DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Los ejercicios correspondientes a este bloque temático aparecen mucho en Selectividad. Abundan los del tipo de discusión de un sistema en función de uno o dos parámetros (sobre todo de uno), pidiéndose en muchos casos la resolución del sistema para un valor determinado del parámetro o parámetros.

Tienes que entender muy bien el teorema de Rouché-Fröbenius, saber aplicarlo y dominar los métodos de resolución de sistemas para emplear el más adecuado si se te pide la resolución de alguno.

Problema 1

Discutir, según los valores de *a*, el sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Madrid, junio de 1995

Solución:

Todos los problemas de este tipo los resolverás de manera cómoda aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.

Llamemos C = matriz de los coeficientes y A = matriz ampliada con los términos independientes. Por tanto:

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiemos, en primer lugar, los valores que puede tomar rango C para los distintos valores de a y, seguidamente, los correspondientes valores de rango A para esos mismos valores de a.

Sumando a la primera columna las otras dos y desarrollando el determinante por la primera columna, habiendo buscado antes ceros, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 2+a & a & 1 \\ 2+a & 1 & a \end{vmatrix} = (2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2+a)(a-1)^2$$

en donde vemos que $|C| = 0$ para $a = -2$ o $a = 1$ y distinto de cero en cualquier otro caso. Por tanto:

1.° Si $a \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$, rango C = rango A = 3 = n.° de incógnitas y, aplicando el teorema de Rouché, deducimos que el sistema es compatible determinado.

2.° Si $a = -2$, $|C| = 0$, y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces rango $C = 2$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$, orlando este menor con los elementos de la última fila y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pero } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9, \text{ luego rango } C = 2 \text{ y rango } A = 3,$$

así que el sistema será incompatible.

3.° Si $a = 1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, evidentemente, rango C = rango A = 1 menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema será compatible indeterminado biparamétrico y se reduce a una sola ecuación: $x + y + z = 1$

Problema 2

Discutir, según los valores de *m*, el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + my - 5z = -4 \end{cases}$$

Madrid, junio de 1995

Solución:

Llamemos C = matriz de los coeficientes y A = matriz ampliada con los términos independientes. Luego:

$$C=\begin{pmatrix}1&1&2\\-3&2&3\\2&m&-5\end{pmatrix} \text{ y } A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\-3&2&3&-2\\2&m&-5&-4\end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular el valor de rango C para cualquier valor real de m, y, para esos mismos valores, el valor de rango de A.

$$|C|=\begin{vmatrix}1&1&2\\-3&2&3\\2&m&-5\end{vmatrix}=-9\,(m+3)$$

en donde vemos que el único valor que anula $|C|$ es $m=-3$.

Por tanto:

a) Si $m \in R-\{-3\}$ rango C = rango A = 3 = número de incógnitas y, aplicando el teorema de Rouché, deducimos que el sistema es compatible determinado.

b) Si $m=-3$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&2\\-3&2&3\\2&-3&-5\end{pmatrix}, |C|=0, \text{ y como } \begin{vmatrix}1&1\\-3&2\end{vmatrix}=5\neq 0 \text{ tenemos que rango } C=2,$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\-3&2&3&-2\\2&-3&-5&-4\end{pmatrix}, \text{ pero como } \begin{vmatrix}1&1\\-3&2\end{vmatrix}\neq 0, \text{ orlando este menor con la}$$

última fila y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\-3&2&3\\2&-3&-5\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}1&1&2\\-3&2&-2\\2&-3&-4\end{vmatrix}=-20\neq 0 \text{ se tiene que rango } A=3.$$

Así que rango C = 2 y rango A = 3, luego el sistema es incompatible.

Problema 3

Discutir según los valores del parámetro a, y resolver en los casos que proceda, el sistema

$$\begin{cases}(a+1)x+y+z=0\\ x+(a+1)y+z=0\\ x+y+(a+1)z=0\end{cases}$$

La Laguna, junio de 1995

Solución:

Para resolver este problema aplicarás el teorema de Rouché-Fröbenius. Se trata de un sistema homogéneo y siempre tendrá la solución $x=0$, $y=0$, $z=0$. Como sabes, para que tenga solución distinta de la trivial es condición necesaria y suficiente que el rango de la matriz de los coeficientes sea cero, en cuyo caso el sistema será compatible indeterminado ya que rango C = = rango A < n.° de incógnitas.

Calculamos el valor del determinante sumando a la última columna las otras dos, sacando $a+3$ fuera del determinante como factor y buscando ceros en la última columna:

$$|C|=\begin{vmatrix}a+1&1&a+3\\1&a+1&a+3\\1&1&a+3\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}a+1&1&1\\1&a+1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}a&0&0\\0&a&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(a+3)a^2$$

que valdrá 0 cuando a = −3 o $a=0$. Por tanto:

1.° Si a ∈ R −{− 3, 0}, el determinante de C no es cero, luego rango C = = rango A = 3 = n.° de incógnitas y el sistema es compatible determinado (tiene la solución trivial).

2.° Si $a=0$,

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}, \text{ luego rango } C = \text{rango } A = 1 \text{ menor}$$

que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, quedando reducido a una sola ecuación:

MATEMÁTICAS I

$x+y+z=0$, cuya solución es: $\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \quad \alpha,\beta\in R \\ z=\beta \end{cases}$

3.° Si a = – 3,

$C=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$ rango C = rango A = 2 menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico; como la última ecuación es combinación lineal de las dos primeras, el sistema es equivalente al siguiente

$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y=z=0 \end{cases}$ y como $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$ haciendo $z=t$, nos da como solución

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$$

Problema 4

Discutir, según el valor del parámetro *a* el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

Murcia, junio de 1995

Solución:

Para resolver este problema aplicarás, como siempre se hace en los de este tipo, el teorema de Rouché-Fröbenius.

Llamemos C a la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada con los términos independientes.

$$C=\begin{pmatrix}1&a&1\\2&-1&a\\1&1&a\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&a&1&1\\2&-1&a&2\\1&1&a&3\end{pmatrix}$$

Multiplicando la primera fila por – 2 y sumándola a la segunda, y multiplicándola por –1 y sumándola a la tercera:

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\2&-1&a\\2&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&1\\0&-1-2a&a-2\\0&1-a&a-1\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}-1-2a&a-2\\-1&1\end{vmatrix}=(a-1)(-a-3)$$

en donde vemos que $|C|=0$ solamente si $a=1$ o $a=-3$.

Por tanto,

1.° Si $a\in R-\{-3,1\}$ rango C = rango A = 3 = n.° de incógnitas, así que el sistema es compatible determinado.

2.° Si $a=-3$,

$$C=\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&-1&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}\ \text{y}\ A=\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\2&-1&-3&2\\1&1&-3&3\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}1&-3\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0$, rango C = 2, y orlando este menor de A con la última fila y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix}1&-3&1\\2&-1&-3\\1&1&-3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1&-3&1\\2&-1&2\\1&1&3\end{vmatrix}=10\neq 0,\ \text{así que rango}\ A=3$$

y como los rangos son distintos el sistema es incompatible.

3.° Si $a=1$,

$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-1&1&2\\1&1&1&3\end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$, obtenemos que rango $C=2$

Orlando el menor $\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}$ de A con la última fila y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\1&1&3\end{vmatrix}=-6\neq 0,\ \text{de donde rango}\ A=3$$

y como los rangos de ambas matrices no son iguales el sistema será incompatible.

EL ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

Los problemas correspondientes a esta parte suelen ponerse mezclados con los del bloque siguiente: El Espacio Euclídeo Tridimensional. Debes dominar la geometría del plano afín y euclídeo estudiada en los cursos anteriores, las distintas formas de dar las ecuaciones de una recta y un plano en el espacio, el paso de unas ecuaciones a otras, las condiciones de paralelismo y las posiciones relativas de rectas y planos.

Problema 1

Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \qquad s: x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) Hallar n para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de n obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas

Madrid, junio de 1995

Solución:

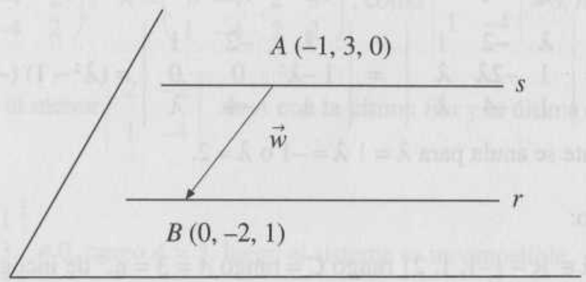
a) Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores deberán tener las componentes proporcionales.

Sean $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ vectores directores de r y s respectivamente. Una forma de obtener $\vec{v}_r$ puede ser calculando las ecuaciones paramétricas de r, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los planos que la determinan (otra forma muy cómoda es obtenerlo como producto vectorial de los vectores característicos de dichos planos):

$$r: \begin{cases} x+y=z-3 \\ -2x=-z-1 \end{cases}, \text{ de donde } r= \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t \\ y=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}t \quad t\in R, \text{ así que} \\ z=t \end{cases}$$

$$\vec{v}_r=2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ 1\right)=(1,1,2) \text{ y } \vec{v}_r=(1,n,2), \text{ luego } \frac{1}{1}=\frac{n}{1}=\frac{2}{2}\Rightarrow n=1$$

b) El plano pedido pasa por el punto $A(-1, 3, 0)$, siendo dos vectores



paralelos a dicho plano, el $\vec{v}_r=(1, 1, 2)$ y el $\vec{w}$, $\vec{AB}$, siendo B un punto cualquiera de r:

$$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\neq 0, \text{ haciendo } z=1 \text{ obtenemos } x=0,$$

$y=-2$, luego $B(0,-2,1)$, $\vec{AB}=(1,-5,1)$.

Así que el plano pedido será: $\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}=0$ y, desarrollando,

$11x+y-6z+8=0$

Problema 2

Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv \lambda x-2y+z-1=0$$
$$\pi_2 \equiv x-2\lambda y+\lambda z-3=0$$
$$\pi_3 \equiv x-4y+\lambda z-\lambda=0$$

Extremadura, junio de 1995

Solución:

Observa que la discusión del sistema de ecuaciones lineales nos va a resolver el problema.

MATEMÁTICAS I

$$\begin{cases} \lambda x - 2y + z = 1 \\ x - 2\lambda y + \lambda z = 3 \\ x - 4y + \lambda z = 1 \end{cases} \quad \text{Sea } C = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -2\lambda & \lambda \\ 1 & -4 & \lambda \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & \lambda & 3 \\ 1 & -4 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -2\lambda & \lambda \\ 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(-2\lambda + 4)$$

que solamente se anula para $\lambda = 1$ $\lambda = -1$ o $\lambda = 2$.

Por tanto:

a) Si $\lambda \in R - \{-1, 1, 2\}$ rango C = rango A = 3 = n.° de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por tanto, los tres planos se cortan en un punto.

b) Si $\lambda = -1$,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, rango $C = 2$, y orlando este menor de A con la primera fila y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0, \text{ de donde rango } A = 3$$

Por tanto, el sistema no tiene solución. Observa que en este caso los dos primeros planos son paralelos, siendo cortados por el tercero.

c) Si $\lambda = 1$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{como} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rango } C = 2,$$

pero $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, así que rango A =3,

y como los rangos son distintos, el sistema no tiene solución. También en este caso los dos primeros planos son paralelos, siendo cortados por el tercero.

d) Si $\lambda = 2$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rango } C = 2,$$

y orlando el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ de A con la última fila y la última columna, al ser

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rango } A = 3, \text{ luego el sistema es incompatible.}$$

Observarás que, en este caso, los dos últimos planos son paralelos y son cortados por el primero.

Problema 3

Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. Dar unas ecuaciones de un plano (si existe) que contenga a ambas rectas

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{1}$$

Castilla-La Mancha, junio de 1995

Solución:

Como $\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{-1}{1}$, los vectores directores de ambas rectas serán paralelos, luego serán paralelas. Como, además, el punto P (2, –3, 1) de la recta r no está en la recta s $\left(\text{ya que } \frac{2+4}{-2} \neq \frac{-3-1}{3}\right)$, las rectas no serán coincidentes. Por tanto, existe un plano único que contiene a ambas rectas.

Dicho plano está determinado por el punto P (2, –3, –1) de r y los vectores $\vec{v} = (2, -3, -1)$, $\vec{w} = \vec{PQ}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta s Q (–4, 1, –4), quedando $\vec{w} = \vec{PQ} = (-6, 4, -3)$.

Las ecuaciones paramétricas del plano pedido serán $\begin{cases} x = 2 + 2\alpha - 6\beta \\ y = -3 - 3\alpha + 4\beta \quad \alpha, \beta \in R \\ z = -1 - \alpha - 3\beta \end{cases}$

Problema 4

Dar la ecuación del plano paralelo a la recta $\dfrac{2x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{1}$ y que contiene a la recta $(1 - \lambda, 2\lambda, 1)$.

Zaragoza, junio de 1995

Solución:

Como observarás, de la segunda recta nos dan sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Las ecuaciones continuas de ambas rectas son:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{0}$$

Por contener a la segunda recta, el plano pasa por $P\,(1, 0, 1)$ y por las condiciones del enunciado, será paralelo a los vectores directores de ambas rectas:

$$\vec{v} = (0, 2, -1); \quad \vec{w} = (-1, 2, 0)$$

luego la ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 2 & 2 & y \\ -1 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0, \text{ y desarrollando, } 2x + y + 2z - 4 = 0$$

EL ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL

Repasa a fondo todo lo relativo a ángulos entre vectores, rectas y planos; producto escalar, vectorial y mixto; distancias, áreas y volúmenes. Es muy fácil que te pidan resolver problemas o cuestiones para las que tengas que emplear conceptos relacionados con este bloque y el anterior.

Debes tener presente que se ponen muchos ejercicios del espacio afín y del euclídeo.

Problema 1

Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ y que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Sea $P\,(x, y, z)$ un punto cualquiera del lugar geométrico pedido y π: $2x - y + 2z - 2 = 0$. Como

$$d\,(P, \pi) = \left| \frac{2x - y + 2z - 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - 2 = 3 \\ \text{o} \\ 2x - y + 2z - 2 = -3 \end{cases}$$

y el punto P tiene que estar también en el plano $x = y$, el lugar geométrico pedido será la unión de los puntos de las rectas r y s, siendo:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}; \qquad s: \begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \qquad t \in R \\ z = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = t \qquad t \in R \\ z = \frac{-1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$

En otras palabras, el lugar geométrico pedido es el conjunto de puntos de dos rectas paralelas que tienen de vector director $\vec{v} = (2, 2, -1)$, pasando una por el punto $\left(0, 0, -\frac{5}{2}\right)$ y la otra por el punto $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

Problema 2

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \qquad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.
b) Hallar la distancia entre ellas.

Madrid, junio de 1995

Solución:

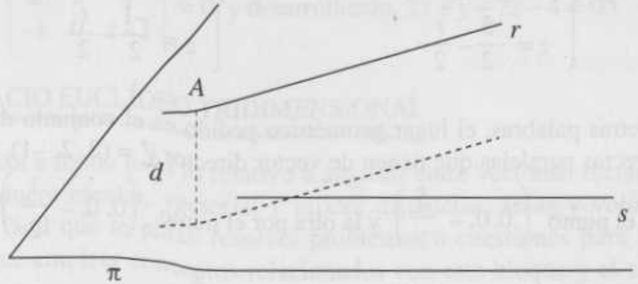
Consideremos $\vec{v}_r = (3, 2, 4)$ y $\vec{v}_s = (-1, 2, 3)$ vectores directores de ambas rectas. Como $\frac{3}{-1} \neq \frac{2}{2}$, las rectas no son paralelas, luego se cortan o se cruzan.

Sabemos que $A\ (1, -2, 1)$ es un punto de r y $B\ (-2, 3, 2)$ es un punto de s y $\vec{AB} = (-3, 5, 1)$. Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ las rectas se cruzan.}$$

b) Para contestar a este apartado puedes aplicar directamente la fórmula que da la distancia entre dos rectas que se cruzan (consulta el libro de texto), o razonar como lo hacemos a continuación:

La distancia pedida es igual a la distancia de un punto A de la recta r al plano π que, conteniendo a la recta s, es paralelo a la recta r. Por tanto, como $A\ (1, -2, 1)$ y



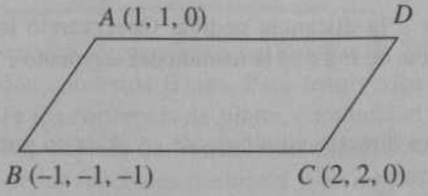
$$\pi: \begin{vmatrix} -1 & 3 & x+2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 3 & 4 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 13y - 8z - 19 = 0$$

Tendremos:

$$d\ (A, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 - 19}{\sqrt{2^2 + 13^2 + (-8)^2}} \right| = \frac{51}{\sqrt{237}}$$

Problema 3

Considérese la figura siguiente:



Se pide:
a) Coordenadas de *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.
b) Área de ese paralelogramo.

Madrid, junio de 1995

Solución:

a) Sea $D\ (x, y, z)$. Como $\vec{AD} = \vec{BC}$, tenemos:

$$(x-1, y-1, z) = (3, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \text{ luego } D\ (4, 4, 1)$$

b) Como sabes:

$$S = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Luego $S = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

Problema 2

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \qquad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.
b) Hallar la distancia entre ellas.

Madrid, junio de 1995

Solución:

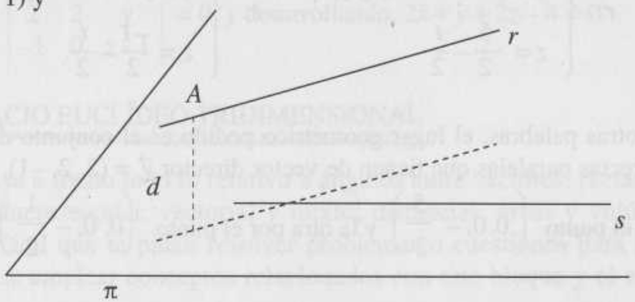
Consideremos $\vec{v}_r = (3, 2, 4)$ y $\vec{v}_s = (-1, 2, 3)$ vectores directores de ambas rectas. Como $\frac{3}{-1} \neq \frac{2}{2}$, las rectas no son paralelas, luego se cortan o se cruzan.

Sabemos que $A\ (1, -2, 1)$ es un punto de r y $B\ (-2, 3, 2)$ es un punto de s y $\vec{AB} = (-3, 5, 1)$. Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ las rectas se cruzan.}$$

b) Para contestar a este apartado puedes aplicar directamente la fórmula que da la distancia entre dos rectas que se cruzan (consulta el libro de texto), o razonar como lo hacemos a continuación:

La distancia pedida es igual a la distancia de un punto A de la recta r al plano π que, conteniendo a la recta s, es paralelo a la recta r. Por tanto, como $A\ (1, -2, 1)$ y



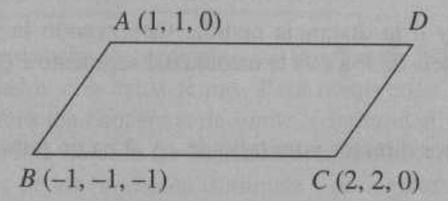
$$\pi: \begin{vmatrix} -1 & 3 & x+2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 3 & 4 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 13y - 8z - 19 = 0$$

Tendremos:

$$d\ (A, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 - 19}{\sqrt{2^2 + 13^2 + (-8)^2}} \right| = \frac{51}{\sqrt{237}}$$

Problema 3

Considérese la figura siguiente:



Se pide:
a) Coordenadas de *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.
b) Área de ese paralelogramo.

Madrid, junio de 1995

Solución:

a) Sea $D\ (x, y, z)$. Como $\vec{AD} = \vec{BC}$, tenemos:

$$(x-1, y-1, z) = (3, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \text{ luego } D\ (4, 4, 1)$$

b) Como sabes:

$$S = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0).$$

Luego $S = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

MATEMÁTICAS I

Problema 4

Determinar la distancia del punto (1,1,1) a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases}$$

Justificar geométricamente la resolución del problema.

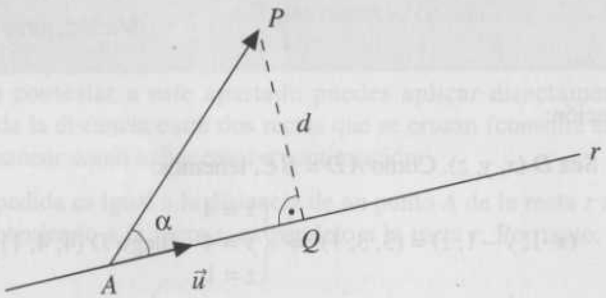
Murcia, junio de 1995

Solución:

Sea P (1,1,1) y d la distancia pedida. Observando la figura adjunta, vemos que la distancia de P a r es la medida del segmento PQ, trazado por P perpendicular a r.

Si $\vec{u}$ es un vector director y unitario de r y A es un punto cualquiera de la recta, se cumple que

$$\left|\vec{AP} \times \vec{u}\right| = \left|\vec{AP}\right| \cdot |\vec{u}| \text{ sen } \alpha = \left|\vec{AP}\right| \text{ sen } \alpha = d$$



Por tanto, tomando A (2,1,4), $\vec{AP} = (-1, 0, -3)$,
y como un vector director de r es $\vec{v} = (1, -1, 0)$,

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$ será un vector director unitario de r.

Pero $\vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de donde

$$d = \left|\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Aparecen con mucha frecuencia en las Pruebas de Selectividad los problemas relacionados con estos temas. Para resolverlos es necesario que manejes con soltura los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función en un punto, cálculo de límites indeterminados, reglas de derivación, propiedades de las funciones continuas y derivables en un intervalo, y particularmente la regla de L'Hôpital y los teoremas de Rolle, Bolzano y de Cauchy (o del valor medio).

Problema 4

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax}, & x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* es continua?
b) ¿Para qué valores de *a* es derivable?

Madrid, junio de 1995

Solución:

Para $x < 1$, $f(x) = 3 - ax^2$, y puesto que es una función polinómica será continua y derivable cualquiera que sea el valor de a.

MATEMÁTICAS I

Problema 2

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \qquad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.
b) Hallar la distancia entre ellas.

Madrid, junio de 1995

Solución:

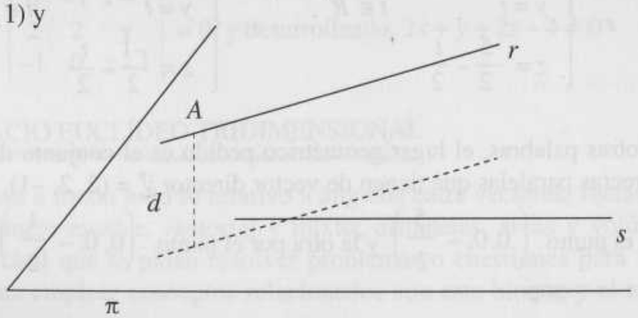
Consideremos $\vec{v}_r = (3, 2, 4)$ y $\vec{v}_s = (-1, 2, 3)$ vectores directores de ambas rectas. Como $\frac{3}{-1} \neq \frac{2}{2}$, las rectas no son paralelas, luego se cortan o se cruzan.

Sabemos que $A\,(1, -2, 1)$ es un punto de r y $B\,(-2, 3, 2)$ es un punto de s y $\vec{AB} = (-3, 5, 1)$. Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ las rectas se cruzan.}$$

b) Para contestar a este apartado puedes aplicar directamente la fórmula que da la distancia entre dos rectas que se cruzan (consulta el libro de texto), o razonar como lo hacemos a continuación:

La distancia pedida es igual a la distancia de un punto A de la recta r al plano π que, conteniendo a la recta s, es paralelo a la recta r. Por tanto, como $A\,(1, -2, 1)$ y



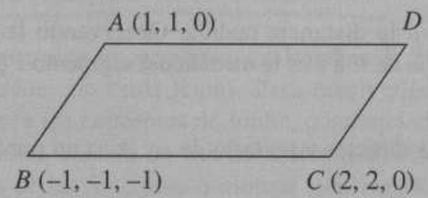
$$\pi: \begin{vmatrix} -1 & 3 & x+2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 3 & 4 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 13y - 8z - 19 = 0$$

Tendremos:

$$d\,(A, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 - 19}{\sqrt{2^2 + 13^2 + (-8)^2}} \right| = \frac{51}{\sqrt{237}}$$

Problema 3

Considérese la figura siguiente:



Se pide:
a) Coordenadas de *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.
b) Área de ese paralelogramo.

Madrid, junio de 1995

Solución:

a) Sea $D\,(x, y, z)$. Como $\vec{AD} = \vec{BC}$, tenemos:

$$(x-1, y-1, z) = (3, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \text{ luego } D\,(4, 4, 1)$$

b) Como sabes:

$$S = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Luego $S = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

Las ecuaciones paramétricas del plano pedido serán $\begin{cases} x = 2 + 2\alpha - 6\beta \\ y = -3 - 3\alpha + 4\beta \quad \alpha, \beta \in R \\ z = -1 - \alpha - 3\beta \end{cases}$

Problema 4

Dar la ecuación del plano paralelo a la recta $\frac{2x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{1}$

y que contiene a la recta $(1 - \lambda, 2\lambda, 1)$.

Zaragoza, junio de 1995

Solución:

Como observarás, de la segunda recta nos dan sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Las ecuaciones continuas de ambas rectas son:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{0}$$

Por contener a la segunda recta, el plano pasa por P (1, 0, 1) y por las condiciones del enunciado, será paralelo a los vectores directores de ambas rectas:

$$\vec{v} = (0, 2, -1); \quad \vec{w} = (-1, 2, 0)$$

luego la ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 2 & 2 & y \\ -1 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0, \text{ y desarrollando, } 2x + y + 2z - 4 = 0$$

EL ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL

Repasa a fondo todo lo relativo a ángulos entre vectores, rectas y planos; producto escalar, vectorial y mixto; distancias, áreas y volúmenes. Es muy fácil que te pidan resolver problemas o cuestiones para las que tengas que emplear conceptos relacionados con este bloque y el anterior.

Debes tener presente que se ponen muchos ejercicios del espacio afín y del euclídeo.

Problema 1

Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ y que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Sea P (x, y, z) un punto cualquiera del lugar geométrico pedido y π: $2x - y + 2z - 2 = 0$. Como

$$d(P, \pi) = \left| \frac{2x - y + 2z - 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - 2 = 3 \\ \text{o} \\ 2x - y + 2z - 2 = -3 \end{cases}$$

y el punto P tiene que estar también en el plano $x = y$, el lugar geométrico pedido será la unión de los puntos de las rectas r y s, siendo:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}; \quad s: \begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \qquad t \in R \\ z = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = t \qquad t \in R \\ z = \frac{-1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$

En otras palabras, el lugar geométrico pedido es el conjunto de puntos de dos rectas paralelas que tienen de vector director $\vec{v} = (2, 2, -1)$, pasando una por el punto $\left(0, 0, -\frac{5}{2}\right)$ y la otra por el punto $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

MATEMÁTICAS I

Problema 4

Determinar la distancia del punto (1,1,1) a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases}$$

Justificar geométricamente la resolución del problema.

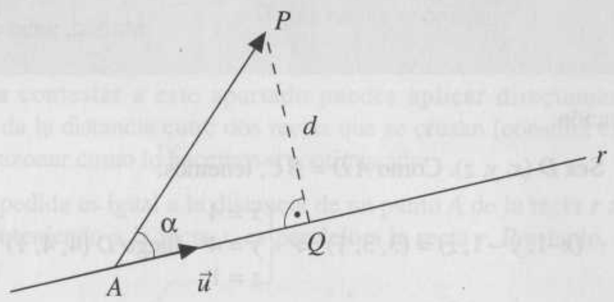
Murcia, junio de 1995

Solución:

Sea P (1,1,1) y d la distancia pedida. Observando la figura adjunta, vemos que la distancia de P a r es la medida del segmento PQ, trazado por P perpendicular a r.

