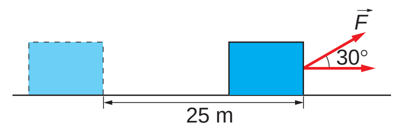
1 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

1.1. ¿A QUÉ LLAMAMOS TRABAJO?

1. Un hombre arrastra un objeto durante un recorrido de 25 m, tirando de él con una fuerza de 450 N mediante una cuerda que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Realiza un gráfico del problema y calcula el trabajo realizado por el hombre.

La representación gráfica de la situación física que describe el enunciado es la que se muestra en la figura de la derecha. El trabajo realizado por el hombre lo calculamos como se indica:

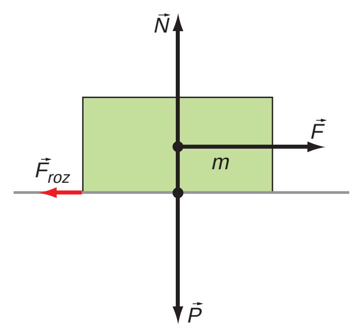


$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\ \theta$$

$$W_F = 450 \cdot 25 \cdot cos\ 30° = 9\,742{,}8\ \text{J}$$

2. Al tirar horizontalmente, con una fuerza de 10 N, de un cuerpo apoyado en un plano horizontal, este se desplaza 10 m. Calcula el trabajo realizado, sabiendo que su masa es 2 kg y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es 0,1.

En la figura hemos representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.



Los datos que tenemos son:

$F = 10$ N

Desplazamiento: $s = 10$ m

Masa del cuerpo: $m = 2$ kg

Coef. de rozamiento: $\mu = 0{,}1$

El trabajo que realiza cada fuerza es:

$W_P = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} = m \cdot g \cdot s \cdot cos\ 90° = 0$

$W_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N \cdot s \cdot cos\ 90° = 0$

$W_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\ 0° = F \cdot s = 10 \cdot 10 = 100$ J

$W_{roz} = \vec{F}_r \cdot \vec{s} = F_r \cdot s \cdot cos\ 180° = -\mu \cdot N \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s = -0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = -19{,}6$ J

El trabajo total es la suma de todos ellos:

$$W = 100 - 19{,}6 = 80{,}4\ \text{J}$$

3. Cuando sujetamos una maleta de 20 kg, sin movernos, ¿qué trabajo realizamos? ¿Y si nos movemos con la maleta en la mano, desplazándonos 20 m sobre un plano horizontal?

De acuerdo con la definición, para realizar trabajo, es necesario que se produzca desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

Por tanto, al sostener una maleta, estando parados, no realizamos trabajo; es una situación estática en la que el trabajo que se realiza es nulo.

La segunda pregunta, que en principio puede parecer trivial, no lo es tanto. Dependiendo de la complejidad que queramos introducir al estudiar el sistema, la respuesta puede variar. Veamos:

1. Al no especificarse nada acerca del rozamiento, podemos considerar que su efecto es nulo o, al menos, despreciable. En ese caso, el razonamiento que exponemos es el siguiente:

   La persona que lleva la maleta ejerce una fuerza vertical, en sentido ascendente, de sentido opuesto al peso de la maleta.

   Sin embargo, como su movimiento es en sentido horizontal, las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son perpendiculares, lo que da como resultado un trabajo nulo:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot cos\ 90° = 0 \text{ J}$$

2. Si tenemos ahora en cuenta el efecto del rozamiento, el resultado es diferente. El trabajo lo realiza la fuerza horizontal que aplicamos para vencer la fuerza de rozamiento:

$$\vec{F} = -\vec{F}_{roz} \rightarrow W = -\vec{F}_{roz} \cdot \vec{r} = -F_{roz} \cdot r \cdot cos\ 180° = F_{roz} \cdot r$$

   Para obtener el valor de la fuerza de rozamiento, debemos tener en cuenta el peso de la maleta que soporta la persona. De este modo, resulta:

$$F_{roz} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = \mu \cdot (m_{hombre} + m_{maleta}) \cdot g$$

   Por tanto, al desplazarnos con la maleta, debemos realizar un trabajo superior al que realizaríamos de hacerlo sin ella. La diferencia entre ambos trabajos es:

$$W = \mu \cdot (m_{hombre} + m_{maleta}) \cdot g \cdot r - \mu \cdot m_{hombre} \cdot g \cdot r = \mu \cdot m_{maleta} \cdot g \cdot r$$

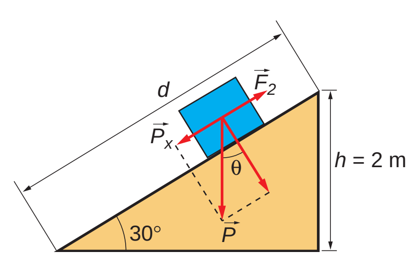
4. Calcula el trabajo que realizamos al levantar un saco de 50 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m. Si lo hacemos utilizando un plano de 30º de inclinación sin rozamiento, calcula la fuerza que hay que realizar, la distancia recorrida y el trabajo realizado, y compara los resultados con los anteriores.

Para elevar un saco 2 m, es necesario realizar un trabajo en contra de las fuerzas del campo gravitatorio; debemos aplicar una fuerza, $\vec{F}_1$, de la misma magnitud que el peso y de sentido opuesto a este. Por tanto:

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{h} = F \cdot \Delta h \cdot cos\ 0° = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$W_1 = 50 \cdot 9{,}8 \cdot 2 = 980 \text{ N}$$

Si utilizamos un plano inclinado para elevar el saco, debemos ejercer una fuerza, $\vec{F}_2$, en sentido ascendente, que compense la componente en el eje X de su peso, como se muestra en la ilustración de la derecha.



En primer lugar, debemos calcular la distancia recorrida por el saco a lo largo del plano inclinado hasta alcanzar 2 m de altura.

De acuerdo con la ilustración anterior:

$$sen\ 30° = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{h}{sen\ 30°} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ m}$$

El trabajo que hay que realizar es, por tanto:

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d} = m \cdot g \cdot sen\ \theta \cdot d \cdot cos\ 0° = 50 \cdot 9{,}8 \cdot sen\ 30° \cdot 4 \cdot 1 = 980 \text{ N}$$

siendo el valor de la fuerza:

$$F_2 = m \cdot g \cdot sen\ \theta = 50 \cdot 9{,}8 \cdot sen\ 30° = 245 \text{ N}$$

En el caso anterior, el valor de la fuerza, F_1, era:

$$F_1 = m \cdot g = 50 \cdot 9{,}8 = 490 \text{ N}$$

Observa que el trabajo realizado en ambos casos es el mismo, y que la fuerza que hay que aplicar en el segundo caso es menor, siendo el camino que se ha de recorrer mayor. Por eso se dice que las máquinas simples (como un plano inclinado) "multiplican" fuerzas, y no energías (trabajo).

1.2. TIPOS DE ENERGÍA: ENERGÍA CINÉTICA

1. Escribe la ecuación de dimensiones de la energía cinética. Demuestra que coincide con la del trabajo.

La ecuación de dimensiones del trabajo es:

$$[W] = [F] \cdot [\Delta r] \cdot [cos\ \theta] = [m \cdot a] \cdot [\Delta r] \cdot cos\ \theta$$

$$[W] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{L} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

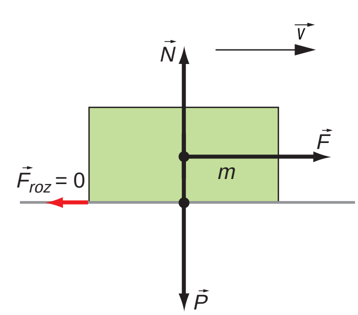
Y la que corresponde a la energía cinética:

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right] \cdot [m] \cdot [v^2] = \text{M} \cdot (\text{L} \cdot \text{T}^{-1})^2 = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Como se observa, sus dimensiones son equivalentes a las del trabajo. Por tanto, su unidad es la que corresponde al trabajo: el joule.

2. Un bloque de 2 kg de masa se desliza sobre una superficie horizontal. El rozamiento es nulo. Calcula el trabajo que realiza al desplazarse 10 m sobre la superficie.

En el supuesto más general, la única fuerza que realizaría trabajo al moverse el bloque sería la de rozamiento, ya que esta es la única fuerza que tiene componente en la dirección del desplazamiento (el peso y la reacción normal que ejerce el plano sobre el que se apoya el bloque son perpendiculares a dicho desplazamiento).



Por tanto, la expresión del trabajo sería:

$$W = F_{roz} \cdot r \cdot cos\ 180° = -\mu \cdot m_{bloque} \cdot g \cdot r$$

En este caso, al considerarse el rozamiento nulo ($\mu = 0$), el trabajo que ha de vencer el bloque para desplazarse también es nulo.

3. Un objeto, de masa *m*, describe un movimiento circular uniforme, de radio *R*. Calcula el trabajo que realiza la fuerza centrípeta mientras el cuerpo describe una vuelta.

El período es el intervalo de tiempo que transcurre hasta que un cuerpo, que realiza un movimiento regular, ocupa de nuevo una posición determinada, moviéndose con la misma velocidad y aceleración.

El trabajo que realiza la fuerza centrípeta sobre un cuerpo que se mueve con m.r.u., transcurrido un período, responde a la expresión:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Al resolver la integral, obtenemos el siguiente resultado:

$$W_{1\to 2} = m \cdot \left[\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[v^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v$$

Como el movimiento es de velocidad constante, $v_1 = v_2$, el trabajo realizado al cabo de un período es nulo.

A esta conclusión podríamos haber llegado también teniendo en cuenta que el cuerpo describe un m.r.u., y que, por tanto, la fuerza que hace que se mueva es centrípeta, estando dirigida en todo momento hacia el centro de la trayectoria y perpendicularmente al desplazamiento. Por tanto, el trabajo es nulo, ya que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares.

4. ¿Puede ser negativa la energía cinética de un cuerpo? Razona la respuesta.

La energía cinética de un cuerpo no puede ser negativa.

Puede ocurrir que, debido a la situación del sistema de referencia, la velocidad del cuerpo sea negativa, pero al intervenir su cuadrado en la expresión de la energía cinética, el signo negativo desaparece.

5. ¿Pueden dos observadores medir distintos valores para la energía cinética de un cuerpo y tener razón los dos? Explica cómo puede hacerse, si es posible, o cuál es el motivo de que no sea posible.

La energía cinética de un cuerpo depende de su velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

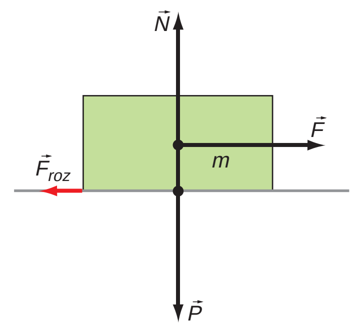
El valor de la velocidad y, por ende, el de la energía cinética pueden variar. Basta con cambiar el sistema de referencia. Para un observador que viaja en un tren a velocidad constante, el tren está quieto y, con respecto a él, su energía cinética es nula. Sin embargo, para un observador en reposo que vea pasar el tren, este se moverá con cierta velocidad, y el observador situado en su interior posee cierta energía cinética.

Del mismo modo, para un observador que viaje en automóvil a cierta velocidad, distinta a la del tren, circulando por una carretera paralela a la vía, la velocidad no será la misma que la que percibe el observador en reposo, y la energía que asociará con el observador situado en el interior del tren será distinta.

A modo de conclusión, podemos decir que hay tantas medidas de la energía cinética como sistemas de referencia inerciales consideremos.

6. Dibuja todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se desliza por un plano horizontal, con el que existe rozamiento. Calcula el trabajo por unidad de longitud que realiza cada una de estas fuerzas.

Las fuerzas que intervienen son las que se indican en la figura de la derecha.



El trabajo que realizan el peso y la normal es nulo, ya que ambas fuerzas son perpendiculares a la dirección del desplazamiento:

$$W_{peso} = \vec{F} \cdot \vec{r} = P \cdot 1 \cdot cos\ 90° = 0 \text{ J}$$

$$W_{normal} = \vec{F} \cdot \vec{r} = N \cdot 1 \cdot cos\ 90° = 0 \text{ J}$$

Para vencer la fuerza de rozamiento, sí debemos realizar trabajo, ya que esta fuerza tiene la dirección del desplazamiento:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{r} = \mu \cdot m \cdot g \cdot r \cdot cos\ 180° = -\mu \cdot m \cdot g \cdot r$$

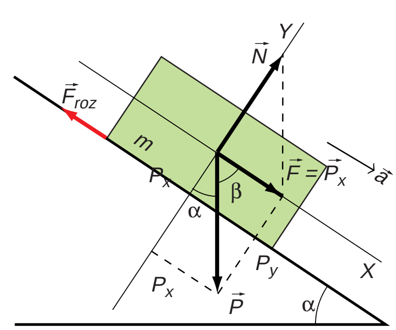
Por tanto, para una longitud $r = 1$, resulta:

$$W_{roz} = -\mu \cdot m \cdot g$$

Este resultado se expresará en joule si la masa y la aceleración de la gravedad se expresan en unidades del S.I.

7. Un objeto desciende por un plano inclinado con el que existe rozamiento. Dibuja las fuerzas que actúan sobre él y calcula el trabajo que realiza cada una de ellas durante el descenso. Estima los valores que necesites para resolver la actividad.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son las que se indican en la figura.



