cuya diferencia de caminos a las fuentes es de 400 nm?

La longitud de onda de la luz emitida es: $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 800 \text{ nm}$

La diferencia de caminos es igual a la mitad de la longitud de onda, luego la interferencia es destructiva.

$$\Delta r = 400 \text{ nm} = 400 \text{ nm} \frac{\lambda}{800 \text{ nm}} = \frac{\lambda}{2}$$

25. El rayo reflejado en una superficie transparente y pulimentada está polarizado linealmente cuando forma un ángulo de 90° con el rayo refractado. Deduce que esas condiciones se producen cuando el índice de refracción del medio es igual a la tangente del ángulo de incidencia.

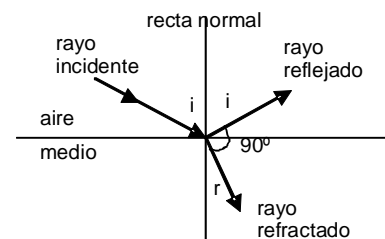
Como el ángulo de reflexión, i , es igual al ángulo de incidencia, de la figura adjunta se deduce que: $180^\circ = i + 90^\circ + r$; $90^\circ = i + r \Rightarrow r = 90^\circ - i$

Aplicando la ley de Snell a la refracción, resulta que:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i = n_{\text{medio}} \cdot \text{sen } r =$$

Operando: $1 \cdot \text{sen } i = n_{\text{medio}} \cdot \text{sen } (90^\circ - i) = n_{\text{medio}} \cdot \text{cos } i$

Despejando: $n_{\text{medio}} = \frac{\text{sen } i}{\text{cos } i} = \text{tgi}$



INVESTIGA

1. ¿Con que materiales se fabrican el núcleo y el revestimiento de las fibras ópticas?

El núcleo, es la parte interior de la fibra, que esta fabricado por un material dieléctrico, normalmente, vidrio de sílice, SiO_2 , al que se le añaden impurezas como B_2O_3 , GeO_2 o P_2O_5 para ajustar su índice de refracción. Para pequeñas aplicaciones también se encuentran en el mercado fibras ópticas con el núcleo de plástico o cuarzo fundido.

El revestimiento, que envuelve al núcleo, fabricado con materiales similares al núcleo pero con un índice de refracción menor, para que se produzca el fenómeno de la reflexión total.

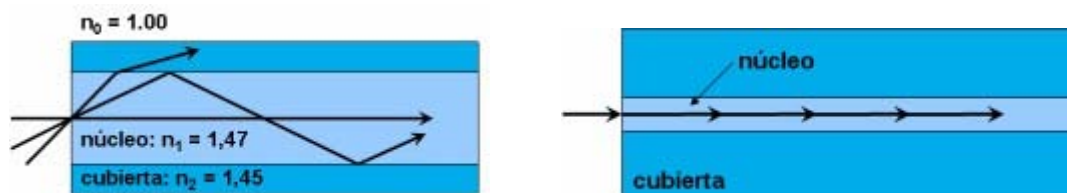
2. Describe los dos tipos más comunes de fibras ópticas.

Las diferentes trayectorias que puede seguir un haz de luz en el interior de una fibra se denominan modos de propagación y según el modo de propagación se tienen dos tipos de fibra óptica: multimodo y monomodo.

Una fibra multimodo es aquella en la que los haces de luz pueden circular por más de un modo o camino. Estas fibras tienen un diámetro del núcleo mucho mayor que las fibras monomodo. Las fibras multimodo fueron las primeras en fabricarse y comercializarse. Se usan comúnmente en aplicaciones de corta distancia, menores a 1 km y son adecuadas para el tendido de redes LAN o

sistemas de videovigilancia. Las redes construidas con estas fibras son muy simples de diseñar y muy económicas, se conectan fácilmente y tiene mayor tolerancia a los componentes de poca precisión.

Las fibras ópticas monomodo tienen un diámetro del núcleo mucho menor y son las más adecuadas para transmitir la información a grandes distancias. Debido al reducido tamaño de su núcleo sólo se propaga un modo de luz. Estas fibras monomodo se diseñan para sistemas de comunicación óptica de larga distancia.



Existe una normativa que establece un color determinado para el cable según el tipo de fibra: así el color naranja indica una fibra multimodo y el amarillo una monomodo.

3. Enumera las ventajas y los inconvenientes de las fibras ópticas frente a los cables de cobre.

Entre las ventajas de la fibra óptica frente a los cables de cobre están:

- Un único cable de fibra óptica puede transmitir más información de una de cobre.
- Su atenuación es muy baja.
- Es inmune al ruido electromagnético.
- Es segura, al permanecer el haz de luz confinado en el núcleo, no es posible acceder a los datos transmitidos por métodos no destructivos.
- La materia prima con la que se fabrica es abundante.
- Es muy ligera en comparación con el cableado eléctrico tradicional
- Disminuye el riesgo de incendios.
- Se puede instalar en lugares donde puedan haber sustancias peligrosas o inflamables, ya que no transmite la corriente eléctrica.

Desventajas

A pesar de las ventajas antes enumeradas, la fibra óptica presenta una serie de desventajas frente a otros medios de transmisión, siendo las más relevantes las siguientes:

- La fragilidad de las fibras.
- Necesidad de usar transmisores y receptores más caros.
- Los empalmes entre fibras son difíciles de realizar, especialmente en el campo, lo que dificulta las reparaciones en caso de rotura del cable.
- No puede transmitir corriente eléctrica para alimentar repetidores intermedios.
- La necesidad de efectuar, en muchos casos, procesos de conversión eléctrica-óptica.
- La fibra óptica convencional no puede transmitir potencias elevadas.
- No existen memorias ópticas.

TEST DE EVALUACIÓN

1. Completa la frase: Las ondas electromagnéticas son ondas _____ que consisten en la propagación, _____ de un soporte material, de un campo eléctrico y de otro magnético _____ y a la dirección de _____.

Las ondas electromagnéticas son ondas transversales que consisten en la propagación, sin necesidad

de un soporte material, de un campo eléctrico y de otro magnético perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

2. Justifica si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas: a) La luz visible tiene una longitud de onda mayor que los rayos infrarrojos. b) Todas las sustancias tienen un índice de refracción mayor que la unidad. c) El campo eléctrico y el campo magnético de una onda electromagnética vibran en fase. d) En las interferencias luminosas se destruye la energía luminosa.

a) Falso.

La luz visible tiene una frecuencia mayor que los rayos infrarrojos y por ello su longitud de onda es menor que la de los citados rayos.

b) Verdadero.

De la definición de índice de refracción $n = \frac{c}{v}$, como siempre es $c > v$, el índice de refracción de cualquier sustancia es mayor que la unidad.

c) Verdadero.

La luz es una onda electromagnética en la que las oscilaciones de los campos eléctricos y magnéticos lo hacen en fase.

d) Falso.

En las interferencias luminosas no se destruye la energía luminosa, se redistribuye.

3. El campo eléctrico de una onda electromagnética tiene una amplitud $E_0 = 600 \text{ N/C}$. La amplitud del campo magnético es: a) $2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$; b) $18 \cdot 10^{11} \text{ T}$; c) $4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$; d) 2 T .

La solución correcta es la a)

La relación entre las amplitudes de los dos campos es: $|\vec{E}_0| = c \cdot |\vec{B}_0| \Rightarrow |\vec{B}_0| = \frac{600 \text{ N/C}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$

4. Una rayo de luz se desplaza por el diamante con una velocidad de $1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. El índice de refracción del diamante es: a) 0,41; b) 2,42; c) 4,84; d) 1,21.

La solución correcta es la b).

Aplicando la definición de índice de refracción: $n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,42$

5. Un rayo de luz cuya longitud de onda en el aire es de 600 nm penetra en un vidrio de índice de refracción 1,5. La longitud de onda de la luz en este medio es: a) 600 nm; b) 900 nm; c) 400 nm; d) 500 nm.

La solución correcta es la c).

Aplicando la definición de índice de refracción de un medio respecto del vacío, se tiene:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{c}{v_{\text{vidrio}}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}} \cdot v}{\lambda_{\text{vidrio}} \cdot v} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{\lambda_{\text{vidrio}}} \Rightarrow \lambda_{\text{vidrio}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{600 \text{ nm}}{1,5} = 400 \text{ nm}$$

6. Un rayo de luz que se propaga por el aire incide con un ángulo de 60° en la superficie del agua de índice de refracción 1,33. El ángulo de refracción es: a) $20,3^\circ$; b) $40,6^\circ$; c) 60° ; d) $80,6^\circ$.

La solución correcta es la b).

Aplicando la ley de Snell: $n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } r$; $1 \cdot \text{sen } 60^\circ = 1,33 \cdot \text{sen } r \Rightarrow r = 40,6^\circ$

7. Un medio tiene un índice de refracción de 2,46. El ángulo de incidencia a partir del cual se produce el fenómeno de la reflexión total al pasar la luz de ese medio al aire es: a) 24°; b) 48°; c) 12°; d) 30°.

La solución correcta es la a)

Aplicando la ley de Snell, resulta que: $n_{\text{diamante}} \cdot \text{sen } i_{\text{limite}} = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } 90^\circ$

Despejando: $\text{sen } i_{\text{limite}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{diamante}}} = \frac{1}{2,46} \Rightarrow i_{\text{limite}} = 24^\circ$

8. Completa la frase: La dispersión es la _____ de la luz incidente, al pasar por un medio material, en las _____ caracterizadas por su respectiva _____.

La dispersión es la separación de la luz incidente, al pasar por un medio material, en las distintas luces elementales caracterizadas por su respectiva longitud de onda.

9. Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones: a) Las ondas electromagnéticas son ondas longitudinales. b) El fenómeno de la reflexión total se produce al pasar la luz del agua al aire. c) Al pasar la luz blanca por un prisma la luz que más se desvía es la violeta. d) El rayo luminoso es tangente al frente de ondas.

a) Falso.

Las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

b) Verdadero.

Para que se produzca el fenómeno de la reflexión total la luz debe pasar de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor índice de refracción.

c) Verdadero.

Al pasar la luz blanca por un prisma la luz que más se desvía es la violeta, ya que la velocidad de propagación de la luz violeta es menor que la de la luz roja.

d) Falso.

Un rayo luminoso es una línea imaginaria perpendicular a los frentes de onda, e indica la dirección de propagación de la luz.

10. Un rayo de luz se propaga por el aire e incide con un ángulo de 50° con la dirección normal a la superficie de un vidrio. Si el índice de refracción en el vidrio es 1,3. El ángulo que forman el rayo reflejado y el refractado es: a) 80°; b) 50°; c) 90°; d) 94°.

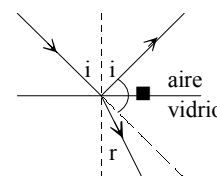
La solución correcta es la d)

El ángulo de reflexión es de 50° y el de refracción se calcula aplicando la ley de Snell.

$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } i = n_{\text{vidrio}} \cdot \text{sen } r$; $1 \cdot \text{sen } 50^\circ = 1,3 \cdot \text{sen } r \Rightarrow r = 36^\circ$

Si φ es el ángulo pedido, de la figura adjunta se deduce que:

$i + \varphi + r = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ - 50^\circ - 36^\circ = 94^\circ$



Física

Unidad didáctica 10
Óptica geométrica

SOLUCIONES UNIDAD 10. ÓPTICA GEOMÉTRICA

CUESTIONES INICIALES

1. Una gran parte de la información que recibimos del mundo exterior la percibimos por medio del sentido de la vista. ¿Puedes dar una explicación del mecanismo que tiene lugar en el acto de ver un objeto iluminado?

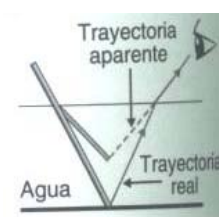
Un objeto iluminado refleja parte de la luz que le llega, dirigiéndola en todas direcciones. El ojo se comporta como una lente convergente, que concentra y dirige la luz que recibe del objeto hacia la retina. El nervio óptico envía las señales luminosas desde la retina hasta el cerebro, donde se interpreta la información recibida y se completa el mecanismo de la visión.

2. ¿Por qué un lápiz sumergido parcialmente en un vaso con agua parece estar doblado?

FIGURA pág 134 guía anterior

El lápiz parece quebrado debido al fenómeno de la refracción.

Los rayos luminosos que pasan del agua al aire se alejan de la recta normal y sus prolongaciones se cortan en un punto por encima de la posición del objeto. Así se forma una imagen que hace parecer que disminuye la sensación de profundidad y el lápiz está aparentemente quebrado.



3. ¿Qué diferencias, aparte de su tamaño, hay entre el espejo colocados en los cuartos de baño de las viviendas y los que se sitúan a la salida de los garajes con poca visibilidad?

FIGURA pág 135 guía anterior

En los cuartos de baño se colocan espejos planos y a la salida de los garajes se sitúan espejos convexos. Ello se debe a que los espejos convexos amplían el campo de visión.

Ambos proporcionan imágenes virtuales de los objetos, pero mientras que en los espejos planos, las imágenes son del mismo tamaño que el objeto en los espejos convexos son siempre más pequeñas que el objeto.

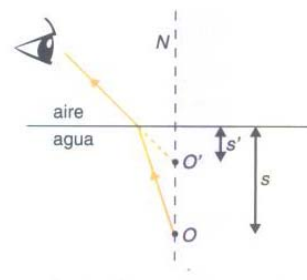


ACTIVIDADES FINALES

1. Deduce si la profundidad aparente de un río es mayor, menor o igual a su profundidad real, sabiendo que el índice de refracción del agua es mayor que el del aire.

FUGURA pag 318 libro anterior Física 2º

Como el índice de refracción del agua es mayor que el del aire, los rayos que proceden de un objeto sumergido se alejan de la normal y el observador aprecia una imagen virtual situada a una profundidad aparente, s' , menor que la profundidad real, s .



En efecto, aplicando la ecuación del dioptrio plano :

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = s \frac{n'}{n}$$

Para el caso de un objeto visto desde el aire: $n = n_{\text{agua}}$ y $n' = n_{\text{aire}}$, por tanto:

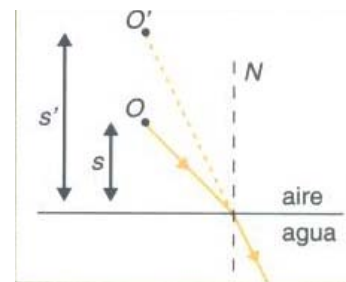
$$\text{profundidad aparente} = \text{profundidad real} \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}}$$

Como $n_{\text{aire}} < n_{\text{agua}}$, entonces la profundidad aparente es menor que la real.

2. Un buzo observa un avión que vuela a una altura de 400 m sobre la superficie del agua. Si el índice de refracción del agua es $4/3$, justifica si la altura aparente a la persona ve al avión sobre la superficie del agua es mayor, menor o igual a los 400 m. Construye el correspondiente diagrama de rayos que justifique la conclusión.

FIGURA pag 318 libro anterior

Los rayos luminosos que acceden desde el aire al agua se desvían de su trayectoria y se acercan a la recta normal. Como consecuencia de ello, un observador colocado dentro del agua aprecia una imagen virtual del objeto situada a una altura mayor que la altura real.



Al aplicar para el buzo la ecuación del dioptrio plano, resulta que los datos son:

$$s = 400 \text{ cm}; n = n_{\text{aire}} \text{ y } n' = n_{\text{agua}}$$

El buzo percibe una imagen virtual del avión situada a una distancia por encima de la superficie del agua de:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = 400 \text{ cm} \frac{4/3}{1} = 533 \text{ m}$$

3. Las distancias focal objeto de un dioptrio esférico es $f = -20 \text{ cm}$ y la distancia focal imagen $f' = 40 \text{ cm}$. Calcula el radio de curvatura del dioptrio es indica si es cóncavo o convexo. Determina la posición de un objeto que está situado a 10 cm del vértice del dioptrio.

Aplicando la relación entre el radio y las distancias focales: $r = f + f' = -20 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = +20 \text{ cm}$
Por lo que el dioptrio es cóncavo.

Aplicando la ecuación de Gauss para un dioptrio y como $s = -10 \text{ cm}$, resulta que:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1; \frac{40 \text{ cm}}{s'} + \frac{-20 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}} = 1 \Rightarrow s' = -40 \text{ cm}$$

La imagen se forma delante del dioptrio.

4. Un dioptrio esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 10 cm y separa dos medios de índices de refracción $n_1 = 1$ y $n_2 = 4/3$. Calcula las distancias focales del dioptrio. ¿Qué relación hay entre las distancias focales del dioptrio y su radio de curvatura?

Como el dioptrio es cóncavo: $r = -10 \text{ cm}$

La ecuación fundamental de un dioptrio es: $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$

Las distancias focales objeto, f , e imagen, f' , son:

$$f = -\frac{n \cdot r}{n' - n} = -\frac{1 \cdot (-10 \text{ cm})}{\frac{4}{3} - 1} = 30 \text{ cm}; f' = \frac{n' \cdot r}{n' - n} = \frac{\frac{4}{3} \cdot (-10 \text{ cm})}{\frac{4}{3} - 1} = -40 \text{ cm}$$

La suma de las distancias focales es igual al radio del dioptrio.

$$f + f' = 30 \text{ cm} + (-40 \text{ cm}) = -10 \text{ cm} = r$$

5. Una varilla cilíndrica de vidrio, de índice de refracción 1,5, está limitada por una superficie convexa de 2 cm de radio. Un objeto de 3 mm de altura se coloca perpendicularmente al eje de la varilla y a una distancia de 10 cm, a la izquierda de ella. Calcula la posición y el tamaño de

la imagen cuando la varilla se encuentra en el aire.

En un dioptrio convexo $r = +2 \text{ cm}$ y las distancias $s = -10 \text{ cm}$ e $y = 3 \text{ mm}$. Además los índices de refracción son: $n = 1$ y $n' = 1,5$.

Aplicando la ecuación fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}; \frac{1,5}{s'} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{1,5 - 1}{2 \text{ cm}} \Rightarrow s' = 10 \text{ cm}$$

Imagen situada a la derecha del dioptrio y es una imagen es real.

Aplicando la relación del aumento lateral:

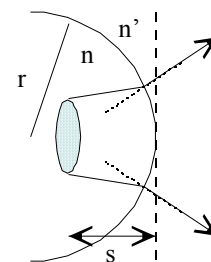
$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}; \frac{y'}{3 \text{ mm}} = \frac{1 \cdot 10 \text{ cm}}{1,5 \cdot (-10 \text{ cm})} \Rightarrow y' = -2 \text{ mm}$$

El signo menos indica que la imagen está invertida respecto del objeto.