Si $\vec{u}$ es un vector director y unitario de r y A es un punto cualquiera de la recta, se cumple que

$$\left|\vec{AP} \times \vec{u}\right| = \left|\vec{AP}\right| \cdot |\vec{u}| \text{ sen } \alpha = \left|\vec{AP}\right| \text{ sen } \alpha = d$$



Por tanto, tomando A (2,1,4), $\vec{AP} = (-1, 0, -3)$,
y como un vector director de r es $\vec{v} = (1, -1, 0)$,

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$ será un vector director unitario de r.

Pero $\vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de donde

$$d = \left|\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Aparecen con mucha frecuencia en las Pruebas de Selectividad los problemas relacionados con estos temas. Para resolverlos es necesario que manejes con soltura los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función en un punto, cálculo de límites indeterminados, reglas de derivación, propiedades de las funciones continuas y derivables en un intervalo, y particularmente la regla de L'Hôpital y los teoremas de Rolle, Bolzano y de Cauchy (o del valor medio).

Problema 4

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax}, & x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* es continua?
b) ¿Para qué valores de *a* es derivable?

Madrid, junio de 1995

Solución:

Para $x < 1$, $f(x) = 3 - ax^2$, y puesto que es una función polinómica será continua y derivable cualquiera que sea el valor de a.

Para $x > 1$, $f(x) = \dfrac{2}{ax}$, y como se trata de una función racional cuyo denominador no se anula (sólo se anularía en el caso de que $a = 0$, en cuyo caso la función no estaría definida), la función es continua y derivable.

Por tanto, sólo nos falta estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

a) Para que la función sea continua en $x = 1$, debe de estar definida en $x = 1$, tener límite y que ambos valores coincidan.

Para que la función tenga límite en $x = 1$, los laterales deben de ser iguales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a}$$

Por tanto, $3 - a = \dfrac{2}{a} \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$, de donde $a = 2$ y $a = 1$.

Como para $a = 1$ $f(1) = 2$ $\lim_{x\to 1} f(x)$, la función es continua.

De la misma forma, para $a = 2$ $f(2) = 1 = \lim_{x\to 2} f(x)$, y la función es continua.

b) Para que la función sea derivable en $x = 1$, es necesario que sea continua y, además, las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\text{para } \begin{cases} x < 1,\ f'(x) = -2ax \\ x > 1,\ f'(x) = -\dfrac{2}{ax^2} \end{cases}$$

Por tanto: si $a = 2$ $f'(1^+) = -\dfrac{2}{2 \cdot 1^2} = -1$; $f'(1^-) = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4$, y la función no es derivable,

si $a = 1$ $f'(1^+) = -\dfrac{2}{1 \cdot 1^2} = -2$; $f'(1^-) = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2$,

y la función es derivable.

Problema 2

Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2 - x)\, e^x - (2 + x)}{x^2}$$

Madrid, junio de 1995

Solución:

Se trata de un caso de indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital resolverás el problema sin ninguna dificultad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)\, e^x - (2+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + (2-x)\, e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x - e^x + (2-x)\, e^x}{2} = 0$$

Problema 3

Determinar el polinomio $p(x)$, de grado menor o igual que 3, tal que la curva $y = p(x)$ sea tangente a las rectas $y = 2 - x$, $x + y = 0$ en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente.

Zaragoza, junio de 1995

Solución:

Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Por ser la primera recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$, la curva pasará por el punto $(0, 2)$ de la recta; por ser la segunda recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, la curva pasará por el punto $(1, -1)$ de dicha recta. Por tanto:

para $x = 0$, $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2$, así que $d = 2$

para $x = 1$, $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -1$, de donde $a + b + c = -3$

Recordando el significado geométrico de la derivada, la derivada de $y = p(x)$, en $x = 0$ debe de ser -1 (pendiente de $y = 2 - x$) y, en $x = 1$, también tiene que ser -1 (pendiente de $x + y = 0$), y como $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, tendremos:

$x = 0$: $3a0^2 + 2b0 + c = -1$ de donde $c = -1$

$x = 1$: $3a1^2 + 2b1 + c = -1$ por tanto $3a + 2b = 0$

MATEMÁTICAS I

Y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, quedan determinados los coeficientes del polinomio:

$$\left.\begin{array}{l} c=-1 \\ d=2 \\ \\ a+b+c=-3 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=4,\quad b=-6,\quad c=-1, d=2$$

Problema 4

a) Si la derivada de una función f es mayor que cero en todo punto, probar que no puede haber dos puntos distintos x, y tales que $f(x) = f(y)$.Teniendo en cuenta esto, demostrar que la función $f(x) = 2x - e^{-2x} + 1$ solamente se anula en $x = 0$.

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función anterior, el eje X y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Extremadura, junio de 1995

Solución:

[Evidentemente, el apartado *b)* corresponde al tema de aplicaciones de la integral definida.]

a) Procedemos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen x e y tales que $f(x) = f(y)$; como f es derivable para todo valor real, la función es continua. Así que:

f es continua en $[x, y]$
f es derivable en (x, y)
$f(x) = f(y)$

De donde aplicando el teorema de Rolle, deducimos que $\exists c \in (x, y)$ tal que $f'(c) = 0$, en contra de la hipótesis. Por tanto no pueden existir dos reales distintos x, y tales que $f(x) = f(y)$

Consideremos la función :

$f(x) = 2x - e^{-2x} + 1$:
$f(0) = 2 \cdot 0 - e^{-2 \cdot 0} + 1 = 0$
$f'(x) = 2 + 2e^{-2x} > 0,\ \forall x \in R$

Así que, en virtud de lo demostrado anteriormente, f sólo puede anularse en $x = 0$.

b) Para resolver este problema, puede ayudar el tener un ligero esbozo de la gráfica de la función entre $x = -1$ y $x = 1$:

sabemos que la función es continua y estrictamente creciente en $[-1, 1]$, siendo $f(0) = 0$
(además, como $f''(x) = -4\, e^{2x} < 0,\ \forall x \in R$, la función es convexa); así que la gráfica tendrá la forma que se indica en la figura.

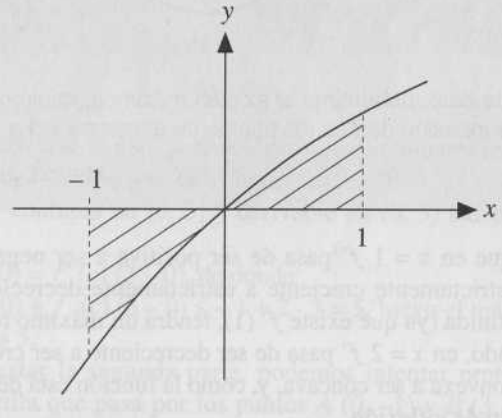
Por tanto:

$$S = -\int_{-1}^{0} (2x - e^{-2x} + 1)\, dx - \int_{0}^{1} (2x + e^{-2x} + 1)\, dx$$

$$\int_{-1}^{0} (-2x + e^{-2x} + 1)\, dx = [-x^2 - e^{-2x} + x]_{-1}^{0} = \frac{3 + e^2}{2}$$

$$\int_{0}^{1} (2x - e^{-2x} + 1)\, dx = \left[x^2 + \frac{e^{-2x}}{2} + x \right]_0^1 = \frac{3 + e^{-2}}{2}$$

$$\text{De donde } S = \frac{3 - e^2}{2} + \frac{3 + e^{-2}}{2} = 3 + \frac{e^{-2} + e^2}{2}$$



(Realmente, no necesitamos tener la gráfica de la función. Como sabemos que la función es continua y sólo se anula en $x = 0$, con seguridad $S = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\, dx\right|$).

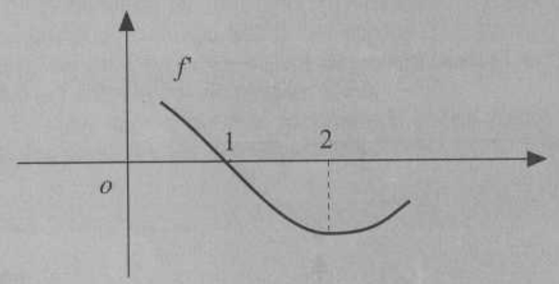
ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Repasa los conceptos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones reales de variable real, así como los procedimientos de su cálculo. Recuerda que en muchos casos el estudio del posible máximo o mínimo de un punto crítico se hace cómodamente mediante el estudio del signo de la derivada primera; igualmente a veces el estudio de los puntos de inflexión se hace muy fácil estudiando el signo de la derivada segunda.

Procura adquirir destreza en la resolución de problemas de máximos y mínimos.

Problema 1

En la figura se representa la gráfica de la derivada f' de cierta función f



Con este dato, determinar si existen máximos, mínimos (relativos) o puntos de inflexión de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$.

Madrid, junio de 1995

Observa que en $x = 1$ f' pasa de ser positiva a ser negativa; por tanto pasa de ser estrictamente creciente a estrictamente decreciente. Como en $x = 1$ f está definida (ya que existe $f'(1)$), tendrá un máximo relativo.

Por otro lado, en $x = 2$ f' pasa de ser decreciente a ser creciente, así que f pasa de ser convexa a ser cóncava, y, como la función está definida en $x = 2$, tendrá un punto de inflexión.

Problema 2

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$$

Madrid, junio de 1995

El dominio de la función es $D = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Como

$$f'(x) = \frac{4(2x-3) - (4x+5)\,2}{(2x-3)^2} = \frac{-25}{(2x-3)^2} < 0,\ \forall x \in D,$$ la función es estrictamente decreciente en todos los puntos de su dominio.

Problema 3

Una cierta función derivable f: $R \to R$ verifica que $f(0) = -1$ y que $f'(x) \leq 2$. ¿Cuánto es lo máximo que puede llegar a valer $f(3)$? ¿Hay alguna función con esas características para la que $f(3)$ es precisamente el valor dado en la respuesta anterior?

Sevilla, junio de 1995

Solución:

Por los datos que te dan, parece lógico que lo intentes resolver utilizando el teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]:

como f es continua en [0, 3] y derivable en (0, 3) existe $c \in (0, 3)$ tal que

$f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$, de donde

$f(3) = f(0) + f'(c)(3 - 0) \leq -1 + 2 \cdot 3 = 5$, luego el máximo valor que puede tomar es 5.

Para contestar la segunda parte, podemos intentar probar con la función más sencilla que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(3, 5)$, que es una recta:

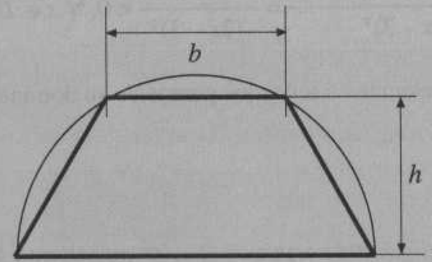
como para esa recta, $m = \frac{6}{3} = 2 = f'(x),\ \forall x \in R$, tendremos

$y - (-1) = 2(x - 0)$, y, evidentemente, la función $y = 2x - 1$, que verifica las condiciones dadas.

MATEMÁTICAS I

Problema 4

Encontrar las dimensiones de un trapecio inscrito en un semicírculo de radio *R* para que su área sea máxima. (Ver figura).



Zaragoza, junio de 1995

Solución:

Función de la que tienes que hallar el valor máximo: $S = \dfrac{(2R+b)\,h}{2}$,

pero entre *b* y *h* existe la relación: $R^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2}$,

quedándonos $S = \dfrac{(2R+b)\sqrt{4R^2-b^2}}{4}$

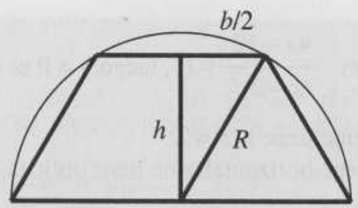
y derivando respecto de b:

$$S' = \frac{1}{4}\left(\sqrt{4R^2 - b^2} + (2R+b)\,\frac{-b}{\sqrt{4R^2-b^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{-2b^2 - 2Rb + 4R^2}{\sqrt{4R^2 - b^2}}$$, y para que la derivada sea cero

$$-2b^2 - 2Rb + 4R^2 = 0 \Rightarrow b = -2R,\ b = R,$$

luego: $b = R;\ h = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Todos los conceptos del tema anterior son de aplicación en la obtención de una gráfica. Repasa el cálculo de asíntotas. En algunos casos conviene que utilices un cuadro que resuma toda la información obtenida de la gráfica.

Problema 1

Se considera la curva de ecuación

$$y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$$

Encontrar:

a) Dominio de definición y corte con los ejes.
b) Posibles extremos (no se pide determinar su carácter).
c) Asíntotas y regiones. Extremos.
d) Representar gráficamente la curva.

Murcia, junio de 1995

Solución:

a) $D = R - \{2\}$, ya que $x = 2$ es el único valor que anula el denominador.
Corte con el eje *OX*: para $y = 0$, $x = 3$, así que será en el punto (3, 0).
Corte con el eje *OY*: para $x = 0$, $y = -3$, luego será en el punto (0, –3).

b) Derivando la función:

$y' = \dfrac{-4x + 16}{(x-2)^3}$, y como la función es derivable en todo su dominio, en el único punto que puede tener extremo es en el que se anula la derivada, o sea, en $x = 4$.

c) horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-12}{(x-2)^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-12}{(x-2)^2} = 0$, luego y = 0 es asíntota horizontal.

Verticales: solamente tiene la $x = 2$.

Oblicuas: como tiene horizontales no tiene oblicuas.

Regiones:

$$y = \frac{4(x-3)}{(x-2)^2}, \text{ luego si } x > 3,\ y_c > 0 \text{ y si } x < 3,\ y_c < 0$$

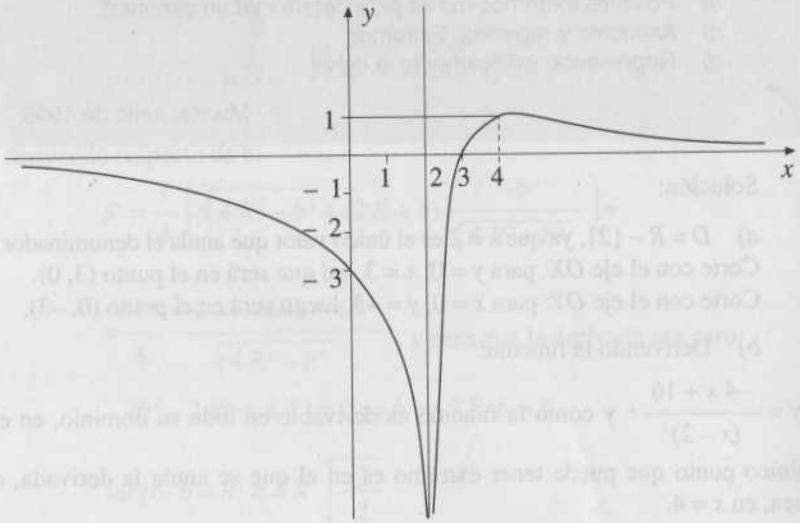
Extremos:

para calcular el extremo, podemos estudiar el signo de la derivada y así tendremos más información para la representación de la curva:

$$y' = \frac{4(-x+4)}{(x-2)^3}, \text{ luego los cambios de signo estarán en } x = 2 \text{ y en } x = 4:$$

si $x \in (-\infty\ 2)$, $y'(x) < 0$, y decreciente;
si $x \in (2, 4)$, $y'(x) > 0$, y creciente;
si $x \in (4, +\infty)$, $y' < 0$, y decreciente;
así que en $x = 4$ la función tiene un máximo relativo M (4, 1), ya que la función pasa de creciente a decreciente.

d) Representación gráfica:



Problema 2

Dibujar la gráfica de la curva: $y = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$, calculando previamente:

a) campo de existencia;
b) corte con los ejes;
c) crecimiento, decrecimiento y extremos relativos;
d) asíntotas;
e) pendiente cuando $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$.

Zaragoza, junio de 1995

Solución:

a) $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$, y, por tanto, $D = R$.

b) Puntos de corte con el eje OX: en esos puntos $y = 0$,

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow (2x)^3 = \left(-3\sqrt[3]{x^2}\right)^3\ x^2(8x+27) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{-27}{8}$$

y los puntos de corte serán P (0, 0) y $Q\left(\frac{-27}{8}, 0\right)$

El punto de corte con el eje OY será el P.

c) $y' = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$, y el signo será:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0 \Rightarrow 1 > -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 0$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < 0 \Rightarrow 1 < -3\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow -1 < x < 0, \text{ luego}$$

si $x \in (-\infty, -1) \cup (o + \infty)$, $y' > 0$, y la función es estrictamente creciente;
si $x \in (-1, 0)$, $y' < 0$, y la función es estrictamente decreciente;
por tanto, la función tiene un máximo relativo en $x = -1$, M (–1, 1), y un mínimo relativo en $x = 0$, m (0, 0).

d) horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x + 2\sqrt[3]{x^2}\right) = +\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\left(2x + 2\sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty,$$

luego no hay asíntotas-horizontales.

MATEMÁTICAS I

Verticales: no tiene.

Oblicuas: $y = mx + h$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 2\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2;\ h = \lim_{x\to-\infty}\left(2x + 2\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) = +\infty$$

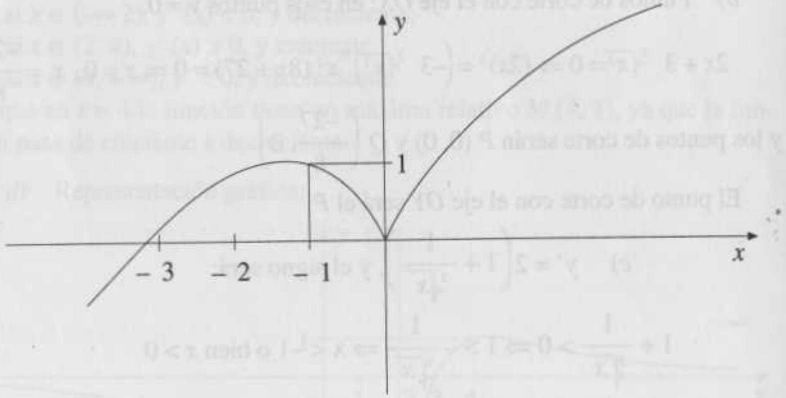
(si $x \to -\infty$, ocurre lo mismo), luego no hay oblicuas.

e)

$$\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} y' = \lim_{x\to 0^-} 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty$$

Con todos estos datos puedes dibujar la gráfica



INTEGRALES INDEFINIDAS

Repasa el concepto de primitiva de una función, integral indefinida y sus propiedades. Debes tener soltura en el cálculo de integrales inmediatas y en los métodos de integración elementales: *a*) integración por partes, *b*) integración de funciones racionales, *c*) integrales que por cambio de variables se convierten en racionales. Todos los problemas que puedan aparecer los resolverás con estos conocimientos.

Problema 2

Determinar la primitiva de $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \ln x$ que pase por el punto (1,3).

Zaragoza, junio de 1995

Solución:

Por el tipo de función que tenemos que integrar, parece lógico que apliquemos el método de integración por partes. Conviene hacer $\ln x = u$, ya que con este cambio *du* es racional:

$$\int x^{\frac{2}{3}} \ln x dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \ln x - \int \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \ln x - \frac{3}{5} \int x^{\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \ln x - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$\begin{cases} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^{\frac{2}{3}} dx;\ v = \displaystyle\int x^{\frac{2}{3}} dx = \dfrac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} \end{cases}$$

Luego el conjunto de todas las primitivas de la función será

$$F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}} \left(\ln x - \frac{3}{5}\right) + C$$

como $F(1) = 3$, $3 = \frac{3}{5}\left(\ln x - \frac{3}{5}\right) + C \Rightarrow C = \frac{84}{25}$

y la función pedida será $y = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \left(\ln x - \frac{3}{5}\right) + \frac{84}{25}$

Problema 2

Hacer el cambio $\sqrt{x} = t$ para obtener una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Extremadura, junio de 1995

Solución:

En el enunciado te dicen el cambio que te convierte la integral en una racional.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\,(t - \ln|1+t|) =$$
$$= 2\left(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right) + C$$

$\sqrt{x} = t;\ x = t^2;\ dx = 2t\,dt$

y una primitiva puede ser $y = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$

INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

Para resolver los ejercicios de esta parte, debes dominar el cálculo de primitivas. Repasa el concepto de integral definida, el teorema fundamental del cálculo, la regla de Barrow y el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes utilizando integrales definidas.

Problema 1

Calcular el área de la región limitada por las curvas

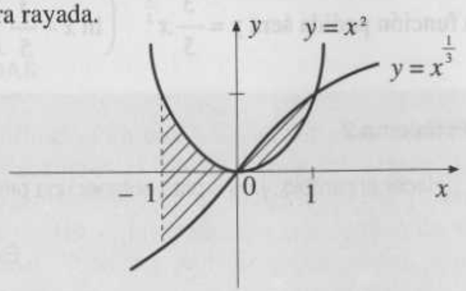
$$y = x^2 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{3}}$$

y las rectas $x = -1$ y $x = 1$

Madrid, junio de 1995

Solución:

Se pide el área de la figura rayada.



Por tanto:

$$S = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right)dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx - \int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,dx -$$
$$- \int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,dx = 2\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,u^2$$

Problema 2

Sea $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt$. Hallar el valor de $F'(0)$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Supongamos que $G(t) = \int e^{t^2}\,dt$, es decir, que $G(t)$ es una primitiva de e^{t^2}. Aplicando la regla de Barrow: $F(x) = [G(t)]_0^{2x} = G(2x) - G(0)$, y derivando respecto de x, y teniendo en cuenta que $G'(t) = e^{t^2}$, tenemos:

$$F'(x) = G'(2x)\cdot 2 = e^{(2x)^2}\cdot 2, \text{ de donde } F'(0) = e^0\cdot 2 = 2.$$

Problema 3

Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas

$$y = x^2 \ , \quad y = -2x^2 + 3$$

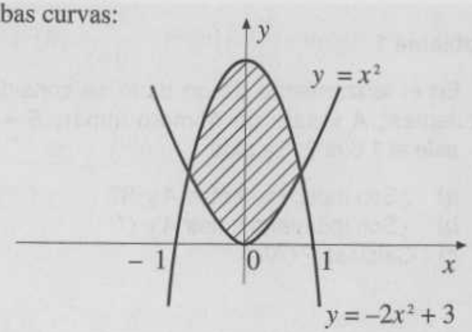
Madrid, junio de 1995

Solución:

Se pide el área rayada en la figura.

Puntos de corte de ambas curvas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases};\quad x = \pm 1$$



Solución:

En el enunciado te dicen el cambio que te convierte la integral en una racional.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\,(t - \ln|1+t|) =$$
$$= 2\left(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right) + C$$

$\sqrt{x} = t;\ x = t^2;\ dx = 2t\,dt$

y una primitiva puede ser $y = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$

INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

Para resolver los ejercicios de esta parte, debes dominar el cálculo de primitivas. Repasa el concepto de integral definida, el teorema fundamental del cálculo, la regla de Barrow y el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes utilizando integrales definidas.

Problema 1

Calcular el área de la región limitada por las curvas

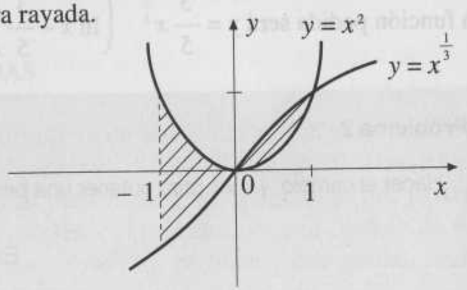
$$y = x^2 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{3}}$$

y las rectas $x = -1$ y $x = 1$

Madrid, junio de 1995

Solución:

Se pide el área de la figura rayada.



Por tanto:

$$S = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right)dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx - \int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,dx -$$
$$- \int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,dx = 2\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,u^2$$

Problema 2

Sea $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt$. Hallar el valor de $F'(0)$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Supongamos que $G(t) = \int e^{t^2}\,dt$, es decir, que $G(t)$ es una primitiva de e^{t^2}. Aplicando la regla de Barrow: $F(x) = [G(t)]_0^{2x} = G(2x) - G(0)$,
y derivando respecto de x, y teniendo en cuenta que $G'(t) = e^{t^2}$, tenemos:

$$F'(x) = G'(2x)\cdot 2 = e^{(2x)^2}\cdot 2, \text{ de donde } F'(0) = e^0\cdot 2 = 2.$$

Problema 3

Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas

$$y = x^2 \ , \quad y = -2x^2 + 3$$

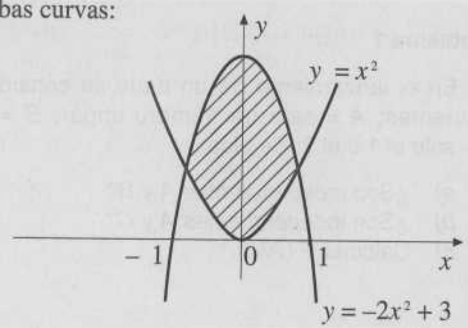
Madrid, junio de 1995

Solución:

Se pide el área rayada en la figura.

Puntos de corte de ambas curvas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases};\quad x = \pm 1$$



Y por la simetría de la figura tenemos:

$$S = 2\int_0^1 (-2x^2 + 3 - x^2)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3)dx = [-x^3 + 3x]_0^1 = 2u^2$$

Problema 4

Sea $F(x)$ la función definida por

$$F(x) = \int_1^{e^{x}-x-1} e^{-t^2}\, dt.$$

Hallar los puntos en que se anula la función $F'(x)$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Hagamos $F(x) = G(u) = \int_1^u e^{-t^2}dt;\ u = e^x - x - 1.$

Derivando respecto de x y aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$F'(x) = G_u'(u)\, u_x' = e^{-u^2}(e^x - 1) = e^{-(e^x - x - 1)^2}(e^x - 1)$$

y para que sea cero $e^x - 1 = 0$, de donde $x = 0$.

PROBABILIDADES

Recuerda el significado de experimento aleatorio, espacio muestral, suceso y tipos de sucesos. Probabilidad y sus propiedades, probabilidad condicionada, probabilidad total y teorema de Bayes. Los problemas de esta parte se ponen mucho en Selectividad.

Problema 1

En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes: A = sale un número impar; B = sale un número par; C = sale el 1 o el 2. Se pide:

a) ¿Son independientes A y B?
b) ¿Son independientes A y C?
c) Calcular $P(A/C)$.

Madrid, junio de 1995

Solución:

a) Como sabes, dos sucesos A y B son independientes sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pero $P(A \cap B) = 0$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, así que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, luego no son independientes.

b) $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(C) = \dfrac{1}{3}$, y como $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, los sucesos A y C son independientes.

c) $P(A/C) = P(A) = \dfrac{1}{2}$, ya que A y C son independientes.

Problema 2

Una caja contiene 5 bolas blancas, 7 bolas rojas y 4 bolas negras. Se extrae una bola y se sabe que no es blanca. Hallar la probabilidad de que sea negra.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Consideremos los sucesos: B = sacar bola blanca, N = sacar bola negra.

$$P(B) = \frac{5}{16},\quad P(\overline{B}) = \frac{11}{16},\quad P(N) = \frac{4}{16},\ \text{luego:}$$

$$P(N/\overline{B}) = \frac{P(N \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(N)}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{4}{11}$$

Problema 3

Los estudiantes *A* y *B* tienen, respectivamente, probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de $\frac{1}{10}$. Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen.

Madrid, junio de 1995

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos: A = el alumno A suspende el examen, y B = el alumno B suspende el examen. Te piden $P(A \cup B)$

Como $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, tendremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

Problema 4

En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra sin reemplazamiento.

a) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Madrid, junio de 1995

Solución:

a) Para que el producto sea positivo, los números obtenidos en ambas extracciones tienen que tener el mismo signo.

El problema lo podríamos resolver calculando el espacio muestral y aplicando la regla de Laplace, pero lo vamos ha hacer de la siguiente manera:

Consideremos los sucesos:

A = obtener producto positivo, P_i = sacar número positivo en la extracción i, N_i = sacar número negativo en la extracción i, $i = 1, 2$.