El trabajo que realiza cada una de ellas durante todo el descenso es:

- Fuerza reacción normal:

  Su dirección es perpendicular al desplazamiento. Por tanto, el trabajo que realiza es nulo, ya que:

  $$W_{normal} = \vec{N} \cdot \vec{d} = N \cdot d \cdot cos\ 90° = 0 \text{ J}$$

- Fuerza peso:

$$W_P = \vec{P} \cdot \vec{d} = P \cdot d \cdot cos\ \beta = m \cdot g \cdot d \cdot sen\ \alpha$$

- Fuerza de rozamiento:

  La fuerza de rozamiento actúa en la dirección del desplazamiento y en sentido opuesto a este. Por tanto, al desplazarse el cuerpo cierta distancia d sobre el plano, el trabajo que realiza vale:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{d} = \mu \cdot N \cdot d \cdot cos\ 180° = -\mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \cdot d$$

1.3. FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

1. Enumera cinco situaciones cotidianas en las que intervengan fuerzas conservativas, y cinco situaciones en las que intervengan fuerzas no conservativas.

Intervienen fuerzas conservativas en las siguientes situaciones:

- El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.
- La aceleración de un electrón entre las placas de un condensador entre las que se ha hecho el vacío.
- La "caída libre" de un cuerpo que se deja caer desde lo alto de un edificio.
- El movimiento de oscilación de un objeto colgado de un resorte vertical.
- El movimiento de un electrón alrededor del núcleo, de acuerdo con el modelo atómico de Bohr.

Intervienen fuerzas no conservativas, con independencia de la acción de las fuerzas conservativas que puedan actuar, en los siguientes ejemplos:

- El movimiento de un automóvil.
- El descenso de un cuerpo que se desliza por una superficie inclinada.
- El movimiento de un objeto que es lanzado por un resorte sobre una superficie horizontal rugosa.
- Cuando empujamos un mueble por el suelo y lo desplazamos de posición.
- Las fuerzas que intervienen en un choque inelástico.

2. De las situaciones que has señalado, indica aquellas en las que las fuerzas realizan trabajo y explica por qué se conserva la energía en unos casos y no en los otros.

- Movimiento de la Luna alrededor de la Tierra: como la Luna describe una trayectoria cerrada y la fuerza gravitatoria es conservativa, no se realiza trabajo.
- Aceleración de un electrón entre las placas de un condensador entre las que se ha hecho el vacío: en este caso, se realiza un trabajo sobre el electrón que se invierte en aumentar su energía cinética.
- La "caída libre" de un cuerpo que se deja caer desde lo alto de un edificio: si prescindimos del rozamiento, la fuerza gravitatoria realiza un trabajo sobre el cuerpo que incrementa la energía cinética de este. Si suponemos el ciclo completo de subida y bajada del cuerpo, el trabajo es nulo: la fuerza gravitatoria devuelve íntegramente, en la caída del cuerpo, el trabajo realizado para vencerla (el necesario para subir el cuerpo). En caso de tener en cuenta el rozamiento, debemos contar también con el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, que disipa parte de la energía del cuerpo en su descenso.

- El movimiento de oscilación de un objeto colgado de un resorte vertical: la fuerza elástica es conservativa; por tanto, puede devolver el trabajo que se ha de realizar para vencerla. En consecuencia, el trabajo realizado en una oscilación es nulo.
- El movimiento del electrón alrededor del núcleo, según el modelo atómico de Bohr, es debido a la atracción electrostática entre este y los protones del núcleo. El electrón gira en órbitas circulares, por lo que no se realiza trabajo.
- El movimiento de un automóvil: la fuerza del motor y la fuerza del rozamiento realizan trabajo.
- El descenso de un cuerpo que se desliza por una superficie inclinada: en este caso, la fuerza gravitatoria realiza trabajo para que descienda el cuerpo, y la fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento, también lo realiza.
- El movimiento de un objeto que es lanzado por un resorte sobre una superficie horizontal rugosa: la fuerza elástica del muelle realiza trabajo sobre el objeto, que terminará deteniéndose debido a la energía disipada por la fuerza de rozamiento.
- Cuando empujamos un mueble y lo desplazamos de posición, la fuerza con que empujamos y la fuerza de rozamiento realizan trabajo.
- Las fuerzas que intervienen en un choque inelástico: en un choque inelástico se conserva la cantidad de movimiento, pero no la energía cinética, que se transforma en energía elástica (deformación) o se disipa en forma de calor. Las fuerzas, en este caso, sí realizan trabajo.

La energía se conserva en todos los casos; no se deben confundir las posibles transformaciones energéticas (disipación de calor, deformaciones, etc.) que ocurren en las situaciones físicas descritas con la conservación de la energía.

1.4. ENERGÍAS POTENCIALES GRAVITATORIA Y ELÁSTICA

1. Una lámpara de 5 kg de masa está colgada a 2,2 m del suelo de una habitación, situado a 20 m sobre el suelo de la calle. Calcula su energía potencial respecto a ambos suelos.

Si situamos el origen de la energía potencial en el suelo de la habitación, la energía potencial de la lámpara es:

$$E_{p_1} = m \cdot g \cdot h_1 \rightarrow E_{p_1} = 5 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}2 = 107{,}8 \text{ J}$$

Y respecto al suelo de la calle:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot h_2 = m \cdot g \cdot (h_1 + h)$$

donde h es la distancia del suelo de la habitación al suelo de la calle, y h_1, la que separa la lámpara del suelo de la habitación; por tanto:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot (h_1 + h) = 5 \cdot 9{,}8 \cdot (2{,}2 + 20) = 1\,087{,}8 \text{ J}$$

2. Si la lámpara se suelta y cae hasta el suelo de la habitación, calcula su energía potencial final respecto de ambos sistemas de referencia, así como la variación de su energía potencial en ambos casos.

Respecto al suelo de la habitación, la energía potencial final es nula, siendo su variación:

$$\Delta E_{p_1} = E_{p_{f1}} - E_{p_{i1}} = 0 - 107{,}8 \text{ J} = -107{,}8 \text{ J}$$

Respecto al suelo de la calle, la energía potencial final es:

$$E_{p_{f2}} = m \cdot g \cdot h = 5 \cdot 9{,}8 \cdot 20 = 980 \text{ J}$$

Por tanto, la variación de energía es, en este caso:

$$\begin{aligned}\Delta E_{p_2} = E_{p_{f2}} - E_{p_{i2}} &= m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h_2 = m \cdot g \cdot (h - h_2) = \\ &= m \cdot g \cdot (h - h_1 - h) = -m \cdot g \cdot h_1 = \\ &= -5 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}2 = -107{,}8 \text{ J}\end{aligned}$$

La variación de energía potencial es, lógicamente, la misma en ambos casos.

3. Calcula la energía potencial elástica que posee un muelle que alargamos 5 cm si para alargarlo 10 cm debemos tirar de él con una fuerza de 20 N.

Sabemos que para alargar el muelle 10 cm hemos de realizar una fuerza de 20 N. A partir de este dato es posible calcular la constante elástica, *k,* que nos servirá para resolver el problema:

$$F = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{20}{0{,}1} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ahora ya estamos en condiciones de calcular la energía almacenada cuando el muelle está estirado 5 cm. Para ello, basta con sustituir en la expresión:

$$E_p\,(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}25 \text{ J}$$

4. En la actividad anterior, calcula el valor de la constante elástica, *k*.

La constante elástica la hemos calculado ya para resolver la primera actividad de esta página: $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. Si cortamos el muelle por la mitad, ¿cuánto vale ahora la constante elástica de cada trozo?

Al cortar el muelle por la mitad, la constante elástica sigue siendo la misma para cada trozo, ya que dicha constante depende únicamente de las características del material.

1.5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. Dejamos caer un objeto de 2 kg desde una altura de 10 m. En ausencia de rozamiento:

a) Calcula la energía mecánica del objeto a 10, 8, 6, 4, 2 y 0 m del suelo.

b) Representa en una gráfica las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica del objeto. A la vista del resultado, ¿qué puedes decir de las fuerzas que actúan?

a) El movimiento de caída libre es un m.r.u.a. Calcularemos, por tanto, cada uno de los instantes en los que la altura es la indicada por el enunciado y, a partir de ellos, la velocidad, dada por las ecuaciones del movimiento de caída libre. Por último, calcularemos las energías cinética, potencial y mecánica.

Cuando $h = 8$ m, resulta:

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (10-8)}{10}} = 0{,}632 \text{ s}$$

Como partimos de velocidad nula, la velocidad en este instante es:

$$v = v_0 + g \cdot t = 0 + 10 \cdot 0{,}632 = 6{,}32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la energía cinética tiene un valor:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6{,}32)^2 = 40 \text{ J}$$

La energía potencial del objeto a esta altura es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 8 = 160 \text{ J}$$

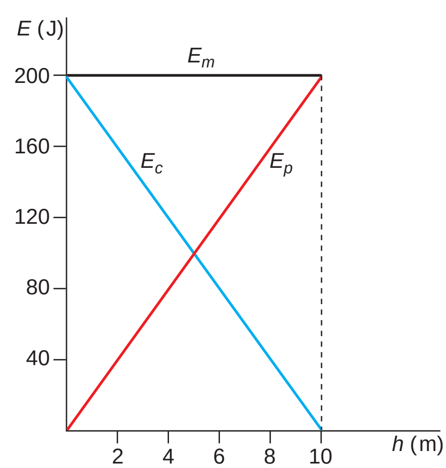
Y, por tanto, su energía mecánica vale:

$$E_m = E_c + E_p = 40 + 160 = 200 \text{ J}$$

Realizando estas operaciones para cada una de las alturas pedidas, obtenemos:

Altura (m)	Instante (s)	Energía cinética (J)	Energía potencial (J)	Energía mecánica (J)
10	0	0	200	200
8	0,632	40	160	200
6	0,894	80	120	200
4	1,095	120	80	200
2	1,265	160	40	200
0	1,41	200	0	200

b) Al representar gráficamente los datos anteriores, resulta:



Sobre el objeto actúa una fuerza conservativa, que es la fuerza gravitatoria.

2. Un cuerpo de 50 kg de masa se deja libre sobre un plano inclinado 30º. Calcula el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano, sabiendo que el cuerpo no se desliza.

Si el cuerpo no se desliza, la resultante de las fuerzas que actúan en la dirección del plano inclinado en que se encuentra apoyado debe ser nula. Estas fuerzas son la componente horizontal del peso y la fuerza de rozamiento. Por tanto:

$$\vec{P}_x + \vec{F}_r = 0 \rightarrow P_x - F_r = 0 \rightarrow P_x = F_r \rightarrow m \cdot g \cdot sen\ \theta = \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \theta$$

$$\mu = \frac{m \cdot g \cdot sen\ \theta}{m \cdot g \cdot cos\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = tg\ \theta \rightarrow \mu = tg\ 30° = 0{,}58$$

3. Lanzamos verticalmente hacia arriba un objeto de 3 kg de masa, con *v* = 15 m/s. Calcula la energía disipada por rozamiento con el aire si, cuando el objeto vuelve al suelo, su velocidad es 12,5 m/s.

La energía cinética que comunicamos al objeto en el momento del lanzamiento y la que posee un instante antes de tocar el suelo son, respectivamente:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \rightarrow E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15^2 = 337{,}5 \text{ J}$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \rightarrow E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12{,}5^2 = 234{,}4 \text{ J}$$

La diferencia entre ambas energías es la que se disipa por rozamiento. Por tanto:

$$\Delta E_c = W_{roz} = E_{c_2} - E_{c_1} \rightarrow W_{roz} = 234{,}4 - 337{,}5 = -103{,}1 \text{ J}$$

El signo negativo obtenido indica la pérdida de energía.

1.6. MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN. MOMENTO ANGULAR

1. ¿Qué relación existe entre las magnitudes lineales *s, v, a* y las magnitudes angulares θ, ω y α? Repasa los contenidos estudiados el curso pasado si es necesario.

A partir de la definición de radián podemos establecer la relación entre un arco de circunferencia y el ángulo que abarca, en la que r es el radio de la circunferencia:

$$\Delta s = r \cdot \Delta\theta$$

Si comparamos esta expresión con la que relaciona el desplazamiento con la velocidad y con el tiempo en el m.r.u., resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta s = r \cdot \Delta\theta \\ \Delta s = v \cdot \Delta t \end{array}\right\} \rightarrow v \cdot \Delta t = r \cdot \Delta\theta \rightarrow v = r \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

En esta última expresión, el cociente es la velocidad angular. Por tanto:

$$v = r \cdot \omega$$

De un modo similar, podemos llegar a la expresión que establece la relación entre la aceleración lineal y la angular, que para cada componente de la aceleración es:

$$a_T = \alpha \cdot r \ ; \ a_N = \omega^2 \cdot r$$

2. Deduce la ecuación de dimensiones del momento angular. ¿Cuál es la unidad del S.I. en que se mide esta magnitud?

La ecuación de dimensiones del momento angular es:

$$[L] = [m] \cdot [r] \cdot [v] \cdot [sen\ \theta] = \mathrm{M \cdot L \cdot L \cdot T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}}$$

La unidad del S.I. en que se mide es, por tanto:

$$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = J \cdot s}$$

1.7. DINÁMICA DE ROTACIÓN. ECUACIÓN FUNDAMENTAL

1. Calcula el momento angular de una partícula que se mueve en línea recta a lo largo del eje de abscisas respecto a un observador situado en el origen del sistema de referencia.

El momento angular de una partícula, respecto a un punto, es el momento, respecto a dicho punto, de su cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

En esta expresión, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula respecto al origen de coordenadas.