6. Una moneda, de 2 cm de diámetro, está situada en el interior de una bola de cristal maciza de 15 cm de radio y cuyo índice de refracción es: $n_{\text{vidrio}} = 1,5$. Si la moneda está situada a 10 cm de la superficie de bola, calcula la posición de la imagen. La imagen que se observa, ¿será más grande, más pequeña o de igual tamaño que el objeto?

Como la luz se propaga de izquierda a derecha, de la figura se deduce que la superficie de la esfera en un dioptrio cóncavo, $r = -15 \text{ cm}$ y que primer medio es el vidrio $n = 1,5$ y que el segundo medio es el aire $n' = 1$.

Los rayos luminosos al pasar del vidrio al aire se alejan de la recta normal, por lo que divergen y sus prolongaciones se cortan dentro de la esfera y por tanto la imagen es virtual y más pequeña que el objeto.



Aplicando la ecuación del dioptrio esférico, con $s = -10 \text{ cm}$, resulta que:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}; \frac{1}{s'} - \frac{1,5}{-10 \text{ cm}} = \frac{1 - 1,5}{-15 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -8,57 \text{ cm}$$

Imagen situada a la izquierda del dioptrio y es una imagen virtual.

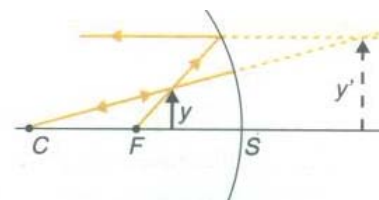
Aplicando la relación del aumento lateral: $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}; \frac{y'}{2 \text{ cm}} = \frac{1,5 \cdot (-8,57 \text{ cm})}{1 \cdot (-10 \text{ cm})} \Rightarrow y' = 1,29 \text{ cm}$

La imagen es más pequeña y está directa.

7. Si se desea observar la imagen ampliada de un objeto, ¿qué tipo de espejo hay que utilizar? Explica con un esquema las características de la imagen formada.

FIGURA en pág 321 libro anterior

El único espejo con el que se puede observar la imagen ampliada de un objeto es con un espejo cóncavo. Para ello hay que situar el objeto entre el foco y el espejo y la imagen formada es virtual, directa y de mayor tamaño que el objeto.



8. Un objeto de 5 cm de altura está situado a 75 cm de un espejo cóncavo de 1 m de radio. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Dibuja la trayectoria de los rayos.

FIGURA en pag 321 libro anterior

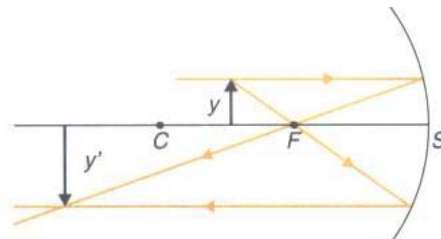
Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y como $r = -100 \text{ cm}$, $s = -75 \text{ cm}$, resulta que:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-75 \text{ cm}} = \frac{2}{-100 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -150 \text{ cm}$$

Aplicando la relación del aumento lateral:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \frac{y'}{5 \text{ cm}} = -\frac{-150 \text{ cm}}{-75 \text{ cm}} \Rightarrow y' = -10 \text{ cm}$$

Como la distancia focal es $f = \frac{r}{2} = -50 \text{ cm}$, el objeto está situado entre el centro de curvatura y el foco y la imagen es real, más grande que el objeto y está invertida.



9. Un objeto de 5 cm de altura está situado a 25 cm de un espejo cóncavo de 1 m de radio. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Dibuja la trayectoria de los rayos.

FIGURA la misma que la de la actividad 7.

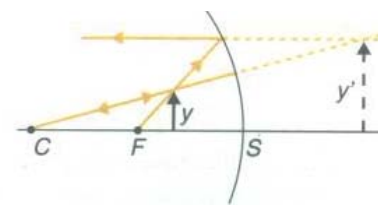
Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y como $r = -100 \text{ cm}$, $s = -25 \text{ cm}$, resulta que:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{2}{-100 \text{ cm}} \Rightarrow s' = +50 \text{ cm}$$

Aplicando la relación del aumento lateral:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \frac{y'}{5 \text{ cm}} = -\frac{50 \text{ cm}}{-25 \text{ cm}} \Rightarrow y' = +10 \text{ cm}$$

Como la distancia focal es $f = \frac{r}{2} = -50 \text{ cm}$, el objeto está situado entre el foco y el espejo y la imagen es virtual, directa y es más grande que el objeto.



10. Un espejo esférico forma una imagen virtual, derecha y de tamaño doble que el del objeto cuando está situado verticalmente sobre el eje óptico y a 10 cm del espejo. Calcula la posición de la imagen y el radio de curvatura del espejo. Dibuja las trayectorias de los rayos.

FIGURA la misma que la de la actividad 9.

Aplicando la relación del aumento lateral y como $s = -10 \text{ cm}$ e $y' = 2 \cdot y$, resulta que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \frac{2 \cdot y}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -2 \cdot s = -2 \cdot (-10 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}$$

La imagen está situada a la derecha del espejo.

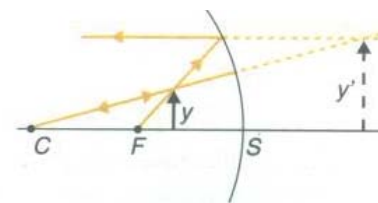
Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos se tiene que:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}; \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{2}{r} \Rightarrow r = -40 \text{ cm}$$

Es un espejo cóncavo.

La distancia focal es: $r = 2 \cdot f; -40 \text{ cm} = 2 \cdot f \Rightarrow f = -20 \text{ cm}$.

El objeto está situado entre el foco y el espejo y por ello proporciona una imagen virtual, directa y más grande que el objeto.

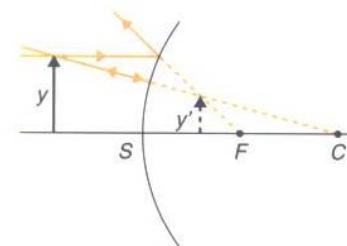


11. En los almacenes utilizan espejos convexos, para conseguir un amplio margen de observación y vigilancia con un espejo de tamaño razonable. Uno de los espejos, que tiene un radio de curvatura de 1,2 m, permite al dependiente, situado a 5 m del mismo, inspeccionar el local entero. Si un cliente está a 10 m del espejo, ¿a qué distancia de la superficie del espejo

está su imagen? ¿Está detrás o delante del espejo? Si el cliente mide 2 m, ¿qué altura tendrá su imagen?

FIGURA pag 322 libro anterior

Para cualquier posición de un objeto los espejos convexos proporcionan imágenes virtuales, situadas detrás del espejo, directas y más pequeñas que el objeto.



Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos, como $r = +1,2\text{ m}$ y $s = -10\text{ m}$, resulta que:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}; \frac{1}{s'} + \frac{1}{-10\text{m}} = \frac{2}{1,2\text{m}} \Rightarrow s' = 0,57\text{ cm}$$

Es una imagen virtual, formada a la derecha del espejo convexo.

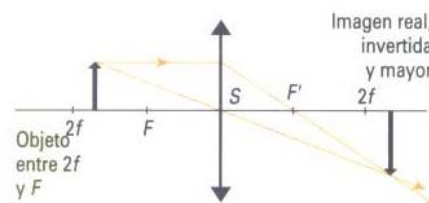
Aplicando la relación del aumento lateral: $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \frac{y'}{2\text{m}} = -\frac{0,57\text{m}}{-10\text{m}} \Rightarrow y' = 0,114\text{ m}$

Imagen directa y más pequeña que el objeto.

12. ¿Qué tipo de lente utiliza un proyector de diapositivas? ¿Dónde y como hay que colocar la diapositiva? Representa en un diagrama la trayectoria de los rayos luminosos.

FIGURA pág 326 libro anterior

El proyector de diapositivas se construye con una lente convergente. La diapositiva hay que colocarla a una distancia de la lente entre dos veces la distancia focal y el foco objeto.



Cuanto más cerca esté el objeto de la lente, más grande es la imagen y más lejos hay que colocar la pantalla.

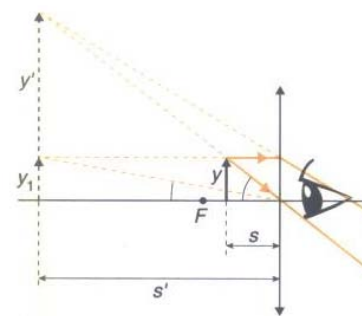
Como la imagen formada está invertida respecto del objeto, la diapositiva ha que colocarla invertida para que la imagen aparezca directa.

13. Una lupa se emplea para observar con detalle objetos de pequeño tamaño. Explica su funcionamiento óptico indicando el tipo de lente, la colocación del objeto y el tipo de imagen que se forma. Dibuja un trazado de los rayos que explique el proceso de la formación de la imagen.

FIGURA pág 330 libro anterior

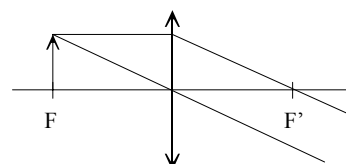
La lupa es una lente convergente que permite observar a los objetos con un tamaño mayor que su tamaño natural.

Al utilizar la lupa se sitúa el objeto entre el foco objeto y la lente, para que se forme una imagen virtual, más grande que el objeto y directa.



14. Calcula la potencia de una lente convergente sabiendo que no se forma ninguna imagen cuando se coloca un objeto a 20 cm de la lente. Dibuja la trayectoria de los rayos.

Al no observarse ninguna imagen significa que el objeto está colocado en el foco objeto de la lente. Como la lente es convergente, su distancia focal imagen es: $f' = +20\text{ cm}$.



Aplicando la definición de potencia: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,20\text{m}} = 5$ dioptrías

15. Un objeto de 3 cm de alto se coloca a 75 cm de una lente convergente de 25 de distancia focal. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Construye un diagrama con la trayectoria de los rayos.

FIGURA en pág 326 libro anterior

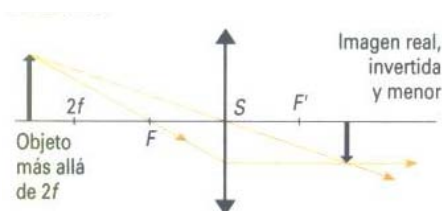
Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como $f' = + 25$ cm, $y = 3$ cm y $s = - 75$ cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{s'} - \frac{1}{-75\text{ cm}} = \frac{1}{25\text{ cm}} \Rightarrow s' = + 37,5\text{ cm}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{y'}{3\text{ cm}} = \frac{37,5\text{ cm}}{-75\text{ cm}} \Rightarrow y' = - 1,5\text{ cm}$$

El objeto está colocado más allá de dos veces la distancia focal y la imagen es real, se puede proyectar en una pantalla, está invertida, es de menor tamaño que el objeto.



16. Un objeto se coloca a 10 cm de una lente convergente de 5 dioptrías. Calcula la posición de la imagen y el aumento lateral. Dibuja la trayectoria de los rayos luminosos.

FIGURA en pág 326 libro anterior

Como la lente es convergente, la distancia focal imagen es:

$$P = \frac{1}{f'}; 5\text{ dioptrías} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = 0,2\text{ m} = 20\text{ cm}$$

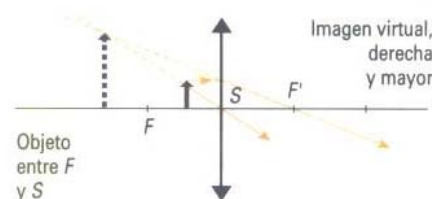
Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como $f' = + 20$ cm y $s = - 10$ cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\text{ cm}} = \frac{1}{20\text{ cm}} \Rightarrow s' = - 20\text{ cm}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{y'}{y} = \frac{-20\text{ cm}}{-10\text{ cm}} = 2$$

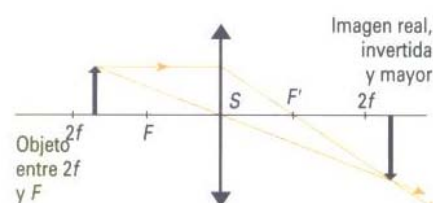
El objeto está colocado entre la distancia focal y la lente. La lente actúa como una lupa y la imagen es virtual, directa y más grande que el objeto.



17. Mediante una lente delgada de distancia focal $f' = 10$ cm se quiere obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Calcula la posición del objeto en el caso de que la imagen se pueda proyectar en una pantalla. Comprueba gráficamente los resultados mediante el trazado de rayos.

FIGURA en pág 326 libro anterior

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, y como las imágenes reales proporcionadas por las lentes convergentes siempre están invertidas respecto del objeto, se tiene que:



$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{-2 \cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -2 \cdot s$$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como $f' = +10$ cm resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{-2 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \Rightarrow s = -15 \text{ cm}$$

El objeto está colocado a 15 cm de la lente, a mitad de camino entre la distancia focal y dos veces la distancia focal.

18. Un objeto luminoso está situado a una distancia de 4 m de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada, de distancia focal desconocida, que proporciona una imagen nítida de tamaño tres veces mayor que el del objeto. Determina la naturaleza de la lente y su posición respecto del objeto y de la pantalla. Calcula la distancia focal de la lente, su potencia óptica y efectúa la construcción geométrica de la imagen.

Si la imagen es real, se proyecta en una pantalla, la lente tiene que ser convergente con el objeto situado en entre dos veces la distancia focal y la distancia focal.

La distancia entre el objeto y la pantalla es igual a la suma de la distancia objeto, de signo negativo, y la distancia imagen. Además la imagen está invertida respecto del objeto.

$$\left. \begin{array}{l} -s + s' = 4 \text{ m} \\ \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = -3 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} -s + s' = 4 \text{ m} \\ s' = -3 \cdot s \end{array} \right\}; -4 \cdot s = 4 \text{ m}$$

La posición del objeto es: $s = -1$ m

Y la de la imagen es: $s' = 4 + s = 4 \text{ m} + (-1 \text{ m}) = 3 \text{ m}$

El objeto está a 1 m a la izquierda de la lente y la pantalla a 3 m a la derecha de la lente.

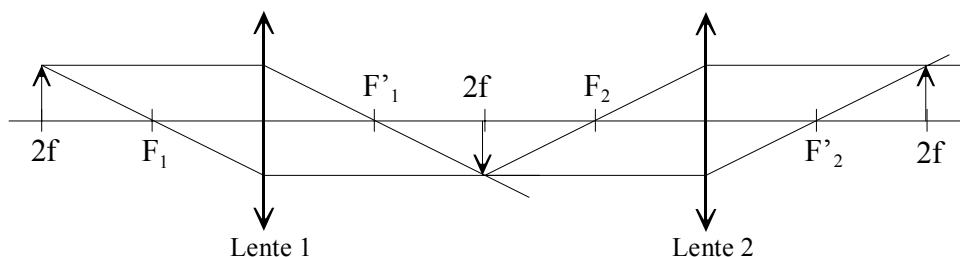
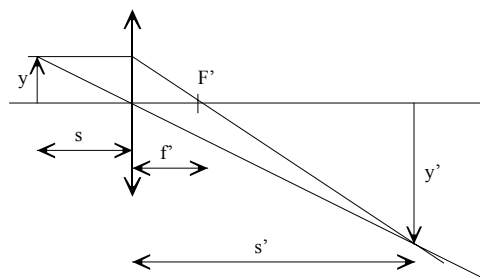
Aplicando la ecuación de las lentes delgadas, resulta que la distancia focal de la lente es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{3 \text{ m}} - \frac{1}{-1 \text{ m}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{3}{4} \text{ m}$$

Y la potencia óptica: $P = \frac{1}{f'} = \frac{4}{3}$ dioptrías

19. Un sistema óptico está formado por dos lentes convergentes idénticas, de distancia focal $f' = 10$ cm y separadas por una distancia de 40 cm. Si a 20 cm de la primera lente se coloca un objeto de 3 cm de altura, calcula la posición y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes. Construye el correspondiente diagrama de rayos que justifique la respuesta.

El objeto está situado a dos veces la distancia focal, 20 cm, de la primera lente, por lo que se forma una imagen real, invertida, del mismo tamaño que el objeto y situada a $2 \cdot f = 20$ cm de esta primera lente.



Esta imagen hace de objeto de la segunda lente, situado a una distancia de ella igual a dos veces su distancia focal, 20 cm, la imagen que se forma es real y situada a una distancia de $2 \cdot f = 20$ cm de esta segunda lente.

Por tanto el efecto de las dos lentes es proporcionar una imagen real, directa y del mismo tamaño que el objeto.

20. Una lente de 5 dioptrías de potencia está construida con un vidrio de índice de refracción iguala 1,5. Si una de las caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, calcula el radio de curvatura de la otra cara y dibuja la forma de la lente.

La lente es una lente convergente ya que su potencia es positiva. Suponiendo que el radio de la primera cara es $r_1 = +0,10$ m y aplicando la ecuación del constructor de lentes, resulta que:

$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); 5 \text{ dioptrías} = (1,5 - 1) \cdot \left(\frac{1}{0,10 \text{ m}} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{r_2} = 0 \Rightarrow r_2 = \infty$$

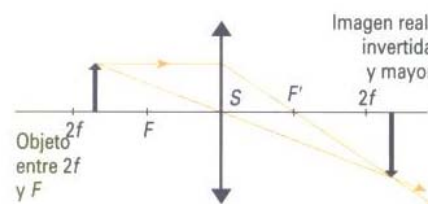
Luego la lente es plano convexa.



21. Una lente convergente está limitada por dos caras con radios de curvatura iguales y tiene una distancia focal de 50 cm. Con la lente se proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de tamaño 5 cm. Calcula la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen tenga un tamaño de 40 cm y determina el radio de curvatura de las caras.

FIGURA en pág 326 libro anterior

Para que una lente convergente produzca una imagen real y mayor que el objeto, este hay que colocarlo a una distancia entre dos veces la distancia focal y el foco objeto de la lente.