Como $A = (P_1 \cap P_2) \cup (N_1 \cap N_2)$ y estos sucesos son incompatibles:

$$P(A) = P(P_1 \cap P_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(P_1) \cdot P(P_2/P_1) + P(N_1)\, P(N_2/N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

b) El producto es negativo cuando no es positivo. Luego:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

EXÁMENES CON SOLUCIÓN

MADRID, 1995

INSTRUCCIONES: El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada uno de los dos ejercicios será de dos puntos.

REPERTORIO A

1. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los diferentes valores del parámetro m

$$\begin{cases} z + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = m \end{cases}$$

[(Solución: *a)* $m = -8$ incompatible; *b)* $m \neq -8$ compatible determinado.]

2. Dadas las rectas

$$r: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y - 3z - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(Solución: $27x + 17y - 23z - 17 = 0$)

3. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} Lx & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2) = 3$ (L = logaritmo neperiano).

(Solución: $a = 1$; $b = -1$).

4. Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$$

(Solución: 0)

5. Se lanza un dado seis veces. Calcular la probabilidad de que salgan seis números diferentes.

$\left(\text{Solución: } \dfrac{5}{324}\right)$

REPERTORIO B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, encontrar las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que

$$AB = -BA$$

$\left[\text{Solución: } B = \begin{pmatrix} -c & 3c \\ 0 & c \end{pmatrix};\ c \in R\right]$

2. Consideremos el plano Π de ecuación $20x + 12y + 15z - 60 = 0$. Hallar:

a) Los puntos A, B, C de intersección de Π con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

b) La distancia entre la recta OB y el eje OX.

[(Solución: *a)* $A(3, 0, 0)$; $B(0, 5, 0)$; $C(0, 0, 4)$ *b)* 0).]

3. Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2}$$

$\left(\text{Solución: } \dfrac{-3}{2}\right)$

4. Hallar el valor de la constante b para que la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + bx$$

tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de f.

$\left(\text{Solución: } b = 1;\ S = \dfrac{4}{3}\right)$

5. En una caja hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Si se extrae una bola, hallar la probabilidad de que el número extraído sea:

a) Múltiplo de 3.
b) Múltiplo de 5.
c) Múltiplo de 3, sabiendo que es múltiplo de 5.

$$\left[\text{Solución: } a)\ \frac{33}{100};\ b)\ \frac{1}{5};\ c)\ \frac{3}{10}\right]$$

MADRID, 1995

INSTRUCCIONES: El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada uno de los dos ejercicios será de dos puntos.

REPERTORIO A

1. Discutir, según los valores de *a*, el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + (a+2)\, y + 2z = 0 \\ x + (2-a)\, y + (a-2)\, z = 0 \end{cases}$$

[Solución: 1) $a = 0$ o $a = 2$, compatible indeterminado; 2) para cualquier otro valor de a, compatible determinado (solución trivial).]

2. Determinar la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *A*(1,0,2) y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta

$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z - 2 \end{cases}$$

[Solución: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t\,(2, -1, -3)$.]

3. Calcular los máximos y mínimos de la función $y = xe^{-x}$, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad.

[Solución: creciente estrictamente en $(-\infty, 1)$, decreciente estrictamente en $(1, +\infty)$, convexa en $(-\infty, 2)$, cóncava en $(2, +\infty)$, máximo $(1, e^{-1})$.]

4. Calcular

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\left(\text{Solución: } \frac{\pi - 2}{4}\right)$$

5. Se lanzan dos dados y se observa que la suma obtenida es impar. Calcular la probabilidad de que dicha suma sea menor que 8.

$$\left(\text{Solución: } \frac{2}{3}\right)$$

MATEMÁTICAS I

REPERTORIO B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz de la forma $P = \begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$ que verifique $AP = PB$ y tenga determinante igual a 1.

$\left[\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right]$

2. Hallar la proyección del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

y calcular la distancia del punto P a la recta r.

[Solución: *a*) $Q(3, -2, 4)$; *b*) $d = \sqrt{29}$]

3. ¿La función $f(x) = x^2 + x - 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 1]$? En caso afirmativo, calcular el punto o puntos predichos por el teorema.

$\left[\text{Solución: } a) \text{ Sí; } b) \ \alpha = \frac{-1}{2}\right]$

4. Dada la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 2}$$

calcular el área encerrada por la curva, el eje OX y las rectas perpendiculares al eje OX que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada.

(Solución: $S = ln\ 2$)

5. En una baraja de cartas españolas (40 cartas) se consideran los sucesos A: extraer figura; B: extraer una sota; C: extraer una espada. Hallar las probabilidades siguientes:

$$P\left(\frac{A \cup B}{C}\right), P\left(\frac{A}{C}\right), P\left(\frac{B}{C}\right), P\left[\left(\frac{A \cap B}{C}\right)\right]$$

Compruébese que

$$P\left(\frac{A \cup B}{C}\right) = P\left(\frac{A}{C}\right) + P\left(\frac{B}{C}\right) - P\left(\frac{A \cap B}{C}\right)$$

$\left[\text{Solución: } (A \cup B/C) = \frac{3}{10}; P(A/B) = 1; P(B/C) = \frac{1}{10}; P(A \cap B/C) = \frac{1}{10}\right]$

MATEMÁTICAS I

FÍSICA

EMILIANO NEVADO HERNÁNDEZ

Te presentamos una colección de problemas de Física ordenados bajo los siguientes epígrafes: Cinemática, Dinámica (de una partícula, de un sistema, de rotación), Trabajo y Energía, Termodinámica, Campos (Gravitatorios y Electrostáticos), Magnetismo e inducción, Ondas, Física atómica y Corriente alterna.

No es una colección exhaustiva pero sí significativa de los ejercicios propuestos en distintos distritos universitarios. Pretenden ser un complemento de las explicaciones que recibes en clase y de tu libro de texto. Hemos dedicado buena parte de nuestro trabajo al análisis previo de los ejercicios, porque pensamos que la resolución de un problema o cuestión se produce después de haber aprendido los conceptos. Asimilados éstos, nos resultará fácil resolver los problemas. En caso contrario, debemos volver sobre el tema y aclarar las zonas oscuras. Sirvan, pues, este conjunto de ejercicios y cuestiones para confirmar tus conocimientos o para orientarte en aquellos detalles que aún no hayas comprendido. La utilidad que obtengas de ellos será nuestra recompensa.

CINEMÁTICA

1. (Madrid, 1995) Una pelota se deja caer desde la cornisa de un edificio y tarda 0,25 s en recorrer la distancia de 2,7 m desde el borde superior al inferior de la ventana. ¿A qué distancia de la cornisa se encuentra el borde superior de la ventana?

   Datos: $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Análisis previo:

Se trata de un movimiento de caída de grave, un movimiento uniformemente variado, en el que el módulo de la aceleración es conocido: $9{,}8\ \mathrm{ms^{-2}}$.

Sistema de referencia: dirección, la vertical; origen del sistema, la cornisa; sentido positivo, hacia abajo.

La posición en un movimiento uniformemente variado está determinada por la ecuación:

$$s = s_0 + v_0 t + 1/2\ a\ t^2.$$

En nuestro caso $s_0 = 0$ m; $v_0 = 0$ m/s; y puesto que hemos elegido positivo hacia abajo $a = g = 9{,}8\ ms^{-2}$. Si la posición la representamos por h, tenemos:

$$h = 4.9\ t^2. \quad (1)$$

Respuesta:

Para resolver el problema basta aplicar la ecuación (1).

Punto 1: borde superior de la ventana.
Posición: h_1
Tiempo transcurrido: t
Aplicando (1):

$$(2) \quad h_1 = 4{,}9\ t_1^2$$

Punto 2: borde inferior de la ventana.
Posición: $h_2 = h_1 + 2{,}7$
Tiempo transcurrido: $t_2 = t_1 + 0{,}25$
Aplicando (1):

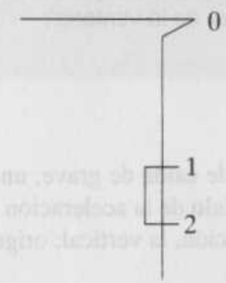
$$(3) \quad h_1 + 2{,}7 = 4{,}9(t_1 + 0{,}25)^2$$

Restando de la ecuación (3) la ecuación (2), resulta:

$$2{,}7 = 4{,}9(t_1 + 0{,}25)2 - 4{,}9\ t_1^2$$
$$2{,}7 = 4{,}9(2t_1 + 0{,}25)\ 0{,}25$$
$$t = 0{,}98 \text{ s}$$

Distancia de la cornisa al borde superior de la ventana:

h = 4,7 m



2. (Madrid, 1995) Un coche se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad $\mathbf{v_0}$. Al accionar los frenos, experimenta una deceleración constante y se detiene al cabo de 5 s después de recorrer una distancia de 100 m. Determínese:

a) La aceleración.
b) La velocidad $\mathbf{v_0}$, expresada en Km/h.

Análisis previo:

Como en ejercicio anterior, se trata de un movimiento uniformemente variado porque experimenta una deceleración constante.

Sistema de referencia: Dirección, horizontal; origen del sistema, el punto en el que aplicamos los frenos; sentido positivo, hacia la derecha, el mismo que el del desplazamiento del móvil. Teniendo presente que en el instante inicial, el coche está en el origen, $s_0 = 0$ m, las ecuaciones del movimiento son:

$$(1) \quad s = v_0\, t + 1/2\ a\ t^2$$
$$(2) \quad v = v_0 + a\ t.$$

Respuesta:

Según el enunciado del problema para t = 5 s, el móvil se ha parado v = 0, y ha recorrido 100 m, s = 100. Sustituyendo en (1) y (2) resulta:

$$(3) \quad 100 = v_0 \,.\, 5 + 1/2\ a.25$$
$$(4) \quad 0 = v_0 + a \,.\, 5.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} a = -8\ ms^{-2} \\ v_0 = 40 \text{ m/s} = 40 \text{ m/s} \,.\, (1 \text{ Km}/1.000 \text{ m}) \,.\, (3.600\text{s}/1\text{h}) = 144 \text{ Km/h} \end{cases}$$

4. (Murcia, 1995) El momento lineal de una partícula de 2 Kg de masa viene dado por:

$\mathbf{p} = 5t\mathbf{i} - 8t^2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ Kg m/s.
En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen. Obtenga:

a) La fuerza que actúa sobre la partícula.
b) El vector de posición de la partícula.
c) El momento angular de la partícula respecto del punto 3**i** m.

$F = \frac{dP}{dt}$

Análisis previo:

La cuestión a) la resolvemos aplicando el segundo principio de Newton:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt.$$

La cuestión b) la resolvemos teniendo en cuenta que: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.
Para la cuestión c) tenemos presente la definición de momento angular:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Respuesta:

a) $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = 5\,\mathbf{i} + 16\,t\,\mathbf{j}$ N.

b) $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$; $\mathbf{p} = 2\,\mathbf{v}$; $\mathbf{v} = 5/2\,t\,\mathbf{i} - 4\,t^2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$; $\int d\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,.\,dt$ $\qquad \int dr = \int v\,dt \quad r = \int v\,dt$

$\mathbf{r} = 5/4\,t^2\,\mathbf{i} - 4/3\,t^3\,\mathbf{j} + 3\,t\,\mathbf{k}$

c) $\mathbf{L'} = \mathbf{r'} \times \mathbf{p}$

$\mathbf{r'} = \mathbf{r} - 3\,\mathbf{i}$ Es el vector de posición de la partícula respecto al punto: $3\,\mathbf{i}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r'} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5/4\,t^2 - 3 & -4/3t^3 & 3t \\ 5t & -8t^2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{L} = 16\,t_3\,\mathbf{i} + (15/2\,t^2 + 18)\,\mathbf{j} + (-10/3\,t^4 + 24\,t^2)\,\mathbf{k}\ \text{Kg} \,.\, \text{m}^2\,\text{s}^{-1}$$

5. (Murcia, 1995) ¿Cuál es la trayectoria más general de un movimiento con aceleración tangencial nula y aceleración normal de módulo constante?

Análisis previo:

Aceleración tangencial: $a_t = dv/dt$

Aceleración normal: $a_N = v^2/R$

Respuesta:

La aceleración más tangencial nula nos indica que el módulo de la velocidad no varía, es constante.

$a_N = v^2/R$ = constante y el módulo de v constante, deducimos que R es constante.

La trayectoria general de curvatura constante es una **circunferencia**.

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

1. (Madrid, 1995) ¿Puede una partícula moverse manteniendo nulo su momento cinético o angular respecto a un punto fijo?

Respuesta:

Sí. Consideremos un cuerpo que cae libremente atraído por la Tierra. Su vector de posición respecto del centro de la Tierra, y su velocidad son paralelos.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

2. (Zaragoza, 1995, Logse) Sea un péndulo vertical de resorte constituido por un muelle ideal de constante elástica k y masa puntual m.

a) Determinar el período de oscilación.

b) Dibujar las fuerza que actúan sobre m en los tres casos siguientes, tratando de que haya cierta proporcionalidad entre la longitud de los vectores dibujados y lo módulos de las fuerzas que representan:

b1) La masa m pasa por el centro de oscilación.

b2) El muelle tiene su longitud natural, ni comprimido ni estirado.

b3) La masa m se encuentra en el punto más bajo de la oscilación.

c) Dibujar el gráfico que relaciona la aceleración de m con la amplitud.

Análisis previo:

Es un movimiento armónico simple. El período del movimiento está determinado por la masa y la constante del resorte.

Las fuerzas que actúan sobre la masa son:

1) Su peso, p = mg.

2) La fuerza del resorte: F = – Kx. Esta fuerza es proporcional a la variación de la longitud del muelle con respecto a su longitud natural.

La aceleración es proporcional a la elongación y de signo opuesto:

$$a = F/m = -(k/m) \cdot x$$

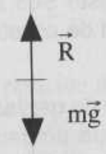
Respuesta:

a)

$$K - m\omega^2 \; ; \; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

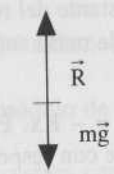
b)

*b*1) En el centro de oscilación o de equilibrio el peso y la fuerza del muelle han de ser del mismo módulo y de sentido opuesto.



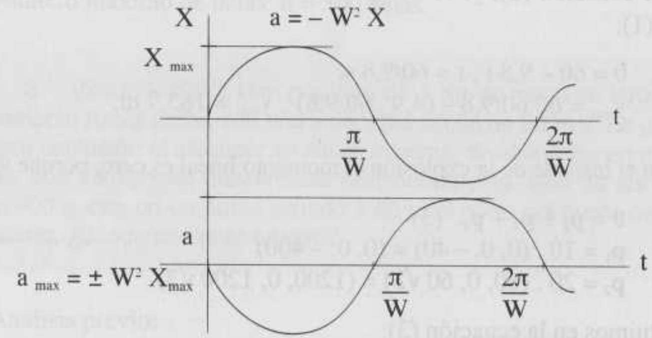
*b*2) Si el muelle tiene su longitud natural no ejerce fuerza alguna sobre la masa, la única fuerza es el peso.

*b*3) Si la masa se encuentra en el punto más bajo, el muelle ejerce una fuerza de módulo máximo y opuesta al peso.



c)

$$a = -j^2 \times$$



DINÁMICA DE UN SISTEMA

1. (La Laguna, 1995) Una granada de 50 Kg se lanza verticalmente hacia arriba según el eje OZ con una velocidad de 60 m/s.

a) **Hallar la altura máxima alcanzada.**

b) **Al llegar a dicha altura explota, rompiéndose en tres pedazos, dos de los cuales, de 10 Kg y 20 Kg, salen despedidos, el primero a 40 m/s en dirección vertical hacia abajo y el segundo con velocidad v = 60i + 60 √3 k.**

Hallar la velocidad con que sale despedido el tercer trozo.

Análisis previo:

El cuerpo sigue un movimiento uniformemente variado en la dirección y, porque está sometido a una aceleración constante: g.

Sistema de referencia: dirección: vertical; origen del sistema: el punto de lanzamiento; sentido positivo hacia arriba.

Ecuaciones del movimiento:

$$y = 60\,t - 4{,}9\,t^2 \quad (1)$$
$$v = 60 - 9{,}8\,t \quad (2)$$

Tras alcanzar su altura máxima sufre una explosión. Las responsables de la explosión son fuerzas interiores: en consecuencia se conserva el momento lineal.

Respuesta:

a) Cuando alcanza la altura máxima v = 0 m/s. Imponemos esta condición en la ecuación (2), y, el tiempo así determinado lo sustituimos en la ecuación (1):

$$0 = 60 - 9{,}8\,t\ ;\ t = 60/9{,}8\ \text{s.}$$
$$y_{max} = 60.60/9{,}8 - (4{,}9\ .\ 60/9{,}8)^2;\ y_{max} = 183{,}7\ \text{m.}$$

b) En el instante de la explosión el momento lineal es cero, porque v = 0,:

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3.\ (3)$$
$$\mathbf{p}_1 = 10\ .\ (0, 0, -40) = (0, 0, -400)$$
$$\mathbf{p}_2 = 20\ .\ (60, 0, 60\sqrt{3}) = (1200, 0, 1200\sqrt{3})$$

Sustituimos en la ecuación (3):

$$\mathbf{0} = (0, 0, -400) + (1200, 0, 1200\sqrt{3}) + \mathbf{p}_3$$
$$\mathbf{p}_3 = (-1200, 0, 400 - 1200\sqrt{3})\ \text{Kg m s}^{-1}$$
$$\mathbf{p}_3 = m_3\ .\ \mathbf{v}_3$$
$$(-1200, 0, 400 - 1200\sqrt{3}) = 20\ \mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{v}_3 = (-60, 0, 20 - 60\sqrt{3})\ \text{m s}^{-1}.$$
$$\mathbf{v}_3 = (-60, 0, -83.9)\ \text{m s}^{-1}.$$

2. (Madrid, 1995) Un soldado dispara una ametralladora. Las balas, de masa 100 g, salen con una velocidad de 400 m/s. La máxima fuerza que puede ejercer el soldado sujetando la ametralladora es de 200 N. ¿Cuál es el número máximo de balas que puede disparar en un minuto?

Análisis previo:

El impulso mecánico que realiza el soldado se invierte en variar el momento lineal de las balas.

Respuesta:

Impulso máximo realizado por el soldado en un minuto:

$$I = F\ .\ t = 200\ .\ 60 = 12000\ \text{N . s}$$

Variación de momento lineal que experimenta una bala:

$$p = m\ .\ v = 0{,}1\ .\ 400 = 40\ \text{N . s}$$

Impulso igual a variación de momento lineal:

$$I = n\ .\ p\ ;\ 12000 = n\ .\ 40.$$

Número máximo de balas: n = 300 balas.

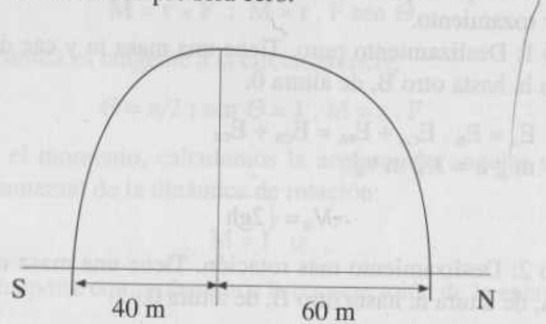
3. (Madrid, 1995) Una granada de 1 Kg de masa se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. La granada hace explosión al alcanzar su altura máxima, dividiéndose en dos partes, que comienzan moviéndose horizontalmente. Uno de los trozos, de 400 g, cae en un punto situado a 60 m al norte del punto de lanzamiento, ¿dónde cae el otro trozo?

Análisis previo:

Tiene un planteamiento formalmente idéntico al del ejercicio 1.

Sistema de referencia: origen: punto de lanzamiento; eje y: la vertical en el punto de lanzamiento; eje x: la horizontal, orientada Norte-Sur, sentido positivo hacia el Norte.

El centro de masa inicialmente está en el origen de coordenadas. En la dirección horizontal no hay fuerza, en consecuencia la componente horizontal del centro de masas siempre será cero.



Respuesta:

$$m = m_1 + m_2$$
$$m \cdot x_G = m_1\ .\ x_1 + m_2\ .\ x_2\ ;\ 0 = 0{,}4\ .\ 60 + 0{,}6\ .\ x_2\ ;\ x_2 = -40\ \text{m}$$

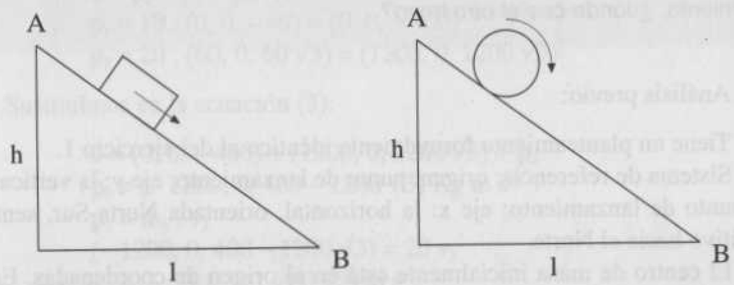
El segundo trozo cae 40 m al sur.

Nota: Al mismo resultado podemos llegar por conservación del momento lineal según el eje x.

DINÁMICA DE ROTACIÓN

1. Dar una explicación física de por qué un cuerpo que desliza alcanza la parte baja de un plano inclinado antes que otro que ruede (despréciese las pérdidas de energía debidas al rozamiento).

Respuesta:



Aplicamos el principio de conservación de la energía puesto que no hay pérdida por rozamiento.

Cuerpo 1: Deslizamiento puro. Tiene una masa m y cae desde un punto A, de altura h, hasta otro B, de altura 0.

$E_A = E_B \,.\, E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$

$m\,g\,h = 1/2\; m\, v_B^2$

$$V_B = \sqrt{2gh}$$

Cuerpo 2: Deslizamiento más rotación. Tiene una masa m' y cae desde un punto A, de altura h, hasta otro B, de altura 0.

$E_A = E_B \,.\, E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$

$m'g\,h = 1/2\; m'v'^2_B + 1/2\; I\,\omega'^2$

$$V'_B = \sqrt{2gh - \frac{I\omega 2}{m'}}$$

Vemos claramente que $v'_B < v_B$

El cuerpo que se desliza invierte toda su energía potencial en traslación. El cuerpo que además rueda invierte parte de su energía potencial en energía cinética de rotación.

3. (La Laguna, 1995) Un disco uniforme de radio 0,12 m y 5 Kg puede girar libremente alrededor de un eje horizontal. Se enrolla una cuerda en el disco y se tira con una fuerza de 20 N.

a) Hallar el momento ejercido sobre el disco y su aceleración angular.

b) Si el disco parte del reposo, hallar su velocidad angular y su momento angular al cabo de 3 s.

c) Comprobar que el trabajo realizado por el momento es igual a la energía cinética.

Dato: Momento de inercia del disco $I = 1/2\; mR^2$.

Análisis previo:

Para calcular el momento de la fuerza con respecto al eje aplicamos la definición:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \;;\; M = r \,.\, F \operatorname{sen} \Theta$$

Como la cuerda es tangente a la circunferencia,

$$\Theta = \pi/2 \;;\; \operatorname{sen} \Theta = 1 \;;\; M = r \,.\, F$$

Conocido el momento, calculamos la aceleración angular mediante la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$M = I \,.\, \alpha$$

En la última parte comprobaremos la conservación de la energía.

Respuesta:

a) $I = 1/2\; m\, r^2 = 1/2 \,.\, 5 \,.\, 0.12^2 = 0.036\ \mathrm{Kg \cdot m^2}$

$M = r \,.\, F = 0.12 \,.\, 20 = 2.4\ \mathrm{N \,.\, m}$

$M = I \,.\, \alpha$

$2.4 = 0.036 \,.\, \alpha \;:\; \alpha = 200/3\ \mathrm{rad \,.\, s^{-2}}$

b) Al ser un movimiento de aceleración angular constante sus ecuaciones son:

FÍSICA

$\omega = \alpha\, t$

$\theta = 1/2\ \alpha\, t^2$, A los tres segundos:

$\omega\,(3) = 200$ rad/s

$\theta\,(3) = 300$ rad.

$L(3) = I\omega = 0{,}036\ .\ 200 = 7{,}2$ N m s

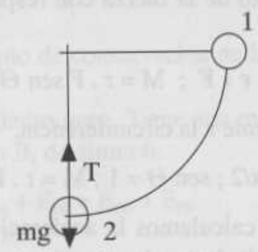
c) $E_C(3) = 1/2\ I\,.\,\omega^2 = 1/2\,.0{,}036\,.200^2 = 720$ J.

Por ser M constante: $W = M\ .\ \theta$

$W(3) = 2{,}4\ .\ 300 = 720$ J

TRABAJO Y ENERGÍA

1. (Madrid, 1995) Un péndulo de masa m parte, sin velocidad inicial, de una posición que forma un ángulo de 90º con la vertical. Determínese la tensión del hilo cuando la masa alcanza su punto más bajo.



Análisis previo:

La masa m en todo el recorrido está sometida a dos fuerzas: la tensión del hilo y el peso.

La tensión del hilo es siempre normal a la trayectoria, no realiza trabajo y en consecuencia no produce variación de la energía.

El peso es una fuerza conservativa. Por tanto, la energía en el punto 1 es igual a la energía en el punto 2.

En el punto 2, la resultante de la suma de la tensión y el peso es la fuerza centrípeta necesaria para que la masa m siga la trayectoria circular en ese punto:

$$T - mg = m\,v^2/R \quad (1)$$

Respuesta:

$E_1 = E_2$

$mgh_1 + \cancel{1/2\ m\,v_1^2} = mgh_2 + 1/2\ mv_2^2\ ,\ v_1 = 0$ m/s

$mg(h_1 - h_2) = 1/2\ mv_2^2\ ;\ mgR = 1/2\ mv_2^2$

$v_2^2 = 2\,g\,R$

Sustituimos el valor de v_2 así obtenido en la ecuación (1):

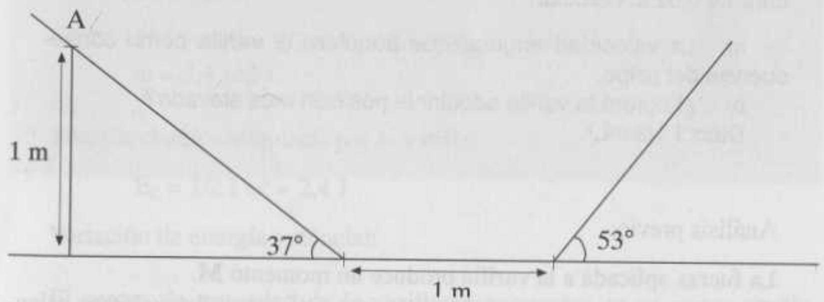
$$T - mg = 2\ mg$$

La tensión en el punto más bajo de la trayectoria es tres veces el peso de la masa.

$$T = 3\ mg$$

2. (Las Palmas de G. Canarias, 1993) Desde el punto A de la figura se suelta un cuerpo. Calcular la altura que alcanza en la rampa de 53º:

a) Si no hay rozamiento.
b) Si hay rozamiento en todo el recorrido siendo $\mu_a = 0{,}1$.



Análisis previo:

La energía que tiene en el punto final es igual a la que tiene inicialmente menos la que ha perdido en el camino.

Respuesta:

a) Como no hay rozamiento la energía final es igual que la inicial y, por tanto, alcanza la altura de un metro en la rampa de 53º.

FÍSICA

b) $E_P(A) = E_P(D) + W_r$ (1)

Siendo D el punto final y W_r el trabajo de rozamiento.