Al moverse la partícula a lo largo del eje de abscisas, $\vec{r}$ tiene la misma dirección que el eje y, como el movimiento es rectilíneo, la velocidad también tiene la dirección del eje de abscisas.

Al aplicar a este caso la definición de producto vectorial de dos vectores, obtenemos el siguiente valor para el módulo del momento angular:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v \cdot sen\ 0° = r \cdot m \cdot v \cdot sen\ 180° = 0$$

El ángulo que forman entre sí el vector posición y el vector velocidad es nulo si la partícula se mueve en sentido positivo por el eje de abscisas; es decir, de izquierda a derecha, y vale 180° cuando lo hace en sentido contrario. Tanto en uno como en otro caso, el momento angular de la partícula respecto al origen de coordenadas es nulo.

2. Dos partículas que tienen la misma cantidad de movimiento, ¿tienen el mismo momento angular? Justifica tu respuesta.

El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Si la cantidad de movimiento de las dos partículas es la misma, sus momentos angulares serán iguales solo si ambas partículas tienen el mismo vector posición, $\vec{r}$.

Respecto a un mismo sistema de referencia, esto no es posible, ya que las dos partículas ocuparán dos posiciones distintas.

Únicamente pueden ser iguales sus vectores posición, tomando, para cada partícula, sistemas de referencia distintos, que hagan posible dicha igualdad.

3. Las partículas de la actividad anterior, ¿podrían tener el mismo momento angular y no estar situadas en el mismo punto?

Según se vió en la actividad anterior, dos partículas con la misma cantidad de movimiento no pueden tener el mismo momento angular, a no ser que se encuentren en el mismo punto con respecto a un mismo sistema de referencia, lo cual es imposible.

Por tanto, únicamente pueden tener el mismo momento angular si sus vectores posición son iguales, tomando, para cada partícula, un sistema de referencia distinto.

4. Demuestra que si una partícula se mueve con velocidad constante y su momento angular con respecto a un punto es nulo, o bien ha pasado ya por ese punto o pasará por él.

El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

En esta expresión, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula respecto al punto.

El módulo del momento angular será, por tanto:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v \cdot sen\,\alpha$$

donde α designa el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Dado que la partícula se mueve a velocidad constante, tanto $\vec{r}$ como $\vec{v}$ son distintos de cero. Por tanto, para que el momento angular sea nulo, debe ocurrir que α sea 180°, lo que implica que la partícula se dirige hacia el punto, o 0°, de tal forma que la partícula ha pasado ya por el punto y se aleja de él.

1.8. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

1. Sobre una cuerda arrollada en la periferia de un volante de 89 cm de diámetro se ejerce una fuerza constante de 40 N. Si, partiendo del reposo, al cabo de 5 segundos se han desenrollado 6 m de cuerda, calcula la aceleración angular y la velocidad angular al cabo de los 5 segundos.

Para calcular la aceleración angular, calculamos primero la aceleración lineal (tangencial) del extremo de la cuerda, que habrá recorrido 6 metros al cabo de 5 segundos:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow a = 2 \cdot \frac{s - s_0}{t^2} = 2 \cdot \frac{6 - 0}{5^2} = 0{,}48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La velocidad lineal en este instante será:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + 0{,}48 \cdot 5 = 2{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con estos valores, calculamos la aceleración angular y la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{0{,}48}{0{,}89/2} = 1{,}08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2{,}4}{0{,}89/2} = 5{,}39 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Un volante tiene un momento de inercia de 300 kg · m² y gira a una velocidad de 500 revoluciones por minuto. Se le aplica un par de fuerzas que detiene el volante en 6 minutos. Calcula la aceleración angular con que gira el volante y el momento que se le aplica debido al par de rozamiento.

Para calcular la aceleración angular del volante, tendremos en cuenta la ecuación que relaciona la velocidad con la aceleración en el movimiento circular uniformemente acelerado.

Antes de comenzar a operar, debemos expresar las magnitudes que nos proporciona el enunciado en las unidades correspondientes del Sistema Internacional. De ese modo:

$$\omega_0 = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 16{,}67 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 6 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 360 \text{ s}$$

Por tanto:

$$\omega - \omega_0 = \alpha \cdot t$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 16{,}67 \cdot \pi}{360} = -\,0{,}15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

El signo negativo que acompaña al resultado indica que se produce una deceleración.

El momento debido al par de fuerzas lo obtenemos a partir de la aceleración angular calculada en el apartado anterior, y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Su valor, en módulo, es el siguiente.

$$M = I \cdot \alpha \rightarrow M = 300 \cdot 0{,}15 = 43{,}65 \text{ N} \cdot \text{m}$$

1.9. ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

1. Un disco uniforme, cuyo momento de inercia es 0,0261 kg · m², da vueltas a 480 r.p.m. Calcula su energía cinética de rotación.

La energía cinética de rotación se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$E_{c.\ rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

En primer lugar, debemos expresar la velocidad angular en las unidades correspondientes del S.I.:

$$\omega = 480 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 16 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$E_{c.\ rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0261 \cdot (16 \cdot \pi)^2 = 32{,}97 \text{ J}$$

2. Realiza una tabla comparativa con las magnitudes y las ecuaciones características del movimiento lineal y las del movimiento de rotación vistas en esta unidad.

En la dinámica de traslación, la cantidad de movimiento caracteriza el movimiento de un cuerpo; en torno a ella se establecen las leyes de la dinámica. En la dinámica de rotación es el momento angular el que caracteriza el movimiento de un cuerpo; de ahí derivan las leyes de la dinámica de este movimiento.

Comparando las expresiones que corresponden a la cantidad de movimiento y al momento angular:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

se observa que el momento de inercia, I, desempeña el mismo papel en la rotación que la masa, m, en la traslación, al igual que la velocidad angular desempeña el papel de la velocidad lineal.

En la traslación son las fuerzas las responsables de la variación de la cantidad de movimiento. En la rotación, los momentos son los responsables de la variación del momento angular.

En un sistema cuya masa no varíe, la ecuación fundamental de la dinámica de traslación sería $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Lo mismo ocurre en la rotación si no varía el momento de inercia; en este caso, la ecuación fundamental de la dinámica de rotación es $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$. El momento ocupa el lugar de la fuerza, y la aceleración angular, el de la lineal.

Por último, los principios de conservación, tanto de $\vec{p}$ como de $\vec{L}$, están universalmente aceptados y verificados, incluso en aquellos casos en que alguna de las leyes de Newton parece no cumplirse. Las siguientes tablas muestran un resumen de las analogías citadas:

TRASLACIÓN		ROTACIÓN	
Magnitud	**Unidad**	**Magnitud**	**Unidad**
Masa, m	kg	Momento de Inercia, I	$kg \cdot m^2$
Velocidad, v	$m \cdot s^{-1}$	Velocidad angular, ω	$rad \cdot s^{-1}$
Aceleración, a	$m \cdot s^{-2}$	Aceleración angular, α	$rad \cdot s^{-2}$
Fuerza, F	N	Momento de la fuerza, M	$N \cdot m$
Cantidad de movimiento, $p = m \cdot v$	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$	Momento angular, $L = I \cdot \omega$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

	TRASLACIÓN	ROTACIÓN
Ecuación fundamental	$F = m \cdot a$	$M = I \cdot \alpha$
Principio de conservación	$p = m \cdot v = cte$	$L = I \cdot \omega = cte$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Desde un punto de vista físico, ¿esfuerzo equivale a trabajo? ¿Con qué magnitud física relacionarías el esfuerzo?

No; físicamente es muy importante diferenciar el esfuerzo (muscular), que podemos relacionar con la fuerza, del trabajo. Para que haya trabajo, debe existir desplazamiento en la dirección de la fuerza aplicada o en una dirección que no forme un ángulo de 90° o de 270° con dicha fuerza, lo cual es fácilmente deducible de la definición de trabajo:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\ \theta$$

en la que θ es el ángulo formado por los vectores fuerza y desplazamiento.

2. ¿Qué relación existe entre la altura máxima que alcanza una piedra, lanzada verticalmente desde la superficie de la Tierra, y la velocidad con que fue lanzada?

Para contestar a la pregunta, hemos de suponer que la energía mecánica del sistema se conserva; es decir, no consideramos el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento.

Cuando la piedra alcanza el punto más alto de su trayectoria, toda la energía mecánica del sistema se encuentra en forma de energía potencial. Por otra parte, esa energía mecánica se encontraba en forma de energía cinética en el momento del lanzamiento. Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre los instantes inicial y final, resulta:

$$\Delta E_c - \Delta E_p = 0$$

Sustituyendo valores y teniendo en cuenta que $v = 0$ y $h_0 = 0$, resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot (h - h_0) = 0 \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = k \cdot v_0^2$$

Por tanto, la altura máxima es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial.

3. El trabajo que debemos realizar para detener un cuerpo en movimiento es:

a) Proporcional a la masa del cuerpo y al cuadrado de la velocidad que lleva.

b) Proporcional a la masa del cuerpo y a su velocidad.

c) Proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración que lleva.

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

Aplicaremos el teorema de las fuerzas vivas entre el instante inicial, cuando el cuerpo se desliza con cierta velocidad, y el instante final, en el que se detiene.

De ese modo, obtenemos el siguiente resultado:

$$W = \Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

El signo negativo indica que este trabajo debe ser realizado por una fuerza externa en sentido opuesto al movimiento del cuerpo. La respuesta correcta es, por tanto, la **a).**

4. Un objeto de 20 g se mueve con una velocidad de 20 m · s^{-1}. Calcula su energía cinética. Si la velocidad se reduce a la mitad, la energía cinética, ¿también se reducirá a la mitad?

La energía cinética del cuerpo es:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 \cdot 20^2 = 4 \text{ J}$$

Si la velocidad se reduce a la mitad:

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{v_1^2}{4} = \frac{E_{c_1}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ J}$$

Por tanto, la energía cinética se reduce a la cuarta parte.

5. Para que la energía mecánica de un sistema se conserve, es suficiente que:

a) Todas las fuerzas deriven de potenciales.

b) El sistema esté aislado.

c) Se pueda calcular el trabajo de las fuerzas a lo largo de un camino cualquiera.

d) Las fuerzas dependan de la posición que ocupan, y no de la velocidad con que se mueven los puntos materiales.

La respuesta correcta es la **a)** siempre que se trate de un sistema físico aislado. Las fuerzas que derivan de potenciales son fuerzas conservativas, y, según el teorema de conservación de la energía mecánica, si las fuerzas que actúan sobre un sistema físico son conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante.

Si el sistema físico se encuentra aislado y existen fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema no tiene por qué mantenerse constante.

Pensemos, por ejemplo, en el sistema mecánico formado por un plano inclinado y un objeto que se desliza sobre él con rozamiento. Si el sistema objeto-plano está aislado, la energía total se mantiene constante, aunque parte de ella se transfiere del objeto al plano en forma de calor, disminuyendo la energía mecánica del sistema.

6. En todo sistema físico:

a) La energía mecánica se conserva.

b) La energía mecánica se conserva si el sistema está aislado y no existen rozamientos interiores al sistema.

c) La energía se conserva si el sistema está aislado.

d) Ninguna respuesta es correcta.

La respuesta correcta es la **b).** Un sistema físico puede permanecer aislado (ausencia de fuerzas exteriores), pero puede haber fuerzas no conservativas internas en él (rozamientos internos), no cumpliéndose en este caso el principio de conservación de la energía mecánica. Un ejemplo de ello es el propuesto al resolver la actividad anterior.

7. Comenta la siguiente frase:

"Podemos hablar de diferencias de potencial aunque no conozcamos el origen de potenciales, pero sin este, jamás podremos definir potenciales".

La frase es cierta.

Si conocemos la magnitud que hace variar el potencial, podemos establecer sin problemas diferencias de potencial en función de los distintos valores de la citada magnitud. Sin embargo, si no establecemos un punto de referencia donde el potencial sea nulo, será imposible hablar de puntos del espacio con potencial determinado.

8. Explica por qué es siempre negativo el trabajo de la fuerza de rozamiento.

Cuando un cuerpo se mueve sobre la superficie de otro cuerpo, existe una fuerza de interacción en la superficie de contacto entre ambos que se opone siempre al movimiento. A esta fuerza la denominamos fuerza de rozamiento. Dado que se opone al movimiento, el ángulo, θ, formado por la fuerza de rozamiento y el desplazamiento, es de 180°. Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta\vec{r} = F_{roz} \cdot \Delta r \cdot cos\ 180° = -F_{roz} \cdot \Delta r$$

9. ¿Cuáles son las ventajas de resolver los problemas de mecánica utilizando las ecuaciones del trabajo y la energía en vez de utilizar las leyes de Newton?

La principal ventaja es que las ecuaciones del trabajo y de la energía permiten calcular posiciones y velocidades de forma mucho más sencilla que las leyes de Newton, puesto que, al ser conservativo el campo gravitatorio, las variaciones energéticas que se producen cuando un cuerpo se mueve en su seno dependen únicamente de las posiciones inicial y final, y no de la trayectoria seguida.

10. ¿Es central la fuerza elástica? ¿Es necesario que una fuerza conservativa sea central? Razona tus respuestas.

La fuerza elástica es una fuerza central. En este caso, el punto fijo por el que siempre pasa la línea de acción de la fuerza es el punto donde el muelle se engancha. De no existir ese punto, el muelle sería incapaz de estirarse o de acortarse, ya que no podríamos ejercer fuerza sobre él.