Aplicando la ecuación del aumento lateral y como la imagen está invertida, resulta que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{-40 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -8 \cdot s$$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como $f' = +50$ cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{-8s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{50 \text{ cm}} \Rightarrow s = -56,25 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación del fabricante de lentes, y como los radios son iguales y de signo contrario, se tiene:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,5 \text{ m}} = +2 \text{ dioptrías}$$

$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); 2 \text{ dioptrías} = (1,5 - 1) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-r} \right); 2 \text{ dioptrías} = 0,5 \cdot \frac{2}{r} \Rightarrow r = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

22. Un objeto de 3 mm de altura se coloca a 50 cm de una lente de -6 dioptrías de potencia óptica. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Construye un diagrama con la trayectoria de los rayos luminosos.

FIGURA en pag 326 del libro anterior

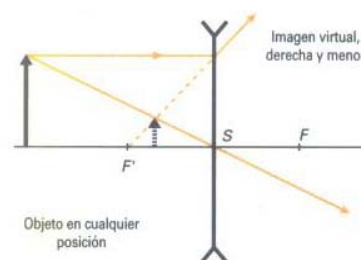
La lente es divergente y su distancia focal imagen es: $P = \frac{1}{f'}; -6 \text{ dioptría} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -\frac{1}{6} \text{ m}$

La posición de la imagen se determina aplicando la ecuación fundamental de las lentes, teniendo en cuenta que $s = -0,5 \text{ m}$.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,5 \text{ m}} = -\frac{6}{\text{m}} \Rightarrow s' = -0,125 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{y'}{3 \text{ mm}} = \frac{-0,125 \text{ m}}{-0,5 \text{ m}} \Rightarrow y' = 0,75 \text{ mm}$$



La imagen es virtual, directa, de menor tamaño que el objeto y está situada a la izquierda de la lente.

23. Un coleccionista de sellos desea utilizar una lupa de distancia focal 5 cm para observar un ejemplar. Calcula la distancia a la que debe colocar los sellos respecto de la lente para obtener una imagen virtual diez veces mayor que el original.

Una lente convergente actúa como lupa cuando el objeto se coloca a una distancia de la lente menor que su distancia focal.

Aplicando la ecuación del aumento lateral de las lentes, se tiene la relación entre las distancias a las que están colocados el objeto y su imagen.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{10 \cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 10 \cdot s$$

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{10 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5 \text{ cm}}$$

Despejando, el objeto hay que colocarlo a una distancia de: $s = -4,5 \text{ cm}$ de la lente

24. Un objeto de 3 cm de tamaño se coloca a 80 cm de una lente divergente. Si la imagen se forma a 40 cm de la lente, calcula su potencia y el tamaño del objeto. Construye con diagrama con la trayectoria de los rayos luminosos.

FIGURA la misma que la de la actividad 22

Para cualquier posición del objeto una lente divergente forma una imagen virtual del mismo, luego está situada a la izquierda de la lente.

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como: $s = -80 \text{ cm}$ y $s' = -40 \text{ cm}$, resulta que

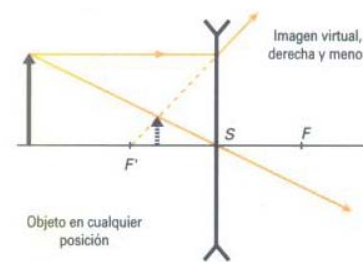
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{-40 \text{ cm}} - \frac{1}{-80 \text{ cm}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -80 \text{ cm} = -0,8 \text{ m}$$

Su potencia es: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0,8 \text{ m}} = -1,25 \text{ dioptrías}$

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{y'}{3 \text{ cm}} = \frac{-40 \text{ cm}}{-80 \text{ cm}} \Rightarrow y' = 1,5 \text{ cm}$$

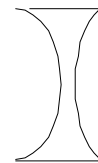
La imagen es virtual, directa, de menor tamaño que el objeto.



25. Una lente bicóncava, construida con un vidrio de índice de refracción igual a 1,8, está limitada por dos superficies esféricas de radios $r_1 = 20$ cm y $r_2 = 40$ cm. Si la lente está colocada en el aire calcula su potencia óptica.

Aplicando la ecuación del constructor de lentes y como $r_1 = -20$ cm y $r_2 = +40$ cm, se tiene que su potencia óptica es:

$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); P = (1,8 - 1) \cdot \left(\frac{1}{-0,2\text{m}} - \frac{1}{0,4\text{m}} \right) = -6 \text{ dioptrías}$$



La lente es divergente.

26. Cuál es la potencia óptica y la distancia focal imagen del sistema óptico formado por una lente convergente, de 2 dioptrías de potencia óptica, puesta en contacto con una lente divergente de - 6 dioptrías de potencia óptica.

La potencia óptica de ópticas de varias lentes puestas en contacto unas con otras es igual a la suma de las respectivas potencias.

$$P_{\text{conjunto}} = P_1 + P_2 = 2 \text{ dioptrías} + (-6 \text{ dioptrías}) = -4 \text{ dioptrías}$$

La distancia focal imagen es el inverso de la potencia óptica.

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-4 \text{ dioptrías}} = -0,25 \text{ m}$$

27. El ojo normal se asemeja a un sistema óptico formado por una lente convergente, el cristalino, de + 15 mm de distancia focal. La imagen de un objeto lejano, situado en el infinito, se forma en la retina, que se considera como una pantalla perpendicular al eje óptico. Calcula la distancia entre la retina y el cristalino y la altura de la imagen de un árbol de 16 m de altura, que está a 100 m del ojo.

Una lente convergente forma la imagen de un objeto lejano en el plano focal imagen, por lo que para objetos lejanos la distancia entre el cristalino y la retina es igual a la distancia focal imagen, es decir: 15 mm.

Para una lente convergente se tiene que su aumento lateral es:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow y' = y \frac{s'}{s} = 16 \text{ m} \frac{15 \text{ mm}}{-100 \text{ m}} = -2,4 \text{ mm}$$

La imagen está invertida.

28. Uno de los defectos más comunes del ojo es la miopía. Explica en qué consiste este defecto e indica con qué tipo de lentes se corrige. Si un ojo miope es incapaz de ver nítidamente objetos situados a más de 0,5 m de distancia (punto remoto), ¿cuántas dioptrías tiene?

El ojo de una persona miope tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de los objetos lejanos delante de la retina. Los objetos lejanos se ven borrosos y se corrige con lentes divergentes.

Para corregir el defecto, las lentes que utilizará esa persona deben ser tales que las imágenes de los objetos situados muy lejos, $s = +\infty$, se formen en el punto remoto del ojo, $s' = -0,5$ m.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{-0,5 \text{ m}} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f'} \quad \Psi \quad f' = -0,5 \text{ m}$$

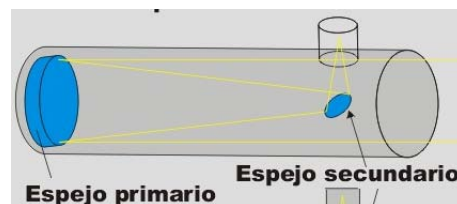
La persona utilizará unas lentes divergentes con una potencia de: $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0,5 \text{ m}} = -2 \text{ dioptrías}$

INVESTIGA**1. ¿Por qué los telescopios actuales son de reflexión? Representa la marcha de los rayos en estos.**

En los telescopios de refracción la luz debe atravesar la lente objetivo, que se debe pulir perfectamente en ambas caras sin imperfecciones que afecten a la posterior imagen. Como el índice de refracción del vidrio es distinto para cada color, esto genera un defecto conocido como aberración cromática y que se reconoce como un arco iris alrededor del objeto observado.

Los telescopios de refracción son más pesados y voluminosos que los de reflexión y a partir de los 80 mm de diámetro su costo es sensiblemente mayor al de un telescopio reflector de iguales dimensiones.

En los telescopios de reflexión la luz no debe atravesar el vidrio sino solamente reflejarse en su superficie. Por lo tanto no se requiere un vidrio especial y la única condición que debe reunir es la de ser estable a los cambios de la temperatura ambiental a los que se ve sometido. El espejo a su vez requiere del tallado y pulido de una sola superficie curva.

**2. ¿Por qué la isla de la Palma es un lugar privilegiado para la observación del cielo?**

En el Observatorio del Roque de los Muchachos, al borde del Parque Nacional de la Caldera de Taburiente, a 2.396 m. de altitud, en la isla de La Palma, se encuentra una de las baterías de telescopios más completa del mundo.

Su ubicación geográfica, en medio del Atlántico, y el peculiar clima provocan la formación de nubes entre los 1000 y 2000 m de altura, que hacen de espejo e impiden que la contaminación luminosa de las poblaciones de la costa dificulte la observación de las estrellas. Por encima de esa altura la atmósfera es muy estable y sin nubes.

3. ¿Cuáles son las características del aparato y de la órbita del telescopio espacial Hubble?

El telescopio espacial Hubble orbita alrededor de la Tierra a 593 km sobre el nivel del mar, con un periodo orbital de 97 min y se puso en órbita en 1990. El Telescopio Espacial Hubble ha sido uno de los proyectos que, sin duda, más han contribuido al descubrimiento espacial y gran parte del conocimiento científico que se dispone del espacio interestelar se debe a él.

Peso 69 toneladas, es de forma cilíndrica y tiene una longitud de 13,2 m y un diámetro de 4,2 m. Es un telescopio reflector, cuyo espejo principal tiene un diámetro de 2,4 m.

Desde su lanzamiento ha recibido varias visitas del trasbordador espacial para que los astronautas corrigieran diversos errores de funcionamiento e instalarle equipos adicionales.

TEST DE EVALUACIÓN

1. Completa la frase: Los espejos planos producen imágenes _____, situadas _____, de tamaño _____ al del objeto y de _____ dirección.

Los espejos planos producen imágenes virtuales, situadas a la misma distancia del espejo que el objeto, de tamaño igual al del objeto y de la misma dirección.

2. Justifica si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas: a) La imagen formada en un espejo convexo es siempre virtual. b) En un dioptrio la suma de las distancias focales es igual al radio del dioptrio. c) Una lupa es una lente divergente. d) Una lente convergente tiene una potencia negativa.

a) Verdadero.

Los espejos convexos forman imágenes virtuales para cualquier posición de los objetos.

b) Verdadero.

En un dioptrio siempre $f + f' = r$.

c) Falso.

Una lupa es una lente convergente, que actúa como tal cuando el objeto se coloca entre el foco objeto y la lente.

d) Falso.

Una lente convergente tiene distancia focal imagen positiva y por ello su potencia es también de signo positivo.

3. Una varilla de vidrio, de índice de refracción 1,5, tiene su extremo en forma de dioptrio convexo de 2 cm de radio. Su distancia focal imagen es: a) 6 cm; b) - 6 cm; c) 2 cm; d) - 2 cm.

La solución correcta es la a)

Aplicando la ecuación general de un dioptrio cuando el objeto está muy lejos: $s = -\infty$ y $r = +2\text{ cm}$, resulta que:

$$\frac{n'}{f'} - \frac{n}{-\infty} = \frac{n' - n}{r} \Rightarrow f' = \frac{n' \cdot r}{n' - n} = \frac{1,5 \cdot 2\text{ cm}}{1,5 - 1} = 6\text{ cm}$$

4. Una persona está situada en la orilla de un estanque de 1,5 m de profundidad. Si el índice de refracción del agua es 4/3, la profundidad aparente del estanque es: a) 2 m; b) 1,125 m; c) 1,5 m; d) 0,75 m.

FIGURA en la pag 318 del libro anterior

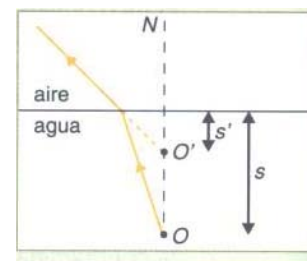
La solución correcta es la b).

Al aplicar la persona la ecuación del dioptrio plano, se tienen los datos:

$$s = 1,5\text{ m}; n = n_{\text{agua}} = 4/3; n' = n_{\text{aire}} = 1$$

La persona percibe una imagen virtual del fondo a una profundidad de:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = 1,5\text{ m} \cdot \frac{1}{4/3} = 1,125\text{ m}$$



5. Una lente tiene una potencia de 5 dioptrias. Si un objeto se coloca a 10 cm de la lente, la posición de la imagen está situada en: a) 20 cm; b) - 10 cm; c) - 20 cm; d) 50 cm.

La solución correcta es la c).

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes y como: $s = -0,10 \text{ cm}$ y $P = \frac{1}{f'} = +5$, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,1 \text{ m}} = \frac{5}{\text{m}} \Rightarrow s' = -0,2 \text{ m} = -20 \text{ cm}$$

6. Un objeto se coloca a 15 cm de un espejo cóncavo de 10 cm de radio de curvatura. La imagen formada está situada a una distancia del espejo de: a) 20 cm; b) 5 cm; c) -7,5 cm; d) 7,5 cm.

La solución correcta es la c)

Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y como $s = -15 \text{ cm}$ y $r = -10 \text{ cm}$, resulta:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-15 \text{ cm}} = \frac{2}{-10 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -7,5 \text{ cm}$$

7. Un objeto de 2 cm de altura se coloca a una distancia de 30 cm de una lente. Si la imagen se forma a 60 cm a la derecha de la lente, el tamaño del objeto es: a) 2 cm; b) -1 cm; c) 4 cm; d) -4 cm.

La solución correcta es la d)

Aplicando la ecuación del aumento lateral de una lente, donde: $y = +2 \text{ cm}$; $s = -30 \text{ cm}$ y $s' = +60 \text{ cm}$, se tiene que:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \frac{y'}{2 \text{ cm}} = \frac{60 \text{ cm}}{-30 \text{ cm}} \Rightarrow y' = -4 \text{ cm}$$

8. Completa la frase: Los espejos esféricos tienen ____ foco, situado ____ del segmento que une el centro geométrico y el centro de curvatura y por ello la distancia focal imagen es _____ que la distancia focal objeto.

Los espejos esféricos tienen un solo foco, situado en el punto medio del segmento que une el centro geométrico y el centro de curvatura y por ello la distancia focal imagen es igual que la distancia focal objeto.

9. Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones: a) En un dioptrio cóncavo se considera $r > 0$. b) La imagen formada por una lente divergente es siempre virtual. c) El foco imagen de una lente divergente está colocado a la derecha de la lente. d) Las imágenes formadas por un espejo cóncavo son siempre imágenes reales.

a) Falso.

En un dioptrio cóncavo el centro de curvatura está a la izquierda de la superficie y por ello su radio tiene el signo negativo.

b) Verdadero.

Las lentes divergentes forman imágenes virtuales para cualquier posición de los objetos.

c) Falso.

Los rayos paralelos al eje principal divergen después de atravesar una lente divergente y por ello sus prolongaciones se reúnen a la izquierda de la lente en el foco imagen.

d) Falso

Un espejo cóncavo forma imágenes virtuales cuando los objetos se colocan entre su foco y el

espejo.

10. Un objeto se sitúa a 30 cm de una lente divergente de 20 cm de distancia focal. La distancia desde la lente a la imagen formada es: a) -50 cm; b) 12 cm; c) 10 cm; d) - 12 cm.

La solución correcta es la d).

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes, teniendo en cuenta que $s = -30$ cm y que como la lente es divergente $f' = -20$ cm, resulta que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1}{-20 \text{ cm}} \Rightarrow s' = -12 \text{ cm}$$

Física

Unidad didáctica 11

La física del siglo XX

SOLUCIONARIO DEL LIBRO DE FÍSICA DE 21 DE BACHILLERATO

Unidad didáctica 11: La Física del siglo XX

Cuestiones iniciales

1. ¿Hay alguna diferencia entre observaciones y postulados?

Sí, pues son conceptos diferentes.

Una observación es una comprobación real o experimental de un hecho o un fenómeno físico que se trata de estudiar o analizar.

Un postulado es una suposición dentro de un marco teórico que se utiliza para explicar por qué sucede el hecho que se está observando.

2. Una persona que está en un globo aerostático, ve que otro globo está subiendo, ¿puede estar segura de que realmente es el otro globo el que asciende?

No, pues la misma sensación percibe el observador cuando su globo está en reposo y el otro asciende, que si su globo está bajando y el otro está en reposo.

3. Comenta la siguiente frase de Werner Heisenberg, uno de los físicos más importantes de la Física cuántica: *“Cabe decir que el progreso de la ciencia sólo exige de los que en ella cooperan el admitir y el elaborar nuevos contenidos intelectuales. Cuando se pisa un terreno realmente nuevo, puede suceder que no solamente haya que aceptar nuevos contenidos, sino que sea preciso, además, cambiar la estructura de nuestro pensar, si se quiere comprender lo nuevo”*.

La frase debe conducir a la reflexión que ante nuevos hechos no explicables por el modelo teórico imperante, hay que abrir el mundo del pensamiento a nuevas fronteras, que es lo que ocurrió durante la aparición de la Física cuántica.

INVESTIGA

1. Pon un título alternativo a la lectura anterior y explica el significado de los términos: determinismo, causa y azar y explica por qué no se pueden aplicar las leyes de la Física Clásica al mundo microscópico.

Se pueden poner títulos como: el fin de la Física Clásica, se terminó el principio de determinismo y el de causalidad o ha nacido una nueva Física.

Las leyes clásicas de la Física a través de sus expresiones matemáticas permiten predecir el comportamiento de un sistema en un tiempo posterior en función de los datos previos y esto es lo que se entiende por principio de determinismo.

Además en la Física clásica está perfectamente caracterizado que la evolución o el comportamiento de un sistema se debe a una causa, que es explicada por la teoría física adecuada.

En la Física Cuántica el azar sirve para caracterizar el comportamiento aleatorio de un sistema y se usa la probabilidad para predecir el comportamiento estadístico del mismo.

No se puede aplicar las leyes de la Física Clásica al mundo microscópico porque en él rigen las leyes de la Física Cuántica, y, además, no se deben utilizar ejemplos de la vida macroscópica, como pelotas de tenis, etc, para explicar el comportamiento de los sistemas microscópicos.

2. Las dos pinturas mostradas representan dos tipos de paisajes (Constable es el autor del que aparece a la izquierda; Monet, del de la derecha), obsérvalos y relaciona esta evolución del paisaje en el arte con la evolución de las teorías físicas.

El paisaje de John Constable es un paisaje tradicional realista, aunque no busca el realismo exacto en la representación de las cosas, sino la capacidad que tienen las cosas para evocar ideas o emociones. Se preocupa por los efectos ambientales de la luz sobre la naturaleza, con nubes inestables en los que el aspecto cambia de un momento a otro. Constable afirmó: La forma de un objeto es indiferente; la luz, la sombra y la perspectiva siempre lo harán hermoso.