Trabajo de rozamiento en la rampa de 37º:

$$F_r \cdot d = \mu \cdot mg \cdot \cos 37 \cdot 1/\text{sen } 37 = 0{,}133 \text{ mg}$$

Trabajo de rozamiento en el plano horizontal:

$$F_r . d = \mu . mg . 1 = 0{,}1 \text{ mg}$$

Trabajo de rozamiento en la rampa de 53º:

Suponemos que asciende una altura h

$$F_r . d = \mu . mg . \cos 53 . h/\text{sen } 53 = 0{,}075 \text{ mg} . h$$

Sustituyendo en (1):

$$mg . 1 = mg . h + 0{,}233 \text{ mg} + 0{,}075 \text{ mg} . h$$
$$h = 0{,}71 \text{ m}$$

3. (Navarra, 1993) Una varilla uniforme, que cuelga verticalmente de un pivote, tiene una masa de 2,5 Kg y una longitud de 1 m. Se golpea en la base con una fuerza horizontal de 100 N, la cual actúa durante 0,02 s. Calcular:

a) La velocidad angular que adquiere la varilla como consecuencia del golpe.

b) ¿Logrará la varilla adquirir la posición más elevada?

Dato: I 1/3 mL².

Análisis previo:

La fuerza aplicada a la varilla produce un momento **M**.

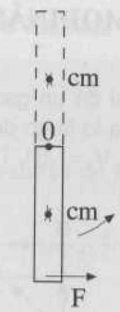
Conocido este momento y el tiempo que está actuando podemos calcular el momento angular comunicado a la varilla.

Del momento angular obtenemos la velocidad angular y la energía cinética.

Por conservación de la energía podemos comprobar si la varilla alcanza la posición más elevada.

Respuesta:

a) La fuerza aplicada, con respecto al eje de giro produce el momento:



$$\mathbf{M = r \times F}$$
$$M = r . F . \text{sen } \pi/2 = 1 . 100 . 1 = 100 \text{ N.m}$$

Por la conservación del momento angular:

$$\Delta L/\Delta t = M$$
$$\Delta L = M . \Delta t$$

Puesto que inicialmente está en reposo:

$$L = 100 \times 0{,}02 = 2 \text{ Nms.}$$

Velocidad angular:

$$L = I\,\omega \,;\ I = 1/3 \text{ m } l^2, = 2{,}5/3 \text{ Kg . m}^2$$
$$\omega = 2{,}4 \text{ rad/s.}$$

b)

Energía cinética adquirida por la varilla:

$$E_C = 1/2\, I\, \omega^2 = 2{,}4 \text{ J}$$

Variación de energía potencial:

El centro de gravedad de la varilla se encuentra en su punto medio. Entre la posición inicial y la más elevada del centro de gravedad hay una diferencia de altura de 1 m.

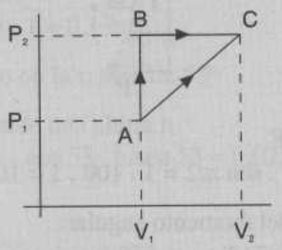
$$\Delta E_P = m . g . \Delta h = 24{,}5 \text{ J}$$

La varilla no adquiere la posición más elevada.

FÍSICA

TERMODINÁMICA

1. (Madrid,1995) Un mol de un gas ideal monoatómico se lleva cuasiestáticamente de A a C a lo largo del camino recto indicado en la figura. Datos: $p_1 = 10^5$ N . m^{-2}, $V_1 = 1{,}5$ l, $T_1 = 300$ K, $p_2 = 2 . 10^5$ N . m^{-2}, $V_2 = 3$ l, R = 8,32 J.mol^{-1} K^{-1}.



a) Calcular la temperatura en el punto C.
b) Calcular el trabajo realizado sobre el gas. Repetir el cálculo cuando el gas se lleva cuasiestáticamente de A a C, pero por el camino ABC.
c) Si se recorre el ciclo ABCA, calcular el trabajo realizado por el gas, el calor absorbido y la variación de energía interna en el proceso.

Análisis previo:

Si aplicamos la ecuación de los gases perfectos al punto A:

$$P_1 V_1 = n R T_1$$
$$10^5 \times 1{,}5 \times 10^{-3} = n\, 8{,}32 \times 300$$

n = 0,06 moles. En lo sucesivo no tendremos en cuenta que el enunciado nos dice que n = 1 mol.

Para calcular la temperatura en C tendremos en cuenta que al ser un gas ideal:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (1)$$

Para calcular el trabajo en un proceso, calculamos el área limitada por la curva del proceso, las ordenadas de los puntos extremos y el eje de abscisas.

En un ciclo el trabajo es el área limitada por la trayectoria que señala el ciclo.

Respuesta:

a) Sustituimos en (1) los valores de las magnitudes conocidas de los estados A y C.

$$\frac{10^5 \times 1{,}5 \times 10^{-3}}{300} = \frac{2 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{T_2} \qquad T_2 = 1200 \text{ K}$$

b)

1) El trabajo realizado en el proceso AC es el área del trapecio ACV_2V_1

$$W(A \rightarrow C) = \frac{b+b'}{2} h = \frac{(1+2) . 10^5}{2} 1{,}5 . 10^{-3} = 225 J$$

2) El trabajo realizado en el proceso ABC es el área del rectángulo BCV_2V_1:

$$W(A \rightarrow B \rightarrow C) = 2.10^5 . 1{,}5 . 10^{-3} = 300 J$$

c) El trabajo realizado en el ciclo ABCA es el área del triángulo ABC.

$$W(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A) = \frac{10^5 . 1{,}5 . 10^{-3}}{2} = 75 J$$

Al ser un ciclo $\Delta U = O$ J
El primer principio de la termodinámica nos dice:

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

En consecuencia:

$$\Delta Q = W = 75 \text{ J.}$$

En un estudio más detallado podemos calcular:

$$\Delta Q(A \rightarrow B \rightarrow C.) = 1650 \text{ J}$$
$$\Delta Q(C \rightarrow A) = -1575 \text{ J}$$

2. (Madrid,1995) ¿Cómo varía la energía interna en una expansión adiabática?

FÍSICA

Análisis previo:

Tenemos presente que por el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = \Delta Q - W \qquad (1)$$

En una expansión adiabática:

$$\Delta Q = O \qquad (2)$$

En toda expansión por haber aumento de volumen, el trabajo es positivo, porque es el sistema el que realiza trabajo sobre el entorno:

$$W > O \qquad (3)$$

Respuesta:

Sustituyendo (2) y (3) en (1) resulta: $\Delta U < O$.

La energía interna disminuye.

3. (Madrid,1995) Las temperaturas de tres líquidos diferentes son 15° C, 20° C y 25° C, respectivamente. Al mezclar masas iguales de los dos primeros líquidos, la temperatura en equilibrio es de 18° C y cuando se mezclan masas iguales del segundo y del tercer líquido la temperatura resultante es de 24° C. ¿Qué temperatura se obtiene al mezclar masas iguales del primer y tercer líquido?

Análisis previo:

En toda mezcla, si la realizamos en un recipiente con paredes adibáticas, la suma de las variaciones de calor de las componentes es cero.

La variación de calor que experimenta un cuerpo se determina mediante la ecuación:

$$\Delta Q = m.c_e. \Delta t$$

Respuesta:

Líquido 1: temperatura inicial: 15° C ; calor específico: c_1
Líquido 2: temperatura inicial: 20° C ; calor específico: c_2
Líquido 3: temperatura inicial: 25° C ; calor específico: c_3

Mezclamos masas iguales del primer y segundo líquido y se obtiene una temperatura final de mezcla de 18° C.

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$$
$$m . c_1 . (18 - 15) + m . c_2 . (18 - 20) = 0$$
$$3 . c_1 - 2 . c_2 = 0 ; c_1 = 2/3\, c_2 \qquad (1)$$

Mezclamos masas iguales del segundo y tercer líquido y se obtiene una temperatura final de mezcla de 24° C.

$$\Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0$$
$$m . c_2 . (24 - 20) + m . c_3 . (24 - 25) = 0$$
$$4 . c_2 - c_3 = 0 ; c_3 = 4\, c_2 \qquad (2)$$

Mezclamos masas iguales del primer y tercer líquido y se obtiene una temperatura final de mezcla de t° C.

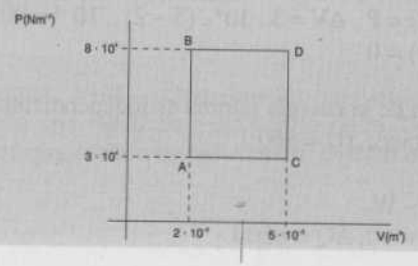
$$\Delta Q_1 + \Delta Q_3 = 0$$
$$m . c_1 . (t - 15) + m . c_3 . (t - 25) = 0 \qquad (3)$$

Sustituimos (1) y (2) en (3):

$$2/3\, c_2 . (t - 15) + 4\, c_2 . (t - 25) = 0$$
$$(t - 15) + 6(t - 25) = 0$$
$$t = 23{,}6°\, C$$

4. (Zaragoza, 1995) En el diagrama P–V de la figura están representados procesos termodinámicos cuasiestáticos realizados por un gas perfecto. Si en el proceso A→B se han administrado 600 J de calor, y en el B→D, 200 J, calcule:

a) La variación de la energía interna en el proceso A→B.
b) La variación de la energía interna en la transformación A → B → D.
c) El calor suministrado en la transformación A → C → D.



Análisis previo:

Tendremos en cuenta:

1) El primer principio de la termodinámica: $\Delta U = \Delta Q - W$
2) El trabajo en las transformaciones a presión constante (isobaras) es: $W = P \cdot \Delta V$.
3) La energía interna es una función de estado.

Respuesta:

a) $A \rightarrow B$

Es una transformación isócora, $\Delta V = 0$, y, por tanto, el trabajo realizado, $W(A \rightarrow B) = 0$.

Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = \Delta Q - W = \Delta Q = 600\ J.$$

b) $A \rightarrow B \rightarrow D$

Calculamos $\Delta U(B \rightarrow D)$:

$$W(B \rightarrow D) = P\ .\ \Delta V = 8\ .\ 10^4\ .\ (5-2)\ .\ 10^{-3} = 240\ J$$
$$\Delta U(B \rightarrow D) = \Delta Q - W = 200 - 240 = -40\ J\ (1)$$

Este resultado no es coherente. El estado D tiene mayor temperatura que el B, y, por tanto, la variación de energía interna no puede ser negativa. La variación de calor es superior a 200 J.

Si aceptamos (1) resulta:

$$\Delta U(A \rightarrow C) = 560\ J$$

c) $A \rightarrow C \rightarrow D$

$$W(A \rightarrow C \rightarrow D) = W(A \rightarrow C) + W(C \rightarrow D) = 90\ J$$
$$W(A \rightarrow C) = P\ .\ \Delta V = 3\ .\ 10^4\ .\ (5-2)\ .\ 10^{-3} = 90\ J$$
$$W(C \rightarrow D) = 0$$

Como la variación de la energía interna es independiente del camino, es decir es función de estado, $\Delta U = 560$ J.

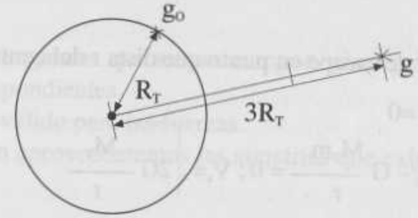
$$\Delta U = \Delta Q - W$$
$$560 = \Delta Q - 90;\ \Delta Q = 650\ J$$

CAMPOS GRAVITATORIOS

1. (Madrid, 1995) ¿Cuánto disminuye el peso de un cuerpo cuando se eleva desde el nivel del mar a una altura igual al doble del radio terrestre?

Análisis previo:

El peso de un cuerpo en un punto del campo gravitatorio terrestre es el producto de su masa por el valor del campo en ese punto.



Llamamos g_0 a la gravedad en la superficie terrestre y g a la gravedad a $2\ R_T$ de altura.

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2};\ g = G\frac{M_T}{(R_T+2R_T)^2} = G\frac{M_T}{9R_T^2} = \frac{1}{9}g_0$$

Respuesta:

Peso a nivel del mar: $p_0 = m\,.\,g_0$

Peso a al altura $2\ R_T$: $p = mg = 1/9\ m\ g_0$

Reducción del peso:

$$\Delta p = p - p_0 = -8/9\ m\,.\,g_0.$$

2. (Murcia, 1995) ¿Qué relación hay entre la velocidad de escape desde una distancia r del centro de la Tierra y la velocidad de un satélite que realice un movimiento circular de radio r alrededor de la Tierra?

Análisis previo:

Todo cuerpo dentro de un campo gravitatorio tiene una energía potencial negativa. La velocidad de escape en un punto del campo es la mínima velocidad que hay que comunicar a un cuerpo para que alcance el infinito con velocidad cero. La energía cinética que corresponde a esa velocidad más la energía potencial en ese punto es cero.

Un cuerpo que describe una órbita circular está sometido necesariamente a una aceleración centrípeta.

Esta aceleración centrípeta la proporciona la aceleración:

$$g(r) = v^2/r$$

Respuesta:

1) Velocidad de escape en punto que dista r del centro de la Tierra:

$$E_C + E_P = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M_T m}{r} = 0;\ V_e = \sqrt{2G\frac{M_T}{r}}$$

2) Condición de equilibrio para un cuerpo que se mueve en una órbita circular de radio r, en el campo gravitatorio terrestre:

$$g = v^2/r$$

$$G\frac{M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r};\ V = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

Obtenemos:

$$v_e = \sqrt{2}\cdot v$$

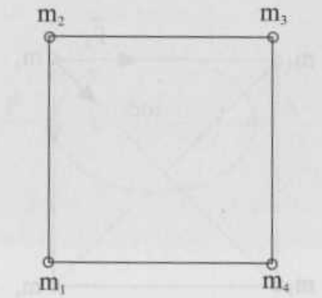
3. (Murcia, 1995, LOGSE) Tenemos cuatro partículas iguales de 2 Kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. (Dato: $G = 6{,}67.10^{-11}$ en unidades SI). Determine:

a) El campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

b) El módulo de la fuerza que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

c) La energía potencial de una partícula debida a las otras tres.

Análisis previo:



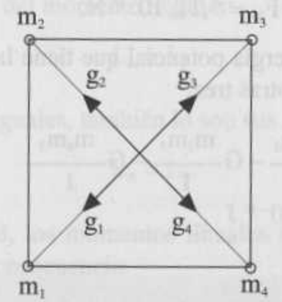
Siempre que tengamos que sumar campos, si es posible, dibujaremos los vectores correspondientes.

Lo anterior es válido para las fuerzas.

A continuación aprovecharemos las simetrías que existan antes de hacer ningún cálculo.

Respuesta:

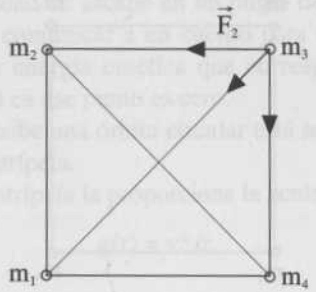
a) Dibujamos los campos que producen cada una de las masas en el centro del cuadrado:



Observamos que la suma es cero porque se anulan dos a dos:

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 0$$

b) Dibujamos las fuerzas que ejercen sobre la 3 las otras fuerzas:



Calculamos sus módulos:

$$F = G.m.m'/r^2$$
$$F_1 = 6{,}67\times10^{-11}\times2\times2/2 \quad = 13{,}34.10^{-11}\ N$$
$$F_2 = F_4 = 6{,}67.10^{-11}1\times2\times2/1 \quad = 26{,}68.10^{-11}\ N$$
$$F = F_1 + F_2 + F_4 = F_1 + F_{24}.$$
$$F_{24} = F_2 + F_4$$

$\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_4}$ son de igual módulo y forman entre sí un ángulo de 90º, su resultante $\mathbf{F_{24}}$ tiene por módulo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos, y tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{F_1}$.

$$F_{24} = \sqrt{(F_2^2+F_4^2)} = 37{,}73.10^{-11}\ N.$$
$$F = F_1 + F_{24} = 5{,}11.10^{-10}\ N.$$

c) Calculamos la energía potencial que tiene la masa 3 por estar en el campo producido por las otras tres:

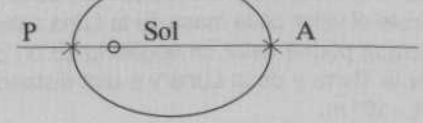
$$Ep = -G\frac{m_1m_3}{d} - G\frac{m_2m_3}{1} - G\frac{m_4m_3}{1}$$
$$Ep = -7{,}22.10^{-10}\ J$$

4. (Zaragoza, 1995) Razone por qué las trayectorias de los planetas en torno al Sol son planas.

Si un planeta describe una órbita elíptica como la de la figura, demuestre que se verifica:

$$r_P\,V_P = r_A\,V_A$$

donde V_P y V_A son los módulos de las velocidades de la partícula en P y A.



Análisis previo:

Los planetas describen órbitas elípticas porque están sometidos a un campo de fuerza central. Casi toda la masa de nuestro sistema planetario está concentrada en el Sol; por ello podemos considerar al Sol como centro de nuestro sistema. Con respecto al centro del campo (en nuestro caso con respecto al Sol), el momento de la fuerza que actúa en cada instante sobre el planeta es cero y en consecuencia en momento angular se conserva.

La dirección del momento angular constante implica que el plano que definen en cada instante **r** y **p** es siempre el mismo y como consecuencia las órbitas son planas.

Respuesta:

Por la conservación del momento angular:

$$L_A = L_P$$

Si los vectores son iguales, también lo son sus módulos:

$$L_A = L_P$$

En los punto A y B, los momentos lineales son perpendiculares a los radios de posición, en consecuencia:

$$L_A = r_A .\ m\,v_A .\ \text{sen}90 = r_P . m\ v_P .\ \text{sen}\ 90 = L_B$$

De donde deducimos:

$$r_A . V_A = r_P . V_P$$

5. (Zaragoza, 1995) La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días. La masa de la Tierra es 6.0×10^{24} Kg y $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m² Kg⁻².

a) Calcule la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) Calcule el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centro de la Tierra y de la Luna y a una distancia del centro de la Tierra de 3.4×10^{8} m.

c) Si en la Luna, cuyo radio es de $1{,}7 \times 10^{6}$, m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m. ¿Con qué velocidad llegará al suelo?

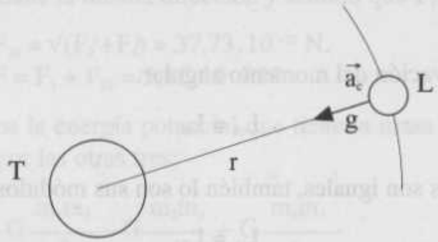
Análisis previo:

La Luna se mueve en el campo gravitatorio terrestre. La aceleración centrípeta que necesita la Luna para describir su trayectoria se la proporciona el campo gravitatorio terrestre existente en la órbita lunar.

El punto de equilibrio del apartado *b)* es un punto de campo nulo, el campo gravitatorio producido por la Tierra y el campo gravitatorio producido por la Luna, en dicho punto, tienen igual dirección y módulo, pero sentido opuesto.

Respuesta:

a)



$$g = a_c$$

$$G\frac{M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 . r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

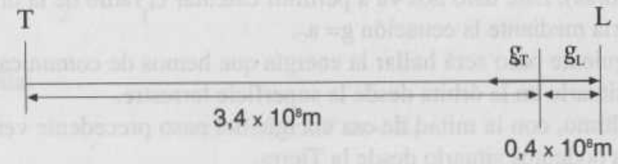
$$r^3 = G\frac{M_T}{4\pi^2} T^2$$

M_T es la masa de la Tierra; T es el tiempo que la Luna tarda en recorrer su órbita entorno a la Tierra.

Distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna:

$$r = 3{,}8 . 10^{8} \text{ m}$$

b)



$$g_T = g_L$$

$$G\frac{M_T}{(3{,}4.10^8)^2} = G\frac{M_L}{(0{,}4.10^8)^2}$$

$$M_L = (0{,}4/3{,}4)^2 . M_T$$

$$M_L = 8{,}3 . 10^{22} \text{ Kg}$$

c) Calculamos primero la gravedad en la superficie lunar:

$$g_0 = G\frac{M_L}{R_L^2} = 1{,}9 \text{ ms}^{-2}$$

La velocidad de llegada al suelo lunar:

$$v = \sqrt{2 g_0 h} = 6{,}2 \text{ ms}^{-1}$$

6. (Zaragoza, 1995, LOGSE) La NASA pretende lanzar un satélite geoestacionario de telecomunicaciones, pero en el último momento el Congreso reduce el presupuesto destinado al proyecto, de forma que la energía disponible para el lanzamiento queda reducida a la mitad estrictamente necesaria. A pesar de todo se lanza el satélite.

a) Determina el radio de órbita circular que podría conseguirse con la nueva energía de lanzamiento.

$R_T = 6300$ Km. $M_T = 6 . 10^{24}$ Kg, G= 6,67 U.S.I.

Análisis previo:

Un satélite geoestacionario es aquel que siempre está en la misma vertical respecto a la Tierra, tiene el mismo período de rotación que la Tierra (T = 24 horas). Este dato nos va a permitir calcular el radio de la órbita geoestacionaria mediante la ecuación $g = a_C$.

El siguiente paso será hallar la energía que hemos de comunicar al satélite para situarlo en la órbita desde la superficie terrestre.

Por último, con la mitad de esa energía del paso precedente veremos en qué órbita podemos situarlo desde la Tierra.

Respuesta:

1) Cálculo del radio de la órbita geoestacionaria:

Condición de equilibrio en la órbita:

$$g = a_C$$

$$G\frac{M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 . r = \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad (1)$$

$$r^3 = G\frac{M_T}{4\pi^2}T^2 ; \; T = 24 \times 3600 \text{ s} ; \; r = 4{,}2 \times 10^7 \text{ m}$$

Energía que tiene un satélite de masa m situado en órbita geoestacionaria:

Usando los dos primeros términos de la ecuación (1)

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r} = -4{,}7 \times 10^6 \text{ m J}$$

Energía de un satélite de masa m sobre la superficie terrestre. Despreciamos la energía cinética del satélite debida a la rotación de la Tierra:

$$E_0 = -G\frac{M_T m}{R_T} = -6{,}4 \times 10^7 \text{ m J}$$

Energía que hemos de comunicar a un satélite de masa m para situarlo en órbita desde la Tierra:

$$E' = E - E_0 = 5{,}9 \times 10^7 \text{ m J}$$

Si disponemos de $3{,}0 \times 10^7$m J podremos situar al satélite en una órbita de radio r' a partir de la Tierra:

$$-\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r'} + 6{,}4 \times 10^7 \text{ m J} = 2{,}9 \times 10^7 \text{ m}$$

Resulta:

$$r' = 5{,}9 \times 10^6 \text{ m} < R_T$$

Con la energía disponible es imposible situar al satélite en ninguna órbita.

FÍSICA

CAMPO ELECTROSTÁTICO

1. (Madrid, 1995) De acuerdo con el modelo atómico de Bohr, el electrón de un átomo de hidrógeno gira alrededor de su núcleo (un protón) siguiendo una trayectoria circular de $0{,}5 \times 10^{-10}$ m de radio, con una velocidad de $2{,}2 \times 10^6$ m/s. Calcular el módulo de las fuerzas que según dicho modelo actúan sobre el protón y el electrón respectivamente, sabiendo que la masa del electrón es $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ Kg.

Análisis previo:

La fuerza que el protón ejerce sobre el electrón (que, por el principio de acción y reacción es igual en módulo a la que el electrón ejerce sobre el protón) es la fuerza centrípeta necesaria para que el electrón describa la órbita circular:

$$F = m_e . a_C = m_e . v^2/r \quad (1)$$

Respuesta:

Aplicando la ecuación (1):

$$F = 9{,}11 \times 10^{-31} . (2{,}2 \times 10^6)^2/(0{,}5 \times 10^{-10})$$

$$F = 8{,}8 \times 10^{-8} \text{ N}$$

2. (Madrid, 1995) Dos cargas puntuales de 5 μC cada una, pero de signos opuestos, están separadas una distancia de 2 m. Calcule en el punto medio entre ambas:

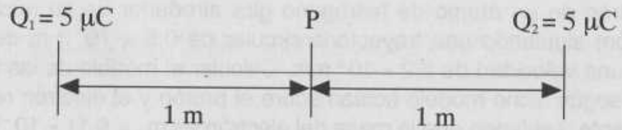
a) El potencial eléctrico.
b) El campo eléctrico.
Dato: $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ 9×10^9 N m² C⁻².

Análisis previo:

Es un ejercicio de aplicación inmediata. Tienes que tener muy presente que los campos son vectores y siempre que resulte asequible, debemos dibujarlos antes de hacer ningún cálculo.

Respuesta:

a)



$$V_P = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2};\ K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$$

Puesto que $Q_1 = -Q_2$ $r_1 = r_2$

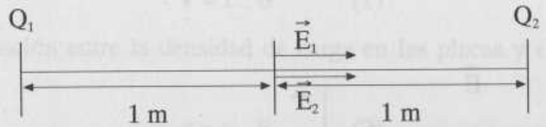
$$V_P = 0 \text{ V}$$

b) Al dibujar los campos en el punto P, observamos que tienen la misma dirección y el mismo sentido. La resultante tendrá la misma dirección, el mismo sentido y por módulo la suma de los módulos.

El módulo del campo producido por una Q a una distancia E es:

$$E = K\frac{Q}{r^2};\ E_1 = E_2 = 9 \times 10^9\ \frac{5\times 10^{-6}}{1^2} = 4{,}5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E(P) = E_1 + E_2 = 9 \times 10^4 \text{ N/C}$$



3. (Murcia, 1995) Entre dos placas cargadas paralelas hay una diferencia de potencial de 200 V. En la región comprendida entre ambas placas existe un campo eléctrico de 400 N/C de módulo.

Determine:

a) La separación entre las placas.
b) El módulo de la aceleración que experimentaría una partícula de 0,01 Kg de masa con una carga de 10^{-4} C situada entre las placas.
c) La variación de la energía potencial eléctrica de dicha partícula si va de la placa negativa a la positiva.

Análisis previo:

El campo entre las placas de un condensador, lejos de los bordes, es constante. En estas condiciones la relación entre el valor absoluto de la diferencia de potencial y el módulo del campo es:

$$V = E \,.\, d \quad (1)$$

En donde V es la diferencia de potencial entre dos puntos, que están en una misma línea de campo, separados por una distancia d.

Fuerza que se ejerce sobre una carga en un campo es:

$$\mathbf{F} = q \,.\, \mathbf{E}$$

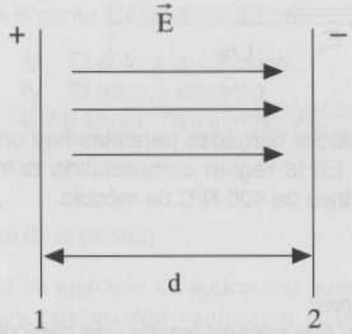
Conocida la fuerza y la masa, usando la ecuación fundamental de la dinámica, podemos determinar la aceleración.

Respuesta:

a) $V = E \,.\, d$
$200 = 400 \,.\, d$; $d = 0{,}5$ m

b) $F = q \,.\, E = 10^{-4} \,.\, 400 = 0{,}04$ N
$F = m \,.\, a$
$0{,}04 = 0{,}01 \,.\, a$; $a = 4$ ms⁻²

c)



$V_2 > _1$;
porque $\Delta V = -\int_1^2 -E dr =$
$= E . d > 0$

$$E_P(1) = q . V_1 \; ; \; E_P(2) = q . V_2$$
$$\Delta E_P = E_P(2) - E_P(1) = q\,(V_2 - V_1) \; ; \; \Delta E_P = 10^{-4} \times 200 = 0{,}02 \text{ J}$$

4. (Zaragoza, 1995) Se conecta un voltímetro a las armaduras de un condensador plano cargado. En el espacio entre las armaduras hay aire. Debido a una alteración entre las armaduras la indicación entre las armaduras del voltímetro disminuye un 5%.

a) ¿Habrá aumentado o disminuido la distancia entre las armaduras?

b) ¿Cuál es, en %, la variación de la capacidad del condensador?

c) Razone si habrá variado el campo eléctrico existente entre las armaduras.

d) ¿Cuál es, en %, la variación de la energía electrostática del condensador?

e) ¿Qué constante dieléctrica debería tener un material que al introducirlo entre las armaduras produjese un cambio similar de la capacidad del condensador?