Una prueba de que la fuerza elástica siempre está dirigida hacia este punto es que podemos estirar el muelle en vertical (por ejemplo, colgado de un techo) o en horizontal (si lo enganchamos a una pared), y, en cada caso, la fuerza será vertical u horizontal, respectivamente, pero estará dirigida hacia el punto por el que se sujeta el muelle.

Respecto a la segunda pregunta, no es necesario. La implicación está demostrada en sentido contrario; esto es, podemos afirmar que toda fuerza central es conservativa, pero no al revés.

11. Dos partículas situadas sobre un disco giran con velocidad angular constante. Una está en el borde del disco, y la otra, a mitad de camino entre el borde y el eje.

a) ¿Cuál de las partículas recorre una mayor distancia durante un tiempo determinado?

b) ¿Cuál gira mayor ángulo?

c) ¿Cuál tiene mayor velocidad?

d) ¿Cuál gira a mayor velocidad angular?

e) ¿Cuál posee mayor aceleración tangencial?

f) ¿Y mayor aceleración normal?

g) ¿Y mayor aceleración angular?

a) La relación entre el arco recorrido, Δs, por cada partícula y el ángulo abarcado es:

$$\Delta s = R \cdot \Delta\theta$$

Por tanto, la partícula que se encuentra a mayor distancia del eje de giro recorrerá una distancia mayor. En concreto, la distancia que recorre la partícula que se encuentra en el borde del disco es:

$$\Delta s_1 = R \cdot \Delta\theta$$

Y la que se encuentra a mitad de camino entre el borde y el eje:

$$\Delta s_2 = \frac{R}{2} \cdot \Delta\theta = \frac{\Delta s_1}{2}$$

Esta última recorre, por tanto, la mitad de distancia que la anterior.

b) Ambas giran el mismo ángulo.

c) La relación entre la velocidad lineal y la angular es:

$$v = R \cdot \omega$$

Por tanto, aquella partícula que se encuentre mas alejada del eje de giro girará con mayor velocidad lineal.

d) La velocidad angular es constante (m.c.u.); las dos giran a la misma velocidad.

e) La relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular es:

$$a_T = \alpha \cdot R$$

Como la velocidad angular es constante, $\alpha = 0$, $a_T = 0$ en ambos casos.

f) Una partícula que se mueve describiendo un movimiento curvilíneo siempre está sometida a una aceleración normal (centrípeta). En el caso del m.c.u. es:

$$a_N = \omega^2 \cdot R$$

Por tanto, los puntos más alejados del eje de giro tendrán un valor más alto de la aceleración normal.

g) Como se ha indicado anteriormente, $\alpha = 0$ en ambos casos.

12. ¿Qué condición es necesaria para que un cuerpo gire?

Al aplicar una fuerza sobre un cuerpo, este puede desplazarse de dos formas: puede moverse sobre una trayectoria, trasladándose de un punto a otro, o puede describir un giro sobre sí mismo, permaneciendo en la posición relativa que ocupa.

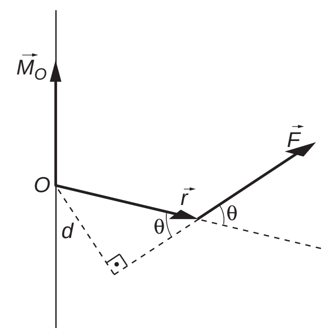
El momento de una fuerza es la magnitud física que produce el giro de un cuerpo alrededor de un punto cuando sobre él aplicamos una fuerza. Por tanto, para que un cuerpo gire, es necesario que la resultante de los momentos aplicados sobre él sea no nula.

13. Demuestra que el momento de una fuerza respecto a un punto se puede calcular como el producto del módulo de dicha fuerza por la distancia que hay desde el punto a la línea de acción de la fuerza.

El momento de una fuerza, $\vec{M}_0$, respecto a un punto, *O,* se define como el producto vectorial de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$, siendo $\vec{r}$ el vector posición que une el eje de giro con el punto en que se aplica la fuerza:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow M_O = r \cdot F \cdot sen\ \theta$$

En la expresión anterior, θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.



De acuerdo con la gráfica de la derecha, podemos expresar la distancia que hay desde el punto a la línea de acción de la fuerza en función de θ y *r*:

$$d = r \cdot sen\ \theta \rightarrow sen\ \theta = \frac{d}{r}$$

Por tanto, el momento de la fuerza es:

$$M_O = r \cdot F \cdot \frac{d}{r} = F \cdot d$$

tal y como solicitaba el enunciado de la cuestión.

14. Imagina una persona patinando sobre hielo que está girando sobre sí misma a gran velocidad con los brazos levantados. Explica qué sucederá si baja los brazos, dejándolos extendidos perpendicularmente al cuerpo.

Cuando una persona está patinando sobre hielo, podemos considerar nulo el valor de la fuerza de rozamiento. Por tanto, al girar sobre sí misma, su momento angular permanece constante; es decir:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{cte}$$

Cuando el patinador coloca los brazos perpendicularmente, su momento de inercia, $I = m \cdot r^2$, aumenta; en consecuencia, para que el momento angular permanezca constante, su velocidad angular, $\vec{\omega}$, disminuirá.

15. Una partícula recorre una trayectoria circular. Si se duplica su cantidad de movimiento, ¿cómo se ve afectado su momento angular? ¿Y si se duplica el radio de la trayectoria pero sin modificar la velocidad de la partícula?

El momento angular de una partícula es:

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

siendo su módulo:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot sen\ \theta$$

En la expresión anterior, θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, r es el radio de la trayectoria, y m, la masa de la partícula.

Recuerda que la cantidad de movimiento que corresponde a una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow p = m \cdot v$$

Por tanto, podemos expresar el momento angular como:

$$L_1 = r \cdot p \cdot sen\ \theta$$

Si se duplica la cantidad de movimiento:

$$L_2 = r \cdot p_2 \cdot sen\ \theta = r \cdot 2 \cdot p \cdot sen\ \theta = 2 \cdot L_1$$

el momento angular también se duplica.

Si lo que se duplica es el radio de la trayectoria sin modificar la velocidad, ocurre lo mismo:

$$L_3 = r_3 \cdot p \cdot sen\ \theta = 2 \cdot r \cdot p \cdot sen\ \theta = 2 \cdot L_1$$

16. Un cuerpo, de masa *m*, es elevado desde el suelo hasta una altura *h* de dos modos, directamente y utilizando una rampa que forma un ángulo de 37º con la horizontal:

a) ¿En cuál de los dos casos se realiza más trabajo? Considera dos situaciones, con rozamiento y sin él.

b) ¿Para qué sirve en realidad la rampa?

a.1) Suponiendo que no existe rozamiento.

En este caso, el trabajo es el mismo por los dos caminos, ya que la única fuerza que interviene es el peso, que, al ser una fuerza conservativa, hace que el trabajo realizado solo dependa de las posiciones inicial y final:

$$W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

a.2) Suponiendo que existe rozamiento.

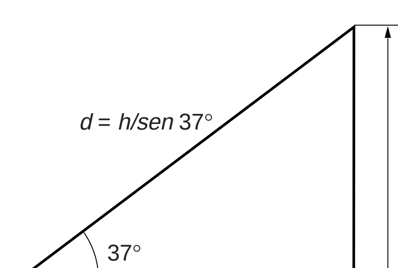
- Sin rampa:

  Al no haber rampa, el cuerpo no se desliza y, por tanto, no existe fuerza de rozamiento (si despreciamos la del aire). Este caso es idéntico al anterior, y el trabajo será:

  $$W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

- Con rampa:

  Si utilizamos la rampa, el trabajo que debemos realizar sobre el cuerpo aumenta, ya que, además de la necesidad que tenemos de comunicar energía potencial al cuerpo para que se eleve, necesitamos vencer la fuerza de rozamiento para que el cuerpo se deslice sobre la superficie del plano.



El balance energético queda, en este caso, de la forma:

$$W = \Delta E_p + W_{roz} = m \cdot g \cdot h + F_{roz} \cdot \frac{h}{sen\ 37°}$$

$$W = m \cdot g \cdot h + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ 37° \cdot \frac{h}{sen\ 37°} = m \cdot g \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\mu}{tg\ 37°}\right)$$

Como vemos, al utilizar la rampa, el trabajo necesario aumenta, debido al rozamiento.

b) No olvidemos el objetivo que persigue el problema que nos plantean: subir el cuerpo hasta cierta altura, lo que supone realizar un trabajo para comunicarle cierta energía potencial. Lo que permite la rampa es que esa "entrega" de energía se realice de modo gradual. Dicho de otra forma: la rampa reduce la tasa de entrega de energía al sistema, lo que permite realizar el mismo trabajo en mayor tiempo, o lo que es lo mismo, empleando menor potencia.

EJERCICIOS

17. Un resorte, de constante elástica k = 100 N · m^{-1}, se comprime 5 cm en el interior de un tubo horizontal. Liberado bruscamente, expulsa una bola de 10 g de masa. ¿Con qué velocidad, en m · s^{-1}, sale la bola del tubo?

a) 2 b) 5 c) 10 d) 20

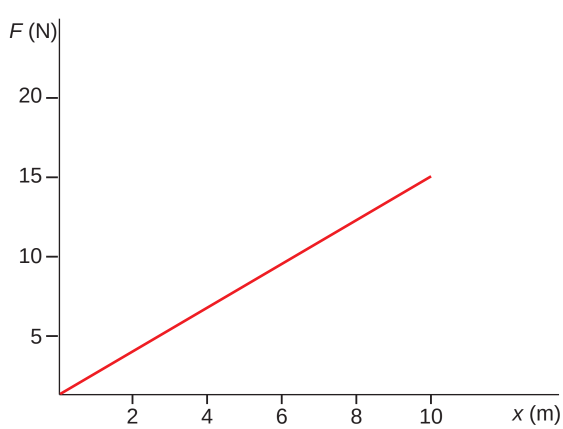
Si suponemos el sistema libre de rozamientos y aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, resulta:

$$\left| \Delta E_{p\_elástica} \right| = \left| \Delta E_c \right|$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot x^2}{m}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 0{,}05^2}{0{,}01}} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La respuesta correcta es, por tanto, la **b)**.

18. Una fuerza $F(x)$, varía con la posición, x, según se indica en la gráfica adjunta. Calcula el trabajo que realiza dicha fuerza sobre una partícula que se mueve desde el punto x = 0 hasta el punto x = 6 m.



A la vista de la gráfica, podemos escribir la relación entre la fuerza y la posición como se indica:

$$F = 1{,}5 \cdot x$$

que corresponde a la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es 1,5.

Como la fuerza es variable, para calcular el trabajo debemos utilizar la expresión:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr \cdot \cos\theta$$

Dado que la fuerza solo depende de la coordenada *x*, podemos escribir la expresión anterior como:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_0^6 1{,}5 \cdot x \cdot dx = 1{,}5 \cdot \int_0^6 x \cdot dx =$$

$$= 1{,}5 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 1{,}5 \cdot \left(\frac{6^2}{2} - 0\right) = 27 \text{ J}$$

19. La fuerza indicada en el ejercicio anterior es la única fuerza que está actuando sobre una partícula de 5 kg de masa que inicialmente se encuentra en reposo en el punto $x = 0$. Calcula cuál será su velocidad al llegar al punto $x = 6$ m.

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas, podemos calcular la energía cinética final que adquiere la partícula:

$$W = \Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = E_{c_f} - 0 \rightarrow W = E_{c_f} \rightarrow E_{c_f} = 27 \text{ J}$$

Por tanto, la velocidad que adquiere la partícula es:

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c_f}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 27}{5}} = 3{,}29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

20. Del techo de una habitación cuelgan dos pesas, una de 7 kg y otra de 10 kg. Si la primera cuelga a 10 m de altura, suspendida por una cuerda de 2 m, y la segunda cuelga de una cuerda de 8 m, ¿qué pesa posee más energía potencial, medida respecto al techo?

El problema muestra la importancia que reviste la elección del sistema de referencia cuando estudiamos la energía potencial gravitatoria.

Debe quedar claro que, si escogemos el origen de potenciales en el techo, todas las alturas que queden por debajo del nivel del techo serán negativas y, por tanto, corresponderán a energías potenciales negativas.

En el primer caso, la energía potencial es:

$$E_{p_1} = m \cdot g \cdot h = 7 \cdot 10 \cdot (-2) = -140 \text{ J}$$

mientras que para la segunda esfera, dicha energía es:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot h = 10 \cdot 10 \cdot (-8) = -800 \text{ J}$$

La primera esfera tiene, por tanto, más energía potencial.

21. Calcula el trabajo consumido y la potencia suministrada para mantener un cuerpo de 10 kg a una altura de 2 m durante 10 segundos. ¿Qué trabajo se realiza para elevarlo desde el suelo al punto anterior con velocidad constante, en 5 segundos? En ese caso, ¿cuál es la potencia?

Mantener un cuerpo a una cierta altura no supone realizar ningún trabajo, ya que no existe desplazamiento alguno. Para mantener un cuerpo a cierta altura, hemos de tirar de él con una fuerza igual a su peso.