La pintura de Monet, unas ninfeas, en botánica es el nombre científico de los nenúfares, las cultivó en el jardín acuático que acondicionó en 1893 en su propiedad de Giverny. Evacuando el horizonte y el cielo, Monet concentra el punto de vista en una pequeña zona del estanque, percibida como una parte de la naturaleza, casi en plano de cerca. Ningún punto detiene la atención más que otro, y la impresión dominante es aquella de una superficie informe. El formato intensifica esta neutralidad de la composición donde la ausencia de punto de referencia proporciona al fragmento las calidades del infinito, de lo ilimitado. Si se mira el lienzo de cerca, se tiene la impresión de una total abstracción, tanto los trazos de pintura depositada por la brocha superan la identificación de las plantas o de sus reflejos. El espectador debe realizar un esfuerzo óptico y cerebral constante para reconstituir el paisaje evocado. El inacabado de los bordes dejados sin pintar, acentúa esta insistencia sobre la pintura como superficie cubierta de colores, y es una de las obras maestras de los paisajes abstractos.

Por tanto la visión de los dos cuadros sirve como motivo para el paso del estudio de lo grande o macro (el paisaje de Constable) a lo pequeño, lo nenúfares de Monet, a lo micro, además de que en Monete se observa la falta de un punto de referencia, no así en el pasaje de Constable.

3. Consulta una hemeroteca o en el buscador www.google.es y da una explicación de si una vez construidos los pilares de la Física Cuántica en el primer tercio del siglo XX, finalizó la controversia sobre la misma.

No. Con objeto de dar una estructura lógica a las nuevas ideas y resolver el relativo caos en el que se encontraba la Física Teórica en la década de 1920, Bohr introduce en 1923 el principio de correspondencia en el que afirma que, dado que las leyes de la Física Clásica están plenamente confirmadas en los procesos macroscópicos, postula como condición necesaria de la nueva Física Cuántica, el que todos los problemas de la Física Cuántica deben conducir en el límite a los mismos resultados que la Física

Clásica.

El principio de correspondencia muestra que, para un elevado número de partículas o unos valores muy grandes de los números cuánticos de la Física Cuántica, se obtiene lo previsto por la Física Clásica. Este principio supone admitir, por un lado, la existencia de dos niveles en la Física: el microscópico, formado por el estudio de la materia a nivel atómico o subatómico, y el macroscópico, constituido por los sistemas o los hechos directamente observables, y por otro, la conexión en el límite del mundo microscópico con el macroscópico.

Por otro lado, la descripción de los sistemas microscópicos como onda o corpúsculo de acuerdo con la hipótesis de De Broglie representaba una gran incomodidad intelectual. Por ello, para Bohr, la descripción de un sistema como onda o corpúsculo representa sólo un caso límite de "algo" para lo que no se tiene un modelo clásico, y es preciso utilizar los dos conceptos para tener una visión general del comportamiento de la materia. De esta forma Bohr enuncia en 1927 su principio de complementariedad, que tiene una naturaleza más filosófica que física y viene a decir que en la descripción de ciertos procesos en todos los órdenes del conocimiento es preciso utilizar a la vez conceptos que son excluyentes pero complementarios.

Bohr aplica su principio a aquellos fenómenos físicos para los que resulta imposible reunir en una única imagen los resultados de diferentes tipos de experiencias, como las que se refieren a las propiedades corpusculares y ondulatorias de la materia, que deben considerarse más bien como aspectos complementarios en el sentido de que sólo la totalidad de los resultados suponen la información total sobre el sistema estudiado.

En octubre de 1927 se celebra en Bruselas el 51 Congreso Solvay dedicado al tema "electrones y fotones" y la opinión generalizada es que en él las nuevas teorías recibirían la revalidación definitiva. A dicho Congreso asiste Einstein y sorprende el que no acepte la interpretación probabilística de la Física Cuántica, que para él era debido a la falta de conocimiento.

Einstein se dedicó a intentar probar, mediante contraejemplos, que la nueva teoría es inconsistente consigo misma. Pero Bohr, Heisenberg y otros fueron contestando uno a uno todos ellos, refutando las ideas de Einstein.

Para Einstein, el aspecto indeterminado de la Teoría Cuántica no era satisfactorio y presentía que debía existir algo más, por ser insuficientes los medios de observación de entonces, y dicha teoría era probabilística por ser incompleta. Pero para Bohr, la Física Cuántica satisfacía el principal criterio de toda teoría, que era el de permitir prever los resultados de las experiencias, aún en términos de probabilidad, afirmando que dicha teoría se trataba de un instrumento adecuado de trabajo.

Gracias al prestigio de Einstein y a las aparentes paradojas de la aplicación de la Física Cuántica con principios tan básicos como el de causalidad, tuvo lugar la aparición de una serie de teorías, como alternativa, que se conocen como teorías de variables ocultas, cuya pretensión era que si se pudiesen conocer los valores de estas variables "extra" todo quedaría bien determinado y no habría lugar para incertidumbres ni resultados probabilísticos.

A partir de la segunda guerra mundial el desarrollo de la Física Nuclear, con la construcción de grandes aceleradores de partículas, situó a la Física Cuántica en un segundo plano. Pero en la década de 1960, un físico del CERN (Ginebra), el irlandés del norte John Bell (1928-1990), propició un cambio radical en esta apreciación, al

sentar las bases de los posibles experimentos físicos de laboratorio que pudieran deshacer la controversia planteada sobre la veracidad o no de las teorías de las variables ocultas.

En la década de 1980 la tecnología fue capaz de llevar a cabo dichos experimentos y el francés Alain Aspect (nacido en 1947) fue el primero en comprobar que la balanza se decantaba a favor de la Física Cuántica. Como consecuencia de ello, la década de 1990 ha vivido el renacimiento de la misma, pasando de ser una curiosidad académica a ser el motor del desarrollo de una nueva revolución científica: la Nanociencia, que cambiará en el siglo XXI el futuro de nuestras vidas.

Se adjunta a continuación las siguientes tablas con equivalencia de unidades y valores de constantes físicas para poder resolver los ejercicios siguientes.

Diversas unidades prácticas y su equivalencia en unidades del S.I.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencia
distancia	unidad astronómico año-luz pársec	U.A. a.l.	$1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ $9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$
volumen	Litro	L	10^{-3} m^3
masa	tonelada unidad de masa atómica	t u	10^3 kg $1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
densidad	gramo/centímetro cúbico	g/cm^3	$10^{-3} \text{ kgAm}^{-3}$
fuerza	kilopondio	Kp	9,8 N
energía	Kilowatio-hora electronvoltio caloría atmósfera A litro	kWh eV cal atm A L	$3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ 4,184 J $1,013 \cdot 10^2 \text{ J}$
potencia	caballo de vapor	CV	$7,355 \cdot 10^2 \text{ W}$
presión	atmósfera bar	atm bar	$1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ 10^5 Pa
campo magnético	Gauss	G	10^{-4} T
actividad radiactiva	Curio	Ci	$3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
dosis de radiación	Rad	Rad	10^{-2} Gy
dosis efectiva	Rem	Rem	10^{-2} Sv

Principales constantes físicas

Magnitud	Símbolo	Valor en el SI
Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre al nivel del mar	g_0	$9,8 \text{ m As}^{-2} = 9,8 \text{ NwAkg}^{-1}$
Constante de gravitación universal	G	$6,672 \cdot 10^{-11} \text{ NAm}^2 \text{Akg}^{-2}$
Constante de Coulomb (en el vacío)	K_0	$9 \cdot 10^9 \text{ NAM}^2 \text{AC}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{AN}^{-1} \text{Am}^{-2}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N AA}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ JAs}$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ mAs}^{-1}$
Velocidad de propagación del sonido en el aire a 20 °C	v_{sonido}	340 mAs^{-1}
Carga eléctrica elemental	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electron	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ u}$
Masa del proton	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0073 \text{ u}$
Masa del neutron	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0087 \text{ u}$
Factor conversión masa-energía		$u = 931,5 \text{ MeVAc}^2$
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ partículasAmol}^{-1}$
Constante de Rydberg	R	$1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Radio de la Tierra	R_T	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Cero en la escala Celsius de temperatura	0 EC	273,16 K

Actividades finales

1. Un observador terrestre mide la longitud de una nave espacial que pasa próxima a la Tierra y que se mueve a una velocidad $v < c$, resultando ser L . Los astronautas que viajan en la nave le comunican por radio que la longitud de su nave es L_0 . a) ¿Coinciden ambas longitudes? ¿Cuál es mayor? Razona la respuesta. b) Si la nave espacial se moviese a la velocidad de la luz, ¿cuál sería la longitud que mediría el observador terrestre?

a) No, pues de las ecuaciones de transformación de Lorente y utilizando la terminología del enunciado se deduce que:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ y como } v < c, \text{ entonces } L_0 > L$$

b) Si $v = c$, resulta que:
$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - 1}} \Rightarrow L = L_0 \cdot \sqrt{0} = 0$$

Físicamente es un resultado imposible de darse, lo cual es una prueba de que c es la máxima velocidad que existe y que no se puede alcanzar en la práctica por cualquier sistema que no sea la luz propagándose en el vacío.

2. En relación con una nave espacial: a) ¿Cuál debería ser la velocidad de esa nave espacial respecto a la Tierra para que un observador situado en la Tierra mida que su longitud es la mitad de lo que mide un observador situado en la nave espacial? b) ¿Cuál sería la energía cinética de la nave espacial si su masa en reposo es 5000 kg?

a)
$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Como: $L = \frac{L'}{2}$, entonces:
$$\frac{L'}{2} = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ luego: } \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Por tanto:
$$v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c = 2,59 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b)
$$E_C = (m - m_0) \cdot c^2 \text{ donde: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ luego: } E_C = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) \cdot c^2$$

Por tanto:

$$E_C = \left(\frac{5000 \text{ kg}}{\sqrt{1 - \frac{(2,59 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}}} - 5000 \text{ kg} \right) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 4,4 \cdot 10^{20} \text{ J}$$

3. Un electrón tiene una energía en reposo de 0,51 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad de $0,8 \cdot c$, calcula su masa relativista, su momento lineal y su energía total. Datos: carga del electrón: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$E_R = m_0 \cdot c^2$. De esta forma:

$$E_R = 0,51 \text{ MeV} = 0,51 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,51 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$\text{De esta forma: } 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ J} = m_0 \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \Rightarrow m_0 = 9,06 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Por tanto: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9,06 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \frac{(0,8 \cdot c)^2}{c^2}}} = 15,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

El valor numérico de su momento lineal \vec{p} viene dado por la expresión:

$$p = m \cdot v = 15,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 3,62 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$E = m \cdot c^2 = 15,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,36 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

4. ¿Con qué rapidez debe convertirse masa en energía para producir 20 MW?

$$P = 20 \text{ MW} = 20 \cdot 10^6 \text{ W}$$

A partir de la expresión de la potencia, se puede determinar la rapidez con que la masa se convierte en energía: $P = \frac{E}{t}$

$$\text{Ahora: } 20 \cdot 10^6 \text{ W} = \frac{m \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{t} \Rightarrow \frac{m}{t} = \frac{20 \cdot 10^6 \text{ W}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ kg/s}$$

Luego deben convertirse $2,2 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$ de masa en energía cada segundo para producir 20 MW de potencia.

5. Según la teoría de la relatividad, ¿cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud sea la tercera parte de la que tiene en reposo?

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}}, \text{ como: } L = \frac{L'}{3}, \text{ entonces:}$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = c \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,94 \cdot c$$

6. Se determina por métodos ópticos la longitud de una nave espacial que pasa por las proximidades de la Tierra, resultando ser de 100 m. En contacto radiofónico, los astronautas que viajan en la nave comunican que la longitud de su nave es 120 m. ¿A qué velocidad viaja la nave con respecto a la Tierra?

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L'^2}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \sqrt{1 - \frac{(100 \text{ m})^2}{(120 \text{ m})^2}} = 1,66 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

7. En qué se parece la no simultaneidad de oír el trueno después de ver el rayo a la no simultaneidad relativista.

No se parece en nada.

La duración entre ver el rayo y escuchar el trueno no tiene nada que ver con los observadores en movimiento ni con la relatividad. En este caso sólo se hacen correcciones al tiempo que tardan las señales (sonido y luz) en llegar a la persona que percibe el fenómeno.

La relatividad de la simultaneidad es una discrepancia genuina entre observaciones hechas por personas en movimiento relativo, y no sólo una disparidad entre distintos tiempos de recorrido para las distintas señales.

8. ¿Se puede considerar la ecuación: $E = m \cdot c^2$ desde otro ángulo y decir que la materia se transforma en energía pura cuando viaja con la rapidez de la luz elevada al cuadrado?

No y es un gran error hacer ese razonamiento.

No se puede hacer que la materia se mueva con la rapidez de la luz y mucho menos a la rapidez de la luz elevada al cuadrado (¡que no es una rapidez!)

La ecuación: $E = m \cdot c^2$ sólo indica que la energía y la masa son dos caras de la misma moneda.

9. El período T de un péndulo situado sobre la Tierra se mide en un sistema de referencia que está en reposo con respecto a la Tierra, encontrándose que es igual a 3,0 s ¿Cuál será el período medido por un observador que esté en una nave espacial moviéndose a una velocidad de $0,95 \cdot c$ con respecto al péndulo?

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3,0 \text{ s}}{\sqrt{1 - \frac{(0,95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 9,6 \text{ s}$$

Es decir, las medidas realizadas por el observador de la nave muestran que se tarda más en realizar una oscilación en comparación con un observador situado sobre la Tierra.

10. Un astronauta realiza un viaje a la estrella Sirio, situada a 8 años-luz de la Tierra. El astronauta mide que el tiempo del viaje de ida es de 6 años-luz. Si la nave espacial se mueve a una velocidad constante de $0,8 \cdot c$, ¿cómo podemos reconciliar el hecho de que la distancia sea de 8 años-luz con la duración de 6 años medida por el astronauta?

Los 8 años-luz representan la longitud propia (la distancia de la Tierra a Sirio), medida

por un observador que viera tanto a la Tierra como a Sirio en reposo.

El astronauta ve que Sirio se está aproximando a él a la velocidad de $0,8 \cdot c$, pero también ve la distancia que le separa de la estrella está contraída hasta el valor:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 8 \text{ años luz} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,8 \cdot c)^2}{c^2}}$$

11. Sea un protón que se mueve a una velocidad v donde se tienen en cuenta los efectos relativistas. Halla: a) Su energía en reposo en MeV. b) Si su energía total es tres veces la del reposo, ¿cuál es el valor de su velocidad v ? c) Su energía cinética. d) El módulo del momento lineal del protón. Datos: masa del protón en reposo $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

$$a) E_R = m_0 \cdot c^2 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\text{Luego: } E_R = 1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 937,5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1 \text{ MeV}}{10^6 \text{ eV}} = 937,5 \text{ MeV}$$

$$b) E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \cdot m_0 \cdot c^2$$

$$\text{Por tanto: } \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot c = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,83 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$c) E_C = (m - m_0) \cdot c^2 \text{ donde: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ luego: } E_C = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) \cdot c^2$$

Luego:

$$E_C = \left(\frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \frac{(2,83 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}}} - 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \right) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 3,03 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

E igualmente:

$$E_C = 3,03 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,89 \cdot 10^9 \text{ eV} \cdot \frac{1 \text{ GeV}}{10^9 \text{ eV}} = 1,89 \text{ GeV}$$

d) El módulo de su momento lineal \vec{p} viene dado por la expresión: $p = m \cdot v$

$$\text{Luego: } v = \frac{p}{m} = \frac{p \cdot c^2}{m \cdot c^2} = \frac{p \cdot c^2}{E}$$

Sustituyendo ahora el valor de v en la ecuación: $E = m \cdot c^2$, resulta:

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{p \cdot c^2}{E})^2}{c^2}}}$$

Operando y despejando E^2 , se obtiene: $E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$

Como: $E = 3 \cdot m_0 \cdot c^2$ entonces: $(3 \cdot m_0 \cdot c^2)^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$

de donde: $p^2 \cdot c^2 = 8 (m_0 \cdot c^2)^2$

Por tanto: $p = \sqrt{8} \cdot \frac{m_0 \cdot c^2}{c} = \sqrt{8} \cdot \frac{E_R}{c} = \sqrt{8} \cdot \frac{1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,4 \cdot 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

12.) En qué consiste el efecto fotoeléctrico? Explica su origen y sus principales características y representa la variación de la energía cinética de los fotoelectrones emitidos en función de la frecuencia de la señal luminosa incidente.

El efecto fotoeléctrico consiste en la liberación de electrones de un metal por la acción de la luz, especialmente si tiene una frecuencia elevada.

El origen del efecto fotoeléctrico está en los trabajos que estaba realizando el físico alemán Hertz para tratar de demostrar con experiencias la teoría electromagnética de la luz y de forma fortuita comprobó que la chispa entre dos esferas metálicas cargadas eléctricamente saltaba más fácilmente si éstas eran iluminadas con luz ultravioleta.

Sus principales características son:

11. La energía cinética de los electrones arrancados no depende de la intensidad de la luz incidente y sí es función de la frecuencia de la misma.

21. Para cada metal existe una frecuencia luminosa umbral, llamada ν_0 , por debajo de la cual no se produce la emisión fotoeléctrica.

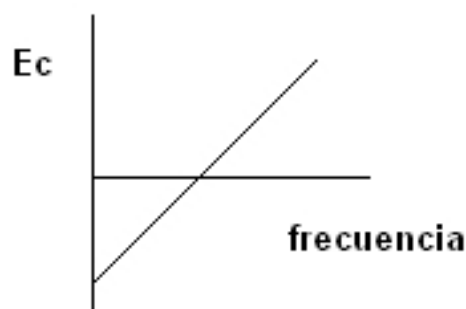
31. Una radiación incidente de frecuencia superior a ν_0 , basta para arrancar electrones, aunque su intensidad luminosa sea muy pequeña.