Análisis previo:

Para resolver este ejercicio vamos a tener en cuenta las siguientes relaciones:

1) Relación entre la diferencia de potencial entre las placas de un condensador plano, el módulo del campo eléctrico y la distancia entre placas:

$$V = E . d \qquad (1)$$

2) Relación entre la densidad de carga en las placas y el módulo del campo:

$$\sigma = \varepsilon_0 . E \qquad (2)$$

3) Capacidad de un condensador plano:

$$C = \varepsilon_0 . S/d \qquad (3)$$

S = superficie de cada placa.
d = distancia entre placas.

4) Energía de un condensador cargado:

$$E = 1/2\, Q . V \qquad (4)$$

Respuesta:

a) Por la relación (1), el potencial depende de la distancia entre placas y del campo. Por la relación (2) el campo no se modifica por variar la distancia. Por tanto, la variación del potencial es directamente proporcional a la variación de la distancia:

$$V = E . d \qquad (5)$$
$$V' = E . d' \qquad (6)$$

Como $V' = 0{,}95$ V deducimos que $d' = 0{,}95$ d. La distancia ha disminuido un 5%.

b)

$$C = \varepsilon_0 S/d \qquad (7)$$
$$C' = \varepsilon_0 S/d' \qquad (8)$$

Dividimos (8) entre (7):

$$C'/C = d/d' = 1/0{,}95 = 1{,}0526$$

La capacidad del condensador ha aumentado un 5,26 %.

c) Como hemos puesto de manifiesto en *a)* el campo solamente depende de la densidad de carga y del medio y ninguno de estos ha variado.

No varía.

d)

$$E = 1/2\, Q \,.\, V \qquad (9)$$
$$E' = 1/2\, Q \,.\, V' \qquad (10)$$

Dividimos (10) entre (9):

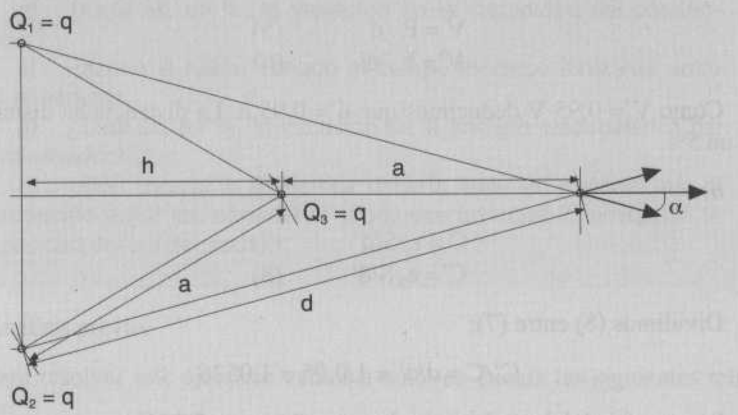
$$E'/E = V'/V = 0{,}95.$$

Ha disminuido un 5 %.

e) Según ponemos de manifiesto en b): C' = 1,0526 C. Luego basta con introducir un material con una constante dieléctrica relativa:

$$C = \varepsilon_0\, S/d$$
$$C' = \varepsilon'\, S/d$$
$$C'/C = \varepsilon'/\varepsilon_0 = \varepsilon_r$$
$$\varepsilon_r = 1{,}0526.$$

5. (Zaragoza, 1995, LOGSE) Sean tres cargas puntuales, cada una de valor +q, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado «a». El punto M es coplanario con el triángulo, situado en la prolongación de su altura y a una distancia del vértice más próximo igual al lado del triángulo.



a) Calcular el campo eléctrico en el punto M.
b) Calcular el potencial electrostático en el punto M.

Análisis previo:

Dibujamos en el punto M los campos producidos por las cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Observamos que $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tiene el mismo módulo y son simétricos respecto al eje de las X, luego la resultante de estos campos es cero según el eje Y. Como el campo $\mathbf{E}_3$ solamente tiene componente X, la resultante de los tres campos únicamente tendrá componente X.

El potencial lo calculamos mediante la suma algebraica de los potenciales producidos por las tres cargas en el punto M.

Respuesta:

a)

$$h = a\sqrt{3}/2$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$E_1 = K\frac{q}{d^2} = K\frac{q}{a^2(2+\sqrt{3})} = E_2$$

$$E_{1x} = E_1\cos\alpha = K\frac{q}{a^2}\,\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = E_{2x};\; E_3 = K\frac{q}{a^2}$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

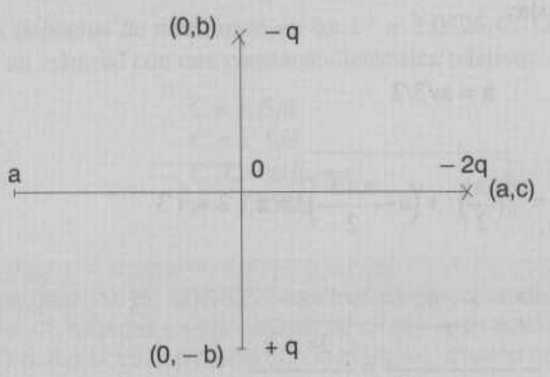
$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x}$$

$$E_x = K\frac{q}{a^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right);\; E_y = 0$$

b)

$$V_M = K\frac{q}{a} + 2K\frac{q}{a\sqrt{2+\sqrt{3}}} = K\frac{q}{a}\left(1+\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

6. (Castilla-La Mancha, 1995) Hallar el valor de Q, en función de q, para que el potencial eléctrico generado por estas cuatro cargas sea nulo en el origen de coordenadas.



Respuesta:

El potencial en un punto es la suma algebraica de los potenciales que en ese punto producen las cargas.

Las cargas que están en el eje Y son de distinto signo y están a la misma distancia, los potenciales que producen en el origen al sumarlos se anulan.

Las cargas que están sobre el eje X, equidistan del origen, para que su suma sea cero basta que sean de signos opuestos:

$$Q = 2q$$

7. (Castilla-La Mancha, 1995) En el centro de un cubo, cuyas aristas miden 2 m, colocamos una carga puntual de 3.10^{-9} C.

a) Calcular el flujo de campo eléctrico producido por dicha carga a través de la superficie delimitada por el cubo.

b) ¿Cuánto vale el flujo a través de una de las caras del cubo?

c) Si la carga no estuviera en el centro, ¿las respuestas de los apartados *a)* y *b)* anteriores serían las mismas? Explícalo sin hacer cálculos.

Análisis previo:

Teorema de Gauss: El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga situada en el espacio interior delimitado por dicha superficie partido por la constante dieléctrica del medio:

$$\phi = Q/\varepsilon$$

Respuesta:

a) Suponemos que estamos en el vacío

$$\phi = Q/\varepsilon = 339 \text{ V . m}$$

b) Por simetría, el flujo que atraviesa cualquier cara del cubo es el mismo:

$$\phi_C = 339/6 = 56,5 \text{ V .m}$$

c) Si la carga no está en el centro, la respuesta al apartado *a)* sigue siendo la misma, el teorema de Gauss se enuncia sin especificar en qué punto del interior hay que situar las cargas. La respuesta al apartado *b)* no es la misma, la carga no tiene ahora la misma posición con respecto a todas las caras.

MAGNETISMO E INDUCCIÓN

1. (Madrid, 1995) Una carga eléctrica positiva q se mueve con una velocidad constante **v** penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme **B** perpendicular a **v**. Determinar el módulo, dirección y sentido de un campo eléctrico **E** que, aplicado en la misma región del espacio, permita que la carga eléctrica continúe su movimiento rectilíneo.

Análisis previo:

La fuerza que experimenta una carga que penetra en un campo magnético, según la ley de Lorentz, es:

$$\mathbf{F}_M = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

La fuerza que experimenta una carga dentro de un campo eléctrico es:

$$\mathbf{F}_E = q\,\mathbf{E}$$

Respuesta:

Para que la carga continúe con su movimiento rectilíneo, estas fuerzas han de ser de igual dirección y modulo pero de sentido opuesto.

$$\mathbf{F}_E = -\,\mathbf{F}_M$$
$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Supongamos que la carga se mueve en la dirección del eje X:

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0)$$

Supongamos que **B** tiene la dirección del eje Y:

$$\mathbf{B} = (0, B, 0)$$
$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, 0, vB)$$

$\mathbf{E} = (0, 0, -v \cdot B)$, tiene la dirección del eje Z, sentido negativo y de módulo $E = v \cdot B$

2. (Madrid, 1995) Por un conductor rectilíneo muy largo circula una corriente eléctrica I. Una espira cuadrada se mueve manteniéndose coplanaria con el conductor. Determinar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando su movimiento es:

a) Paralelo al conductor.
b) Perpendicular al conductor y alejándose de él.

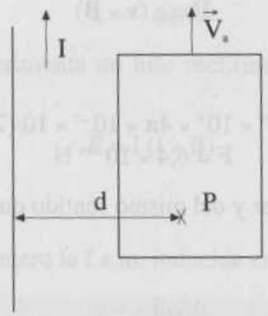
Análisis previo:

Se produce corriente inducida en un circuito si varía con el tiempo el flujo magnético que le atraviesa.

Si el flujo disminuye, el sentido de la corriente inducida es tal que el campo creado por la corriente haga aumentar el flujo, y viceversa.

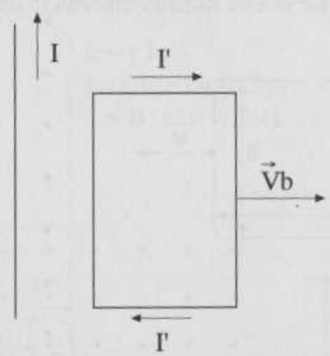
Respuesta:

a)



No hay variación de flujo y, por tanto, no hay corriente inducida.

b) Disminuye el flujo porque, a medida que nos alejamos del conductor, el campo decrece. Como el campo es perpendicular al circuito y entrante, la corriente inducida ha de producir un campo perpendicular y entrante. La corriente tiene el sentido de las agujas del reloj.



3. (Madrid, 1995) Un electrón se mueve en las proximidades de un hilo conductor rectilíneo por el que circula una corriente de 10 A. Cuando el electrón está a 0,05 m del cable, su velocidad es 105 m/s y se dirige perpendicularmente hacia el cable. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el electrón?

Datos: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \mathrm{H\ m^{-1}}$; $e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

Análisis previo:

La fuerza sobre el electrón es:

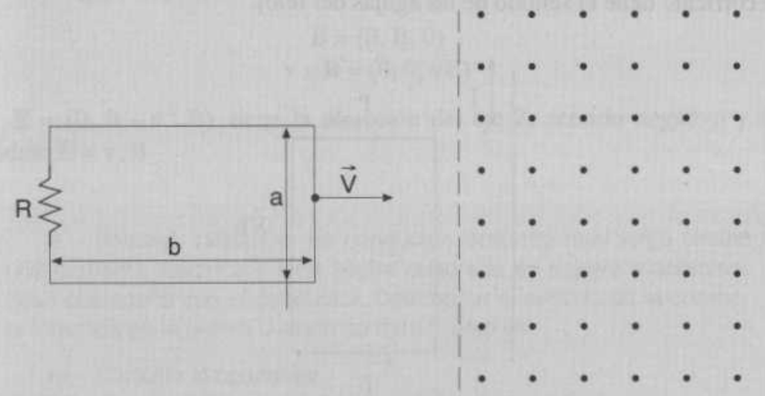
$$\mathbf{F} = e\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Respuesta:

$$F = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^{5} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10/(2 \times \pi \times 0{,}05)$$
$$F = 6{,}4 \times 10^{-19}\ \mathrm{N}$$

Es paralela al conductor y del mismo sentido que la corriente.

5. (Zaragoza, 1995, LOGSE) Sea un circuito rectangular de lados «a» y «b», y resistencia R, como indica la figura. A la derecha de la línea de puntos, que es la paralela al lado «a», hay un campo magnético constante, **B**, perpendicular al papel y saliente. Manualmente movemos el circuito a velocidad constante, **v**, de forma que penetra en la región del campo magnético.



a) Calcular la energía transformada en forma de calor, cuando la mitad del circuito está introducido en el campo **B**.

b) ¿Qué fuerza realizamos en dicho instante?

c) Dibujar un diagrama que muestre la f.e.m. inducida en el circuito respecto a la longitud introducida.

Análisis previo:

La fuerza electromotriz inducida en un circuito es:

$$\varepsilon = -\,d\phi/dt$$

La fuerza que experimenta un hilo rectilíneo conductor dentro de un campo magnético es:

$$\mathbf{F} = I\,(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Respuesta:

a) Calculamos primero la f.e.m. inducida en el circuito:

$$\varepsilon = -\,d\phi/dt$$

$$d\,\phi = B.dS = B.a.db = B.a.v.\,dt$$

En valor absoluto la f.e.m. es:

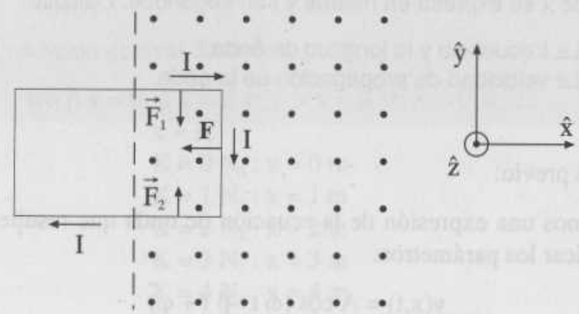
$$\varepsilon = B.a.v$$

Constante por que B, a y v son constantes.

Energía consumida en el circuito cuando este se ha introducido la mitad:

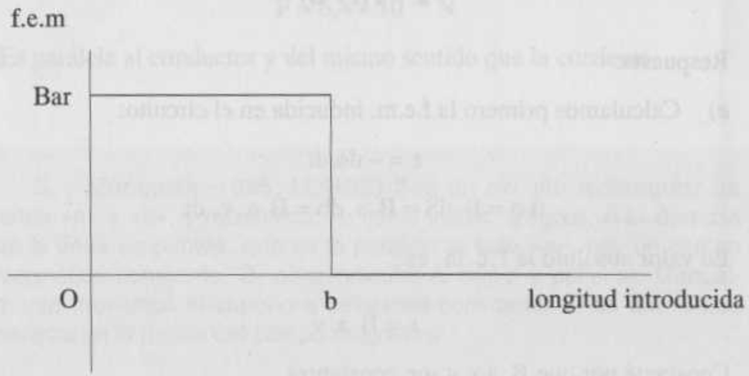
$$E = \varepsilon\, I\, t$$
$$I = \varepsilon/R\ ;\ t = (b/2)/v$$
$$E = B^2 a^2 b\, v/(2R)$$

b)



$$F_1 + F_2 = 0$$
$$F = I\,(l \times B)$$
$$F = I\,a\,B = B^2\,a^2\,v/R$$

c) Mientras el circuito está penetrando en el campo la f.e.m. permanece constante e igual a: B a v. Después no hay variación de flujo y, por tanto, vale cero.



ONDAS

1. (Madrid, 1995) La ecuación de propagación de una onda que se genera en una cuerda se puede expresar de la forma:

$$y(x,t) = 0{,}3 \cos(300\,\pi\,t - 10\,x + \pi/2)$$

Donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcular:

a) La frecuencia y la longitud de onda.
b) La velocidad de propagación de la onda.

Análisis previo:

Escribimos una expresión de la ecuación de onda que resulte adecuada para identificar los parámetros:

$$y(x,t) = A \cos(\omega\,t - \beta\,t + \varphi)$$

Donde: $\omega = 2\pi/T$, $\beta = 2\pi/\lambda$.

Respuesta:

a) Identificamos los coeficientes de t y de x:

$$\omega = 300\,\pi = 2\pi . \nu \ , \ \nu = 150 \text{ Hz}$$
$$\beta = 10 = 2\pi/\lambda \ , \ \lambda = \pi/5 \text{ m}$$

b) $\lambda = v . T \ ; \ v = \lambda/T = \lambda . \nu = 94{,}25$ m/s

2. (Murcia, 1995, COU y LOGSE) Una onda en una cuerda viene dada por la ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}2 \text{ sen}(\pi x) \cos(100\pi t) \text{ m}$$

en donde x está comprendida entre 0 y 6 m. Calcule:

a) La longitud de onda y la frecuencia angular de la onda.
b) El número de nodos (incluidos los extremos).
c) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

Análisis previo:

Escribimos la ecuación general de la onda estacionaria:

$$y(x,t) = 2\,A \text{ sen}(\beta x) \cos(\omega t)$$

Respuesta:

a) Identificamos coeficientes:

$$\beta = \pi \text{ rad/m}, \ \beta = 2\,\pi/\lambda = \pi \ , \ \lambda = 2 \text{ m}$$
$$\omega = 100\,\pi \text{ rad/s} \ ; \ 2\,\pi\,\nu = 100\,\pi \ ; \ \nu = 50 \text{ Hz}$$

b) Condición general de nodos:

$$\text{sen}\,\beta\,x = 0; \ \beta\,x = K\,\pi \ ; \ \pi\,x = K\,\pi; \ K = 0, 1, 2...$$
$$x = K$$
$$K = 0 \ N_0 : x = 0 \text{ m}$$
$$K = 1 \ N_1 : x = 1 \text{ m}$$
$$K = 2 \ N_2 : x = 2 \text{ m}$$
$$K = 3 \ N_3 : x = 3 \text{ m}$$
$$K = 4 \ N_4 : x = 4 \text{ m}$$
$$K = 5 \ N_5 : x = 5 \text{ m}$$
$$K = 6 \ N_6 : x = 6 \text{ m}$$

Siete nodos.

c) $\lambda = v \cdot T$

$$v = \lambda \cdot \nu = 2 \times 50 = 100 \text{ m/s}$$

4. (Sevilla, 1995) En una cuerda se propaga una onda transversal:

$$y(x,t) = 2 \text{ sen } 2\pi\,(10t - 0{,}1x) \quad \text{(S.I.)}$$

Determinar: *a)* Período, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda, *b)* velocidad y aceleración máximas en un punto de la cuerda.

Análisis previo:

Escribimos la ecuación general en la forma más adecuada e identificamos parámetros:

$$y(x,t) = A \text{ sen } 2\pi(t/T - x/\lambda)$$

Respuesta:

a)

$$1/T = 10 \; ; \; T = 0{,}1 \text{ s}$$
$$1/\lambda = 0{,}1 \; ; \; \lambda = 10 \text{ m}$$
$$\lambda = v \cdot T \; ; \; v = 100 \text{ m/s}$$

b)

$$u = \partial y/\partial t = 40\pi \cos 2\pi(10t - 0{,}1x)$$
$$a = \partial u/\partial t = -\,800\pi^2 \text{ sen } 2\pi(10t - 0{,}1x)$$
$$u_{max} = 40\pi \text{ m/s}$$
$$a_{max} = 800\pi^2 \text{ ms}^{-2}$$

FÍSICA ATÓMICA

1. (Murcia, 1995, LOGSE) ¿Qué energía se libera por núcleo en una reacción nuclear en la que se produce un defecto de masa de 0,1 u? (Dato: 1 u 1,66 . 10^{-24} Kg).

Análisis previo:

La masa que desaparece se convierte en energía. La relación que liga ambas magnitudes es:

$$E = m.c^2$$

c es la velocidad de la luz.

Respuesta:

$$E = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

2. (Murcia, 1995, LOGSE) El período de semidesintegración de un núcleo radiactivo es de 100 s. Una muestra que inicialmente contenía 10^9 núcleos posee en la actualidad 10^7 núcleos. Calcule:

a) La antigüedad de la muestra.
b) La vida media.
c) La actividad de la muestra dentro de 1000 s.

Análisis previo:

En un proceso de desintegración radiactiva podemos definir:

Constante de desintegración: λ, es la probabilidad de que se transforme un átomo en la unidad de tiempo.

Vida media: θ, es el valor medio de la vida de todos los átomos considerados.

$$\theta = 1/\lambda$$

Período de semidesintegración: τ, tiempo en el que un número de átomos radiactivos se reduce a la mitad.

$$\tau = 0{,}693\,\theta$$

Velocidad de desintegración: En un instante t = 0 s tenemos un número de átomos radiactivos N_0, t segundos después el número de átomos que aún no se han desintegrados es N. Si la constante de desintegración es λ, se cumple la ecuación:

$$N = N_0 . e^{-\lambda t} \quad (1)$$

Respuesta:

a) Calculamos en primer lugar la constante de desintegración:

$$\lambda = 0{,}693/\tau = 0{,}00693\ s^{-1}$$

Determinamos ahora la antigüedad de la muestra aplicando la ecuación (1)

$$10^7 = 10^9\ e^{-0{,}00693t}$$
$$t = 664{,}4\ s$$

b) Vida media:

$$\theta = \tau/0{,}693 = 144{,}3\ s$$

c) Calculamos los átomos sin desintegrar dentro de 1000 s:

$$N = 10^7 . e^{-0{,}00693.1000}$$
$$N = 9{,}78 . 10^3$$

Actividad de una muestra: $A = \lambda . N$

$$A = 67{,}8 \text{ desintegraciones/s}$$

3. (Zaragoza, 1995, LOGSE) Una muestra de cierto isótopo radiactivo tiene una vida media o período de semidesintegración τ = 1 h. ¿En cuánto tiempo la actividad de la muestra se habrá reducido al 25% de la original? Representa en el OY el % de la actividad y en el eje OX el tiempo en horas y a partir de la gráfica estima el tiempo que ha de transcurrir para que la muestra se reduzca al 10% de la inicial.

Análisis previo:

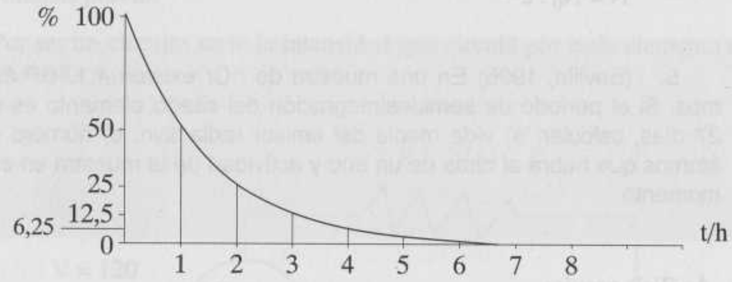
En este caso el redactor del ejercicio identifica vida media con período de semidesintergración. Excepto que explícitamente lo encontremos así, resolveremos como en el ejercicio anterior.

Respuesta:

Cada hora que pasa el número de átomos de la muestra se reduce a la mitad podemos hacer la siguiente tabla:

t/h	0	1	2	3	4
N/%	100	50	25	12,5	6,25

Como podemos observar al cabo de 2 h la muestra se ha reducido al 50 %. Representamos la tabla en unos ejes de cartesiana:



Pasadas unas 3,3 h la muestra se ha reducido al 10%.

4. (Castilla-La Mancha, 1995) Elige la opción que creas más correcta y razónala brevemente.

La actividad de un elemento radiactivo pasa a valer 1/32 de su valor inicial cuando han transcurrido 45 s. Su período de semidesintegración es:

a) 45 s.
b) 1/9 s.
c) 9 s.
d) 32 s.

Análisis previo:

Utilizamos el concepto de período de semidesintegración.

Respuesta:

El enunciado nos dice que:

$$N = 1/32\ N_0$$
$$N = (1/2)^5 . N_0$$

Esta expresión nos dice que la muestra inicial se ha reducido a la mitad 5 veces, han pasado 5 períodos de semidesintegración. Si el tiempo total es de 45 s, cada período es de 9 s.

Si la relación entre la muestra actual y la inicial no hubiera sido tan fácil de descomponer en potencia de 2 hubiéramos recurrido a la ecuación:

$$N = N_0 . e^{-\lambda t}$$

5. (Sevilla, 1995) En una muestra de ^{51}Cr existen $4{,}1.10^{20}$ átomos. Si el período de semidesintegración del citado elemento es de 27 días, calcular: a) vida media del emisor radiactivo; b) número de átomos que habrá al cabo de un año y actividad de la muestra en ese momento.

Análisis previo:

Utilizaremos las relaciones:

$$\tau = (\ln 2)/\lambda = (\ln 2) . \theta$$

Para el apartado *b)* utilizaremos la ecuación:

$$N = N_0 . e^{-\lambda t}$$

y la definición de actividad $A = \lambda . N$

Respuesta:

a) Vida media: $\theta = \tau/(\ln 2) = 38{,}95$ días.

Constante de des. $\lambda = 1/\theta = 2{,}57 . 10^{-2}$ (días)$^{-1}$.

b) $N = N_0 . e^{-\lambda t}$

$N = 4{,}1 . 10^{20}\ e^{-0{,}0257.365}$

$N = 3{,}46 . 10^{16}$ átomos

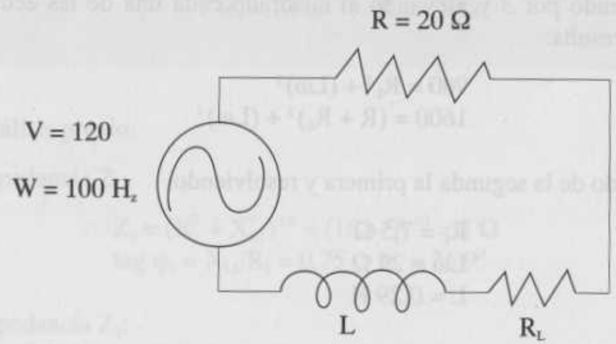
$A = \lambda . N = 8{,}9 . 10^{14}$ desintegraciones/día.

CORRIENTE ALTERNA

1. (Sevilla, 1995) Un circuito serie consta de una resistencia R = 20 Ω y una bobina, de resistencia R_L y autoinducción L desconocidas. Al conectarlo a una tensión V = 120 cos 100t V, los valores máximos de las diferencias de potencial entre los extremos de la resistencia y de la bobina son 60 V y 90 V, respectivamente. *a)* Calcular los valores de R_L y L. *b)* ¿Qué condensador habría que añadir al circuito para que el factor de potencia fuese igual a la unidad?

Análisis previo:

Por ser un circuito serie la intensidad que circula por cada elemento del circuito es la misma.



Relaciones entre los voltajes de los extremos de los elementos y las impedancias de los mismos:

Resistencia:

$$V_R = I_0 . R \quad (1)$$

Bobina:

$$V_L = I_0 . Z_L \quad (2)$$
$$Z_L = [R_L^2 + (L\omega)^2]^{1/2}$$

Circuito general:

$$V_0 = I_0 \cdot Z \; (3)$$
$$Z = [(R + R_L)^2 + (L\omega)^2]^{1/2}$$

Respuesta:

a) Utilizamos la ecuación (1):

$$60 = I_0 \cdot 20$$
$$I_0 = 3 \text{ A.}$$

Utilizamos las expresiones (2) y (3), sustituyendo $I_0 = 3$ A, $V_L = 90$ V, $V_0 = 120$ V.

$$90 = 3 \cdot [R_L^2 + (L\omega)^2]^{1/2}$$
$$120 = 3 \cdot [(R + R_L)^2 + (L\omega)^2]^{1/2}$$

Dividiendo por 3 y elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones anteriores resulta:

$$900 = R_L^2 + (L\omega)^2$$
$$1600 = (R + R_L)^2 + (L\omega)^2$$

Restando de la segunda la primera y resolviendo:

$$R_L = 7{,}5 \; \Omega$$
$$L\omega = 29 \; \Omega$$
$$L = 0{,}29 \text{ H}$$

b) Si al circuito le añadimos un condensador la impedancia sería igual a:

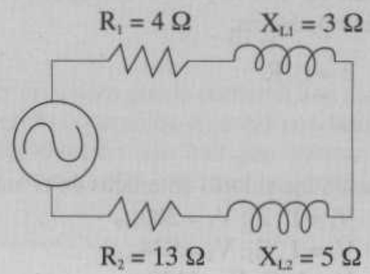
$$Z = [(R + R_L)^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2]^{1/2}$$

La condición para que el factor de potencia sea igual a la unidad es que la impedancia sea óhmica pura:

$$L\omega = 1/(C\omega) \; ; \; C = (L\omega^2)^{-1} = 344{,}8 \; \mu\text{F}$$

2. (Baleares, 1994) Un circuito de corriente alterna está formado por dos impedancias Z_1 y Z_2 en serie, por las que circula una intensidad de corriente de 60 A. La impedancia Z_1 está formada por una resistencia óhmica de 4 Ω y una reactancia inductiva de 3 Ω, y la Z_2 por una resistencia óhmica de 13 Ω y una reactancia inductiva de 5 Ω.

a) Dibujar el diagrama vectorial del circuito.
b) Calcular la potencia disipada en la impedancia.