Para hacerlo subir, debemos realizar un trabajo igual a la variación de energía potencial que experimenta el cuerpo desde el suelo hasta el punto en que se encuentra:

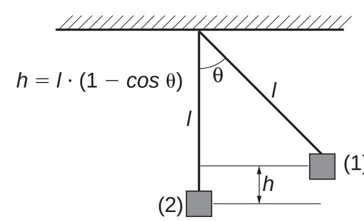
$$W = \Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0 = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 200 \text{ J}$$

La potencia es:

$$P = \frac{W}{t} \rightarrow P = \frac{200}{5} = 40 \text{ W}$$

22. Un péndulo de 1 m de longitud se separa de su posición de equilibrio hasta que forma un ángulo de 20º con la vertical y se deja libre. Calcula la velocidad del péndulo cuando pase de nuevo por la posición de equilibrio. Desprecia el rozamiento con el aire.

Si despreciamos el rozamiento con el aire, podemos afirmar que el sistema conserva su energía mecánica, pues todas las demás fuerzas que intervienen son conservativas. Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto más alto (que llamaremos 1) y el punto más bajo (que llamaremos 2) de la trayectoria, al que elegimos como origen de potenciales, resulta:

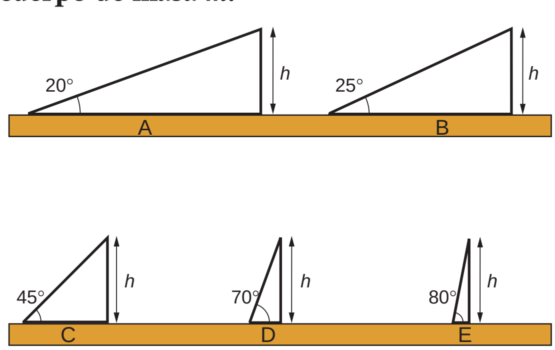


$$E_{mec_1} = E_{mec_2} \rightarrow E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2} \rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\ \theta) + 0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando la velocidad de la ecuación anterior:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\ \theta)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot (1 - cos\ 20°)} = 1{,}10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

23. En la figura se muestran varios planos inclinados, por los que ha de subirse, arrastrando, un cuerpo de masa *m*.



NOTA: la gráfica correcta es la que aparece en este enunciado.

Suponiendo que el rozamiento entre el cuerpo y el plano es nulo, ¿qué plano escogerías para minimizar el trabajo a realizar? ¿Y para minimizar la potencia?

Contesta de nuevo a las dos preguntas anteriores, suponiendo ahora que existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado.

- **Sin rozamiento:**

  Trabajo. Si suponemos que no existe rozamiento, el trabajo necesario para elevar un cuerpo de masa *m* coincide con la energía potencial que hemos de suministrarle para ello. Es decir:

  $$\Delta E_p = W$$

  Como la altura a la que hay que subir el cuerpo es la misma en todos los casos, el trabajo que hay que realizar es idéntico.

  Potencia. La potencia indica la cantidad de trabajo que se realiza por unidad de tiempo.

  Suponiendo que la velocidad de subida es la misma en todos los casos, en un plano inclinado de mayor pendiente se necesita mayor potencia para subir el cuerpo. La cantidad de trabajo que se ha de aportar por unidad de tiempo es superior, ya que el trabajo se realiza en menos tiempo.

  Para minimizar la potencia, elegiremos, por tanto, el plano de menor pendiente (letra A).

- **Con rozamiento:**

  Trabajo. En este caso, el balance energético resulta:

  $$\Delta E_p + W_{roz} = W$$

  Al sustituir cada término por su valor, resulta:

  $$W = m \cdot g \cdot h + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \cdot \frac{h}{sen\ \alpha} = m \cdot g \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\mu}{tg\ \alpha}\right)$$

  Como indica el resultado, cuanto menor sea el ángulo α, menor será su tangente y, por tanto, mayor el trabajo.

  Potencia. El razonamiento es igual al del caso sin rozamiento.

  Conviene no olvidar que, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, lo que interesa es minimizar la potencia, no el trabajo.

24. Un balón de 0,7 kg de masa comienza a rodar por el césped de un campo de fútbol a 5 m · s^{-1}. Calcula la variación de energía que experimentan el balón y el césped del campo de fútbol desde que se inicia el movimiento del balón hasta que este se detiene.

La energía potencial del balón se mantiene constante, puesto que no varía su altura. Tan solo varía su energía cinética. El cálculo de la variación de energía cinética que experimenta el balón es:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

Sustituyendo, obtenemos la variación de energía cinética en función de la velocidad en el instante final:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_f^2 - v_i^2\right) = 0{,}35 \cdot \left(v_f^2 - 25\right)$$

Una vez se ha parado el balón (velocidad final nula), la variación de energía cinética resulta:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = 0{,}35 \cdot (0 - 25) = -8{,}75 \text{ J}$$

La variación de energía que experimenta el césped es nula, ya que no se ha movido.

25. Si el balón del ejercicio anterior recorre 75 m antes de detenerse, calcula la fuerza de rozamiento, supuesta constante, que ha estado frenando el balón durante el recorrido.

De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas, la variación de energía cinética que se produce entre el instante inicial y el instante en que la pelota se detiene coincide con el trabajo realizado. Por otra parte, dado que el plano es horizontal, la única fuerza que realiza trabajo es la de rozamiento, ya que el peso y la reacción normal del plano son perpendiculares a la dirección del movimiento.

La fuerza de rozamiento será, por tanto:

$$W = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\ 180° = -F_{roz} \cdot d \rightarrow F_{roz} = -\frac{W}{d} = -\frac{\Delta E_c}{d} = -\frac{-8{,}75}{75} = 0{,}117 \text{ N}$$

26. Se lanza un objeto de 8 kg hacia arriba, con una velocidad inicial de 7 m/s. Calcula la altura que alcanzará el objeto si durante el movimiento se disipa una energía de 80 J por efecto del rozamiento con el aire.

La energía cinética que comunicamos al objeto en el momento del lanzamiento es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7^2 = 196 \text{ J}$$

Como se disipan 80 J debido al rozamiento, la energía potencial en el punto de altura máxima será:

$$E_p = E_c - W_{roz} \rightarrow E_p = 196 - 80 = 116 \text{ J}$$

A partir de este valor deducimos la altura máxima que alcanza el objeto:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{116}{8 \cdot 9{,}8} = 1{,}48 \text{ m}$$

27. Calcula el trabajo que realiza la fuerza con que la Tierra atrae un satélite artificial cada vez que el satélite da una vuelta completa a nuestro planeta.

La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un satélite artificial es una fuerza central y, como tal, es conservativa. En este caso, al ser la trayectoria que realiza el satélite cerrada (la posición inicial y la final coinciden), el trabajo realizado por la fuerza es nulo.

28. Indica la relación que existe entre el trabajo necesario para alargar un muelle 2 cm y el que se necesita para alargar el mismo muelle 1 cm.

Para resolver este ejercicio, supondremos que el muelle se encuentra inicialmente en reposo. Al tirar de él, incrementamos su energía potencial elástica:

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{p_0} \rightarrow E_{p_f} - 0 = E_{p_f} = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Cuando alargamos el muelle 2 cm:

$$E_{p_f}(2 \text{ cm}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0{,}02)^2$$

Y cuando lo alargamos 1 cm:

$$E_{p_f}(1 \text{ cm}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0{,}01)^2$$

La relación entre ambos casos es:

$$\frac{E_{p_f}(1 \text{ cm})}{E_{p_f}(2 \text{ cm})} = \frac{0{,}01^2}{0{,}02^2} = 0{,}25$$

Obviamente, se necesita más trabajo en el primer caso (el incremento de energía potencial es mayor).

29. Calcula las vueltas que dará en 10 s un disco que gira con aceleración angular constante de 2 · π rad · s^{-2} si parte del reposo.

La ecuación que permite calcular la posición angular, θ, en cualquier instante, t, en el m.c.u.a. es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^2$$

Si parte del reposo, $\omega_0 = 0$, y si consideramos como inicio de tiempo $t_0 = 0$, la ecuación anterior queda como sigue:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Por tanto, el ángulo que habrá girado en 10 s será:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 100 \cdot \pi \text{ rad}$$

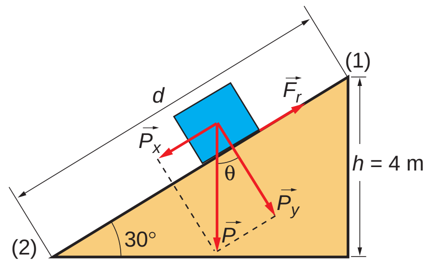
Como en una vuelta hay 2 · π rad, el número de vueltas que dará es:

$$n.^\circ\ vueltas = \frac{100 \cdot \pi \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad/vuelta}} = 50 \text{ vueltas}$$

PROBLEMAS

30. Un niño de 30 kg se desliza con rozamiento por un tobogán que tiene 4 m de altura y una inclinación de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el niño y la superficie del tobogán es $\mu = 0{,}2$. ¿Cuál será la velocidad del niño al llegar al suelo si se dejó caer desde el punto más alto del tobogán?

A nuestros efectos, podemos considerar el problema de forma análoga al descenso de un bloque por un plano inclinado con rozamiento, como se muestra en la figura de la página siguiente.



Para obtener la velocidad del niño, calcularemos la energía cinética con que llega a la base del plano, que será la diferencia entre la energía potencial que tiene cuando se encuentra a la altura máxima y la energía disipada durante el descenso debido al trabajo de la fuerza de rozamiento.

$$W_{roz} = \Delta E_{lin} \rightarrow E_{c_2} = E_{p_1} - W_{roz}$$

La energía potencial cuando se encuentra a 4 m de altura es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 30 \cdot 9{,}8 \cdot 4 = 1\,176 \text{ J}$$

Por su parte, el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento es:

$$W_{F_{roz}} = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta\vec{r} = F_{roz} \cdot \Delta r \cdot cos\ 180° = -F_{roz} \cdot \Delta r = -\mu \cdot N \cdot \Delta r$$

En este caso, el valor del desplazamiento, Δr, es la distancia, d, que recorre el niño sobre el tobogán. De acuerdo con la figura, su valor es:

$$sen\ 30° = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{h}{sen\ 30°} = \frac{4}{0{,}5} = 8 \text{ m}$$

Por tanto:

$$W_{F_{roz}} = -F_{roz} \cdot \Delta r = -\mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \theta \cdot d = -0{,}2 \cdot 30 \cdot 9{,}8 \cdot cos\ 30° \cdot 8 = -\ 407{,}38 \text{ J}$$

Y la energía cinética en la base del plano:

$$E_c = E_p - W_{roz} \rightarrow E_c = 1\,176 - 407{,}38 = 768{,}62 \text{ J}$$

Finalmente, la velocidad del niño al llegar al suelo será:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 768{,}62}{30}} = 7{,}16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

31 **Un bloque de 15 kg cae desde una altura de 15 m y llega al suelo en 2 s. ¿Qué fuerza de rozamiento hace el aire, suponiendo que sea constante? ¿Cuánta energía se ha perdido?**

Calcula la velocidad que llevaba el bloque inmediatamente antes de tocar el suelo.

La aceleración de caída podemos calcularla teniendo en cuenta que:

$$s - s_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Suponiendo que el cuerpo parte del reposo, sustituyendo valores, resulta:

$$15 = 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 \rightarrow a = 7{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Esta aceleración se debe a la acción de una fuerza que será la resultante de dos: la fuerza peso, que lo hace caer, y la fuerza de frenado, que se opone a la caída y se supone también constante. Por tanto:

$$P - F_{roz} = m \cdot a$$

es decir:

$$m \cdot g - F_{roz} = m \cdot a$$

de donde resulta:

$$F_{roz} = m \cdot g - m \cdot a = m \cdot (g - a)$$

y, sustituyendo valores, queda:

$$F_{roz} = 15 \cdot (10 - 7{,}5) = 37{,}5 \text{ N}$$

La energía perdida equivale al trabajo de rozamiento que ha realizado el sistema:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{d} = 37{,}5 \cdot 15 = 562{,}5 \text{ J}$$

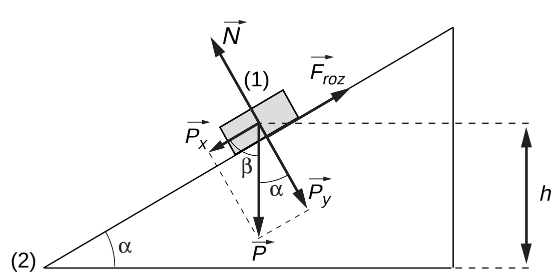
Para calcular ahora la velocidad del bloque inmediatamente antes de chocar con el suelo, basta con tener en cuenta que:

$$v_f = v_0 + a \cdot (t - t_0) = 0 + 7{,}5 \cdot 2 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

32. Calcula la velocidad con que llega al suelo un cuerpo de 0,5 kg que se desliza por un plano inclinado 37° cuando se deja caer desde una altura de 50 cm.

El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,15.

Para resolver el problema, tomamos como origen del potencial gravitatorio la posición (2), correspondiente a la base del plano inclinado, tal como se aprecia en la figura:



De ese modo, en la posición (1), a 50 cm de altura, el cuerpo tan solo posee energía potencial, y en la posición (2), tan solo posee energía cinética.