La ecuación que rige el efecto fotoeléctrico es:

$$E = W_0 + E_C \Rightarrow h \nu = h \nu_0 + 2 m_e \nu^2$$

Por tanto: $E_C = E - W_0 = h \nu - W_0$

Y al representar E_C frente a ν se obtiene la siguiente gráfica:



13. Indica cuál es la respuesta correcta de las siguientes afirmaciones sobre el efecto fotoeléctrico: a) La energía cinética de los electrones emitidos depende de la intensidad de la luz incidente. b) La energía de extracción no depende del metal. c) Hay una frecuencia mínima para la luz incidente. d) Al aumentar la frecuencia de la radiación incidente disminuye la energía cinética de los electrones emitidos.

La respuesta correcta es la c)

14. En el contexto del efecto fotoeléctrico, ¿qué se entiende por trabajo de extracción del metal de la placa a iluminar? Supuesto conocido el valor del trabajo de extracción, ¿cómo se puede determinar la frecuencia umbral?

Como el fotón es el cuanto de radiación que interacciona con los electrones del metal y el efecto fotoeléctrico se explica por la existencia de fotones de energía suficiente para arrancar los electrones del metal. Parte de la energía del fotón se emplea en arrancar el electrón del metal y el resto se convierte en energía cinética del electrón libre.

Se llama energía de extracción del metal, W_0 (también conocida como trabajo de extracción) a la energía que hay que transferir al metal para poder arrancar un electrón del mismo.

Si E es la energía del fotón que incide sobre el metal y que recibe el electrón, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, $E - W_0$ es la energía cinética E_C del electrón que escapa.

Como: $E - W_0 = E_C$ resulta que: $h \nu_0 - W_0 = 0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{W_0}{h}$, donde ν_0 es la frecuencia umbral.

Luego si incide una radiación de frecuencia mayor que la umbral, $\nu > \nu_0$, se arrancan electrones de cierta energía cinética, y dicha energía cinética será mayor cuanto mayor sea la frecuencia ν de la radiación incidente.

15. Si el trabajo de extracción de la superficie de determinado material es $W_0 = 2,07 \text{ eV}$: a) ¿Qué rango de longitudes de onda del espectro visible puede utilizarse con este material en una célula fotoeléctrica, sabiendo que las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 nm y 775 nm. b) Calcula la velocidad de extracción de los electrones emitidos para una longitud de onda de 400 nm.

a) La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico es: $E = W_0 + E_C$

La relación entre el trabajo de extracción y la longitud de onda umbral es:

$$W_0 = h \cdot \nu_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{h \cdot c}{W_0} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,07 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 600 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

El efecto fotoeléctrico se produce para las longitudes de onda menores que la umbral. Por tanto dentro del espectro visible, se arrancan electrones para las longitudes de onda comprendidas entre 380 nm y 600 nm.

b) Volviendo a aplicar la ecuación de Einstein, se tiene que:

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow h c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \frac{1}{2} m \cdot v^2. \text{ Por tanto:}$$

$$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \left(\frac{1}{400 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - \frac{1}{600 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \right) = \frac{1}{2} 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot v^2$$

De donde despejando v se obtiene: $v = 6,03 \cdot 10^5 \text{ m/s}$

16. Determina la frecuencia de la onda asociada a un fotón con 200 MeV de energía y calcula su longitud de onda y su momento lineal.

Aplicando la ecuación de Planck, resulta que: $E = h \cdot \nu$, luego:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 4,8 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}$$

Utilizando la relación entre las diferentes magnitudes, se tiene que la longitud de onda asociada es:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,8 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}} = 6,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Según la hipótesis de De Broglie, el momento lineal del fotón como partícula es:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{6,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}} = 1,06 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

17. Un equipo láser de 630 nm de longitud de onda, concentra 10 mW de potencia en un haz de 1 mm de diámetro. a) Deduce y determina el valor de la intensidad del haz en este caso. b) Halla el número de fotones que el equipo emite en cada segundo.

a) Se denomina intensidad de una onda en un punto, I , a la energía que se propaga a través de la unidad de superficie perpendicularmente a la dirección de propagación en la unidad de tiempo. Como la energía propagada en la unidad de tiempo es la potencia con que emite el foco, se cumple que:

$$I = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{\pi \cdot r^2} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{\pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 1,27 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$$

b) Utilizando la definición de potencia, la energía que concentra el haz en la unidad de tiempo es:

$$P = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow E = P \cdot \Delta t = 10 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Aplicando la ecuación de Planck resulta que la energía de un fotón de esa longitud de onda es:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{630 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,16 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por lo que la cantidad de fotones emitidos en un segundo es:

$$n = \frac{E}{E_{\text{fotón}}} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{3,16 \cdot 10^{-19} \text{ J/fotón}} = 3,16 \cdot 10^{16} \text{ fotones}$$

18. Un láser de helio-neón de 3 mW de potencia emite luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. Si se hace incidir un haz de este láser sobre la superficie de una placa metálica cuya energía de extracción es 1,8 eV: a) Calcula el número de fotones que inciden sobre el metal transcurridos 3 segundos. b) La velocidad de los fotoelectrones extraídos y el potencial que debe adquirir la placa (potencial de frenado) para que cese la emisión de electrones.

a) Aplicando la definición de potencia y la ley de Planck:

$$n = \frac{\text{Energía emitida}}{\text{Energía fotón}} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \nu} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} = \frac{P \cdot t \cdot \lambda}{h \cdot c}, \text{ luego:}$$

$$n = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ J/s} \cdot 3 \text{ s} \cdot 632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{6,6310^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,86 \cdot 10^{16} \text{ fotones}$$

b) La energía de la radiación incidente es: $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, luego:

$$E = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,96 \text{ eV}$$

Aplicando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se tiene:

$$E = W_0 + E_C \Rightarrow 1,96 \text{ eV} = 1,8 \text{ eV} + E_C$$

Por tanto la energía cinética de los electrones emitidos es: $E_C = 0,16 \text{ eV}$

Como: $E_C = V_0 \cdot e$, resulta que el potencial de detención o frenado que impide que lleguen los electrones al ánodo es:

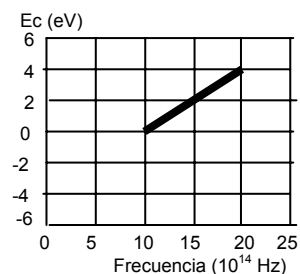
$$V_0 = 0,16 \text{ V}$$

Aplicando la definición de energía cinética, resulta que la velocidad de los electrones es:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\text{luego: } 0,16 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}} = \frac{1}{2} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot v^2 \Rightarrow v = 2,37 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

19. La gráfica adjunta representa la energía cinética de los electrones emitidos por un metal en función de la frecuencia de la luz incidente. Deduce el valor de la constante de Planck y de la energía de extracción del metal.



La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico es:

$$E = W_0 + E_C \Rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_C$$

Despejando la energía cinética de los electrones emitidos, resulta que: $E_C = h(\nu - \nu_0)$

Al representar gráficamente la energía cinética de los electrones frente a la frecuencia de la radiación incidente, se tiene que la pendiente de la gráfica es la constante h de Plack:

$$pendiente = \frac{\Delta E_C}{\Delta \nu} = h, \text{ luego:}$$

$$pendiente = \frac{\Delta E_C}{\Delta \nu} = \frac{4 \text{ eV} - 0 \text{ eV}}{20 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 10 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = \frac{4 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{10 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Por tanto, el valor de h hallado en la gráfica es: $h = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

La frecuencia umbral es aquella para la que la energía cinética de los electrones emitidos es igual a cero. De la representación gráfica se deduce que su valor es:

$$\text{Frecuencia umbral: } \nu_0 = 10 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Por lo que la energía de extracción del metal es:

$$W_0 = h \cdot \nu_0 = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 10 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

20. Al iluminar un metal con luz monocromática de frecuencia $1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, es necesario aplicar un potencial de frenado de 2 V para anular la corriente que se produce. Calcula la frecuencia mínima que ha de tener la luz para extraer electrones de dicho metal. ¿Se produce efecto fotoeléctrico al iluminar el metal con una radiación de 500 nm ?

Que el potencial de frenado sea 2 V significa que la energía cinética de los electrones emitidos es igual a: $E_C = 2 \text{ eV}$.

Aplicando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, resulta que:

$$E = W_0 + E_C \Rightarrow h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_C, \text{ de esta forma:}$$

$$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \nu_0 + 2 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}$$

Despejando, se obtiene que la frecuencia umbral es: $\nu_0 = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

A la radiación de 500 nm en el vacío le corresponde una frecuencia de:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Como esta frecuencia es menor que la frecuencia umbral, no se produce efecto fotoeléctrico al iluminar el metal con esa radiación.

21. Una antena de telefonía móvil emite una radiación de 900 MHz, con una potencia de 1500 W. Calcula la longitud de onda de la radiación emitida. ¿Cuál es el valor de la intensidad de la radiación a una distancia de 50 m de la antena. ¿Cuántos fotones emite la antena en 1 s?

Utilizando la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de la onda electromagnética resulta:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{900 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0,33 \text{ m}$$

Se denomina intensidad de una onda en un punto, I , a la energía que se propaga a través de la unidad de superficie perpendicularmente a la dirección de propagación en la unidad de tiempo. Como la energía propagada en la unidad de tiempo es la potencia con que emite el foco y aplicándolo para una esférica, resulta:

$$I = \frac{E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1500 \text{ W}}{4 \cdot \pi \cdot (50 \text{ m})^2} = 0,048 \text{ W/m}^2$$

Aplicando la ecuación de Planck resulta que la energía de un fotón de esa longitud de onda es: $E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 900 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 5,97 \cdot 10^{-25} \text{ J}$

Por lo que la cantidad de fotones emitidos en un segundo es:

$$n = \frac{P}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1500 \text{ J/s}}{5,97 \cdot 10^{-25} \text{ J/fotón}} = 2,51 \cdot 10^{27} \text{ fotones/s}$$

22. Admitiendo que el protón en reposo tiene una masa 1836 veces mayor que la del electrón en reposo, ¿qué relación existirá entre las longitudes de onda de De Broglie de las dos partículas si se mueven con la misma energía cinética y considerando despreciables los efectos relativistas?

La longitud de onda asociada a una partícula es: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \Rightarrow m \cdot v = \frac{h}{\lambda}$

Y su energía cinética es: $E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

$$\text{Operando en esta ecuación: } E_C = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot v^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{h^2 / \lambda^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{m \cdot \lambda^2}$$

Si la energía cinética de las dos partículas son iguales, resulta que: $E_{C,p} = E_{C,e}$, luego:

$$\frac{1}{2} \frac{h^2}{m_p \cdot \lambda_p^2} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{m_e \cdot \lambda_e^2} \Rightarrow m_p \cdot \lambda_p^2 = m_e \cdot \lambda_e^2$$

$$\text{Operando: } \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{\frac{1836 \cdot m_e}{m_e}} = 42,85$$

La longitud de onda asociada al electrón es aproximadamente 43 veces mayor que la longitud de onda asociada al protón.

23. ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 200 veces la correspondiente a un neutrón de energía cinética 6 eV? ¿Se puede considerar que el electrón a esa velocidad es no relativista? Datos: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_n = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Utilizando la definición de energía cinética: $E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ se calcula la velocidad del neutrón:

$$v_n = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 3,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Aplicando la hipótesis de De Broglie, la longitud de onda asociada es:

$$\lambda_n = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

La longitud de onda asociada al electrón es:

$$\lambda_e = 200 \cdot \lambda_n = 200 \cdot 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 2,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

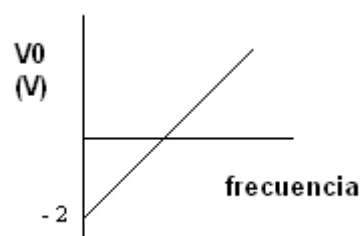
$$\text{Y su velocidad es: } \lambda_e = \frac{h}{m \cdot v_e} \Rightarrow v_e = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Que comparada con la velocidad de la luz resulta que es:

$$\frac{3,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 100 = 0,1\% \text{ de la velocidad de la luz, por lo que sí se pueden despreciar}$$

los efectos relativistas.

24. La gráfica de la figura representa el potencial de frenado, V_0 , de una célula fotoeléctrica en función de la frecuencia de la luz incidente. La ordenada en el origen tiene el valor de -2 V. a) Deduce la expresión teórica de V_0 en función de ν . b) ¿Qué parámetro característico de la célula fotoeléctrica podemos determinar a partir de la ordenada en el origen y determina el valor. c) ¿Qué valor tendrá la pendiente de la recta de la figura.



a) La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico se puede escribir como:

$$E = W_0 + E_C \text{ e igualmente: } E = W_0 + e \cdot V_0 \Rightarrow h \cdot \nu = W_0 + e \cdot V_0$$

$$\text{Despejando: } V_0 = \frac{h \cdot \nu}{e} - \frac{W_0}{e}$$

b) Del valor de la ordenada en el origen se calcula el trabajo de extracción y la frecuencia umbral de emisión de electrones: $-2V = -\frac{W_0}{e}$

$$\text{Luego: } W_0 = 2 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Y la frecuencia umbral: } \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} = 4,82 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{c) La pendiente de la recta es: } \textit{pendiente} = \frac{h}{e} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ V}\cdot\text{s}$$

25. Halla la longitud de onda de las dos primeras líneas obtenidas por la ecuación de Balmer del espectro del átomo de hidrógeno, sabiendo que la constante de Rydberg R tiene el valor de $1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

$$\text{Se cumple la siguiente ecuación: } \frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Donde la primera línea del espectro es aquella en la que $n = 3$, de forma que:

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \Rightarrow \lambda_1 = 656,3 \text{ A}10^{-9} \text{ m} = 656,3 \text{ nm.}$$

Repitiendo los cálculos para $n = 4$ se obtiene la segunda línea, de forma que:

$$\frac{1}{\lambda_2} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow \lambda_2 = 486,2 \text{ A}10^{-9} \text{ m} = 486,2 \text{ nm}$$

26. Determina la longitud de onda de un electrón que se ha puesto en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico de 100 V.

El electrón al ser puesto en movimiento adquiere una energía cinética y por tanto una velocidad que viene dada por la ecuación: $e \Delta V = \frac{1}{2} m v^2$, con lo que la velocidad del mismo es:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 100 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Comparando v con c podemos despreciar los efectos relativistas, luego la longitud de onda del electrón es:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Test de evaluación

1. En una carrera de 100 m, el atleta A realiza su carrera en 9,89 s y el atleta B en 9,75 s. Si la pista del atleta B es paralela a la del A, pero desplazada 300 m y los atletas salen de sus marcas cuando oyen el pistoletazo de salida, suponiendo que la velocidad del sonido es 330 m/s, quien llega antes a la meta: a) El atleta A. b) El atleta B. c) Ninguno por ser salida nula. d) Los dos a la vez.

El origen del problema está en que el pistoletazo que marca la salida es oído un tiempo después por el segundo corredor que está separado del primero 300 m. Por ello el primer corredor sale antes y por esta ventaja llega antes a la meta, aunque el segundo corredor realice su carrera en menos tiempo.

Si la velocidad del sonido en las circunstancias del momento de la carrera es 330 m/s, por tanto el pistoletazo de salida es oído por el segundo atleta cuando corre por la pista que está separada 300 m de la primera:

$$s = v \cdot t_{\text{sonido}} \Rightarrow t_{\text{sonido}} = \frac{s}{v} = \frac{300 \text{ m}}{330 \text{ m/s}} = 0,91 \text{ s}$$

Si el atleta A realiza su carrera de 100 m en 9,89 s y el corredor B en 9,75 s, supongamos para simplificar los cálculos que toda la carrera se hace a la velocidad media obtenida a partir de dichas marcas, de esta forma:

$$\text{El corredor A tiene una velocidad media de: } v_A = \frac{s}{t} = \frac{100 \text{ m}}{9,89 \text{ s}} = 10,11 \text{ m/s}$$

$$\text{El corredor B tiene una velocidad media de: } v_B = \frac{s}{t} = \frac{100 \text{ m}}{9,75 \text{ s}} = 10,26 \text{ m/s}$$

El corredor A, antes de que salga el corredor B, ha recorrido una distancia de:

$$s_1 = v_A \cdot t_{\text{sonido}} = 10,11 \text{ m/s} \cdot 0,91 \text{ s} = 9,20 \text{ m} \text{ y es la ventaja que lleva al atleta B.}$$

Por tanto, cuando el atleta A llega a la meta, el corredor B ha estado corriendo un tiempo igual a: $9,89 \text{ s} - 0,91 \text{ s} = 8,98 \text{ s}$ y en este tiempo ha recorrido una distancia de:

$$s_2 = v_B \cdot 8,98 \text{ s} = 10,26 \text{ m/s} \cdot 8,98 \text{ s} = 92,13 \text{ m} \text{ y se encuentra de la meta a una distancia de } 100 \text{ m} - 92,13 \text{ m} = 7,87 \text{ m}$$

Luego la respuesta correcta es la: a) Llega antes a la meta el atleta A.

Lógicamente este problema no existiría si los dos atletas corren en la misma pista y oyen el pistoletazo de salida a la vez, y en este caso el corredor B llega antes a la meta y le saca la siguiente ventaja al A:

$$s_3 = v_A \cdot 9,75 \text{ s} = 10,11 \text{ m/s} \cdot 9,75 \text{ s} = 98,57 \text{ m. Por tanto, el atleta B saca una ventaja al corredor A de: } 100 \text{ m} - 98,57 \text{ m} = 1,43 \text{ m.}$$

2. Que la energía esté _____ significa que puede tomar valores _____, es decir _____.

La respuesta correcta es:

Que la energía esté cuantizada significa que puede tomar valores discretos, es decir, no continuos.

3. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. a) Toda teoría científica es sólo una aproximación a la realidad. b) El segundo postulado de Einstein de la teoría de la relatividad especial es consecuencia del primero. c) La catástrofe del infrarrojo es una consecuencia de la aplicación de la Física Clásica. d) La palabra cuanto designa la cantidad elemental de energía.

a) Toda teoría científica es sólo una aproximación a la realidad es verdadera. En la ciencia no hay verdades absolutas, todo está sometido a validación y contraste.

b) El segundo postulado de Einstein de la teoría de la relatividad especial es consecuencia del primero es verdadero porque es necesario para que se pueda admitir el cumplimiento del primer postulado.

c) La catástrofe del infrarrojo es una consecuencia de la aplicación de la Física Clásica es falso, la catástrofe es la del ultravioleta, que es una consecuencia de la aplicación de la Física Clásica.

d) La palabra cuanto designa la cantidad elemental de energía es verdadero, pues es precisamente la definición de cuanto.