Análisis previo:

Impedancia Z_1:

$$Z_1 = (R_1^2 + X_{L1}^2)^{1/2} = (16 + 9)^{1/2} = 5 \; \Omega$$
$$\text{tag } \varphi_1 = X_{L1}/R_1 = 0{,}75 \; ; \; \varphi_1 = 36{,}9°$$

Impedancia Z_2:

$$Z_2 = (R_2^2 + X_{L2}^2)^{1/2} = (169 + 25)^{1/2} = 13{,}9 \; \Omega$$
$$\text{tag } \varphi_2 = X_{L2}/R_2 = 0{,}38 \; ; \; \varphi_2 = 21{,}0°$$

Impedancia total del circuito:

Impedancia Z:

$$Z = [(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2})^2]^{1/2} = (289 + 64)^{1/2} = 18{,}8 \; \Omega$$
$$\text{tag } \varphi = X_L/R = 0{,}47 \; ; \; \varphi = 25{,}2°$$

Al ser un circuito serie la intensidad de corriente que circula a través de cualquier elemento del circuito es la misma. La intensidad se representa sobre el eje de abscisas.

Los voltajes de elementos del circuito, con resistencia óhmica pura, están en fase con la intensidad.

Los voltajes de elementos del circuito, con reactancia inductiva, están adelantados con respecto a la intensidad. El ángulo de desfase es el mismo que el de la impedancia.

Los voltajes de elementos del circuito, con reactancia capacitiva, están atrasados con respecto a la intensidad. El ángulo de desfase es el mismo que el de la impedancia.

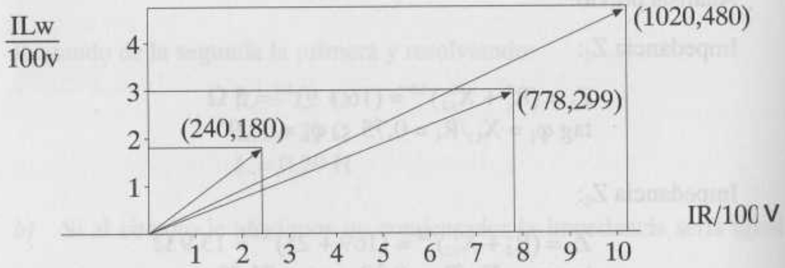
La potencia disipada en una impedancia depende únicamente de la resistencia óhmica de la impedancia:

$$P = I_e^2 . R$$

Respuesta:

a) Teniendo en cuenta los valores obtenidos en el análisis:

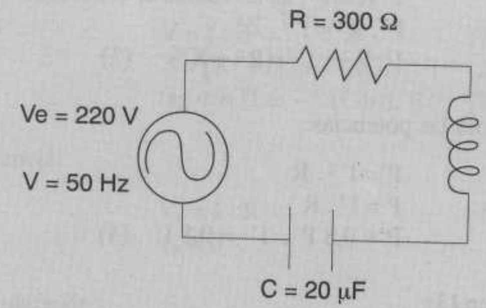
$$V_1 = I . Z_1;\ V_1 = 300_{36,9°}$$
$$V_2 = I . Z_2;\ V_2 = 834_{21,0°}$$
$$V = I . Z;\ V = 1128_{25,2°}$$



b)

$$P_1 = I^2 . R_1 = 14400 \text{ w}$$
$$P_2 = I^2 . R_2 = 46800 \text{ w}$$
$$P = I^2 . R = 61200 \text{ w}$$

3. (Castellón, 1993) Se montan en serie una bobina de autoinducción L y resistencia 300 Ω, y un condensador de capacidad C = 20 μF. Se aplica una corriente alterna eficaz de 220 V y 50 Hz. Calcular:



a) El valor de L para que la corriente sea máxima.

b) La potencia consumida en estas condiciones.

c) La autoinducción que hay que colocar para que la potencia consumida sea el 80% de la consumida en las condiciones anteriores.

Análisis previo:

La impedancia del circuito es:

$$Z = [R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2]^{1/2} \quad (1)$$

La corriente es máxima si la impedancia es mínima. La impedancia es mínima si:

$$L\omega - 1/(C\omega) = 0;$$
$$L = (C\,\omega^2)^{-1}. \ (2)$$

a) $\omega = 2\pi\nu = 100\,\pi$ rad/s.

Aplicamos la ecuación (2):

$$L = 0{,}51 \text{ H}$$

b) $P = (V/R)^2 . R = 161.3$ w

c) El voltaje en ambos casos es el mismo:

$$V = I . R$$
$$V = I' . Z, \quad Z = (R^2 + X^2)^{1/2}$$

FÍSICA

$I \cdot R = I' \cdot Z$, elevamos al cuadrado:

$$I^2 \cdot R^2 = I'^2 \cdot Z^2$$
$$I^2 \cdot R^2 = I'^2 \cdot (R^2 + X^2) \quad (3)$$

Comparemos ahora las potencias:

$$P' = I'^2 \cdot R$$
$$P = I^2 \cdot R$$
$$P' = 0{,}8\ P \ , \ I'^2 = 0{,}8\ I^2 \quad (4)$$

Sustituimos (4) en (3):

$$R^2 = 0{,}8\ (R^2 + X^2);$$

Resulta pues:

$$X = \pm\ 0{,}5\ R = \pm\ 150\ \Omega$$
$$X = X_L - X_C\ ;\ X_C = 1/(C\omega) = 159{,}2\ \Omega$$

Dos soluciones:

$$1{:}\ X_L = 150 + X_C = 309{,}2\ \Omega$$
$$L\omega = 309{,}2\ ;\ L = 0{,}98\ H$$
$$2{:}\ X_L = -150 + X_C = 9{,}2\ \Omega$$
$$L\omega = 9{,}2\ ;\ L = 0{,}03\ H$$

4. (León, 1993) Un generador de 50 Hz está conectado a un circuito en serie, formado por una resistencia de 100 Ω, una autoinducción de 0,25 H y un condensador de 100 μF: La potencia media suministrada al circuito es de 400 W. Se pide:

a) Voltaje eficaz en bornes de cada uno de los aparatos;
b) Voltaje eficaz total del circuito;
c) Desfase entre la intensidad y el voltaje para todo el circuito.

Análisis previo:

La intensidad que circula a través de cualquier elemento del circuito es la misma.

En todo lo que sigue los voltajes e intensidades que escribamos son eficaces.

Todo el circuito:

$$V = I \cdot Z \quad (1)$$
$$Z = [R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2]^{1/2} \quad (2)$$
$$\text{tag}\ \varphi = (L\omega - 1/(C\omega)) \cdot R^{-1} \quad (3)$$

Resistencia:

$$V_R = I \cdot R \quad (4)$$
$$\varphi_R = 0$$

Autoinducción:

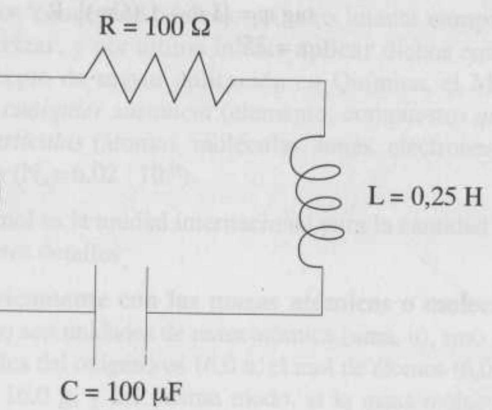
$$V_L = I \cdot X_L \quad (5)$$
$$X_L = L\ \omega$$
$$\varphi_L = \pi/2$$

Condensador:

$$V_C = I \cdot X_C \quad (6)$$
$$X_C = (C\omega)^{-1}$$
$$\varphi_C = -\pi/2$$

Potencia disipada:

$$P = I^2 \cdot R \quad (7)$$



Respuesta:

a) A partir de la ecuación (7) calculamos la intensidad:

$$P = I^2 . R$$
$$400 = I^2 . 100$$
$$I = 2\ A$$

Voltaje entre los bornes de la resistencia:

$$V_R = 2 . 100 = 200\ V$$

Voltaje entre los bornes del condensador:

$$X_C = (C\omega)^{-1} = 31{,}8\ \Omega$$
$$V_C = 2 . 31{,}8 = 63{,}7\ V$$

Voltaje entre los extremos de la autoinducción:

$$X_L = L\ \omega = 78{,}5\ \Omega$$
$$V_L = 2 . 78{,}5 = 157{,}0\ V$$

b) Voltaje eficaz de todo el circuito:

$$Z = [R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2]^{1/2} = 110{,}4\ \Omega$$
$$V = 220{,}8\ V$$

c) Desfase entre la intensidad y el voltaje para todo el circuito:

$$\text{tag}\ \varphi = [L\omega - 1/(C\omega)].\ R^{-1} = 0{,}47$$
$$\varphi = 25^{\circ}$$

QUÍMICA

PEDRO MANUEL SÁNCHEZ ESCUDERO

CÓMO PREPARAR EL EXAMEN DE QUÍMICA

La Química es una ciencia experimental que intenta justificar la estructura y las propiedades de la materia; en este sentido, trata de utilizar **racionalmente** leyes, hipótesis, teorías y modelos, siendo cada vez más razonada, más deductiva y menos memorística. CONCLUSIÓN: ¡Aprende la Tabla Periódica de los elementos y los conceptos básicos de Química, y utiliza racionalmente lo aprendido! Así pues, te sugiero el siguiente plan de trabajo:

1. Memoriza por columnas (grupos) los **símbolos de los elementos** de la Tabla Periódica, por ejemplo, grupo 1 o de los alcalinos: Litio (Li), Sodio (Na), Potasio (K), Rubidio (Rb), Cesio (Cs) y Francio (Fr).

2. Según la **posición en la Tabla Periódica** (grupo y período de cada elemento), vas a poder deducir muchos detalles. Así, en el sodio, (período **3º** y grupo **1**), su estructura electrónica es $1s^2 2s^2 2p^6\ 3s^1$, y sumando superíndices, Z = 11; el estado de oxidación más probable es +1, porque el átomo tiende a perder su electrón más externo para adquirir así la configuración electrónica de tipo gas noble, y lo anterior es básico para **formular correctamente**.

3. En cuanto a los **conceptos básicos**, primero intenta **comprender**, después intenta **memorizar**, y por último intenta **aplicar** dichos conceptos. Veámoslo con el concepto de mayor aplicación en Química, el **MOL**: el mol es la *cantidad de cualquier sustancia* (elemento, compuesto) *que contiene un número de partículas* (átomos, moléculas, iones, electrones) *igual al número de Avogadro* ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$).

Resulta así que el mol es la unidad internacional para la cantidad de sustancia, siendo útil por tres detalles:

• **Coincide numéricamente con las masas atómicas o moleculares**, cuando tales números no son unidades de masa atómica (uma, u), sino gramos (g); así, si la masa atómica del oxígeno es 16,0 u, el mol de átomos ($6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos) corresponde a 16,0 g, y del mismo modo, si la masa molecular del oxígeno (O_2) es 32,0 u, el mol de moléculas ($6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas) es 32,0 g.

• Tratándose de **gases**, el mol de cualquier gas ocupa un volumen sensiblemente igual a **22,4 litros**, si tal volumen se mide **en condiciones normales** de presión y temperatura (P = 1 atm; T = 0 °C = 273 K).

• En **disoluciones** se maneja como unidad habitual la **molaridad**, que es el número de moles de soluto que hay en cada litro de disolución, o sea, M = n/V, siendo M la molaridad, n el número de moles y V el volumen de la disolución en litros.

A menudo hay que **pasar de gramos a moles, o viceversa**; para evitar errores, lo mejor es que a continuación de cada número pongas sus unidades entre paréntesis, pudiéndose operar con las unidades como si fuesen números y teniendo en cuenta que cualquier fórmula ha de ser homogénea, por ejemplo:

M (moles/litro) = n (moles)/V (litros)

Y en la fórmula que relaciona moles y gramos, **n = m/MM** (n = número de moles y m = masa en g), MM representa la masa molar, que es el valor del mol en g/mol (¡y no la masa molecular, la cual se expresa en uma!), y así, al dividir g/g/mol = mol, pero al dividir g/uma no da moles.

PRUEBAS RESUELTAS

1. ESTRUCTURA ATÓMICA Y SISTEMA PERIÓDICO

Esta unidad temática incluye muy pocos problemas numéricos (algún cálculo referente al modelo atómico de Bohr), pero muchas cuestiones teóricas, como por ejemplo la diferencia entre órbita y orbital, el significado físico de los números cuánticos o preguntas muy diversas sobre estructuras electrónicas y propiedades periódicas.

A continuación figura un cuadro-resumen que puede ser útil como recordatorio sobre los números cuánticos:

NÚMERO CUÁNTICO	VALORES NUMÉRICOS	SIGNIFICADO FÍSICO SEGÚN EL MODELO ORBITAL
Principal (n)	1,2...n	Determina el tamaño (volumen) del orbital
Secundario (ℓ)	0,1,...n–1	Forma del orbital
Magnético (m)	$-\ell$...0...$+\ell$	Orientación espacial del orbital
De spin (s)	+1/2 ó –1/2	Número identificativo de cada e^- en el orbital

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Murcia, 1995, LOGSE)

La energía de los niveles electrónicos en el átomo de hidrógeno viene dada (en Julios) por

$$E_n = -2{,}18 \cdot 10^{-18}/n^2$$

Si el electrón de un átomo de hidrógeno pasa del nivel n = 3 al nivel n = 1, ¿se producirá absorción o desprendimiento de energía? Calcule el valor de esa energía. Si esa transición se produce simultáneamente en un mol de átomos, ¿cuánto valdría la energía total involucrada?

Hay liberación de energía —en forma de radiación—, ya que el electrón pasa de un nivel de energía superior a otro inferior:

$$E_3 - E_1 = (-2{,}18 \cdot 10^{-18}/3^2) - (-2{,}18 \cdot 10^{-18}/1^2) = 1{,}94 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Y para 1 mol de átomos:

$$E = 1{,}94 \cdot 10^{-18} (\text{J/átomo}) \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} (\text{átomos/mol}) = 1{,}17 \cdot 10^6\ \text{J/mol}$$

Ejercicio 2 (Zaragoza, 1994)

Indique los posibles valores de los tres primeros números cuánticos correspondientes a los orbitales 2p y 4d.

2p: n = 2, y por ser orbital p, ℓ = 1, con lo que m puede valer –1, 0 y +1. Por tanto, los números que definen los tres orbitales 2p son: (2, 1, –1), (2, 1, 0) y (2, 1, +1).

4d: Análogamente, n = 4, y por ser orbital d, ℓ = 2, con lo que m puede valer –2, –1, 0, +1 y +2, o sea, los números son: (4, 2, –2), (4, 2, –1), (4, 2, 0), (4, 2, +1) y (4, 2, +2).

Ejercicio 3 (Madrid, 1994)

Indique, razonadamente, el número de elementos existentes en el cuarto período del Sistema Periódico.

QUÍMICA

En este período se ocupan el orbital 4s (2 e^-), los 5 orbitales 3d (10 e^-) y los 3 orbitales 4p (6 e^-), es decir, en total $2+10+6=18$ e^-, correspondiendo 18 elementos.

Ejercicio 4 (Cantabria, 1994; Castilla-La Mancha, 1995)

El primer y segundo potencial de ionización para el átomo de litio son, respectivamente: 520 y 7.300 kJ/mol. Razone: a) La gran diferencia que existe entre ambos valores de energía. b) ¿Qué elemento presenta la misma configuración electrónica que la primera especie iónica? c) ¿Cómo varía el potencial de ionización para los elementos del mismo grupo?

a) En el primer potencial se parte del átomo de Li y se forma el ión Li^+, y en el segundo potencial se parte de dicho ión, muy estable por tener estructura tipo gas noble, y por tanto hace falta mucha energía para arrancarle un e^-.

b) El ión Li^+ posee dos e^-, al igual que el He.

c) Dentro de un grupo —por ejemplo, alcalinos— el potencial disminuye de arriba abajo porque el e^- externo está cada vez menos atraído y es más fácil de arrancar.

Ejercicio 5 (Madrid, 1994)

Escriba la configuración electrónica en estado fundamental de: a) Un elemento con tres electrones en un orbital p. b) Un elemento de transición. c) Un alcalino-térreo. d) Un elemento del grupo 18. ¿Cuáles de ellos tienen electrones desapareados?

a) El enunciado debería decir tres electrones *en orbitales p*, y la configuración es: $1s^2 2s^2 2p^1 2p^1 2p^1$.

b) En los elementos de transición se están ocupando orbitales d, por ejemplo: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^1$.

c) Los alcalino-térreos (grupo II) tienen dos e^- en el último nivel, tal como: $1s^2 2s^2$.

d) Corresponde a los gases nobles, como por ejemplo: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$, que corresponde al Kr.

A la vista de las estructuras electrónicas, sólo hay electrones desapareados en *a)* y *b)*.

Ejercicio 6 (Zaragoza, 1995, LOGSE)

Dadas las siguientes especies: ión fluoruro, ión sodio, neón; a) escriba la configuración electrónica de los mismos. b) Justifique cuál de ellos tendrá menor radio. Números atómicos: F = 9; Na = 11; Ne = 10.

a) ${}_9F^-$: $1s^2 2s^2 2p^6$ (con un e^- más que el átomo neutro).
${}_{11}Na^+$: $1s^2 2s^2 2p^6$ (con un e^- menos que el átomo neutro).
${}_{10}Ne$: $1s^2 2s^2 2p^6$.

b) Como todas las estructuras son isoelectrónicas (poseen el mismo número de e^-), el menor tamaño corresponde a aquella estructura con mayor carga nuclear (al haber más protones en el núcleo los e^- son atraídos con mayor fuerza), o sea, en nuestro caso, el Na^+.

2. ENLACE QUÍMICO

Es un bloque temático muy extenso y cuyas bases teóricas debes estudiar con detenimiento, ya que se presta a una gran variedad de cuestiones razonadas, como predecir tipos de enlace, geometría de las moléculas o propiedades de las redes cristalinas; puede servir como síntesis el siguiente esquema sobre tipos de enlace:

TIPO DE ENLACE	CARACTERÍSTICA FUNDAMENTAL	TIPO DE RED	PROPIEDADES DE LAS SUSTANCIAS
IÓNICO	*Transferencia* de e^- entre átomos con electronegatividades muy diferentes («metal + no metal»)	IÓNICA Nudos con iones + y – que se unen entre sí por fuerzas de tipo electrostático	$NaCl$, Al_2O_3 *Sólidos de alto P.F. *Solubles en agua *Conductores (fundidos o disueltos)

QUÍMICA

TIPO DE ENLACE	CARACTERÍSTICA FUNDAMENTAL	TIPO DE RED	PROPIEDADES DE LAS SUSTANCIAS
COVALENTE	*Compartición* de e^- entre átomos con electronegatividades semejantes y altas («no metal + no metal»)	MOLECULAR Nudos con moléculas que se unen entre sí por fuerzas débiles de Van der Waals	I_2, productos orgánicos *Sólidos de bajo P.F. *Insolubles en agua pero solubles en éter *No conductores
		ATÓMICA Nudos con átomos que se unen entre sí por enlace covalente muy fuerte	C (diamante), Si *Sólidos de muy alto P.F. *Insolubles *No conductores
METÁLICO	*Movilidad* de e^- entre átomos con electronegatividades semejantes y bajas («metal + metal»)	METÁLICA Nudos con restos + que se unen entre sí por enlace metálico relativamente fuerte	Na, Fe *Sólidos de P.F. PUNTO DE FUSIÓN variable *Brillo metálico *Conductores

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Madrid, 1994)

El cloruro de sodio y el cloruro de magnesio son dos sólidos iónicos. Justifique cuál de ellos será más duro y cuál tendrá mayor punto de fusión.

Será el compuesto con mayor **ENERGÍA RETICULAR**, la cual resulta ser proporcional a la relación carga/radio de los iones constituyentes.

Los iones son Na^+ y Cl^- en NaCl y Mg^{2+} y Cl^- en $MgCl_2$: el anión Cl^- se repite en ambos compuestos, por lo que no se tiene en cuenta, y de los cationes, el Mg^{2+} tiene más carga y menos radio que el Na^+, con lo que la relación carga/radio del Mg^{2+} es mayor, y la energía reticular del $MgCl_2$ es entonces también mayor.

Ejercicio 2 (Zaragoza, 1995)

Dados los siguientes elementos o compuestos: manganeso, iodo, cloruro de potasio, benceno y óxido de bario, indique razonadamente qué tipo de fuerzas o enlaces tendría que romper si quisiera fundir cada una de estas sustancias.

Mn: forma una red metálica (nudos ocupados por restos atómicos positivos que se unen mediante enlace metálico).

I_2 y benceno: redes moleculares (moléculas que se unen entre sí por débiles fuerzas intermoleculares).

KCl y BaO: redes iónicas (iones de distinto signo unidos por fuerzas electrostáticas, el enlace iónico).

Ejercicio 3 (Madrid, 1995)

a) Justifique si las siguientes moléculas son polares o no polares: cloruro de hidrógeno, iodo y diclorometano. b) Comente la naturaleza de las fuerzas intermoleculares presentes en cada caso.

HCl: molécula polar, por ser una molécula diatómica heteronuclear. Las fuerzas intermoleculares serán, pues, interacciones dipolo-dipolo, y también fuerzas de London, que siempre existen.

I_2: molécula apolar, por ser una molécula diatómica homonuclear. Sólo pueden existir las fuerzas de London, importantes al ser muy grande la masa molecular (el iodo es un sólido a temperatura ordinaria).

CH_2Cl_2: molécula polar, que deriva del CH_4 al sustituir dos H por dos Cl, con lo que la suma vectorial de los momentos dipolares de cada enlace da resultante no nula. Sobre las fuerzas intermoleculares, son del mismo tipo que en HCl.

Ejercicio 4 (Zaragoza, 1995)

Dados los compuestos HCl y Na_2SO_4, razone: a) ¿En qué tipo de compuestos los clasificaría: covalentes, iónicos o metálicos? b) ¿Qué estado de agregación sería previsible para ellos a temperatura ambiente?

HCl: compuesto covalente, al ser pequeña la diferencia de electronegatividades entre H y cualquier otro elemento. Sería gas, al no ser grandes las fuerzas intermoleculares.

Na_2SO_4: compuesto iónico, al estar formado por los iones Na^+ y SO_4^{2-}. Será un sólido de alto punto de fusión, como todos los compuestos iónicos.

3. TERMODINÁMICA QUÍMICA

En este tercer bloque debes dominar:

A) **Cálculos numéricos sobre entalpías de reacción**

- A veces es un simple **cálculo estequiométrico**, referido al término energético de la reacción.
- Frecuentemente, el cálculo está basado en una **aplicación directa** de la expresión:
  ΔH^0 (reacción) $= \sum \Delta H_f^0$ (productos) $- \sum \Delta H_f^0$ (reactivos).
  Recuerda que ΔH_f^0 para cualquier elemento vale 0.

B) **Cuestiones razonadas sobre espontaneidad de reacciones**

Utilizando la ecuación: $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, se determina el signo de ΔG: si $\Delta G < 0$, el proceso es espontáneo (si $\Delta G > 0$, el proceso es no espontáneo, y si $\Delta G = 0$ el sistema ha alcanzado el equilibrio).

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Madrid, 1994)

La entalpía de formación del amoníaco es $\Delta H° = -46{,}2$ kJ/mol. Calcule el calor de reacción cuando se forman tres litros de amoníaco, medidos en condiciones normales. DATOS. R = 0,082 atm · l/K · mol. Masas atómicas: N = 14; H = 1.

moles de $NH_3 = 3\ (l)/22{,}4\ (l/mol) = 0{,}134$ mol

Y si cada mol libera (signo negativo de ΔH) 46,2 kJ, el calor pedido es: $\Delta H = 0{,}134\ (mol) \cdot (-46{,}2)\ (kJ/mol) = -6{,}19$ kJ.

Ejercicio 2 (Murcia, 1995, LOGSE)

Para la reacción de obtención del aluminio a partir de la bauxita (a 25°C): $Al_2O_3(s) = 2Al(s) + 3/2\ O_2(g)$, se sabe $\Delta H = +1675{,}7$ kJ/mol. Calcule la cantidad de energía calorífica necesaria para obtener seis latas de aluminio para cerveza, cada una de ellas con un peso de 13,5 g. Peso atómico del aluminio: 27 g/mol.

+1.675,7 kJ/mol es el calor necesario para destruir cada mol de Al_2O_3, que al tiempo produce 2 moles de Al, o sea, 2(mol) · 27(g/mol) = 54 g.

Como 4 latas son: 4 · 13,5 = 54 g, la energía pedida vale también +1675,7 kJ.

Ejercicio 3 (Extremadura, 1994)

La entalpía estándar de formación del dióxido de carbono (g) es −393,5 kJ/mol, la del agua líquida −285,8 kJ/mol y la del metano (g) −748,0 kJ/mol. a) ¿Cuál es la variación de entalpía estándar de la reacción de combustión del gas metano? b) ¿Cuántas calorías se desprenden (o absorben, decídalo) al quemar 10 g de metano? Pesos atómicos: H = 1,0; C = 12,0; O = 16,0. 1 Julio = 0,239 calorías.

a) $CH_4(g) + 2O_2(g) \longrightarrow CO_2(g) + 2H_2O\ (l)$

$\Delta H°(\text{reacción}) = \sum \Delta H_f°\ (\text{productos}) - \sum \Delta H_f°\ (\text{reactivos})$

$\Delta H° = [(-393{,}5) + 2 \cdot (-285{,}8)] - [(-748) + 2 \cdot 0] = -217{,}1$ kJ/mol

$$\frac{1\ \text{mol}\ CH_4 = 16{,}0\ (g)}{-217{,}1\ (kJ) = -217{,}1 \cdot 1000 \cdot 0{,}239^*(cal)} = \frac{10\ (g)}{x(cal)} \Rightarrow x = -3{,}24 \cdot 10^4\ \text{cal}$$

Como vemos, el resultado es negativo, luego es un calor liberado.

Ejercicio 4 (Madrid, 1994)

Calcule el calor de formación del acetileno (etino), conocidos los calores de formación del $H_2O(l)$ y del CO_2, así como el calor de combustión del acetileno.

DATOS: $\Delta H_f°$ $H_2O(l) = -285{,}8$ kJ/mol; $\Delta H_f°$ $CO_2(g) = -393{,}13$ kJ/mol; $\Delta H°_{\text{COMBUSTIÓN ETINO}} = -1.300$ kJ/mol.

$C_2H_2(g) + 5/2\ O_2(g) \longrightarrow 2CO_2(g) + H_2O(l)$

ΔH° (reacción) = $\Sigma \Delta H_f^\circ$ (productos) $-\Sigma \Delta H_f^\circ$ (reactivos)

En este caso el primer miembro de la ecuación es dato, y por tanto:

$-1.300 = [2 \cdot (-393{,}13) + (-285{,}8)] - [x + (5/2) \cdot 0]$; $x = 227{,}9$ kJ/mol

Ejercicio 5 (La Laguna, 1995)

Sabiendo que los calores de combustión del $H_2(g)$, $C(s)$ y $CH_4(g)$ son, respectivamente: –68,40, –95,29 y –200,1 kcal/mol: a) Escribir las ecuaciones químicas de las reacciones mencionadas; b) Calcular el calor de formación del CH4; ¿es éste un proceso endotérmico?, ¿por qué?

a) (I) $H_2(g) + 1/2\ O_2(g) = H_2O\ (l)$
(II) $C\ (s) + O_2(g) = CO_2(g)$
(III) $CH_4(g) + 2O_2(g) = CO_2(g) + 2H_2O\ (l)$

b) $C\ (s) + 2H_2(g) = CH_4(g)$ ¿ΔH?