Al desplazarse, el cuerpo pierde energía debido al rozamiento. Debido a ello, el balance energético es:

$$W_{roz} = \Delta E_m \rightarrow W_{roz} = E_{m_2} - E_{m_1}$$

Siendo:

$$E_m\,(1) = m \cdot g \cdot h$$

$$E_m\,(2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

La fuerza de rozamiento actúa en la dirección del desplazamiento, y su sentido es opuesto a este. Por tanto, al desplazarse el cuerpo la distancia d que separa las posiciones (1) y (2), el trabajo que realiza esta fuerza vale:

$$W_{roz}(1 \to 2) = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W_{roz} = \mu \cdot N \cdot d \cdot cos\ 180° = -\mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \cdot d$$

siendo:

$$d = \frac{h}{sen\ \alpha}$$

Por tanto:

$$W_{roz}(1 \to 2) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \cdot \frac{h}{sen\ \alpha} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{h}{tg\ \alpha}$$

Sustituyendo las correspondientes expresiones en la que proporciona el balance energético, resulta:

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{h}{tg\ \alpha} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h$$

Al despejar, obtenemos el valor que nos piden:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\mu}{tg\ \alpha}\right)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,15}{tg\ 37°}\right)} = 2,80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

33. Una bala de 10 g choca a 40 m · s^{-1} con un bloque de 390 g sujeto a un hilo de 1 metro de longitud y se incrusta en él:

a) ¿A qué altura sube el conjunto por efecto del impacto?

b) ¿Cuánto vale el ángulo desplazado?

Nota: En estos choques se conserva la cantidad de movimiento y no se conserva la energía.

En este tipo de choques se conserva la cantidad de movimiento, pero no se conserva la energía mecánica. Solo podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica al bloque una vez la bala ha quedado alojada dentro de él. En esas condiciones, sí podemos afirmar que en el sistema solo intervienen fuerzas conservativas.

En primer lugar, hallaremos la velocidad inicial con que se mueve el conjunto bloque-bala tras el impacto, aplicando para ello el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

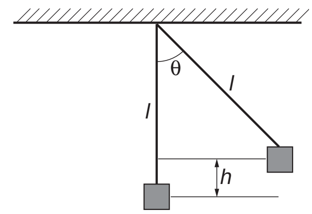
$$P_{antes\_choque} = P_{después\_choque}$$

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

Despejando:

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{0,01 \cdot 40}{0,01 + 0,39} = 1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Situando el origen de potenciales donde se encuentra el sistema bloque-bala en el instante inicial, dicho conjunto solo poseerá energía cinética. Si aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre el instante inicial y el instante en que el sistema alcanza el punto más alto de la trayectoria, resulta:



$$\left.\begin{array}{l} E_{mecánica_1} = E_{mecánica_2} \\ E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2} \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v'^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$$

De donde podemos despejar el valor de h:

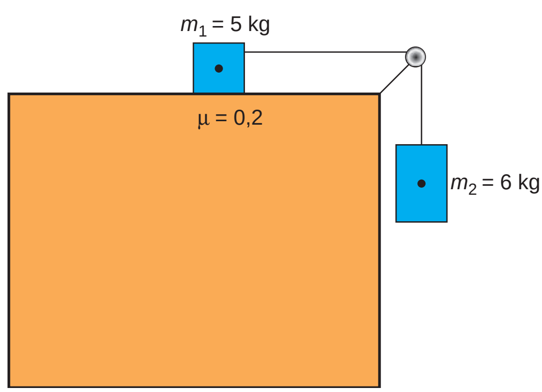
$$h = \frac{v'^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}051 \text{ m} = 5{,}1 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta ahora que $h = l \cdot (1 - cos\ \theta)$, resulta:

$$\theta = arccos\left(1 - \frac{h}{l}\right) = arccos\left(\frac{1 - 0{,}051}{1}\right) = 18{,}4°$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34 En la figura, el coeficiente de rozamiento entre la masa de 5 kg y el suelo toma el valor 0,2.



Despreciando la influencia de la polea y de la cuerda, calcula la velocidad del conjunto cuando la masa de 6 kg ha descendido 2 metros.

Inicialmente, el sistema se encuentra en reposo.

Observa que, en el instante de iniciarse el movimiento, el sistema solo posee la energía potencial de la masa que cuelga. La variación de energía potencial de dicha masa provoca, por tanto, el incremento de la energía cinética del sistema, ya que ambas masas se encuentran unidas por una cuerda.

El balance energético del sistema es:

$$W_{roz} = \Delta E_m \rightarrow W_{roz} = \Delta E_c - \Delta E_p$$

Si sustituimos cada término por su valor:

$$-\mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 - m_2 \cdot g \cdot \Delta h$$

Observa que:

1. Como ambos cuerpos están unidos solidariamente, recorren el mismo tramo, Δh, aunque uno en vertical, y el otro, en horizontal.

2. Al estar unidos, los dos cuerpos tienen la misma velocidad en todo instante.

Despejando y sustituyendo la velocidad de la expresión anterior, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta h \cdot (m_2 - \mu \cdot m_1)}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot (6 - 0{,}2 \cdot 5)}{(6 + 5)}} = 4{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

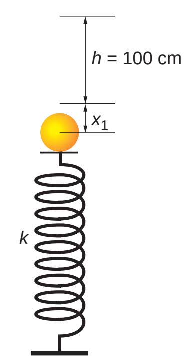
35 Sobre un muelle vertical se apoya, con velocidad nula, un cuerpo de 10 kg. El muelle experimenta una compresión de 5 cm. Calcula la deformación del muelle si el cuerpo se deja caer sobre él desde una altura de 100 cm.

A partir de la primera parte del enunciado podemos averiguar la constante elástica del muelle, ya que:

$$F = k \cdot x_1 \rightarrow k = \frac{F}{x_1} = \frac{m \cdot g}{x_1} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{0{,}05} = 1\,960 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Inicialmente, al dejar caer el cuerpo desde 0,1 m, este posee energía potencial gravitatoria. Si establecemos el origen de potenciales en el punto de máxima compresión, dicha energía es:

$$E_p = m \cdot g \cdot (h + x)$$



Cuando el cuerpo ha comprimido al muelle, esa energía se ha convertido en energía potencial elástica:

$$E_p = k \cdot \frac{x^2}{2}$$

Como no hay pérdidas, ambas energías deben ser iguales. Por tanto:

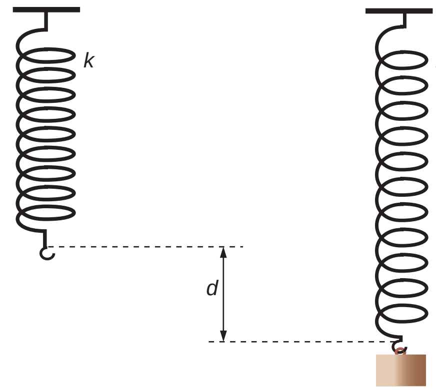
$$k \cdot \frac{x^2}{2} = m \cdot g \cdot (h + x) \rightarrow k \cdot x^2 - 2 \cdot g \cdot m \cdot x - 2 \cdot g \cdot m \cdot h = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{g \cdot m + \sqrt{(g \cdot m)^2 + 2 \cdot k \cdot g \cdot m \cdot h}}{k}$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$x = \frac{9{,}8 \cdot 10 + \sqrt{(9{,}8 \cdot 10)^2 + 2 \cdot 1\,960 \cdot 9{,}8 \cdot 10 \cdot 1}}{1\,960} = \frac{725{,}5}{1\,960} = 0{,}37 \text{ m} = 37 \text{ cm}$$

36. Un muelle, de constante elástica *k*, cuelga verticalmente, y a su extremo libre se ata un bloque de masa *m*. Si se deja caer el sistema formado por el muelle y el bloque desde el reposo, calcula la máxima distancia que cae el bloque hasta que comience a moverse hacia arriba.



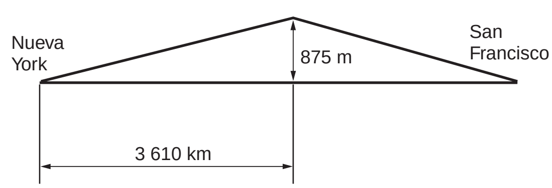
Para resolver este problema, consideraremos que el rozamiento con el aire es nulo. Cuando colgamos del muelle una masa, *m*, esta oscilará efectuando un movimiento armónico simple, que se estudiará en la unidad 4. La amplitud de este m.a.s. será la máxima distancia que cae el bloque y se da cuando el valor de la fuerza elástica es igual al peso:

$$F_e - P = 0 \rightarrow F_e = P$$

$$k \cdot x = m \cdot g \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k}$$

37. En 1876 la *West Fargo Corporation* unió los dos extremos de los Estados Unidos de América mediante un tendido de ferrocarril.

El tendido tenía una longitud de 5 740 km, y el desnivel máximo que había que salvar medía 875 m, en un punto situado a 3 610 km de Nueva York.



Calcula el trabajo total que realizó el tren, si el coeficiente de rozamiento era 0,17 y la subida y la bajada tenían una pendiente uniforme en los dos ramales. El tren tenía una masa de 23 500 kg.

En el conjunto del trayecto podemos distinguir dos tramos: por un lado, el tramo de subida, que modelizamos como un plano inclinado de pendiente ascendente y constante; por otro, el tramo de bajada, que modelizamos como un plano inclinado de pendiente constante y descendente.

En el tramo de subida, el trabajo que realiza la locomotora se emplea en vencer la fuerza de rozamiento, así como en aumentar la energía potencial del sistema:

$$W_{subida} = \Delta E_p + W_{roz\_1}$$

En el tramo de bajada, la energía potencial acumulada y el trabajo que realiza la locomotora se emplean en vencer el rozamiento:

$$W_{bajada} + \Delta E_p = W_{roz\_2}$$

Si sumamos el trabajo de subida y el de bajada, tenemos el trabajo total del sistema, que es:

$$W_{total} = W_{subida} + W_{bajada} = W_{roz\_1} + W_{roz\_2}$$

Al sustituir por su valor los trabajos en contra de la fuerza de rozamiento, tenemos:

$$W_{total} = W_{roz\_1} + W_{roz\_2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot (l_1 \cdot cos\ \alpha_1 + l_2 \cdot cos\ \alpha_2)$$

$$W_{total} = 0{,}17 \cdot 23\,500 \cdot 9{,}8 \cdot (3\,610 \cdot 10^3 \cdot cos\ \alpha_1 + 2\,130 \cdot 10^3 \cdot cos\ \alpha_2)$$

siendo los ángulos α_1 y α_2:

$$\alpha_1 = arcsen\ \frac{875}{3\,610 \cdot 10^3} = 0{,}01°$$

$$\alpha_2 = arcsen\ \frac{875}{2\,130 \cdot 10^3} = 0{,}02°$$

Sustituyendo, el trabajo resulta:

$$W_{total} = 2{,}25 \cdot 10^{11}\ J$$

38. La masa de la cabina de un ascensor es 350 kg y puede elevar una masa adicional de 350 kg:

a) Calcula el trabajo máximo que debe realizar el motor del ascensor para subir al piso más alto, situado a 30 metros de altura.

b) Calcula la potencia del motor, sabiendo que el ascensor tarda 45 segundos en subir hasta ese piso.

a) El trabajo máximo coincidirá con la energía potencial máxima que puede comunicarse al ascensor cuando se encuentra cargado de pasajeros. Es decir:

$$W = \Delta E_p$$

Por tanto:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h = (m_{ascensor} + m_{personas}) \cdot g \cdot h =$$
$$= (350 + 350) \cdot 9{,}8 \cdot 30 = 205\,800\ J$$

b) A partir de la definición de potencia, resulta:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{205\,800}{45} = 4\,573{,}3\ W$$

39. Se lanza verticalmente hacia arriba un sistema formado por dos masas de 4 y 3 kg, unidas por un resorte de constante elástica 1 000 N · m^{-1}. En determinado instante, las velocidades de ambas masas respecto a la Tierra son 5 y 6 m · s^{-1}, respectivamente, y el muelle está comprimido 10 cm, siendo las alturas de ambas masas respecto a la Tierra 10 y 10,1 m. Calcula la energía total del sistema.

La energía total del sistema será la suma de las energías cinética y potencial de cada masa más la energía potencial elástica del muelle, ya que se supone sin masa (su energía cinética y su energía potencial gravitatoria son nulas):

$$E_{total} = E_{c_1} + E_{c_2} + E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_{elástica}}$$

Sustituyendo cada término por su valor, resulta:

$$E_{total} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) + g \cdot (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2$$

Por tanto:

$$E_{total} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2) + 10 \cdot (4 \cdot 10 + 3 \cdot 10{,}1) + \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \cdot 0{,}1^2 = 812 \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

40 Un objeto de 1 kg de masa desciende, partiendo del reposo, por un plano inclinado de un metro de longitud que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1. Al llegar a la base sube por otro plano inclinado de las mismas características.

¿Hasta qué altura del plano subirá la masa, si las únicas pérdidas de energía que existen son por rozamiento?

Si no hubiese rozamiento, en virtud del principio de conservación de la energía mecánica, el cuerpo subiría hasta la misma altura desde la cual se dejó caer desde el primer plano inclinado.

Al existir rozamiento, el trabajo de este provoca una disminución en la energía mecánica del sistema. Debido a ello, la altura que alcanza el cuerpo en el segundo plano es menor.