4. La nanociencia estudia la materia a escala de: a) 10^{-3} m. b) 10^{-6} m. c) 10^{-9} m. d) 10^{-12} m.

La respuesta correcta es la c) A escala de 10^{-9} m.

5. Indica si las siguientes afirmaciones relativas al principio de incertidumbre de Heisenberg son verdaderas o falsas: a) Tiene que ver con la precisión de la medida. b) Se refiere a la medida simultánea del tiempo y la posición. c) De la fuerza y la energía. d) De la posición y el momento lineal.

a) Tiene que ver con la precisión de la medida es falsa, ni depende ni de la calidad ni de la precisión de la medida del instrumento utilizado.

b) Se refiere a la medida simultánea del tiempo y la posición es falsa, pues ambas magnitudes no son conjugadas respecto de las relaciones de incertidumbre.

c) De la fuerza y la energía es falsa, pues ambas magnitudes no son conjugadas respecto de las relaciones de incertidumbre.

d) De la posición y el momento lineal es verdadera, pues ambas magnitudes son conjugadas respecto de las relaciones de incertidumbre.

6. La longitud de onda asociada a un electrón de velocidad 200000 km/s es: a) $3,6 \cdot 10^{12}$ m. b) $3,6 \cdot 10^{12}$ km. c) $3,6 \cdot 10^{-12}$ m. d) $3,6 \cdot 10^{-12}$ km.

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Luego la respuesta correcta es la c).

7. El efecto _____ consiste en la _____ de _____ de un _____ por la acción de la _____.

La respuesta correcta es: El efecto fotoeléctrico consiste en la liberación de electrones de un metal por la acción de la luz.

8. La frecuencia de un oscilador microscópico cuyo cuanto de energía es $5,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ tiene el valor: a) $7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. b) $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. c) $7 \cdot 10^{14} \text{ s}$. d) $8 \cdot 10^{14} \text{ s}$.

$$E = h \cdot \nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \nu \Leftrightarrow 5,3 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \nu \Leftrightarrow \nu = 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Luego la respuesta correcta es la b).

9. La masa de una persona en reposo es 70 kg y vuela en una supuesta nave espacial a la velocidad $v = 0,9 c$, por lo que su masa es: a) 70 kg. b) 140 kg. c) 60,6 kg d) 160,6 kg.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{70 \text{ kg}}{\sqrt{1 - \frac{(0,9 \cdot c)^2}{c^2}}} = 160,6 \text{ kg}$$

Luego la respuesta correcta es la d).

10. Sean dos gemelos A y B. A está en la Tierra y B va y vuelve a una estrella que está a 5 años-luz de la Tierra, con una velocidad $v = 0,8 c$, por lo que A detecta que B a su regreso a la Tierra ha envejecido: a) 7,5 años. b) 12,5 años. c) Ambos lo mismo. d) 10 años.

Como el año-luz es la distancia recorrida en un año por la luz, entonces para el gemelo A, que se encuentra en la Tierra, el tiempo transcurrido es:

$$T = \frac{2 \cdot 5 \text{ años} \cdot c}{0,8 \cdot c} = 12,5 \text{ años}$$

El tiempo transcurrido para B es:

$$T' = T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 12,5 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,8 \cdot c)^2}{c^2}} = 7,5 \text{ años}$$

El gemelo A detecta que su hermano B en lugar de envejecer 12,5 años (que es lo que envejece él mismo) envejece 7,5 años, luego la respuesta correcta es la a).

Física

Unidad didáctica 12

Física nuclear

SOLUCIONARIO DEL LIBRO DE FÍSICA DE 21 DE BACHILLERATO

Unidad didáctica 12: Física nuclear

Cuestiones iniciales

1. ¿Cuál es la razón de que en el primer cuarto del siglo XX se descubriesen tantos elementos químicos?

Por la aplicación de las técnicas derivadas del descubrimiento de la radiactividad a la Química, pues los recientes elementos químicos son radiactivos.

2. Calcula, mediante la ecuación de Einstein, la energía que se produce al transformarse 1 g de materia en energía.

Aplicando la citada ecuación: $E_R = m_0 \cdot c^2 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \cdot 10^{13} \text{ J}$

3. La noche del 25 al 26 de abril de 1986 se produjo el mayor accidente ocurrido en una central nuclear. Tuvo lugar en la central ucraniana de Chernobil (antigua URSS). ¿Crees que una central nuclear, dedicada a la producción de energía eléctrica, puede explotar como una bomba atómica? Aunque en la actualidad la probabilidad del riesgo de un accidente nuclear es muy reducido, ¿por qué la sociedad acepta muy mal el riesgo nuclear, a pesar de ser muy inferior al de otros tipos de accidentes (automóvil, avión, etc)?

En cuanto a la primera pregunta: nunca podría estallar una central nuclear como una bomba atómica, pues las condiciones de trabajo en el reactor nuclear nunca son las que se precisan para ocasionar la explosión nuclear de una bomba.

Con respecto a la segunda cuestión: la respuesta es por los efectos devastadores derivados del uso militar en la fabricación de bombas nucleares y el triste recuerdo y los efectos que aún perduran del desastre de la central nuclear de Chernobil de 1986. Por otro lado, el recuerdo y la visión de películas sobre los efectos de las bombas de Hiroshima y Nagasaki han producido una memoria colectiva de rechazo. Sin perder de vista los efectos fisiológicos, tales como la aparición de cáncer, que el contacto con productos radiactivos puede ocasionar. Todo ello se traduce en gran miedo a todo lo que se relacione con la radiactividad.

INVESTIGA

1. A partir de la lectura del texto anterior explica el significado de los términos: agente moderador, absorbente y refrigerante.

Agente moderador es aquel que frena los neutrones rápidos producidos en una fisión nuclear para hacerlos aptos para que se puedan emplear con reactivos en otras fisiones nucleares.

Absorbente es aquel material que captura neutrones sobrantes para que el número existente de los mismos en el reactor nuclear sea el adecuado para mantener una reacción en cadena automantenida y controlada.

2. Consulta una hemeroteca o en el buscador www.google.es y da una explicación de cuáles son las causas del debate que hay en los primeros años del siglo XXI sobre la vuelta o no al uso de la energía nuclear para producir energía eléctrica.

La causa es la amenaza de la carestía del petróleo como fuente energética primordial de la sociedad actual.

La disminución de las reservas de petróleo de fácil acceso por el consumo efectuado durante tantos años hace que las prospecciones y extracciones futuras sean cada vez más costosas de realizar y ello se complica con el gran aumento de la demanda del petróleo por los países emergentes, como China y La India, lo que hace que la demanda de petróleo sea muy grande, incluso puede llegar a ser superior a la de la capacidad de extracción y de abastecimiento de una forma eficaz. Todo ello, aparte de los problemas especulativos, hace que el precio del petróleo se haya disparado, por lo que se ha reabierto el debate por la utilización de la energía nuclear como fuente energética para la producción de energía eléctrica, para así tratar de diversificar la oferta energética y contrarrestar los problemas que ocasiona un petróleo muy caro.

3. Igualmente busca información en los medios anteriores sobre el desastre de la central de Chernobil de 1986 y explica cuál fue la causa de dicho desastre.

En la madrugada del 26 de abril de 1986, una explosión en el cuarto reactor de la planta de Chernobil, depositó en los alrededores de la central isótopos radiactivos con una actividad de $380 \text{ A } 10^{12} \text{ Bq}$ y esparció una radiactividad al medio ambiente 200 veces mayor que la liberada por las bombas atómicas de Hiroshima y Nagasaki.

La central de Chernobil estaba formada por cuatro reactores. El número cuatro es el tristemente famoso por el accidente, fue puesto en funcionamiento en diciembre de 1983 y es un reactor de tipo RBMK de 3200 MW de potencia térmica y 1000 MW de potencia eléctrica, que usa agua en ebullición como refrigerante y grafito como moderador, que se dispone en bloques con canales donde van alojadas las vainas de combustible, circulando el refrigerante entre vainas y grafito.

El moderador convierte los neutrones rápidos producidos en las reacciones de fisión en neutrones térmicos, que son los que absorbe el uranio-235 para seguir produciendo más fisiones. Por tanto, el papel del moderador es aumentar la cantidad de neutrones que son capaces de producir nuevas fisiones, y aparecen como tales en el grafito y deben atravesar la película de agua de refrigerante para entrar en el combustible. El refrigerante en este caso también actúa de absorbente de neutrones térmicos, por lo que si por alguna causa el refrigerante dejara de fluir entre el grafito y las vainas del combustible, se estaría quitando un blindaje neutrónico entre el grafito y el combustible, aumentando la reactividad del proceso.

Curiosamente el accidente se produjo al realizar un experimento relacionado con la seguridad, en el que se pretendía demostrar que la electricidad producida por el alternador a partir de la inercia de la turbina sin vapor podría usarse para alimentar ciertos componentes del sistema de refrigeración de emergencia.

Se preveía experimentar con una reducción de la potencia del reactor hasta 1000 MW

térmicos, pero el reactor no pudo estabilizarse con suficiente rapidez y la potencia se redujo hasta 30 MW térmicos. Se acumuló una gran cantidad de energía súbita, que no pudo ser refrigerada, por lo que se produjo una disgregación del combustible seguida de una explosión por efecto de la onda de choque por la presión acumulada. Dos o tres segundos después ocurrió una segunda explosión, causada probablemente por la liberación de gas hidrógeno por la oxidación del metal de las vainas de combustible por el vapor sobrepresionado. La violencia de la explosión elevó la losa soporte del reactor, de dos toneladas, haciendo inoperativo el sistema de contención. La posterior entrada de aire facilitó la combustión del grafito, alcanzándose la fusión de la vasija. Fue por tanto, el tipo de accidente más grave que puede ocurrir en una central nuclear y la misma permanecerá radiactiva como mínimo los próximos 100.000 años.

Fueron necesarios nueve días de heroico esfuerzo para poder controlar el incendio posterior a la explosión del reactor. Para controlar el fuego y contener la radiactividad, los helicópteros lanzaron sobre el reactor más de 5000 toneladas de plomo, boro y otros materiales. Posteriormente se construyó un gigantesco sarcófago o bunker de protección, que se terminó de construir en noviembre de 1986, y fue hecho con 410.000 m³ de hormigón y 7.000 toneladas de acero.

Un auténtico ejército de militares, obreros, ingenieros y especialistas de toda la URSS, llamados liquidadores, fueron movilizados a la zona del siniestro para las tareas de descontaminación y construcción del sarcófago. El trabajo de estas personas salvó al planeta de un enorme y letal foco radiactivo, pero con el tiempo transcurrido, parte de ellos han muerto directamente por causa de la radiactividad, otros muchos han quedado inválidos y el resto necesitan de una constante atención médica, pues recibieron una radiactividad media entre 250 y 500 mSv.

El resumen de víctimas iniciales según Naciones Unidas fue el siguiente: 2 murieron en el momento del accidente y se diagnosticaron 237 personas con signos de síndrome de radiación aguda (náuseas, vómitos, diarreas o procesos hemorrágicos). De ellas 28 murieron días o semanas después, aunque con el paso del tiempo, son muchas más el número de personas de este colectivo que ya han muerto.

Por efecto de la explosión, al menos 9 millones de personas resultaron contaminadas en mayor o menor grado por la nube radiactiva ocasionada. La catástrofe dejó contaminado 156000 km² de territorio ucraniano, bielorruso y ruso, con centenares de miles de personas que tuvieron que ser evacuadas de las zonas de mayor peligro. La radiactividad contaminó el río Pripyat y las balsas y pequeños embalses construidos para retener las aguas contaminadas agravaron el problema, pues fueron rebasadas al caer las primeras lluvias intensas. El agua contaminada por los residuos radiactivos afecta a 9 millones de personas que beben agua contaminada y 23 millones comen alimentos regados con aguas radiactivas o peces con niveles inaceptables de radiactividad.

Una consecuencia de la catástrofe fue la absorción, por el organismo de miles de personas, de grandes cantidades de yodo-131. Dicho isótopo, aunque tiene una vida media corta, se acumula en la glándula tiroides, causando hipertiroidismo y cáncer, sobre todo en los niños. Según la OMS (Organización Mundial de la Salud) en 1995 el cáncer de tiroides en Bielorrusia era 285 veces más frecuente que antes de la catástrofe, y las enfermedades de todo tipo en Ucrania son un 30 % superior a lo normal, por el debilitamiento del sistema inmunológico causado por la radiación.

Los demás reactores (del mismo tipo) de la central siguieron funcionando por la crisis económica que sufre Ucrania desde la desmembración de la URSS. Cerca de 12.000 personas trabajan en la zona contaminada y de ellas 5000 en el complejo nuclear han seguido recibiendo dosis inadmisibles de radiactividad. El 11 de octubre de 1991 se

cerró el reactor número dos por causa de un incendio y el 31 de noviembre de 1996 el número uno, tras graves deficiencias en su sistema de refrigeración. El sarcófago, diseñado en teoría para aguantar 30 años necesita ser sustituido con urgencia, al tener 200 m² de grietas y graves problemas de estructura. El reactor número tres ha tenido varios incendios y aunque su estructura estaba afectada por la corrosión ha estado funcionando hasta el 15 de diciembre de 2000, fecha en la que Ucrania logró la financiación económica oportuna para la construcción de un segundo sarcófago y el abastecimiento energético del país.

La catástrofe de Chernobil ha marcado un antes y un después de la energía nuclear, la cual se encuentra sumida en una profunda crisis. La energía nuclear representa un porcentaje cada vez menor en el consumo mundial de energía, agobiada por los problemas de seguridad y el almacenamiento definitivo de los residuos radiactivos. Alternativas mejores como las centrales de gas de ciclo combinado, el uso de las energías renovables y la oposición de la opinión pública bien informada hace que la energía nuclear no tenga un futuro halagüeño.

Se adjunta a continuación las siguientes tablas con equivalencia de unidades y valores de constantes físicas para poder resolver los ejercicios siguientes.

Diversas unidades prácticas y su equivalencia en unidades del S.I.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencia
distancia	unidad astronómica	U.A.	$1,5 \text{ A } 10^{11} \text{ m}$
	año-luz	a.l.	$9,5 \text{ A } 10^{15} \text{ m}$
	pársec		$3,1 \text{ A } 10^{16} \text{ m}$
volumen	Litro	L	10^{-3} m^3
masa	Tonelada	t	10^3 kg
	unidad de masa atómica	u	$1,6606 \text{ A } 10^{-27} \text{ kg}$
densidad	gramo/centímetro cúbico	g/cm^3	$10^{-3} \text{ kgAm}^{-3}$
fuerza	Kilopondio	Kp	9,8 N
energía	Kilowatio-hora	kWh	$3,6 \text{ A } 10^6 \text{ J}$
	electronvoltio	eV	$1,602 \text{ A } 10^{-19} \text{ J}$
	caloría	cal	4,184 J
	atmósfera A litro	atm A L	$1,013 \text{ A } 10^2 \text{ J}$
potencia	caballo de vapor	CV	$7,355 \text{ A } 10^2 \text{ W}$
presión	Atmósfera	atm	$1,013 \text{ A } 10^5 \text{ Pa}$
	Bar	bar	10^5 Pa
campo magnético	Gauss	G	10^{-4} T
actividad radiactiva	Curio	Ci	$3,7 \text{ A } 10^{10} \text{ Bq}$
dosis de radiación	Rad	Rad	10^{-2} Gy
dosis efectiva	Rem	Rem	10^{-2} Sv

Principales constantes físicas

Magnitud	Símbolo	Valor en el SI
-----------------	----------------	-----------------------

Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre al nivel del mar	g_0	$9,8 \text{ m As}^{-2} = 9,8 \text{ NwAkg}^{-1}$
Constante de gravitación universal	G	$6,672 \text{ A}10^{-11} \text{ NAm}^2 \text{ Akg}^{-2}$
Constante de Coulomb (en el vacío)	K_0	$9 \text{ A}10^9 \text{ NAM}^2 \text{ AC}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8,854 \text{ A}10^{-12} \text{ C}^2 \text{ AN}^{-1} \text{ Am}^{-2}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \text{ A}10^{-7} \text{ N AA}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6,626 \text{ A}10^{-34} \text{ JAs}$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2,998 \text{ A}10^8 \text{ mAs}^{-1}$
Velocidad de propagación del sonido en el aire a 20 °C	v_{sonido}	340 mAs^{-1}
Carga eléctrica elemental	e	$1,602 \text{ A}10^{-19} \text{ C}$
Masa del electron	m_e	$9,109 \text{ A}10^{-31} \text{ kg} = 5,49 \text{ A}10^{-4} \text{ u}$
Masa del proton	m_p	$1,673 \text{ A}10^{-27} \text{ kg} = 1,0073 \text{ u}$
Masa del neutron	m_n	$1,675 \text{ A}10^{-27} \text{ kg} = 1,0087 \text{ u}$
Factor conversión masa-energía		$u = 931,5 \text{ MeVAc}^2$
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \text{ A}10^{23} \text{ partículasAmol}^{-1}$
Constante de Rydberg	R	$1,097 \text{ A}10^7 \text{ m}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Radio de la Tierra	R_T	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Cero en la escala Celsius de temperatura	0 EC	$273,16 \text{ K}$

Actividades finales

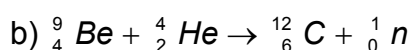
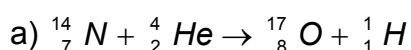
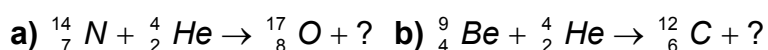
1. Un protón incide sobre litio y produce partículas alfa. Escribe la reacción nuclear que tiene lugar y determina en número atómico del litio y de qué isótopo de trata.

El litio tiene de número atómico $Z = 3$, por lo que en la reacción nuclear se producen dos partículas α .

La reacción nuclear es: ${}^?_3 \text{Li} + {}^1_1 \text{H} \rightarrow 2 {}^4_2 \text{He}$

Por lo que el isótopo de litio es el de número másico: $A = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

2. Completa las siguientes ecuaciones:



3. Desde el punto de vista de la equivalencia masa-energía, ¿la masa de los núcleos estables es mayor o menor que la suma de las masas de sus componentes? Razona la respuesta.

La masa de los núcleos estables es menor que la suma de las masas de sus constituyentes.