Para calcular la ΔH de la reacción anterior se aplica la ley de Hess combinando las ecuaciones (I), (II) y (III):

$\Delta H = \Delta H_{II} + 2\ \Delta H_I - \Delta H_{III} = -95{,}29 + 2 \cdot (-68{,}40) - (-200{,}1)$
$\Delta H = -31{,}99$ kJ/mol < 0, luego es un proceso exotérmico.

Ejercicio 6 (Madrid, 1993; Zaragoza, 1995, LOGSE)

Explique cómo variará con la temperatura la espontaneidad de una reacción en la que $\Delta H^\circ < 0$ y $\Delta S^\circ < 0$, suponiendo que ambas magnitudes son constantes con la temperatura.

Como sabemos, un proceso es espontáneo si $\Delta G^\circ < 0$, siendo $\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$.

I) A baja temperatura, $T\Delta S^\circ << \Delta H^\circ$, y por lo tanto, $\Delta G^\circ \sim \Delta H^\circ$; en nuestro caso $\Delta H^\circ < 0$, o sea, $\Delta G^\circ < 0$. Conclusión: a baja temperatura el proceso es espontáneo.

II) A alta temperatura, $T\Delta S^\circ >> \Delta H^\circ$, resultando $\Delta G^\circ \sim -T\Delta S^\circ$; en nuestro caso $\Delta S^\circ < O$, es decir, $\Delta G^\circ > 0$. Conclusión: a alta temperatura el proceso no es espontáneo.

III) A temperatura intermedia, $\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$ y *a priori* no se puede despreciar un término frente al otro; en nuestro caso, tanto ΔH° como ΔS° son negativos, resultando el primer término negativo pero el segundo positivo. Conclusión: a temperatura intermedia hacen falta los datos numéricos concretos para calcular ΔG° y poder predecir así la espontaneidad del proceso.

4. CINÉTICA Y EQUILIBRIO QUÍMICO

Acerca de los contenidos de CINÉTICA QUÍMICA, se plantean con frecuencia cuestiones teóricas sobre el concepto de **velocidad de reacción** y los factores de los cuales depende (muy especialmente los factores temperatura y catalizadores).

En cuanto al EQUILIBRIO QUÍMICO, se proponen cuestiones teóricas sobre aplicación de la **ley de Le Chatelier** y problemas sobre **cálculo de K_c y K_p**. A menudo se incluyen cuestión teórica y problema numérico dentro del mismo ejercicio.

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Zaragoza, 1995)

Qué efecto tendrá sobre la concentración de equilibrio de SO_3 en la reacción: $2SO_2(g) + O_2 g) = 2SO_3(g)$, $\Delta H = -198$ kJ, cada uno de los siguientes cambios: a) Duplicar el volumen de la vasija de reacción. b) Aumentar la temperatura sin alterar el volumen.

a) Al aumentar el volumen, la presión total disminuye (se cumple la ley de Boyle) y el sistema se opone a dicha disminución desplazándose hacia el aumento de volumen, en este caso hacia la izquierda (según la reacción ajustada, 2 + 1 volúmenes de reactivos dan 2 volúmenes de productos), con lo cual la concentración de SO_3 disminuye.

b) Al aumentar la temperatura, el sistema se opone a dicho aumento desplazándose en sentido endotérmico, en este caso hacia la izquierda, con lo cual la concentración de SO_3 disminuye, igual que en el apartado anterior.

Ejercicio 2 (Madrid, 1995)

Supuesto comportamiento ideal de los gases en la síntesis del amoníaco, $N_2(g) + 3H_2(g) = 2NH_3(g)$. a) Exprese las constantes K_p y K_c para esta reacción y la relación entre ambas. b) ¿Cómo afectaría un aumento de presión, a temperatura constante, a la composición y a la constante de equilibrio K_p?

a)

$$K_c = \frac{[NH_3]^2}{[N_2]\,[H_2]^3}$$

$$K_p = \frac{(P_{NH_3})^2}{(P_{N_2})\,(P_{H_2})^3}$$

$$K_p = K_C\,(RT)^{\Delta n} = K_C (RT)^{2-(1+3)}$$

b) Al aumentar la presión, el sistema se opone a dicho aumento desplazándose hacia la disminución de volumen, en este caso hacia la derecha (según la reacción ajustada, 3 + 1 volúmenes de reactivos dan 2 volúmenes de productos), con lo cual aumenta la concentración de amoníaco; en cambio, el valor de K_p no varía porque la constante de equilibrio sólo depende de la temperatura.

Ejercicio 3 (La Laguna, 1995)

A 425ºC, para la reacción: $2H_2(g) + CO(g) = CH_3OH(g)$, $K_c = 300$. a) ¿Cuál es el valor de K_p?; b) Al alcanzar el equilibrio tenemos 0,1 moles de H_2 y 0,05 moles de CO, siendo 2 litros el volumen total, ¿cuál es la concentración de CH_3OH en el equilibrio? $R = 0,082$ atm · l/mol · K.

a) $K_p = K_c\,(RT)^{\Delta n} = 300[0,082 \cdot (425+273)]^{1-(2+1)} = 0,0916$

b) $2H_2(g) + CO(g) = CH_3OH(g)$

concentraciones
de equilibrio $\quad 0,1/2 \quad 0,05/2 \quad x$

$$K_c = \frac{[CH_3OH]}{[H_2]^2\,[CO]} = \frac{x}{\left(\frac{0,1}{2}\right)^2 \left(\frac{0,05}{2}\right)} = 300$$

$$x = 0,0188 \text{ mol/l}$$

Ejercicio 4 (Madrid, 1994)

La constante de equilibrio, K_c, de la reacción: $H_2(g) + CO_2(g) = H_2O(g) + CO(g)$ es 4,2 a 1650 °C. Para iniciarla se inyectan 0,80 moles de H_2 y 0,80 moles de CO_2 en un recipiente de 5,0 l. a) Calcule la concentración de cada sustancia en el equilibrio. b) ¿Tendrá distinto valor K_p de K_c?

a) $H_2(g) + CO_2(g) = H_2O(g) + CO(g)$

concentraciones
de equilibrio $\quad 0,8/5 - x \quad 0,8/5 - x \quad x \quad x$

$$K_c = \frac{[H_2O]\,[CO]}{[H_2]\,[CO_2]} = \frac{x \cdot x}{(0,16 - x)\,(0,16 - x)} = 4,2$$

Resolviendo, $x = 0,11$ mol/l, y por tanto:

$[H_2O] = [CO] = x = 0,11$ mol/l; $[H_2] = [CO_2] = 0,16 - x = 0,11$ mol/l

b) En este caso, al ser $\Delta n = (1+1) - (1+1) = 0$, $K_p = K_c$.

Ejercicio 5 (Oviedo, 1995, COU y Bachillerato LOGSE)

A 425 °C la constante de equilibrio para la formación de un mol de HI a partir de H_2 e I_2, K_p es 7,45 y su calor de formación, ΔH_f, +26,48 kJ. a) En un recipiente, a 425 °C, se introducen $H_2(g)$, $I_2(g)$ y $HI(g)$, con presiones parciales de 1 atm, ¿estarán en equilibrio?, si no lo están, indique el sentido en que evolucionará el sistema hasta alcanzarlo. b) Indique cómo afectarán al equilibrio, a la constante de equilibrio y a la velocidad de reacción, los siguientes cambios: i) Aumento de la cantidad de H_2. ii) Disminución de la temperatura. iii) Eliminación parcial de HI. iv) Adición de un catalizador positivo.

a) $1/2\,H_2(g) + 1/2\,I_2(g) = HI(g)$

$$K_p = \frac{P_{HI}}{(P_{H_2})^{1/2}\,(P_{I_2})^{1/2}}$$

Con presiones parciales de 1 atm, saldría $K_p = 1$, pero al ser $K_p > 1$, tales presiones no son las de equilibrio, sino que la presión parcial de HI debe

QUÍMICA

aumentar y las presiones de H_2 y I_2 deben disminuir hasta alcanzar el equilibrio, o sea, el sistema evoluciona hacia la derecha.

b) i) Al aumentar $[H_2]$, se rompe el equilibrio, y el sistema evoluciona en el sentido de oponerse a tal aumento, en nuestro caso hacia la derecha, aumentando la velocidad en este sentido, pero la constante de equilibrio no varía al no variar la temperatura.

ii) Al disminuir la temperatura, el sistema se opone desplazándose en sentido exotérmico, en nuestro caso hacia la izquierda, y al bajar la temperatura disminuyen tanto la constante de equilibrio como la velocidad de reacción.

iii) Se parece al caso i), ya que, al disminuir [HI], el sistema se opone a dicha disminución desplazándose hacia la derecha, aumentando la velocidad en este sentido pero sin variar la constante de equilibrio.

iv) Un catalizador positivo aumenta la velocidad de reacción, la velocidad con que se alcanza el equilibrio, pero una vez alcanzado éste no afecta a la composición del equilibrio, ni por tanto a la constante de equilibrio.

Ejercicio 6 (Madrid, 1990 y 1995)

El tetróxido de dinitrógeno es un gas incoloro que se descompone en dióxido de nitrógeno gaseoso, de color rojo. Sabiendo que a 25ºC la constante $K_c = 0{,}125$, escriba la reacción ajustada y calcule el porcentaje de tetróxido disociado en dióxido cuando se encierran 0,03 moles de tetróxido de dinitrógeno en un recipiente de 1 l, a 25ºC.

Inicialmente, $[N_2O_4] = 0{,}03(\text{mol})/1(\text{l}) = 0{,}03$ mol/l, de modo que si x es el grado de disociación (tanto por uno de moles disociados) tenemos:

	$N_2O_4(g)$	$= 2NO_2(g)$
concentraciones de equilibrio	$0{,}03(1-x)$	$2 \cdot 0{,}03\,x$

$$K_c = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} = \frac{(0{,}06x)^2}{0{,}03\,(1-x)} = 0{,}125 \Rightarrow x = 0{,}625$$

Por lo tanto, el porcentaje de disociación será:

$$0{,}625 \cdot 100 = 62{,}5\%$$

5. PROCESOS ÁCIDO-BASE

Las **cuestiones teóricas** habituales suelen tratar acerca de los conceptos de ácido y base (véase cuadro), el concepto de pH y los indicadores, la hidrólisis y las disoluciones reguladoras.

CONCEPTO DE ARRHENIUS	CONCEPTO DE BRÖNSTED	CONCEPTO DE LEWIS
ÁCIDO Sustancia que en agua origina H^+	ÁCIDO Sustancia dadora de H^+	ÁCIDO Sustancia que acepta pares de e^- para compartir
BASE Sustancia que en agua origina OH^-	BASE Sustancia aceptora de H^+	BASE Sustancia que aporta pares de e^- para compartir
PROCESO ÁCIDO-BASE Neutralización entre H^+ y OH^-	PROCESO ÁCIDO-BASE Transferencia de H^+ del ácido a la base	PROCESO ÁCIDO-BASE Formación de enlace covalente coordinado

En cuanto a **cálculos numéricos**, son frecuentes los cálculos de pH en disoluciones de ácidos y bases, fuertes y débiles, y también sobre volumetrías ácido-base.

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Murcia, 1995, LOGSE)

Clasifique, cuando sea posible, las siguientes especies como ácidos o bases de Brönsted-Lowry, escribiendo reacciones que justifiquen sus afirmaciones: HSO_4^-; NH_4^+; CH_3-O-CH_3; CH_3-CH_3; I^-.

El ión hidrógenosulfato es un ácido, ya que cede protones al agua para dar iones sulfato: $HSO_4^- + H_2O = SO_4^{2-} + H_3O^+$.

El ión amonio es un ácido por la misma razón, pasando a amoníaco: $NH_4^+ + H_2O = NH_3 + H_3O^+$.

QUÍMICA

El dimetiléter puede aceptar protones por los pares de electrones sin compartir sobre el oxígeno, luego es una base:

$$CH_3-\ddot{O}-CH_3+H_2O=CH_3-O^+H-CH_3+OH^-$$

El etano no se puede clasificar ni como ácido ni como base, según el concepto de Brönsted-Lowry.

El ión ioduro es una base porque puede aceptar protones del agua, dando ácido iodhídrico: $I^-+H_2O=HI+OH^-$.

Ejercicio 2 (Zaragoza, 1995)

Indique razonadamente si son ácidas, básicas o neutras cada una de las disoluciones acuosas de los siguientes compuestos: a) bromuro de hidrógeno, b) cloruro de amonio. c) hidróxido de sodio, y d) acetato de sodio. Formule las ecuaciones iónicas que justifiquen su respuesta.

a) HBr en disolución acuosa se disocia dando H^+ y Br^-: $HBr \longrightarrow H^++Br^-$, luego es un ácido según Arrhenius.

b) NH_4Cl en disolución acuosa se disocia dando NH_4^+ y Cl^-; el ión amonio sufre hidrólisis por proceder de base débil, el amoníaco: $NH_4^++H_2O=NH_3+H_3O^+$, y, debido a los iones hidronio, la disolución es ácida.

c) NaOH en disolución acuosa se disocia dando Na^+ y OH^-: $NaOH \longrightarrow Na^++OH^-$, luego es una base según Arrhenius.

d) $CH_3-COONa$ en disolución acuosa se disocia dando CH_3-COO^- y Na^+; el ión acetato se hidroliza porque procede de ácido débil, el ácido acético: $CH_3-COO^-+H_2O=CH_3-COOH+OH^-$, y como se originan iones hidróxido la disolución es básica.

Ejercicio 3 (Madrid, 1995)

Defina los conceptos de ácido y base según la teoría de Arrhenius. Clasifique por su acidez, de mayor a menor, las siguientes disoluciones: a) pH = 10. b) pOH = 5. c) [OH⁻] = 10⁻¹²M. d) [H⁺] = 10⁻⁶M.

Según Arrhenius, ácido es toda sustancia que en disolución acuosa se disocia liberando protones (iones H^+), y base si libera iones hidróxido (OH^-).

a) pH = 10.
b) pOH = 5; pH = 14 − pOH = 9.
c) $[OH^-]=10^{-12}$ M; pOH = − log[OH⁻] = 12; pH = 14 − pOH = 2.
d) $[H^+]=10^{-6}$ M; pH = − log[H⁺] = 6.

El orden pedido es: c > d > b > a (mayor acidez, menor pH).

Ejercicio 4 (Madrid, 1994)

Una disolución de un ácido monoprótico en concentración 10^{-2}M, se encuentra ionizado en un 3%. Calcular: a) El pH de la disolución. b) La constante de disociación de dicho ácido.

	$HA + H_2O = A^- + H_3O^+$		
concentraciones de equilibrio	$c(1-\alpha)$	$c\alpha$	$c\alpha$

$$[H_3O^+]=c\alpha=10^{-2}\cdot 0{,}03=3\cdot 10^{-4}\text{ M};\ pH=-\log[H_3O^+]=3{,}5$$

$$K_a=\frac{[A^-][H_3O^+]}{[HA]}=\frac{c\alpha\cdot c\alpha}{c(1-\alpha)}=\frac{c\alpha^2}{1-\alpha}=\frac{10^{-2}\cdot 0{,}03^2}{1-0{,}03}=9{,}3\cdot 10^{-6}$$

Ejercicio 5 (Extremadura, 1995)

Se prepara una disolución disolviendo 180 g de hidróxido de sodio en 400 g de agua. La densidad de la disolución resultante es de 1,340 g/cm³. a) Calcular la molaridad de la disolución. b) Calcular los gramos de hidróxido de sodio necesarios para preparar 1 litro de disolución 0,1 M. Masas atómicas en u.m.a.: Na = 23,0; O = 16,0; H = 1,0.

a) Por definición de molaridad, M = n/V, donde:

$$n\text{ (moles de soluto)}=\frac{180\text{ (g)}}{40{,}0\text{ (g/mol)}}=4{,}50\text{ mol}$$

$$V\text{ (litros de disolución)}=\frac{m}{D}=\frac{(180+400)\text{ (g)}}{1{,}340\text{ (g/cm}^3)}=433\text{ cm}^3=0{,}433\ \ell$$

$$M=4{,}50\text{ (mol)}/0{,}433\ (\ell)=10{,}4\text{ mol/l}$$

b) 0,1 M implica que hay 0,1 moles en 1 litro, o sea,
Gramos de NaOH: 0,1 (mol) · 40,0 (g/mol) = 4,0 g

Ejercicio 6 (La Laguna, 1993 y 1995)

Se dispone de una disolución de HNO_3 cuya riqueza es del 70 % y su densidad es 1,42 g/ml. a) ¿Cuál es la molaridad de dicha disolución? b) ¿Cuántos gramos de esta disolución serán necesarios para preparar 300 ml de ácido nítrico 2,5 M? Masas atómicas: H = 1,0; N = 14; O = 16.

a) Por definición de molaridad, M = n/V, donde:

$$n \text{ (moles de soluto)} = \frac{70 \text{ (g)}}{63{,}0 \text{ (g/mol)}} = 1{,}11 \text{ mol}$$

$$V \text{ (litros de disolución)} = \frac{m}{D} = \frac{100 \text{ (g)}}{1{,}42 \text{ (g/ml)}} = 70{,}4 \text{ ml} = 0{,}0704\ \ell$$

M = 1,11 (mol)/0,0704 (l) = 15,8 mol/l

b) Moles de HNO_3: n = M · V = 2,5 (mol/l) · 0,3 (l) = 0,75 mol
Gramos de HNO_3: 0,75 (mol) · 63,0 (g/mol) = 47,25 g
Gramos de disolución: 47,25 (g) · 100/70 = 67,5 g
Volumen de disolución: 67,5 (g)/1,42 (g/ml) = 47,5 ml

Ejercicio 7 (Madrid, 1995)

Calcule el pH de las disoluciones obtenidas al mezclar: a) 400 ml de ácido clorhídrico 0,01 M y 100 ml de hidróxido sódico 0,10 M. b) 400 ml de ácido clorhídrico 0,10 M y 100 ml de hidróxido sódico 0,10 M.

a) $HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O$

Moles de HCl: n = M · V = 0,01 (mol/l) · 0,400 (l) = $4{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol
Moles de NaOH: n = 0,10 (mol/l) · 0,100 (l) = $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol

Así pues, quedan sin neutralizar $1{,}0 \cdot 10^{-2} - 4{,}0 \cdot 10^{-3} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ moles de NaOH en un volumen de 0,500 l, es decir:

$[OH^-] = [NaOH] = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ (mol)/0,500 (l) = 0,012 mol/l
$pOH = -\log[OH^-] = 1{,}9$; $pH = 14 - pOH = 12{,}1$

b) Al ser las concentraciones iguales, quedan sin neutralizar 400–100 = 300 ml de HCl 0,10 M en un volumen de 500 ml, y por tanto:

$$[H^+] = [HCl] = \frac{n}{V} = \frac{M \cdot V}{V} = \frac{0{,}10 \text{ (mol/l)} \cdot 0{,}300 \text{ (l)}}{0{,}500 \text{ (l)}} = 0{,}060 \text{ mol/l}$$

$pH = -\log [H^+] = 1{,}2$

Ejercicio 8 (Valencia, 1995)

i) ¿Qué sucede cuando se disuelve cianuro de sodio en agua? Escriba la ecuación de la reacción y analícela desde el punto de vista ácido-base de Brönsted. ii) Calcule el pH de una disolución 0,1 M de cianuro de sodio sabiendo que la constante de acidez del cianuro de hidrógeno es $K_a = 4{,}9 \cdot 10^{-10}$. $K_w = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$.

i) Cuando una sal se disuelve en agua, la porción disuelta está disociada en sus iones (aquí, Na^+ y CN^-); el ión CN^- se hidroliza porque procede de un ácido débil (HCN): $CN^- + H_2O = HCN + OH^-$, y según esta reacción, el ión cianuro es una base porque acepta protones del agua, o sea, la disolución de cianuro de sodio tiene carácter básico.

ii) $CN^- + H_2O = HCN + OH^-$

$$K_b = \frac{[HCN]\,[OH^-]}{[CN^-]} = \frac{K_w}{K_a} \approx \frac{[OH^-]^2}{[sal]}$$

$$[OH^-] = \sqrt{\frac{K_w}{K_a}\,[sal]} = \sqrt{\frac{1{,}0 \cdot 10^{-14}}{4{,}9 \cdot 10^{-10}} \cdot 0{,}1} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\text{ M}$$

$pOH = -\log [OH^-] = 2{,}85$; $pH = 14 - pOH = 11{,}15$

6. PROCESOS REDOX. ELECTROQUÍMICA

En cada una de las dos partes conviene destacar lo siguiente:

SOBRE AJUSTE DE REACCIONES REDOX: hay que repasar el **método del ión-electrón**; a menudo se plantean cuestiones de tipo conceptual o cálculos estequiométricos.

QUÍMICA

SOBRE ELECTROQUÍMICA: debes saber diferenciar bien entre **procesos galvánicos y electrolíticos**, calcular el **potencial de una pila** y aplicar las **leyes de Faraday** a supuestos numéricos.

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Extremadura, 1995)

En ciertas condiciones, el sulfuro de hidrógeno reacciona con ácido nítrico, para producir azufre, agua y nitrógeno molecular. a) Ajuste la reacción. b) Indique los sistemas oxidante y reductor.

a) $H_2S + HNO_3 = S + H_2O + N_2$

$$H_2S = S + 2H^+ + 2e^- \ (x\ 5)$$
$$2NO_3^- + 12H^+ + 10e^- = N_2 + 6H_2O$$
$$\overline{5H_2S + 2NO_3^- + 12H^+ = 5S + 10H^+ + N_2 + 6H_2O}$$
$$5H_2S + 2HNO_3 = 5S + 6H_2O + N_2$$

b) El oxidante es el NO_3^-, que se reduce a N_2 ganando e^-, y el H_2S el reductor, porque se oxida a S al perder e^-.

Ejercicio 2 (Zaragoza, 1995)

Cuando se trata cloruro de sodio con permanganato de potasio en solución ácida se produce la siguiente reacción: $MnO_4^- + Cl^- + H^+ = Mn^{2+} + Cl_2 + H_2O$. a) Ajuste la ecuación redox por el método ión electrón. b) Calcule el número de gramos de cloro gaseoso que se pueden obtener a partir de 10,0 g de $KMnO_4$. Masas atómicas: K = 39; Mn = 55; O = 16; Cl = 35,5.

a) $MnO_4^- + Cl^- + H^+ = Mn^{2+} + Cl_2 + H_2O$

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4H_2O \ (x\ 2)$$
$$2Cl^- = Cl_2 + 2e^- \ (x\ 5)$$
$$\overline{2MnO_4^- + 16H^+ + 10Cl^- = 2Mn^{2+} + 8H_2O + 5Cl_2}$$

b) Puesto que por cada 2 moles de MnO_4^- se producen 5 moles de Cl_2:

$$\frac{2\,\text{mol}\,KMnO_4 = 2 \cdot 158\ (g)}{5\,\text{mol}\,Cl_2 = 5 \cdot 71\ (g)} = \frac{10{,}0\ (g)}{x\ (g)} \Rightarrow x = 11{,}2\ g\ Cl_2$$

Ejercicio 3 (Sevilla, 1995)

*El ión Sn^{2+} es oxidado a ión Sn^{4+} en medio ácido por las disoluciones acuosas que contienen iones permanganato, pasando éste a ión Mn^{2+} más agua; **i)** escribir y ajustar la reacción de óxido-reducción que tiene lugar; **ii)** calcular el equivalente-gramo del cloruro de Sn(II) para esta reacción; **iii)** calcular los gramos de cloruro Sn (II) que habrá que disolver en agua para obtener 750 mL de disolución 0,01 M. DATOS: masas atómicas: Cl = 35,5; Sn = 118,7.*

i) $Sn^{2+} + H^+ + MnO_4^- = Sn^{4+} + Mn^{2+} + H_2O$

$$Sn^{2+} = Sn^{4+} + 2e^- \ (x\ 5)$$
$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4H_2O \ (x\ 2)$$
$$\overline{5Sn^{2+} + 2MnO_4^- + 16H^+ = 5Sn^{4+} + 2Mn^{2+} + 8H_2O}$$

ii) Como cada mol de Sn^{2+} intercambia 2 moles de e^-:

$Eq(SnCl_2) = mol/2 = 189{,}7\ (g)/2 = 94{,}8\ g$

iii) Moles de $SnCl_2$: $n = M \cdot V = 0{,}01(mol/l) \cdot 0{,}750\,(l) = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ mol

Gramos de $SnCl_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ (mol) \cdot 189{,}7\ (g/mol) = 1{,}423\ g$

Ejercicio 4 (Madrid, 1994)

Suponiendo condiciones estándar, ¿reaccionarán el ión nitrato y cinc metálico en medio ácido para dar ión amonio e iones cinc? Razone la respuesta. En caso afirmativo, ajuste la reacción que tiene lugar entre ellos. DATOS: Potenciales normales: ión nitrato/ión amonio = 0,89V; ión cinc/cinc metálico = – 0,76V.

Se producirá la reacción espontáneamente si al construir la pila con los dos semielementos resulta $E° > 0$:

Ánodo (oxidación): $Zn = Zn^{2+} + 2e^-$ (x 4) $(E_1 = +0{,}76\ V)$
Cátodo (reducción): $NO_3^- + 10H^+ + 8e^- = NH_4^+ + 3H_2O$ $(E_2 = +0{,}89\ V)$

Pila (redox): $4Zn + NO_3^- + 10H^+ = 4Zn^{2+} + NH_4^+ + 3H_2O$ $(E° = +0{,}46\ V)$

Como $\Delta G° = -\ nFE°$, al ser $E° > 0$, $\Delta G° < 0$, y por tanto la reacción entre Zn y NO_3^- es espontánea.

Ejercicio 5 (Murcia, 1995)

Una disolución 0,01 M de iones Ag^+ se mezcla con un volumen igual de una disolución 2 M de iones Cu^{2+}, en presencia de una varilla de cobre metálico. Justifique si será espontánea la reacción: $2Ag^+(aq) + Cu(s) = 2Ag(s) + Cu^{2+}(aq)$. Potenciales normales: $Ag^+(aq)/Ag(s)$ +0,80 V; $Cu^{2+}(aq)/Cu(s)$ +0,34 V.

Análogamente al problema anterior:

Ánodo (oxidación): $Cu = Cu^{2+} + 2e^-$ $(E_1 = -0{,}34\ V)$
Cátodo (reducción): $Ag^+ + e^- = Ag$ (x 2) $(E_2 = +0{,}80\ V)$

Pila (redox): $Cu + 2Ag^+ = Cu^{2+} + 2Ag$ $(E° = +0{,}46\ V)$

En este caso, al no ser concentraciones 1 M, hay que aplicar la ecuación de Nernst para calcular el potencial, y como al mezclar volúmenes iguales las concentraciones se reducen a la mitad, tenemos:

$$E = E° - \frac{0{,}059}{n} \log \frac{[Cu^{2+}]}{[Ag^+]^2} = 0{,}46 - \frac{0{,}059}{2} \log \frac{\frac{2}{2}}{\left(\frac{0{,}01}{2}\right)^2}$$

$E = 0{,}32$ V.

Así pues, como $\Delta G = -\ nFE$, al ser $E > 0$, $\Delta G < 0$, luego la reacción redox es espontánea en sentido directo, o sea, entre Cu (s) y Ag^+ (aq).