Entre el punto del que dejamos caer el cuerpo y el punto en que se detiene en el segundo plano se cumple la siguiente relación:

$$E_{mec_1} + W_{roz} = E_{mec_2}$$

$$E_{p_1} + E_{c_1} + W_{roz} = E_{p_2} + E_{c_2}$$

Teniendo en cuenta que en estos dos puntos la velocidad es nula y considerando el trabajo de las fuerzas de rozamiento de ambos planos, la expresión anterior resulta:

$$E_{p_1} + W_{roz\ plano1} + W_{roz\ plano2} = E_{p_2}$$

Con los datos que proporciona el enunciado y la expresión de la fuerza de rozamiento, podemos escribir:

$$m \cdot g \cdot d \cdot sen\ 30° - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ 30° \cdot d - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ 30° \cdot d' =$$

$$= m \cdot g \cdot d' \cdot sen\ 30°$$

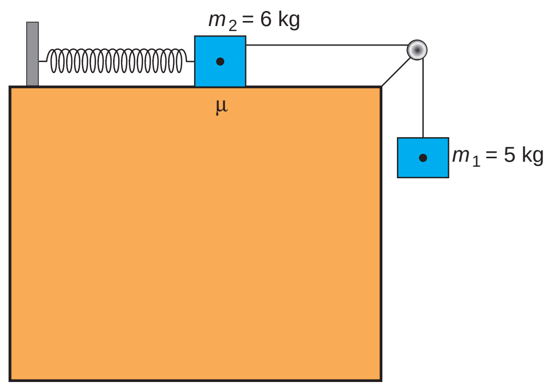
En la expresión anterior podemos sustituir y despejar d', que es la longitud máxima que recorre el objeto, medida sobre el segundo plano inclinado:

$$d' = \frac{d \cdot sen\ 30° - \mu \cdot cos\ 30° \cdot d}{sen\ 30° + \mu \cdot cos\ 30°} = \frac{1 \cdot sen\ 30° - 0{,}1 \cdot cos\ 30° \cdot 1}{sen\ 30° + 0{,}1 \cdot cos\ 30°} = 0{,}705 \text{ m}$$

Por tanto, la altura será:

$$h = d' \cdot sen\ 30° = 0{,}705 \cdot sen\ 30° = 0{,}352 \text{ m}$$

41. En el dispositivo de la figura, el muelle tiene una constante elástica $k = 1\,000$ N · m^{-1}, y el coeficiente de rozamiento de la masa m_2 con la superficie de la mesa vale 0,1.



Si, inicialmente, el muelle se encuentra en reposo, calcula la expresión que proporciona el alargamiento máximo. Considera $g = 10$ m · s^{-2}.

El sistema, inicialmente en reposo, comienza a acelerar gracias a la energía potencial de la masa m_1. Mientras esto ocurre, el muelle se alarga.

Ahora bien, ¿hasta cuándo se prolonga esta situación? Lógicamente, hasta que el muelle no pueda estirarse más. En ese instante, el sistema se para, y el movimiento de la masa comienza a ser ascendente.

Para el instante mencionado anteriormente, que es el de máximo estiramiento del muelle, el balance energético es:

$$\Delta E_{p_1} + W_{roz} = \Delta E_{p\_muelle} \rightarrow m_1 \cdot g \cdot \Delta h - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \Delta h = k \cdot \frac{(\Delta h)^2}{2}$$

Observa que el alargamiento del muelle es, precisamente, la distancia recorrida por las masas, tanto en el plano vertical como en el plano horizontal.

Al despejar Δh y sustituir en la ecuación anterior, resulta:

$$\Delta h = \frac{2 \cdot (m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g}{k} =$$

$$= \frac{2 \cdot (5 - 0{,}1 \cdot 6) \cdot 9{,}8}{1\,000} = 0{,}0862 \text{ m} = 8{,}62 \text{ cm}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42. Sobre una superficie plana y sin rozamiento, inclinada 30º, se empuja hacia arriba una masa puntual de 2 kg, aplicando una fuerza paralela a dicha superficie. Debido a ello, la masa asciende desde la cota 0 m a la cota 5 m. Si la velocidad inicial es 0,2 m · s^{-1} y en la parte superior la velocidad es 5 m · s^{-1}, calcula:

a) El trabajo que realiza la fuerza.

b) El módulo de la fuerza.

c) El tiempo empleado en el primer metro recorrido.

a) Al ascender, el cuerpo adquiere energía cinética (debido a la fuerza que lo impulsa) y energía potencial (debido al incremento de altura).

En el problema no se consideran pérdidas de energía por rozamiento. Por tanto, el trabajo que la fuerza realiza sobre el cuerpo coincide con la variación de su energía mecánica. Así pues:

$$\Delta E = E_f - E_i = W$$

$$\left.\begin{array}{l} E_f = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + m \cdot g \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 123 \text{ J} \\[2ex] E_i = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}04 \text{ J} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow W = 123 - 0{,}04 = 122{,}96 \text{ J}$$

b) Si tenemos en cuenta que:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos 0° = F \cdot d$$

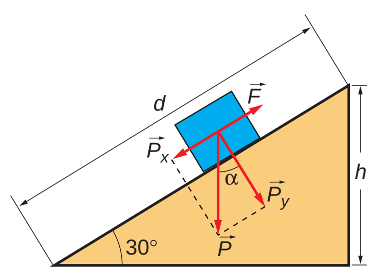
donde d es la distancia medida sobre el plano inclinado, que calculamos aplicando la relación trigonométrica:

$$d = \frac{h}{sen\ \alpha} = \frac{5}{sen\ 30°} = 10 \text{ m}$$

el módulo de la fuerza resulta:

$$W = F \cdot d \rightarrow F = \frac{W}{d} = \frac{122{,}96}{10} = 12{,}296 \text{ N}$$

c) Mientras asciende, el cuerpo está sometido a las fuerzas que se indican en la figura:



Al aplicar la segunda ley de Newton al cuerpo, resulta:

$$F - m \cdot g \cdot sen\ \alpha = m \cdot a$$

de donde podemos obtener la aceleración:

$$a = \frac{F - m \cdot g \cdot sen\ \alpha}{m} \rightarrow a = \frac{12{,}296 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}{2} = 1{,}25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El movimiento es un m.r.u.a. A partir de la ecuación de la posición en este movimiento y sustituyendo los datos del problema, obtenemos una ecuación de segundo grado, de la que podemos despejar el tiempo:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 10 = 0{,}2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}624 \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t - 10 = 0 \rightarrow t = 3{,}846 \text{ s}$$

43 **Se aplica un momento de frenado de –45 N · m a una partícula cuyo momento de inercia es de 30 kg · m² que está girando con una velocidad angular de 10 rad · s⁻¹. Calcula:**

a) La aceleración de frenado que adquirirá la partícula.

b) El tiempo que tardará en pararse.

c) El momento angular inicial.

a) A partir de la expresión que relaciona el momento del par de fuerzas, el momento de inercia y la aceleración angular, obtenemos esta última:

$$M = I \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{M}{I} = \frac{-45}{30} = -1{,}5 \text{ rad/s}^2$$

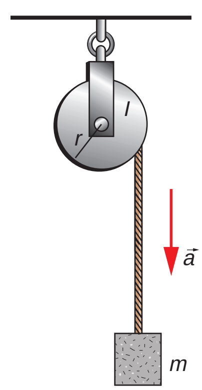
b) Despejando de la ecuación de la velocidad angular en el m.c.u.a., obtenemos el tiempo que tardará en pararse:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \rightarrow 0 = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10}{-1{,}5} = 6{,}67 \text{ s}$$

c) El momento angular inicial lo calculamos como sigue:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \rightarrow L = I \cdot \omega = 30 \cdot 10 = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

44. **Se sujeta un objeto de masa *m* a una cuerda enrollada alrededor de una rueda cuyo momento de inercia es *I* y cuyo radio es *r*. La rueda gira sin rozamiento, y la cuerda no se desliza por su borde. Calcula la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo.**



Al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos lo siguiente:

$$F = m \cdot a \rightarrow m \cdot g - T = m \cdot a \qquad [1]$$

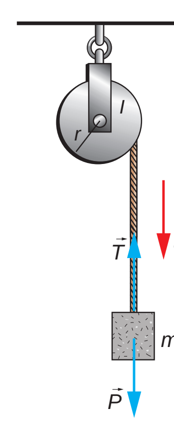
Por otra parte, la rueda gira debido al momento de la fuerza que actúa sobre ella. Esta fuerza es la tensión de la cuerda.

$$M = r \cdot F = I \cdot \alpha \rightarrow r \cdot T = I \cdot \alpha \qquad [2]$$

Las expresiones [1] y [2] forman un sistema que nos permite obtener la tensión de la cuerda y la aceleración con que cae el cuerpo.

Si tenemos en cuenta la relación que existe entre las aceleraciones angular y lineal:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$



la expresión [2] se convierte en:

$$r \cdot T = I \cdot \frac{a}{r}$$

Despejando la aceleración y sustituyendo en la expresión [1], obtenemos:

$$a = \frac{r^2 \cdot T}{I} \rightarrow m \cdot g - T = m \cdot \frac{r^2 \cdot T}{I}$$

Desarrollando esta expresión obtenemos la tensión de la cuerda:

$$m \cdot g = T + \frac{m \cdot r^2}{I} \cdot T \rightarrow T \cdot \left(1 + \frac{m \cdot r^2}{I}\right) = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}$$

Por tanto, la aceleración con que cae el cuerpo es:

$$a = \frac{r^2 \cdot T}{I} \rightarrow a = \frac{r^2}{I} \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}} \rightarrow a = g \cdot \frac{\frac{m \cdot r^2}{I}}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}$$

Por tanto, la aceleración de la caída es menor que la aceleración de la gravedad.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

2 CAMPO GRAVITATORIO: INTRODUCCIÓN

2.1. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1. **Compara la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa *M*, separados una distancia *R*, con la que ejercen entre sí dos cuerpos de masa 3 · *M*, situados a una distancia *R*/3.**

Cuando las dos masas de valor M están separadas una distancia R, el módulo de la fuerza F es:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot M}{R^2} = G \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Cuando la masa M triplica su valor y la distancia es 3 veces inferior, la fuerza pasa a valer:

$$|F'| = G \cdot \frac{(3 \cdot M) \cdot (3 \cdot M)}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = G \cdot 3^4 \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Dividiendo una entre otra, resulta:

$$\frac{|F'|}{|F|} = \frac{G \cdot \frac{3^4 \cdot M^2}{R^2}}{G \cdot \frac{M^2}{R^2}} = 3^4 = 81$$

Como vemos, el módulo de la fuerza aumenta 81 veces.

2. **Compara ahora la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa *M*, separados una distancia *R*, con la que ejercen entre sí esos dos mismos cuerpos separados una distancia 2 · *R*.**

La fuerza gravitatoria que ejercen entre sí dos cuerpos de masa M, separados una distancia R, es:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot M}{R^2} = G \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Si la distancia que separa ambos cuerpos es $2 \cdot R$:

$$|F'| = \frac{G \cdot M \cdot M}{(2 \cdot R)^2} = G \cdot \frac{M^2}{4 \cdot R^2}$$

En este caso, el módulo de la fuerza disminuye cuatro veces su valor:

$$\frac{|F'|}{|F|} = \frac{G \cdot \frac{M^2}{4 \cdot R^2}}{G \cdot \frac{M^2}{R^2}} = \frac{1}{4}$$

2.2. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL: EXPRESIÓN VECTORIAL

1. Calcula la fuerza con que se atraen dos láminas planas, de 5 000 kg cada una, al situarlas paralelamente, una al lado de la otra, separadas por una distancia de 50 cm.

Aplicando directamente la ecuación de la gravitación universal, el valor de la fuerza resulta:

$$\left|F\right| = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5\,000^2}{0,5^2} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

El resultado podría ser objetable, ya que las masas se encuentran a tan corta distancia una de la otra, 50 cm, que resulta difícil imaginarlas puntuales.

2. ¿Por qué no percibimos en el mundo macroscópico los efectos gravitacionales de un sistema como el que describe la actividad anterior?

No lo apreciamos porque las variaciones son tan pequeñas que resultan difíciles de medir. Hemos de tener en cuenta, además, que en su experiencia Cavendish eliminó prácticamente el rozamiento. En el mundo macroscópico, el rozamiento siempre está presente y, muchas veces, las fuerzas de atracción gravitatoria no son lo suficientemente elevadas como para vencerlo.

3. ¿En qué punto, a lo largo de la línea que une dos masas, una triple que la otra, se anula el campo gravitatorio resultante?

El campo resultante en un punto del espacio es la suma del campo que crean cada una de las masas. Tomaremos como origen el punto donde se encuentra la masa de valor M. El campo que crea esta en un punto situado a una distancia R de ella es:

$$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

Supondremos que la distancia que separa las masas es L. Siendo así, el campo que crea la masa de valor $3 \cdot M$ en ese mismo punto es:

$$\vec{g}_2 = G \cdot \frac{3 \cdot M}{(L-R)^2} \cdot \vec{u}_r$$

Observa el signo. El sentido en que actúa ahora el campo es contrario al anterior, ya que el punto desconocido se encuentra entre ambas masas.

El campo resultante será la suma de ambos, y ha de ser nulo para el punto pedido:

$$g_1 + g_2 = -G \cdot \frac{M}{R^2} + G \cdot \frac{3 \cdot M}{(L-R)^2} = 0 \rightarrow \frac{3}{(L-R^2)} = \frac{1}{R^2}$$

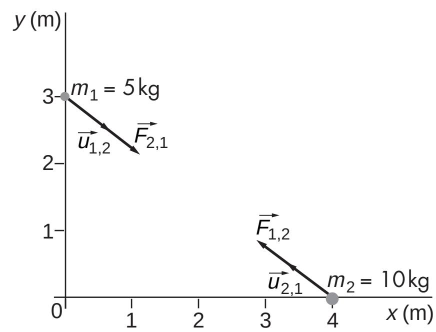
Al despejar en esta expresión, resulta:

$$3 \cdot R^2 = (L-R)^2 \rightarrow 2 \cdot R^2 + 2 \cdot L \cdot R - L^2 = 0 \rightarrow R = 0,366 \cdot L$$

El punto donde se hace nulo el campo está a una distancia del origen $R = 0,366 \cdot L$, siendo L la distancia entre las masas.