4. En una cámara de seguridad se encierra una muestra de ${}^{238}_{92}\text{U}$, de 0,15 kg de masa. El ${}^{238}\text{U}$ se desintegra de modo natural, produciendo ${}^{206}_{82}\text{Pb}$, y para simplificar se supone que este proceso tiene lugar directamente sin etapas intermedias. Al cabo de cierto tiempo, se abre la cámara, comprobando que la muestra original contiene ahora 0,04 kg de ${}^{206}\text{Pb}$. Se sabe que el período de semidesintegración del ${}^{238}\text{U}$ es de $4,5 \cdot 10^9$ años. Calcula el tiempo transcurrido desde que se guardó la muestra hasta la apertura de la cámara.

Hay que recordar que un mol de partículas (átomos, moléculas, iones o núcleos) contiene una cantidad igual a la constante de Avogadro ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$) de entidades elementales (átomos, moléculas, iones o núcleos).

Para el ${}^{238}\text{U}$ su masa molar es igual a su número másico, expresado en $\frac{\text{mol}}{\text{g}}$, luego:

el número de núcleos de ${}^{238}\text{U}$ que contiene la muestra inicialmente es:

$$N_{0,U} = \frac{0,15 \cdot 10^3 \text{ g}}{238 \text{ g/mol}} \cdot N_A = 0,630 \cdot N_A$$

El número de núcleos de ${}^{206}\text{Pb}$ que tiene la muestra al final coincide con el número de núcleos de ${}^{238}\text{U}$ desintegrados y como la masa molar del ${}^{206}\text{Pb}$ es $206 \frac{\text{mol}}{\text{g}}$, entonces:

$$N_{\text{desintegrados},U} = N_{\text{Pb}} = \frac{0,04 \cdot 10^3 \text{ g}}{206 \text{ g/mol}} \cdot N_A = 0,194 \cdot N_A$$

Por tanto el número de núcleos de ${}^{238}\text{U}$ que quedan sin desintegrar es:

$$N = N_0 - N_{\text{Pb}} = 0,436 \cdot N_A$$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t}$

Y sustituyendo: $0,436 \cdot N_A = 0,630 \cdot N_A \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{4,5 \cdot 10^9 \text{ años}} \cdot t}$

Operando y tomando logaritmos neperianos resulta:

$$\text{Ln} \frac{0,436}{0,630} = -\frac{\text{Ln } 2}{4,5 \cdot 10^9 \text{ años}} \cdot t \Rightarrow t = 2,39 \cdot 10^9 \text{ años}$$

5. Se dispone de 1 mol de un isótopo radiactivo, cuyo período de semidesintegración es 100 días. a) ¿Al cabo de cuánto tiempo quedará solo el 10 % del material inicial? b) ¿Qué velocidad de desintegración o actividad tiene la muestra en ese momento?

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva y la relación entre el período de semidesintegración, T , y la constante de desintegración, λ , resulta que la cantidad de átomos presentes al cabo de un tiempo, t , es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{10} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Tomado logaritmos neperianos y operando resulta:

$$\ln 10 = \frac{\ln 2}{T} t \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot 100 \text{ días} = 332,19 \text{ días}$$

b) $A = \lambda \cdot N$, por tanto:

$$A = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{1 \text{ mol} \cdot N_A}{10} = \frac{\ln 2}{100 \text{ día} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3600 \text{ s/h}} \cdot \frac{1 \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ núcleo/mol}}{10}$$

$$\text{de donde: } A = 4,83 \cdot 10^{15} \frac{\text{núcleo}}{\text{s}} = 4,83 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$$

6. Se dispone de 10 mg de ^{210}Po , cuyo período de semidesintegración es 138 días. Calcula: a) El tiempo que debe transcurrir para que se desintegren 6 mg. b) La cantidad de núcleos quedan sin desintegrar al cabo de 365 días.

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva resulta que la cantidad de átomos presentes al cabo de un tiempo, t , es: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Los núcleos de los átomos de una muestra se pueden expresar en función de su masa (m), la constante de Avogadro (N_A) y la masa molar (M), por lo que:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{m}{M_{\text{Po}}} \cdot N_A = \frac{m_0}{M_{\text{Po}}} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{Tomando logaritmos neperianos: } \ln \frac{m}{m_0} = -\lambda \cdot t$$

La cantidad presente en un instante, m , es la diferencia entre la cantidad inicial m_0 y la cantidad desintegrada y como $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, resulta que:

$\text{Ln} \frac{m_0 - m_{\text{deintegrada}}}{m_0} = -\frac{\text{Ln} 2}{T} t$, despejando t resulta:

$$t = -\frac{T}{\text{Ln} 2} \cdot \text{Ln} \frac{m_0 - m_{\text{deintegrada}}}{m_0} = -\frac{138 \text{ días}}{\text{Ln} 2} \cdot \text{Ln} \frac{10 \text{ mg} - 6 \text{ mg}}{10 \text{ mg}} = 182,4 \text{ días}$$

b) La cantidad de núcleos de átomos iniciales que componen la muestra es:

$$N_0 = \frac{m_0}{M_{\text{Po}}} \cdot N_A = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ g}}{210 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol} = 2,87 \cdot 10^{19} \text{ núcleos}$$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln} 2}{T} \cdot t} = 2,87 \cdot 10^{19} \text{ núcleos} \cdot e^{-\frac{\text{Ln} 2}{138 \text{ días}} \cdot 365 \text{ días}} = 4,59 \cdot 10^{18} \text{ núcleos}$$

7. El período de semidesintegración del ^{234}U es $2,33 \cdot 10^5$ años. Calcula: a) La constante de desintegración y la vida media. b) Si se parte de una muestra inicial de $5 \cdot 10^7$ núcleos de átomos de dicho isótopo, ¿cuántos núcleos quedarán al cabo de 1000 años?

a) Aplicando las relaciones entre el período de semidesintegración (T), la constante de desintegración (λ) y la vida media (τ), resulta que:

$$\lambda = \frac{\text{Ln} 2}{T} = \frac{\text{Ln} 2}{2,33 \cdot 10^5 \text{ años}} = 2,975 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2,975 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}} = 3,36 \cdot 10^5 \text{ años}$$

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva resulta que la cantidad de núcleos de átomos presentes al cabo de un tiempo, t, es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 5 \cdot 10^7 \text{ núcleos} \cdot e^{-2,975 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1} \cdot 1000 \text{ años}} = 4,985 \cdot 10^7 \text{ núcleos}$$

8. Se dispone de 1 mol del isótopo radiactivo $^{51}_{24}\text{Cr}$, cuyo período de semidesintegración es 27 días. Calcula: a) La constante radiactiva. b) ¿Cuántos gramos de Cr quedarán al cabo de 6 meses?

a) La constante radiactiva λ es: $\lambda = \frac{\text{Ln} 2}{T} = \frac{\text{Ln} 2}{27 \text{ días}} = 25,7 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}$

b) La misma relación hay entre la masa presente y la masa inicial que entre los núcleos presentes y los núcleos iniciales, ya que la constante de proporcionalidad es

la constante de Avogadro dividida entre la masa molar.

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \text{ y también: } \frac{m}{M_{Cr}} \cdot N_A = \frac{m_0}{M_{Cr}} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \text{ luego: } m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Como la masa molar del ^{51}Cr es: $M_{Cr} = 51 \text{ g/mol}$, se tiene que la masa al cabo de ese tiempo es:

$$m = 1 \text{ mol} \cdot 51 \text{ g/mol} \cdot e^{-25,7 \cdot 10^{-3} \text{ día}^{-1} \cdot 6 \text{ meses} \cdot 30 \text{ días/mes}} = 0,50 \text{ g}$$

9. Una muestra arqueológica contiene ^{14}C que tiene una actividad de $2,8 \cdot 10^7 \text{ Bq}$. Si el periodo de semidesintegración del ^{14}C es 5730 años, determina: a) La constante de desintegración del ^{14}C en s^{-1} y la población de núcleos presentes en la muestra. b) La actividad de la muestra después de 1000 años.

a) Aplicando las relaciones entre las magnitudes estadísticas, resulta que:

$$\lambda = \frac{\text{Ln}2}{T} = \frac{\text{Ln}2}{5730 \text{ años}} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ año}^{-1}$$

$$\text{Y asimismo: } \lambda = \frac{\text{Ln}2}{T} = \frac{\text{Ln}2}{5730 \text{ años} \cdot 365 \text{ días} \cdot 24 \text{ horas} \cdot 3600 \text{ s}} = 3,8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

$$A = \lambda \cdot N \Rightarrow N = \frac{A}{\lambda} = \frac{2,8 \cdot 10^7 \text{ Bq}}{3,8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}} = 7,4 \cdot 10^{18} \text{ núcleos}$$

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} = A_0 \cdot e^{-\lambda t} = 2,8 \cdot 10^7 \text{ Bq} \cdot e^{-1,21 \cdot 10^{-4} \text{ año}^{-1} \cdot 1000 \text{ años}} = 2,48 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

10. El $^{210}_{83}\text{Bi}$ se desintegra espontáneamente por emisión de electrones con un periodo de semidesintegración de 5 días. Si se dispone de dicho isótopo de una cantidad de $16 \text{ A } 10^{-3} \text{ kg}$, calcula: a) Los protones y neutrones que tiene el núcleo que resulta después de la emisión. b) La cantidad que quedará al cabo de 15 días.

a) La ecuación del proceso que tiene lugar es: $^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^0_{-1}\text{e} + ^{210}_{84}\text{Po}$

El número atómico del núcleo $Z = 84$ indica el número de protones del núcleo. El número másico A expresa el número de nucleones (protones + neutrones) del núcleo. Por tanto:

número de protones = 84

número de neutrones = 210 - 84 = 126

b) El número de núcleos presentes en una muestra es:

$$N = \frac{m}{M} \cdot N_A, \text{ por tanto si no hay mezclas de sustancias radiactivas:}$$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ y sustituyendo:

$$\frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{m_0}{M} \cdot N_A \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5 \text{ días}} \cdot 15 \text{ días}} \text{ y operando resulta: } m = m_0 \cdot e^{-3 \cdot \ln 2}$$

$$\text{Tomando logaritmos neperianos: } \ln \frac{m}{m_0} = -\ln 2^3 = \ln \frac{1}{8} \Rightarrow m = m_0/8$$

Otra forma de hacer este apartado es la siguiente: Al cabo de 15 días han transcurrido 3 períodos de semidesintegración. De una cantidad de núcleos iniciales N_0 , al cabo de 5 días (T) quedan $N_0/2$, al cabo de 10 días (2 T) quedan $N_0/4$ y al cabo de 15 días (3 T) tenemos $N_0/8$.

Y la cantidad de sustancia que queda por desintegrar es: $m = m_0/8 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

11. El isótopo ^{214}U tiene un período de semidesintegración de 250000 años. Si se parte de una muestra de 10 gramos de dicho isótopo, determina: a) La constante de desintegración radiactiva. b) La masa que quedará sin desintegrar después de 50000 años.

$$\text{a) La constante radiactiva } \lambda \text{ es: } \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{250000 \text{ años}} = 2,77 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}$$

b) La misma relación hay entre la masa presente y la masa inicial que entre los átomos presentes y los átomos iniciales ya que la constante de proporcionalidad es la constante de Avogadro dividida entre la masa molar.

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{y} \quad \frac{m}{M_U} \cdot N_A = \frac{m_0}{M_U} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{Sustituyendo: } m = 10 \text{ g} \cdot e^{-2,77 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1} \cdot 50000 \text{ años}} = 8,7 \text{ g}$$

12. En un instante inicial $t = 0$, se dispone de una muestra de estroncio radiactivo cuya período de semidesintegración es 28,8 años. Calcula: a) La constante λ de desintegración. b) El número de años transcurridos para que el

número de núcleos inestables presentes en la muestra sea el 25 % de los existentes en $t = 0$.

$$a) \lambda = \frac{\text{Ln } 2}{T} = \frac{0,693}{28,8 \text{ años}} = 2,41 \cdot 10^{-2} \text{ años}^{-1}$$

b) El que el número de núcleos presentes en la muestra sea el 25 %, significa:

$$N = \frac{25}{100} \cdot N_0 = \frac{N_0}{4}$$

Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $N = N_0 A e^{-\lambda A t}$

$$\text{Sustituyendo: } N_0/4 = N_0 A e^{-\lambda A t}$$

Tomando logaritmos neperianos: $\text{Ln } 1/4 = -\lambda A t \Rightarrow \text{Ln } 4 = \lambda A t$

$$\text{Despejando: } t = \frac{\text{Ln } 4}{\lambda} = \frac{\text{Ln } 4}{2,41 \cdot 10^{-2} \text{ años}^{-1}} = 57,6 \text{ años}$$

resultado lógico ya que para que quede el 25 % de una muestra radiactiva deben transcurrir $2 \cdot T$ de semidesintegración.

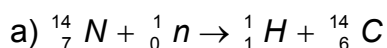
También se puede proceder de la siguiente forma que matemáticamente es más correcta:

$$N = N_0 A e^{-\lambda A t} \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t}$$

$$\text{Operando y tomando logaritmos neperianos: } \text{Ln } \frac{1}{2^2} = -\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t$$

$$\text{Operando: } -2 \cdot \text{Ln } 2 = -\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t \text{ Por lo que el tiempo transcurrido es: } t = 2 A T$$

13. Dada la reacción nuclear dada por la expresión: ${}^{14}_7\text{N}(n, p)\text{X}$. a) Determina el producto X de la misma. b) Esta reacción libera 0,61 MeV, halla el incremento o disminución de masa que tiene lugar en la misma. c) El período de semidesintegración de X es de 5600 años, ¿cuánto tiempo tarda en perder 1/3 de su masa?



b) Si se libera energía, entonces hay una disminución de masa en la reacción nuclear.

Aplicando la ecuación de Einstein: $\Delta E = \Delta m A c^2$

$$0,61 \text{ MeV} = \Delta m \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u} \cdot c^2} \cdot c^2 \Rightarrow \Delta m = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ u}$$

c) La constante de desintegración λ del elemento X es: $\lambda = \frac{\text{Ln } 2}{T}$

La cantidad de núcleos presentes al cabo de un tiempo es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t}$$

Si se pierde un tercio de su masa, significa que el número de núcleos presentes es:

$$N = \frac{2}{3} \cdot N_0$$

Sustituyendo en la ecuación exponencial, se tiene: $\frac{2}{3} N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t}$

Tomando logaritmos neperianos: $\text{Ln } \frac{2}{3} = -\frac{\text{Ln } 2}{T} \cdot t$

$$\text{Despejando: } t = -\text{Ln } \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{\text{Ln } 2} = -\text{Ln } \frac{2}{3} \cdot \frac{5600 \text{ años}}{\text{Ln } 2} = 3276,5 \text{ años}$$

14. La masa del núcleo del isótopo ${}_{15}^{31}\text{P}$ es 30,970 u. Calcula: a) El defecto de masa. b) La energía media de enlace por nucleón en MeV. Datos: Masa del protón: 1,0073 u; masa del neutrón: 1,0087 u.

a) El defecto de masa es igual a la masa de los constituyentes - menos la masa del isótopo.

Constituyentes: 15 protones y $31 - 15 = 16$ neutrones.

$$\Delta m = 15 \text{ protones} \cdot 1,0073 \text{ u} + 16 \text{ neutrones} \cdot 1,0087 \text{ u} - 30,970 \text{ u} = 0,2787 \text{ u}$$

$$\text{En unidades del SI: } \Delta m = 0,2787 \text{ u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\text{u}} = 4,63 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:

$$\Delta E = m \cdot c^2 = 4,63 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 4,16 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$\text{Y expresado en MeV: } \Delta E = 4,16 \cdot 10^{-11} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot \frac{1 \text{ MeV}}{10^6 \text{ eV}} = 260 \text{ MeV}$$

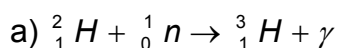
Al mismo resultado se llega aplicando la relación masa energía: $1 \text{ u} = 931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,2787 \text{ u} \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u} \cdot c^2} c^2 = 260 \text{ MeV}$$

b) Como el número de nucleones, protones y neutrones, es 31 nucleones, se tiene:

$$\text{Energía media enlace por nucleón} = \frac{260 \text{ MeV}}{31 \text{ nucleones}} = 8,39 \frac{\text{MeV}}{\text{nucleón}}$$

15. El deuterio y el tritio son dos isótopos del hidrógeno. Al incidir un neutrón sobre un núcleo de deuterio se forma un núcleo de tritio, emitiéndose radiación gamma en el proceso. Si las masas atómicas del deuterio, del tritio y del neutrón son: 2,014740 u, 3,017005 u y 1,008986 u, respectivamente, a) Escriba y ajuste la reacción nuclear citada. b) Calcula la longitud de onda del fotón emitido, así como su momento lineal.



b) En primer lugar hay que calcular el defecto de masa y la energía de la radiación:

$$\Delta m = m_{\text{deuterio}} + m_{\text{neutrón}} - m_{\text{tritio}} =$$

$$= 2,014740 \text{ u} + 1,008986 \text{ u} - 3,017005 \text{ u} = 6,721 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

$$\text{En unidades del SI: } \Delta m = 6,721 \cdot 10^{-3} \text{ u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\text{u}} = 1,1157 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 1,1157 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,0041 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

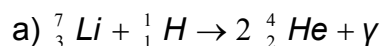
Aplicando la ecuación de Planck: $\Delta E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, de donde:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,0041 \cdot 10^{-12} \text{ J}} = 1,98 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

Según la ecuación de De Broglie, el momento lineal del fotón como partícula es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,98 \cdot 10^{-13} \text{ m}} = 3,35 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

16. Cuando se bombardea con un protón un núcleo de litio, ${}^7_3\text{Li}$, éste se descompone en dos partículas α . a) Escribe y ajusta la reacción nuclear del proceso. b) Calcula la energía liberada en dicha desintegración, siendo las masas atómicas del litio, el hidrógeno y el helio 7,0182 u, 1,0076 u y 4,0029 u, respectivamente. Expresa el resultado en eV.