Ejercicio 6 (Madrid, 1995)

En la electrólisis de una disolución acuosa que contiene sulfato de cinc y sulfato de cadmio se deposita todo el cinc y el cadmio, para lo cual se hace pasar una corriente de 10 amperios durante 2 horas, obteniéndose una mezcla de ambos metales de 35,44 g. Calcule el porcentaje en peso de zinc en la mezcla metálica. DATOS: Masas atómicas: Cd = 112,4; Zn = 65,4.

$$Q = I \cdot t = 10\,(A) \cdot 2 \cdot 3.600\,(s) = 72.000\ C$$

Según las leyes de Faraday de la electrólisis, para que se deposite 1 equivalente de sustancia hace falta 1 faraday de electricidad (96.500 C), de modo que llamando x a los gramos de Zn depositados:

$$\frac{1\ Eq\,(Zn + Cd)}{96.500\ (C)} = \frac{\dfrac{x\,(g\ Zn)}{65{,}44/2\ (g/Eq)} + \dfrac{35{,}44 - x\,(g\ Cd)}{112{,}4/2\ (g/Eq)}}{72.000\ (C)} \Rightarrow x = 9{,}03\ g$$

$$\%\,Zn = \frac{9{,}03}{35{,}44} \times 100 = 25{,}5\ \%$$

7. EQUILIBRIOS DE SOLUBILIDAD

Resaltan tres aspectos teórico-prácticos:

• RELACIÓN ENTRE SOLUBILIDAD Y PRODUCTO DE SOLUBILIDAD que **varía según la fórmula de la sustancia** poco soluble: así, con fórmula tipo AB, $K_s = s^2$; con tipo AB_2, $K_s = 4s^3$, etc.

• CONDICIÓN DE DISOLUCIÓN SATURADA Y CONDICIÓN DE PRECIPITACIÓN, que en el caso de una sustancia tipo AB son:

Disolución saturada: $[A^+]\,[B^-] = K_s$
Precipitación: $[A^+]\,[B^-] = K_s$

• EFECTO DE IÓN COMÚN: cuando a una disolución de una sustancia poco soluble se añade otra sustancia con algún ión común, **disminuye la solubilidad**, de acuerdo con el principio de Le Chatelier.

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Madrid, 1995)

La solubilidad del yoduro de plomo (II) en agua es de 922 mg/l. Calcule: a) La solubilidad de dicha sal en moles/l. b) Su producto de solubilidad. DATOS: Masas atómicas: I = 126,9; Pb = 207,2.

a) $PbI_2(s) = Pb^{2+}(ac) + 2I^-(ac)$

concentraciones de equilibrio: s, s, 2s

$$s = 922\ (mg/l) = 0{,}922\ (g/l) = \frac{0{,}922\ (g/l)}{461\ (g/mol)} = 2{,}00 \cdot 10^{-3}\ mol/l$$

b) $K_s = [Pb^{2+}][I^-]^2 = s \cdot (2s)^2 = 4s^3 = 4\,(2{,}00 \cdot 10^{-3})^3 = 3{,}20 \cdot 10^{-8}$

Ejercicio 2 (La Laguna, 1995)

La solubilidad del Ag_2CrO_4 en agua es $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ M. a) ¿Cuántos gramos de plata habrán disueltos en 1,3 litros de disolución? b) ¿Cuánto vale el producto de solubilidad de esta sal? Masas atómicas: Ag = 107,9; Cr = 52,0; O = 16,0.

a) $Ag_2CrO_4\ (s) = 2\,Ag^+\ (ac) + CrO_4^{2-}\ (ac)$

concentraciones de equilibrio: s, 2s, s

$$[Ag^+] = 2s = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ mol/l$$

Si en 1 litro hay disueltos $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ moles, es decir: $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ (mol) · 107,9 (g/mol) = 0,026 g, en 1,3 litros hay 1,3 veces más, o sea: 0,026 · 1,3 = 0,034 g.

b) $K_s = [Ag^+]^2\,[CrO_4^{2-}] = (2s)^2\, s = 4\,s^3 = 4\,(1{,}2 \cdot 10^{-4})^3 = 6{,}9 \cdot 10^{-12}$

Ejercicio 3 (Madrid, 1995)

Se tiene una disolución saturada de hidróxido de magnesio en equilibrio con su sólido. Calcule: a) La solubilidad del hidróxido de magnesio en agua, expresada en gramos por litro. b) La concentración de iones hidroxilo y el pH de dicha disolución. DATOS. Ks hidróxido de magnesio = $10^{-11,4}$. Masas atómicas: Mg = 24,3; O = 16; H = 1.

a) $Mg\,(OH)_2\ (s) = Mg^{2+}\ (ac) + 2OH^-\ (ac)$

concentraciones de equilibrio: s, s, 2s

$$K_s = [Mg^{2+}]\,[OH^-]^2 = s \cdot (2s)^2 = 4s^3;\ s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-11,4}}{4}} = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ mol/l$$

$1{,}0 \cdot 10^{-4}$ (mol/l) $= 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ (mol/l) · 58,3 (g/mol) $= 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ g/l

b) $[OH^-] = 2s = 2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-4} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\ mol/l$

$pOH = -\log[OH^-] = 3{,}7;\ pH = 14 - pOH = 10{,}3$

Ejercicio 4 (Valencia, 1995)

El producto de solubilidad del perclorato de potasio es $K_s = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$. Calcule cuántos gramos de este compuesto se disolverán, a esa temperatura, en 100 mL de: i) agua pura; ii) una disolución 0,2 M de cloruro potásico. Compare y comente los resultados obtenidos. A_r (K) = 39,1. A_r (Cl) = 35,45. A_r (O) = 16,0.

i) $KClO_4\ (s) = K^+\ (ac) + ClO_4^-\ (ac)$

concentraciones de equilibrio: s, s, s

$$K_s = [K^+]\,[ClO_4^-] = s \cdot s = s^2;\ s = \sqrt{K_s} = \sqrt{2{,}9 \cdot 10^{-3}} = 0{,}054\ mol/l$$

Si en 1 litro hay disueltos 0,054 moles, es decir: 0,054(mol) · 138,5 (g/mol) = 7,5 g, en 100 ml hay 0,75 g.

QUÍMICA

ii) Al añadir KCl, una sal soluble que suministra el ión común K^+, cambia la solubilidad, que llamaremos s':

$$K_s = [K^+][ClO_4^-] = (s'+0{,}2)\, s' \approx 0{,}2s';\ s' = \frac{K_s}{0{,}2} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{0{,}2} = 0{,}00145 \text{ mol/l}$$

Si en 1 litro hay disueltos 0,0145 moles, es decir: 0,0145(mol) · 138,5 (g/mol) = 2,0 g, en 100 ml hay 0,20 g; como vemos, la solubilidad disminuye por efecto de ión común (es válida la aproximación de despreciar s' frente a 0,2).

Ejercicio 5 (Sevilla, 1995)

Si se mezclan 10 mL de cloruro de bario con 40 mL de sulfato de sodio, ambos en concentraciones 0,1 M, indicar razonadamente si precipitará sulfato de bario. En caso afirmativo, calcular la cantidad precipitada. Cuáles serán las concentraciones molares para cada uno de los iones siguientes: cloruro, sodio, sulfato y bario, presentes en la disolución después de la precipitación si la hubiera. DATOS: valor del producto de solubilidad del sulfato de bario a 25°C, Ks = 1 · 10^{-10}; masas atómicas: O = 16; S = 32; Ba = 137,7.

La ionización de las sales es: $BaCl_2 \longrightarrow Ba^{2+} + 2Cl^-$, y $Na_2SO_4 \longrightarrow 2Na^+ + SO_4^{2-}$, por tanto:

$$[Ba^{2+}] = [BaCl_2] = \frac{n}{V} = \frac{M \cdot V}{V} = \frac{0{,}1\ (\text{mol/l}) \cdot 0{,}010\ (\text{l})}{0{,}050\ (\text{l})} = 0{,}020 \text{ mol/l}$$

$$[SO_4^{2-}] = [Na_2SO_4] = \frac{n}{V} = \frac{M \cdot V}{V} = \frac{0{,}1\ (\text{mol/l}) \cdot 0{,}040\ (\text{l})}{0{,}050\ (\text{l})} = 0{,}080 \text{ mol/l}$$

$[Ba^{2+}][SO_4^{2-}] = 0{,}020 \cdot 0{,}080 = 1{,}6 \cdot 10^{-3} > K_s$, o sea, precipita $BaSO_4$.

Las concentraciones después de la precipitación serán:

Para Cl^- y Na^+ no varían al ser iones «espectadores», o sea, $[Cl^-] = 2[Ba^{2+}] = 0{,}040$ mol/l, y $[Na^+] = 2[SO_4^{2-}] = 0{,}16$ mol/l.

Ba^{2+} y SO_4^{2-} desaparecen en igual proporción por la precipitación: de Ba^{2+}, ión en menor proporción, sólo queda la concentración de saturación, y al ser $K_s = s^2$, resulta: $[Ba^{2+}] = s = 1 \cdot 10^{-5}$ mol/l; de SO_4^{2-} queda s + (0,080 – 0,020), pero s es muy pequeña, y por tanto: $[SO_4^{2-}] = 0{,}060$ mol/l.

8. DESCRIPTIVA INORGÁNICA

COMPUESTOS	TIPOS	PROPIEDADES
HIDRUROS (H + otro elemento)	SALINOS (H + metal IA o IIA)	*Carácter iónico (redes iónicas de alto P.F.) *Con agua dan H_2 (CaH_2): hidruro + agua = hidrógeno + hidróxido
	VOLÁTILES (H + no metal)	*Carácter covalente (redes moleculares de bajo P.F.) *Propiedades ácidas (HCl), neutras (H_2O) o básicas (NH_3)
ÓXIDOS (O + otro elemento)	METÁLICOS (O + metal)	*Carácter iónico (redes iónicas de alto P.F.) *Propiedades básicas (CaO): óxido+agua=hidróxido
	NO METÁLICOS (O + no metal)	*Carácter covalente (redes moleculares de bajo P.F.) *Propiedades ácidas (CO_2): «anhídrido»+agua=oxácido

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Zaragoza, 1995, LOGSE)

Al calentar clorato de potasio ($KClO_3$), se forma cloruro de potasio (KCl) y oxígeno (O_2). Si se descomponen 250 g de $KClO_3$, calcule: a) cantidad de KCl que se forma, b) volumen de oxígeno que se obtiene medido a 25°C y 1 atmósfera de presión. Masas atómicas: Cl = 35,5; O = 16; H = 1.

La reacción ajustada es: $2KClO_3 \longrightarrow 2KCl + 3O_2$

a)

$$\frac{2\,mol\,KClO_3 = 2 \cdot 122{,}5\,(g)}{2\,mol\,KCl = 2 \cdot 74{,}5\,(g)} = \frac{250\,(g)}{x(g)} \Rightarrow x = 152\,g\,KCl$$

b)

$$\frac{2\,mol\,KClO_3 = 2 \cdot 122{,}5\,(g)}{3\,mol\,O_2} = \frac{250\,(g)}{y\,(mol)} \Rightarrow y = 3{,}06\,mol\,O_2$$

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} = \frac{3{,}06\,(mol) \cdot 0{,}082\,(atm \cdot l \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}) \cdot (273+25)\,(K)}{1\,(atm)}$$

$$V = 74{,}8\,l\,O_2$$

Ejercicio 2 (Madrid, 1994)

Indique el carácter ácido, básico o neutro de las disoluciones acuosas obtenidas al añadir cada una de las siguientes sustancias: a) hidruro de litio, b) óxido de sodio, c) trióxido de azufre, d) cloruro sódico.

a) $LiH + H_2O \longrightarrow LiOH + 1/2\,H_2$; como se forma un hidróxido, LiOH, la disolución tiene carácter básico.

b) $Na_2O + H_2O \longrightarrow 2NaOH$; la disolución es básica por la misma razón anterior.

c) $SO_3 + H_2O \longrightarrow H_2SO_4$; la disolución es ácida, debido a la formación de ácido sulfúrico.

d) $NaCl + H_2O \longrightarrow Na^+ + Cl^- + H_2O$; los iones Na^+ y Cl^- no reaccionan con el agua, no hay hidrólisis, porque el ión Na^+ procede de base fuerte y el ión Cl^- de ácido fuerte, y por tanto la disolución es neutra.

Ejercicio 3 (Madrid, 1995)

Explique el carácter ácido-base que presentarán en medio acuoso los siguientes óxidos: óxido de sodio, óxido de calcio, pentóxido de difósforo y monóxido de dicloro.

Los óxidos metálicos (Na_2O y CaO) originan los hidróxidos correspondientes y por tanto tienen carácter básico, por ejemplo, el óxido de calcio (cal viva) da hidróxido de calcio (cal apagada):

$$CaO + H_2O \longrightarrow Ca(OH)_2$$

Por contra, los óxidos no metálicos (P_2O_5 y Cl_2O) dan lugar a oxácidos y en consecuencia tienen carácter ácido, y así, el monóxido de dicloro («anhídrido hipocloroso») origina ácido hipocloroso:

$$Cl_2O + H_2O \longrightarrow 2HClO$$

9. QUÍMICA ORGÁNICA

Es un tema amplísimo donde conviene destacar:

• FORMULACIÓN: repasar los **grupos funcionales** y las reglas básicas de nomenclatura.
• ISOMERÍA: formular y nombrar los distintos isómeros para una misma fórmula molecular; detenerse en la **estereoisomería** (isomerías geométrica y óptica).
• REACCIONES GENERALES: memorizar reacciones clásicas como obtención de alcoholes a partir de derivados halogenados, deshidratación de alcoholes a alquenos o esterificación, incluyendo nociones de **mecanismos**.

Ejercicios ilustrativos

Ejercicio 1 (Madrid, 1994)

Al añadir agua al carburo cálcico, CaC_2, se produce hidróxido de calcio y acetileno (etino). a) Ajuste la reacción química que tiene lugar. b) Calcule cuántos gramos de agua son necesarios para obtener dos litros de acetileno, a 27°C y 760 mm de Hg. DATOS: Masas atómicas: Ca = 40; H = 1; O = 16; C = 12.

a) $CaC_2 + 2H_2O \longrightarrow C_2H_2 + Ca(OH)_2$

b) Número de moles de C_2H_2: $PV = nRT$; $n = PV/RT$

QUÍMICA

$$n=\frac{1\,(\text{atm})\cdot 2\,(\text{l})}{0{,}082\,(\text{atm}\cdot\text{l}\cdot\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1})\cdot(27+273)\,(\text{K})}=0{,}081\ \text{mol}\ C_2H_2$$

$$\frac{2\ \text{mol}\ H_2O=2\cdot 18\ (\text{g})}{1\ \text{mol}\ C_2H_2}=\frac{x(\text{g})}{0{,}081\ \text{mol}\ C_2H_2}\Rightarrow x=2{,}9\ \text{g}\ H_2O$$

Ejercicio 2 (Extremadura, 1994)

Al quemar 3,15 g de antracita (carbón mineral), se obtienen 5,44 litros de dióxido de carbono en condiciones normales. Calcular. a) El porcentaje de carbono que tiene esa antracita. b) El número de moléculas de dióxido de carbono que se han obtenido. Masas atómicas: C = 12,0; O = 16,0.

a) En la combustión de cualquier sustancia con C, cada mol de C da 1 mol de CO_2, lo cual permite calcular los gramos de C puro, y por tanto el procentaje de C:

$$\frac{1\ \text{mol C}=12{,}0\ (\text{g})}{1\ \text{mol}\ CO_2=22{,}4\ (\text{l})}=\frac{x(\text{g})}{5{,}44(\text{l})}\Rightarrow x=2{,}91\text{g};\ \frac{2\cancel{0},91}{3{,}15}\times 100=92{,}4\,\%\text{C}$$

b) 5,44 (l)/22,4 (l/mol) = 0,243 mol

0,243 (mol) · 6,02 · 10^{23} (moléculas/mol) = 1,46 · 10^{23} moléculas

Ejercicio 3 (Extremadura 1995)

La combustión de 2,573 g de un compuesto orgánico dio 5,143 g de CO_2 y 0,9015 g de H_2O. Si éste sólo contenía C, H y O, ¿cuál es la fórmula empírica del compuesto? Masas atómicas en u.m.a.: C = 12,0; H = 1,0; O = 16,0.

En la combustión de una sustancia orgánica, el C se oxida a CO_2 y el H a H_2O, es decir, cada mol de C da 1 mol de CO_2, y cada 2 moles de H dan 1 mol de H_2O, de modo que se pueden plantear las siguientes proporciones:

$$\frac{1\ \text{mol C}=12{,}0\ (\text{g})}{1\ \text{mol}\ CO_2=44{,}0\ (\text{g})}=\frac{x\ (\text{g})}{5{,}143\ (\text{g})}\Rightarrow x=1{,}403\text{g};\ \frac{1{,}403}{2{,}573}\times 100=54{,}5\,\%\,\text{C}$$

$$\frac{2\ \text{mol H}=2\cdot 1{,}0\ (\text{g})}{1\ \text{mol}\ H_2O=18{,}0\ (\text{g})}=\frac{y\ (\text{g})}{0{,}9015\ (\text{g})}\Rightarrow y=1{,}100\ \text{g};\ \frac{0{,}100}{2{,}573}\times 100=3{,}89\,\%\,\text{H}$$

Y entonces: 100 − (54,5 + 3,89) = 41,6 % O

Número relativo de moles de átomos de cada clase:

n.º C = 54,5 (g)/12 (g/mol) = 4,54 mol
n.º H = 3,89 (g)/1,0 (g/mol) = 3,89 mol
n.º O = 41,6 (g)/16,0 (g/mol) = 2,60 mol

Para convertir estos números en enteros, dividimos todos ellos entre el menor (2,60), dando respectivamente 1,75; 1,50; 1,00. Por último, multiplicando por 4 (que es el factor más pequeño para obtener números enteros), se obtienen 7; 6; 4. Así pues, la fórmula empírica es $C_7H_6O_4$.

Ejercicio 4 (Valencia, 1995)

*El análisis elemental de un compuesto químico da los siguientes resultados: **C** 9,9 %; **Cl** 58,7 %; **F** 31,4%. i) Determine su fórmule empírica. ii) Sabiendo que su masa molecular es 120,9, establezca su fórmula molecular. iii) Identifique el compuesto de que se trata (nómbrelo). A_r(C) = 12. A_r(Cl) = 35,45. A_r(F) = 19.*

i) Número relativo de moles de átomos de cada clase:

n.º C = 9,9 (g)/12 (g/mol) = 0,825 mol
n.º Cl = 58,7 (g)/35,45 (g/mol) = 1,65 mol
n.º F = 31,4 (g)/19 (g/mol) = 1,65 mol

Dividiendo entre el número menor para pasar a números enteros resulta: 0,825/0,825 = 1; 1,65/0,825 = 2; 1,65/0,825 = 2. Así pues, la fórmula empírica es CCl_2F_2.

ii) A la fórmula empírica corresponde una masa molecular de:

$$MM=12+2\cdot 35{,}45+2\cdot 19=120{,}9$$

QUÍMICA

Esta masa es sensiblemente igual a 121, luego también la fórmula molecular es CCl_2F_2.

iii) El compuesto es un CFC (clorofluorocarbono), concretamente el diclorodifluorometano.

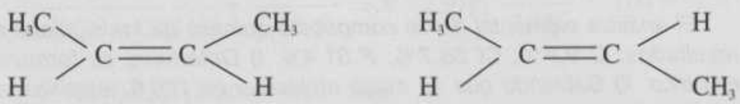
Ejercicio 5 (Castilla-La Mancha, 1995)

Qué tipo de isomería existe en cada una de las siguientes parejas de compuestos: a) Pentanal y 2-Pentanona; b) 2-Pentanona y 3-Pentanona, c) 1-Buteno y 2-Buteno.

a) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–CHO$ y $CH_3–CH_2–CH_2–CO–CH_3$ son isómeros de función, por ser un aldehído y una cetona.

b) $CH_3–CH_2–CH_2–CO–CH_3$ y $CH_3–CH_2–CO–CH_2–CH_3$ son isómeros de posición, al tratarse de dos cetonas con grupo carbonilo en distinta posición.

c) $CH_3–CH_2–CH=CH_2$ y $CH_3–CH=CH–CH_3$ son isómeros de posición porque difieren en la posición del doble enlace; por otro lado, el 2-buteno presenta isomería geométrica o cis-trans:



cis-2-buteno trans-2-buteno

Ejercicio 6 (Extremadura, 1995)

a) Formule o nombre, según corresponda, los siguientes compuestos orgánicos: I) butilamina; II) dietil-éter; III) ácido benzoico; IV) $CH_3–CH_2OH$; V) $CH_2=CH–CO–CH_3$. b) ¿Qué productos se obtienen al poner los haluros de alquilo (halogenuros de alquilo) en presencia de potasa alcohólica? Pon tres ejemplos.

a) I) $CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–NH_2$

II) $CH_3–CH_2–O–CH_2–CH_3$

III) $C_6H_5–COOH$

IV) etanol (alcohol etílico)

V) butenona (metil-vinil-cetona)

b) Se obtienen alcoholes, de acuerdo con la reacción general de sustitución siguiente (mecanismo S_N1 o S_N2):

$$R-X + OH^- \longrightarrow R-OH + X^-$$

Ejemplos: 1-cloroetano a etanol; 2-bromopropano a 2-propanol; 2-iodo-2-metil-propano a 2-metil-2-propanol:

$$CH_3–CH_2Cl + OH^- \longrightarrow CH_3–CH_2OH + Cl^-$$
$$CH_3–CHBr–CH_3 + OH^- \longrightarrow CH_3–CHOH–CH_3 + Br^-$$
$$CH_3–C(CH_3)I–CH_3 + OH^- \longrightarrow CH_3–C(CH_3)OH–CH_3 + I^-$$

PRUEBAS GLOBALES CON SOLUCIÓN FINAL

MADRID, 1995

Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2 puntos.

1. Teniendo en cuenta que el ácido fluorhídrico es un ácido débil, cuya constante de disociación vale $K_a = 10^{-3,2}$, calcule en qué volumen deben estar contenidos 2 gramos de dicho ácido para que el pH sea 2,1. ¿Cuál sería el grado de disociación de dicho ácido? Si esos 2 gramos estuviesen contenidos en 10 *l* de disolución, ¿cuál sería el pH y el grado de disociación de la nueva disolución? DATOS. Masas atómicas: F = 19; H = 1.
2. ¿Cuántos gramos de sulfato de cobre (II) penta-hidratado, del 85% de riqueza, hay que pesar para preparar 1,5 litros de disolución, en la que la concentración de Cu (II) sea 10^{-3}M? DATOS. Masas atómicas: S = 32; O = 16; Cu = 63,5; H = 1.
3. A partir del concepto de electronegatividad se define la polaridad de los enlaces covalentes y el momento dipolar molecular. Aplique estas ideas a las moléculas de agua, amoníaco y fluoruro de hidrógeno, y comente alguna propiedad importante relacionada con la existencia de momento dipolar permanente en dichas moléculas.
4. Conceptos de velocidad de reacción y energía de activación. Significado de la ecuación de Arrhenius.
5. Indique el estado de oxidación del azufre en las siguientes combinaciones químicas: sulfuro de hidrógeno, dióxido de azufre y ácido sulfúrico. Estudie, asimismo, su comportamiento oxidante-reductor, en cada caso.

Soluciones: 1) V = 0,93 *l*; grado1 = 0,074; grado2 = 0,22; pH = 2,6. 2) 0,44 g. 3) 4) y 5). Consulta tu texto o apuntes.

CASTILLA-LA MANCHA, 1995

NOTA DEL AUTOR: Este repertorio coincide en gran parte con las pruebas de acceso de Cantabria en 1994.

1. (3,5 puntos) El fosgeno ($COCl_2$) es un producto gaseoso que se descompone en monóxido de carbono y cloro, según el proceso: $COCl_2(g) = CO(g) + Cl_2(g)$. En un recipiente de 250 ml de capacidad se introdujeron 0,213 g de fosgeno, de manera que cuando se alcanzó el equilibrio a la temperatura de 27º C, la presión en el interior del matraz fue de 230 mm de Hg. A partir de estos datos, calcular. *a)* El grado de disociación del fosgeno; *b)* La presión parcial de cada componente gaseoso en la mezcla; *c)* El valor de las constantes K_p y K_c. Datos: (Masas atómicas: C = 12; O = 16; Cl = 35,5).

2. (3,5 puntos) En la reacción completa de 1 gramo de un determinado metal, con un exceso de ácido sulfúrico diluido, se desprendieron 390 ml de hidrógeno, medidos sobre agua, a la temperatura de 25° C y 745 mm de Hg, de presión. Sabiendo que el ácido sulfúrico diluido se preparó a partir de un ácido comercial concentrado, de densidad 1,83 g/ml y de riqueza en peso del 91 %, calcular: *a)* La molaridad del ácido concentrado de partida; *b)* El volumen del ácido comercial que sería preciso para preparar un litro de ácido sulfúrico 0,5 N; *c)* El peso equivalente del metal. Datos: Presión de vapor del agua a 25° C = 23,8 mm Hg; Masas atómicas: H = 1; O = 16; S = 32.

3. (2,0 puntos) Defina brevemente el concepto de «disolución reguladora» y señale de entre los siguientes pares de sustancias el o los que formarán una disolución reguladora: *a)* ácido clorhídrico/cloruro sódico; *b)* ácido cianhídrico/cianuro potásico; *c)* ácido nítrico/nitrato amónico; *d)* hidróxido amónico/cloruro amónico. Justifique brevemente la respuesta.

4. (1,0 puntos) Sabiendo que los productos de solubilidad del cloruro de plata y del fosfato de plata son respectivamente $1,6 \cdot 10^{-10}$ y $1,8 \cdot 10^{-18}$, indíquese razonadamente: *a)* ¿Qué sal será más soluble en agua?; *b)* ¿Cómo se modificará la solubilidad, si se las disuelve en una disolución de nitrato de plata?

Soluciones: 1. *a)* grado = 0,43; *b)* $p(COCl_2) = 0,12$ atm; $p(CO) = p(Cl_2) = 0,091$ atm; *c)* $K_p = 0,069$; $K_c = 2,8 \cdot 10^{-3}$. 2. *a)* 17,0 M; *b)* V = 14,7 ml; *c)* 33,3 g. 3. Consulta tu texto o apuntes; sólo *b)* y *d)* (sistemas ácido débil/sal o base débil/sal). 4. *a)* $s(AgCl) = 1,3 \cdot 10^{-5}$M, y $s(Ag_3PO_4) = 1,6 \cdot 10^{-5}$M, luego Ag_3PO_4 es ligeramente más soluble; *b)* Disminuye la solubilidad por efecto de ión común.

ZARAGOZA, 1995

Problemas

1. Una disolución A contiene 3,65 g de ácido clorhídrico (HCl) en un litro de disolución. Otra disolución B contiene 19,5 g de hidróxido de sodio (NaOH) en un litro de disolución. *a)* Calcule el pH de la disolución A y de la disolución B. *b)* Calcule el pH final después de mezclar las dos disoluciones. Masas atómicas: Cl = 35,5; H = 1; Na = 23; O = 16 (3 puntos).

2. Un determinado compuesto orgánico tiene la siguiente composición porcentual: C = 75,450%; H = 6,587%; N = 8,383%; O = 9,581 %. Calcule su fórmula empírica. Masas atómicas: C = 12; H = 1; N = 14; O = 16 (2 puntos).

Cuestiones

1. Escriba la configuración electrónica del elemento de número atómico 20. Indique si se trata de un metal o un no metal y a qué grupo del sistema de períodos pertenece (1 punto).

2. Dados los compuestos NH_3 y NaCl, razone para cada uno de ellos: *a)* en qué tipo de compuestos los clasificaría (covalentes, iónicos o metálicos), *b)* estado de agregación previsible a temperatura ambiente (2 puntos).

3. La siguiente reacción transcurre en medio ácido: $I^- + Br_2 = IO_3^- + Br^-$. *a)* Ajuste la ecuación. *b)* Indique qué especie es el oxidante (2 puntos).

Soluciones: Problema 1. *a)* $pH_A=1$; $pH_B=13,7$; *b)* pH=13,3. Problema 2. $C_{21}H_{22}N_2O_2$. Cuestión 1. $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 4s^2$; Metal del grupo 2. Cuestión 2. *a)* NH_3 covalente y NaCl iónico; *b)* NH_3 gas y NaCl sólido. Cuestión 3. *a)* $I^- + 3Br_2 + 3H_2O = IO_3^- + 6Br^- + 6H^+$; *b)* El Br_2, que al ganar e^- se reduce a Br^-.