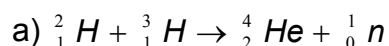
b) La pérdida de masa que se genera en el proceso es:

$$\Delta m = 7,0182\text{ u} + 1,0076\text{ u} - 2 \cdot 4,0029\text{ u} = 0,02\text{ u}$$

Y aplicando la ecuación de Einstein para hallar la energía liberada resulta:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,02\text{ u} \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u} \cdot c^2} \cdot c^2 = 18,63\text{ MeV}$$

17. El deuterio y el tritio son isótopos de un cierto elemento químico; el primero posee un neutrón y dos el segundo, respectivamente. En un proceso de fusión nuclear, el deuterio y el tritio generan helio, y en esa reacción nuclear hay una pérdida de masa de una cuantía igual a: $\Delta m = 0,01886\text{ u}$. a) Escribe la ecuación de la reacción nuclear que tiene lugar, ajustándola adecuadamente. b) Calcula, en MeV, la energía liberada en la formación de un núcleo de helio, al producirse la reacción nuclear mencionada.



b) Aplicando la ecuación de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,01886\text{ u} \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u} \cdot c^2} \cdot c^2 = 17,57\text{ MeV}$$

18. La actividad del ${}^{14}\text{C}$ se puede usar para determinar la edad de algunos restos arqueológicos. Supón que una muestra contiene ${}^{14}\text{C}$ y presenta una actividad de $2,8 \cdot 10^7\text{ Bq}$. La vida media del ${}^{14}\text{C}$ es de 8270 años. Determina: a) La población de núcleos de ${}^{14}\text{C}$ en dicha muestra. b) La actividad de esta muestra después de 1000 años.

a) La actividad de una muestra viene dada por la ecuación: $A = \lambda \cdot N$ y además se cumple que: $\tau = \frac{1}{\lambda}$, por tanto:

$$N = \frac{A}{\lambda} = A \cdot \tau = 2,8 \cdot 10^7 \frac{\text{núcleos}}{\text{s}} \cdot 8270\text{ año} \cdot 365 \frac{\text{día}}{\text{año}} \cdot 24 \frac{\text{hora}}{\text{día}} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{hora}}$$

de donde $N = 7,30 \cdot 10^{17}$ núcleos

b) Aplicando la ley de desintegración radiactiva: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$ resulta:

$$A = 2,8 \cdot 10^7\text{ Bq} \cdot e^{-\frac{1}{8270\text{ año}} \cdot 1000\text{ año}} = 2,48 \cdot 10^7\text{ Bq}$$

19. El ^{131}I es un isótopo radiactivo que se utiliza en medicina para tratar el hipertiroidismo, ya que se concentra en la glándula tiroides. Su período de semidesintegración es de 8 días. a) Explica como cambia una muestra de 20 mg de ^{131}I tras estar almacenada en un hospital durante 48 días. b) ¿Cuál es la actividad de un microgramo de ^{131}I ?

a) Aplicando la ley de desintegración radiactiva en función de la masa, se tiene que:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = m_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}2}{T} t} = 20 \text{ mg} \cdot e^{-\frac{\text{Ln}2}{8 \text{ días}} \cdot 48 \text{ días}} = 0,31 \text{ mg}$$

b) La actividad de una sustancia radiactiva es la cantidad de núcleos que se desintegran en la unidad de tiempo.

$$A = \lambda \cdot N =$$

$$= \frac{\text{Ln}2}{T} \cdot \frac{m}{M} = \frac{\text{Ln}2}{8 \text{ días} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3600 \text{ s/h}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ g}}{131 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol} =$$

$$= 4,6 \cdot 10^9 \text{ núcleos desintegrados/s}$$

20. Se observa que la actividad radioactiva de una muestra de madera prehistórica es diez veces inferior a la de una muestra de igual masa de madera moderna. Sabiendo que el período de semidesintegración del ^{14}C es 5730 años, calcula la antigüedad de la primera muestra.

La actividad de una muestra en función de la actividad inicial es:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}2}{T} t}$$

Como la actividad actual es la décima parte de la inicial, se tiene que:

$$\frac{A_0}{10} = A_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}2}{T} t} \Rightarrow -\text{Ln}10 = -\frac{\text{Ln}2}{T} \cdot t$$

$$\text{Despejando: } t = T \cdot \frac{\text{Ln}10}{\text{Ln}2} = 5730 \text{ años} \cdot \frac{\text{Ln}10}{\text{Ln}2} = 19034,6 \text{ años}$$

21. El carbono-14 tiene un período de semidesintegración de 5730 años y una masa atómica de 14,0032 u. Se dispone de una muestra de carbono-14 con una actividad de $4,93 \cdot 10^9$ desintegraciones por minuto. Determina: a) La actividad. b) La masa al cabo de 10^{10} segundos.

a) La actividad de una muestra en función de la actividad inicial es:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t} =$$

$$= 4,93 \cdot 10^9 \frac{\text{desintegraciones}}{\text{min}} \cdot \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} e^{-\frac{\ln 2}{5730 \text{ años} \cdot 3,15 \cdot 10^7 \text{ s/año}} \cdot 10^{10} \text{ s}} = 7,91 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

b) La actividad de una muestra está relacionada con los átomos presentes con la relación:

$A = \lambda \cdot N$, luego:

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{A \cdot T}{\ln 2} = \frac{7,91 \cdot 10^7 \text{ Bq} \cdot 5730 \text{ años} \cdot 3,15 \cdot 10^7 \text{ s/año}}{\ln 2} = 2,06 \cdot 10^{19} \text{ átomos}$$

Como la masa molar del carbono-14 es 14,0032 g/mol, la masa de esos átomos es:

$$m = \frac{2,06 \cdot 10^{19} \text{ átomos}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos/mol}} \cdot 14,0032 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 4,79 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

22. Calcula la energía liberada, expresada en kW·h, durante la fisión de 1 g de ^{235}U , sabiendo que la fisión de cada núcleo de uranio libera una energía de 200 MeV.

Como en un mol de átomos de uranio hay una cantidad de núcleos igual a la constante de Avogadro, resulta que los núcleos de uranio contenidos en la muestra son:

$$N = \frac{1 \text{ g}}{235 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol} = 2,56 \cdot 10^{21} \text{ núcleos}$$

La energía liberada es: $E = 2,56 \cdot 10^{21} \text{ núcleos} \cdot 200 \text{ MeV/núcleo} = 5,12 \cdot 10^{23} \text{ MeV}$

Y expresada en kW·h es:

$$E = 5,12 \cdot 10^{23} \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}} \cdot \frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ J/s}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 2,28 \cdot 10^4 \text{ kW}\cdot\text{h}$$

23. El Sol irradia energía con una potencia de $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Suponiendo que esto se deba a la conversión de cuatro protones en helio, lo cual libera $26,7 \cdot 10^6 \text{ eV}$ y que los protones constituyen la mitad de la masa del Sol, estima cuántos años faltan para que el Sol se extinga si continúa radiando energía al ritmo actual. Dato: $M_{\text{Sol}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

La cantidad de protones que contiene el Sol es:

$$n_p = \frac{M_{sol} / 2}{m_p} = \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg} / 2}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 5,988 \cdot 10^{56} \text{ protones}$$

Y la energía liberada por la conversión de estos protones en helio es:

$$E = 5,988 \cdot 10^{56} \text{ protones} \cdot \frac{26,7 \cdot 10^6 \text{ eV}}{4 \text{ protones}} = 4,13 \cdot 10^{63} \text{ eV}$$

Y expresada en julios: $E = 4,13 \cdot 10^{63} \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}} = 6,6 \cdot 10^{44} \text{ J}$

Y aplicando la definición de potencia, resulta que el tiempo pedido es:

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow 4 \cdot 10^{26} \text{ W} = \frac{6,6 \cdot 10^{44} \text{ J}}{t} \Rightarrow t = 1,65 \cdot 10^{18} \text{ s} = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ años}$$

24. El núcleo ${}_{15}^{32}\text{P}$ se desintegra emitiendo un electrón que adquiere una energía cinética igual a 1,71 MeV. Escribe la reacción nuclear que tiene lugar, determinando A y Z del núcleo hijo y la masa de ese núcleo si la masa del ${}_{15}^{32}\text{P}$ es 31,973908 u.

La reacción nuclear que tiene lugar es: ${}_{15}^{32}\text{P} \rightarrow {}_{16}^{32}\text{X} + {}_{-1}^0\text{e}$

La energía cinética del electrón expresada en julios es:

$$E = 1,71 \text{ MeV} = 1,71 \cdot 10^6 \cdot \text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 2,736 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Que corresponde a una disminución de masa igual a:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{2,736 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 3,04 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = 3,04 \cdot 10^{-27} \text{ g}$$

Y expresada en unidades de masa atómica (u):

$$\Delta m = 3,04 \cdot 10^{-27} \text{ g} = 3,04 \cdot 10^{-27} \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ u}}{1,6606 \cdot 10^{-24} \text{ g}} = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

La masa del núcleo hijo es: $31,973908 \text{ u} - 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ u} = 31,972077 \text{ u}$

25. El isótopo de fósforo ${}_{15}^{32}\text{P}$, cuya masa es 31,9739 u, se transforma por emisión beta en un isótopo estable de azufre (Z = 16), de masa 31,9721 u. El

proceso, cuyo período de semidesintegración es 14,28 días, está acompañado por la liberación de energía en forma de radiación electromagnética. Con estos datos: a) Escribe la reacción nuclear, el tipo de desintegración beta producido, la energía y la frecuencia de la radiación emitida. b) Calcula la fracción de núcleos de átomos de fósforo desintegrados al cabo de 48 horas para una muestra formada inicialmente sólo por núcleos de ${}_{15}^{32}\text{P}$.

a) ${}_{15}^{32}\text{P} \rightarrow {}_{16}^{32}\text{S} + {}_{-1}^0\text{e}$, luego se trata de una emisión beta de un electrón y no de un positrón.

A continuación hay que calcular el defecto de masa para hallar la energía de la radiación emitida:

$$\Delta m = m_{\text{fósforo}} - (m_{\text{azufre}} + m_{\text{electrón}}) = 31,9739 \text{ u} - (31,9721 \text{ u} + 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ u}) = 0,0013 \text{ u}$$

$$\text{En unidades del SI: } \Delta m = 0,0013 \text{ u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\text{u}} = 2,0767 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Aplicando la ecuación de Einstein la energía de la radiación es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 2,0767 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,8690 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Aplicando la ecuación de Planck: $\Delta E = h \cdot \nu$, de donde:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1,8690 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 2,82 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{b) } N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln} 2}{T} \cdot t}, \text{ luego: } \frac{N}{N_0} = e^{-\frac{\text{Ln} 2}{T} \cdot t}$$

$$\text{Por tanto: } \frac{N}{N_0} = e^{-\frac{\text{Ln} 2}{14,28 \text{ día} \cdot 24 \text{ horas / día}} \cdot 48 \text{ horas}} = 0,907$$

Y expresado en % es: $0,907 \cdot 100 = 90,7 \%$, que es el % de fósforo que hay al cabo de 48 horas, luego la fracción desintegrada es: $100 - 90,7 = 9,3 \%$.

Test de evaluación

1. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones relacionados con la fluorescencia y la radiactividad: a) Son fenómenos que dependen el uno del otro. b) Son fenómenos diferentes, pero relacionados entre sí. c) Son fenómenos diferentes y sin relación alguna entre sí. d) Ambos son el mismo fenómeno físico.

La fluorescencia y la radiactividad son fenómenos que no guardan una relación de dependencia entre sí y la radiación radiactiva sigue emitiéndose aunque no se excite a la sustancia que origina fluorescencia con radiaciones electromagnéticas.

Por tanto:

- a) Son fenómenos que dependen el uno del otro es falsa.
- b) Son fenómenos diferentes, pero relacionados entre sí es falsa.
- c) Son fenómenos diferentes y sin relación alguna entre sí es verdadera.
- d) Ambos son el mismo fenómeno físico es falsa.

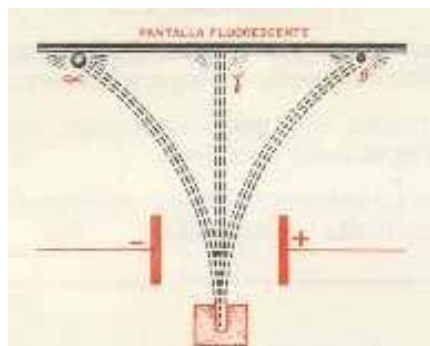
2. Ante un campo eléctrico formado por una placa positiva situada a la derecha y una placa negativa a la izquierda pasan a su través rayos α , β y γ , cómo es la trayectoria de los mismos al atravesar el campo eléctrico paralelamente a las placas: a) La misma en los tres casos. b) Los α y β no se desvían y γ sí. c) γ no se desvía, α hacia la placa negativa y β hacia la positiva. d) γ no se desvía, β hacia la placa negativa y α hacia la positiva.

Las partículas α son núcleos de helio y por ello tienen carga positiva, por lo que son atraídos hacia la placa negativa y repelidos por la placa positiva.

Las partículas β son electrones, por lo que se dirigen hacia la placa positiva y se alejan de la negativa.

Las partículas γ son radiación electromagnética y no sufren desviación al atravesar el campo eléctrico.

Gráficamente se obtiene:



Por tanto:

- a) La misma en los tres casos es falsa.
- b) Los α y β no se desvían y γ sí es falsa.
- c) γ no se desvía, α hacia la placa negativa y β hacia la positiva es verdadera.
- d) γ no se desvía, β hacia la placa negativa y α hacia la positiva es falsa.

3. Si en el Uranio: $Z = 92$ y $A = 238$, el número de neutrones es: a) 92. b) 238. c) 146. d) 330.

En el núcleo de un átomo, el número atómico Z indica la cantidad de protones que contiene y el número másico A es igual a la suma del número de protones más el de neutrones. Por tanto:

Número de neutrones = $234 - 92 = 142$ neutrones.

Luego la afirmación correcta es la c).

4. Completa la frase: Isóbaros son núcleos que tienen el mismo _____, pero diferente _____ y diferente _____.

La frase correcta es:

Isóbaros son núcleos que tienen el mismo número másico A , pero diferente número atómico Z y diferente número de neutrones.

5. La actividad de una muestra radiactiva es 5 Ci y equivale a: a) 3,7 Bq. b) $1,85 \cdot 10^{11}$ Bq. c) $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq. d) 1 Bq.

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq, luego: } 5 \text{ Ci} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \frac{\text{Bq}}{\text{Ci}} = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ Bq}$$

Por tanto la respuesta correcta es la b).

6. El tiempo que transcurre durante un proceso radiactivo para que el número de núcleos de los átomos iniciales se reduzca a la mitad se llama: a) Período de semidesintegración. b) Vida media. c) Semivida. d) Media vida.

El período de semidesintegración, T , es el tiempo que tarda una muestra de núcleos de átomos radiactivos en reducirse a la mitad.

La vida media, τ , representa un promedio del tiempo que tarda en desintegrarse un núcleo de la muestra radiactiva elegido al azar.

La relación entre ambas magnitudes físicas es la siguiente: $\tau = \frac{T}{\text{Ln } 2}$

Por tanto, período de semidesintegración y vida media son conceptos diferentes. Por otro lado, a veces al período de semidesintegración se le conoce como semivida y media vida no es un concepto físico relacionado con la actividad radiactiva. En consecuencia, a) es correcta, b) falsa, c) correcta y d) falsa.

7. Completa la siguiente frase. La radiactividad _____ es la emisión radiactiva que tiene lugar como consecuencia de una _____ nuclear _____ previamente.

La frase correcta es:

La radiactividad artificial es la emisión radiactiva que tiene lugar como consecuencia de una reacción nuclear provocada previamente.

8. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La fisión nuclear es un proceso radiactivo y la fusión nuclear no. b) La fusión nuclear es un proceso radiactivo y la fisión nuclear no. c) Tanto la fusión nuclear como la fisión nuclear son procesos exoenergéticos. d) La fusión nuclear es un proceso muy endoenergético.

Tanto la fisión como la fusión nuclear son procesos radiactivos que globalmente son muy exoenergéticos. Por tanto:

a) La fisión nuclear es un proceso radiactivo y la fusión nuclear no es falsa.

b) La fusión nuclear es un proceso radiactivo y la fisión nuclear no es falsa.

c) Tanto la fusión nuclear como la fisión nuclear son procesos exoenergéticos es verdadera.

d) La fusión nuclear es un proceso muy endoenergético es falsa.

9. Si el periodo de semidesintegración de una sustancia radiactiva es 6000 años, ¿cuánto tiempo tarda en perder 1/4 de su masa?: a) 2490,2 años. b) 2940,2 años. c) 6000 años. d) 12000 años.

La cantidad de núcleos de átomos presentes al cabo de un tiempo es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

Si se pierde un cuarto de su masa, significa que el número de átomos presentes es:

$$N = \frac{3}{4} N_0$$

$$\text{Luego: } \frac{3}{4} N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} \Rightarrow \ln \frac{3}{4} = -\frac{\ln 2}{T} \cdot t$$

y al despejar t se obtiene:

$$t = -\ln \frac{3}{4} \cdot \frac{T}{\ln 2} = -\ln \frac{3}{4} \cdot \frac{6000 \text{ años}}{\ln 2} = 2490,2 \text{ años}$$

Luego la respuesta correcta es la a).

10. La masa del ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ es 39,97545 u por lo que la energía liberada en la formación de 0,5 mol del mismo es: a) $9,69 \cdot 10^{25}$ MeV. b) 7,99 MeV. c) 321,83 MeV. d) 8,05 MeV.

El núcleo del átomo de Calcio ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ tiene 20 protones y 20 neutrones y el defecto de masa en la formación del citado núcleo es:

$$\Delta m = 20 \text{ A } m_p + 20 \text{ A } m_n - m_{\text{Ca}} = 20 \text{ A } 1,0073 \text{ u} + 20 \text{ A } 1,0087 \text{ u} - 39,97545 \text{ u} = 0,3455 \text{ u}$$

La energía liberada en la formación de un núcleo de calcio es:

$$\Delta E = \Delta m \text{ A } c^2 = 0,3455 \text{ u A } 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u} \cdot c^2} \cdot c^2 = 321,83 \text{ MeV}$$

$$\text{Luego por tanto: } \Delta E = 321,83 \frac{\text{MeV}}{\text{núcleo}}$$

$$\text{Como hay: } n = 0,5 \text{ mol} \cdot N_A = 0,5 \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol} = 3,01 \cdot 10^{23} \text{ núcleos de Ca}$$

$$\text{Luego: } \Delta E = 3,01 \cdot 10^{23} \text{ núcleos} \cdot 321,83 \frac{\text{MeV}}{\text{núcleo}} = 9,69 \cdot 10^{25} \text{ MeV}$$

Luego la respuesta correcta es la a).