4. Dos masas, de 5 y 10 kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0, 3) y (4, 0) m. Calcula el vector fuerza que actúa sobre cada una de ellas debido a la acción gravitatoria de la otra masa. Dibuja un esquema y representa sobre él las masas y los vectores fuerza.

El esquema al que se refiere el enunciado es el siguiente:



Al resolver este problema, denotaremos la masa de 5 kg con el subíndice 1, y la de 10 kg, con el subíndice 2.

El vector fuerza tiene como línea de acción la que une ambas masas, estando su sentido dirigido, en cada caso, hacia la masa que origina la fuerza.

Calculemos, en primer lugar, el vector unitario $\vec{u}_{1,2}$, que será:

$$\vec{u}_{1,2} = \frac{4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{5} = 0,8 \cdot \vec{i} - 0,6 \cdot \vec{j}$$

Por tanto, el vector fuerza, $\vec{F}_{1,2}$, es:

$$\vec{F}_{1,2} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{1,2} = -G \cdot \frac{5 \cdot 10}{25} \cdot (0,8 \cdot \vec{i} - 0,6 \cdot \vec{j}) =$$
$$= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1,6 \cdot \vec{i} - 1,2 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Dado que las masas se atraen una a otra, el vector unitario será el mismo en ambos casos, aunque con sentidos opuestos. Por tanto:

$$\vec{u}_{2,1} = \frac{-4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}}{5} = -0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j}$$

de donde resulta:

$$\vec{F}_{2,1} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{2,1} = -G \cdot \frac{5 \cdot 10}{25} \cdot (-0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j}) =$$
$$= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (-1,6 \cdot \vec{i} + 1,2 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

5. Calcula la masa de un cuerpo que es atraído por otro de 50 t con una fuerza de 10^{-7} N al situarlos a una distancia de 100 m entre sí.

La fuerza de atracción entre dos masas la proporciona la ley de la gravitación universal:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

De la expresión anterior podemos despejar directamente la masa del cuerpo:

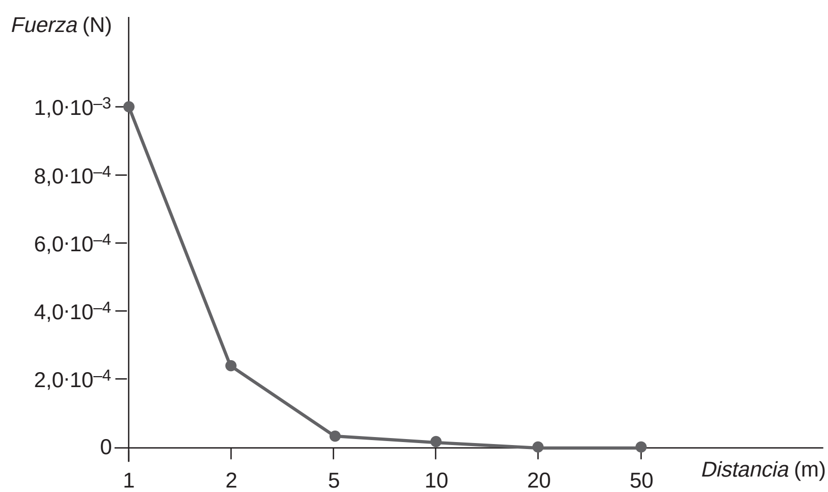
$$m = \frac{|F| \cdot R^2}{G \cdot M} = \frac{10^{-7} \cdot 100^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (50 \cdot 10^3)} = 300 \text{ kg}$$

6. ¿Con qué fuerza se atraerían los dos objetos de la actividad anterior al acercarlos a 50 m, 20 m, 10 m, 5 m, 2 m y 1 m? Representa la gráfica *F-r*.

En este ejercicio nos proporcionan las masas y la distancia. Aplicando la ley de la gravitación universal en cada uno de los casos se obtiene la siguiente tabla:

Masa 1 (kg)	Masa 2 (kg)	Distancia (m)	Fuerza (N)
50 000	300	50	$4{,}0 \cdot 10^{-7}$
50 000	300	20	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$
50 000	300	10	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$
50 000	300	5	$4{,}0 \cdot 10^{-5}$
50 000	300	2	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$
50 000	300	1	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$

La representación gráfica de los datos anteriores es la siguiente:



En la gráfica vemos cómo disminuye la fuerza con el cuadrado de la distancia (esta gráfica se puede ajustar a una función del tipo $F(r) = k/r^2$.

7. Aunque no lo hemos indicado antes, tal como la hemos obtenido, la ley de Newton de la gravitación universal sirve para masas puntuales, es decir, para masas cuya acción gravitatoria pueda suponerse que parte de un solo punto. Analiza esta afirmación e imagina qué problemas aparecen si las masas son extensas.

El problema se puede presentar cuando el tamaño de las masas sea del mismo orden de magnitud que las distancias que las separan.

Por ejemplo, la Tierra y la Luna son masas muy extensas. Sin embargo, podemos considerar que son puntuales, al comparar el tamaño de cada una de ellas con la distancia que las separa. De ese modo, podemos calcular la fuerza gravitatoria que ejercen ambos astros sin excesivos problemas.

Cuando, como ocurre con un cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra, queremos analizar la interacción que ejerce la Tierra sobre él, el cálculo parece complicarse, ya que la propia extensión de la Tierra hace que la masa situada en cada punto produzca un campo gravitatorio en esa dirección, y no en otra. Sin embargo, Newton demostró que la acción del campo gravitatorio creado por un cuerpo esférico extenso es igual a la que produce una masa puntual igual a la del cuerpo esférico que contemplamos situada en el centro de masas de esta. Por tanto, basta suponer que toda la masa de la Tierra está concentrada en el centro de ella, y resolver el problema con objetos puntuales.

2.3. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

1. **La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos, calcula el peso que tendrá en ese planeta un astronauta cuyo peso en la Tierra es de 750 N.**

La fuerza con que cada planeta atrae al astronauta situado en su superficie es el peso del astronauta en ese planeta, y se calcula por medio de la ley de la gravitación universal:

$$F = Peso = G \cdot \frac{M_{planeta} \cdot m}{R^2_{planeta}}$$

Teniendo presente lo anterior, si relacionamos los pesos del astronauta en cada planeta, resulta:

$$\frac{F_{Tierra}}{F_{Júpiter}} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}}{G \cdot \dfrac{M_{Júpiter}}{R^2_{Júpiter}}}$$

En esta expresión podemos sustituir los valores que conocemos, obteniendo, de ese modo, el peso del astronauta en Júpiter.

$$M_{Júpiter} = 318 \cdot M_{Tierra};\ R_{Júpiter} = 11 \cdot R_{Tierra}$$

Por tanto:

$$F_{Júpiter} = \frac{\dfrac{M_{Júpiter}}{R^2_{Júpiter}}}{\dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} \cdot F_{Tierra}$$

$$P_{Júpiter} = F_{Júpiter} = \frac{\dfrac{318 \cdot M_{Tierra}}{(11 \cdot R_{Tierra})^2}}{\dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} \cdot F_{Tierra} = 318 \cdot \frac{1}{11^2} \cdot 750 = 1\,971 \text{ N}$$

2. Calcula el punto, de la línea recta que une la Tierra con la Luna, en el que la fuerza gravitatoria resultante sobre un objeto de 10 kg de masa es nula. ¿Qué valor toma la energía potencial gravitatoria en ese punto? Datos: $M_T = 81 \cdot M_L$; $d_{TL} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Observa que el dato de la masa del cuerpo es inútil, ya que buscar un punto donde la fuerza se anule es lo mismo que buscar un punto en el que el campo gravitatorio se anule. Se trata, pues, de encontrar un punto en la dirección Tierra-Luna en el que el campo gravitatorio sea nulo.

En primer lugar, calcularemos el campo gravitatorio creado por cada cuerpo. Tomaremos como eje *OX* positivo la línea Tierra-Luna, en el sentido Tierra a Luna. El origen del eje será el centro de la Tierra. De este modo:

$$\vec{g}_T = -G \cdot \frac{81 \cdot M_L}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL} \ ; \ \vec{g}_L = -G \cdot \frac{M_L}{(L-X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

Si aplicamos el principio de superposición y sustituimos:

$$\vec{g}_T + \vec{g}_L = -G \cdot M_L \cdot \left(\frac{81}{X^2} - \frac{1}{(3{,}84 \cdot 10^8 - X)^2} \right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Al igualar a cero la expresión anterior, obtenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita es la distancia X con respecto al centro de la Tierra, distancia a la cual el campo gravitatorio se anula:

$$80 \cdot X^2 - 6{,}22 \cdot 10^{10} \cdot X + 1{,}194 \cdot 10^{19} = 0$$

La distancia resulta ser $X = 3{,}46 \cdot 10^8$ m.

La energía potencial en ese punto, para el cuerpo de 10 kg, se calcula por medio de la expresión:

$$E_p = m \cdot V$$

El potencial V_g, en cualquier punto de la recta, será la suma algebraica de los potenciales creados por cada una de las masas:

$$V_g = V_T + V_L = -G \cdot \left(\frac{M_T}{X} + \frac{M_T}{81 \cdot (L-X)} \right)$$

Sustituyendo para el punto $X = 3{,}46 \cdot 10^8$ m, y sabiendo que $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, se obtiene:

$$V_g = V_T + V_L = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{3{,}46 \cdot 10^8} + \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{81 \cdot (3{,}84 - 3{,}46) \cdot 10^8} \right) =$$

$$= 1{,}28 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

siendo la energía potencial:

$$E_p = m \cdot V = -10 \cdot 1{,}28 \cdot 10^6 = -1{,}28 \cdot 10^7 \text{ J}$$

NOTA: Dado que el enunciado no proporciona el dato de la masa de la Tierra, es correcto también dejar el resultado en función de esta.

2.4. EL MOVIMIENTO DE LOS SATÉLITES

1. Calcula el trabajo que debemos realizar para poner en órbita un satélite de 10 kg de masa si la órbita que describe el satélite es circular alrededor de la Tierra y la altura a que se encuentra de la superficie terrestre es de 100 km.

Antes de su lanzamiento, el satélite posee energía potencial, y una vez situado en su órbita, a una altura h (para lo cual es necesario comunicarle energía en forma de trabajo), posee energía potencial gravitatoria y energía cinética. Por tanto, teniendo en cuenta la ley de conservación de la energía, resulta:

$$E_{superficie} + W = E_{órbita} \rightarrow W = (E_c + E_p)_{órbita} - (E_p)_{superficie}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes a $E_{p\_superficie}$, $E_{c\_órbita}$ y $E_{p\_órbita}$ en la ecuación anterior, resulta:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} + G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad orbital (página 50 del libro del alumno) y que $r = R_T + h$, al operar resulta:

$$W = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + h)} \right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{6\,370 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot (6\,370 + 100) \cdot 10^3} \right) =$$

$$= 3{,}18 \cdot 10^8 \text{ J}$$

2. Calcula el trabajo que sería necesario realizar, en el caso anterior, si quisiésemos poner un satélite de las mismas características en órbita alrededor de la Luna, también a 100 km de distancia de la superficie lunar.

El razonamiento y los datos son los mismos que en el ejercicio anterior, salvo que, en este caso, el giro es alrededor de la Luna. Por tanto, el trabajo resulta:

$$W = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{2 \cdot (R_L + h)} \right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{1\,740 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot (1\,740 + 100) \cdot 10^3} \right) =$$

$$= 1{,}48 \cdot 10^7 \text{ J}$$

3. ¿Qué conclusión obtienes del resultado de las dos actividades anteriores?

Al ser la Luna un cuerpo de menor masa que la Tierra, crea un campo gravitatorio menos intenso. Debido a ello, requiere menos energía poner un mismo cuerpo en órbita desde la superficie de la Luna que hacerlo desde la superficie de la Tierra.

4. Calcula la velocidad con que orbita un satélite situado a 200 km de la superficie de la Tierra y la velocidad con que lo hace otro situado a 400 km de dicha superficie.

El satélite realiza un movimiento circular alrededor de la Tierra. La fuerza centrípeta que hace posible dicho movimiento es, precisamente, la fuerza de gravitación universal:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

De la expresión podemos despejar la velocidad, que resulta:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Si sustituimos, teniendo en cuenta que $r = R_T + h$, la velocidad es:

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(200 + 6\,370) \cdot 10^3}} = 7,792 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por otra parte, el satélite situado en órbita a 400 km se moverá con una velocidad:

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(400 + 6\,370) \cdot 10^3}} = 7,676 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. En la actividad anterior, ¿cómo podemos trasladar el satélite de la primera a la segunda órbita? Calcula el trabajo que deberíamos realizar para conseguirlo.

El trabajo necesario para desplazar el satélite de la primera a la segunda órbita será la diferencia entre las energías totales del satélite en cada una de dichas órbitas. La expresión de la energía viene dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Por tanto, el trabajo será:

$$W_{ext} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T + h_1} - \frac{1}{R_T + h_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{6,57 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,77 \cdot 10^6} \right) =$$

$$= 8,97 \cdot 10^6 \text{ J}$$

El trabajo es positivo, ya que la energía que necesita el sistema hay que aportarla del exterior.

2.5. SATÉLITES GEOESTACIONARIOS

1. Un pasajero, de 60 kg de masa, sube en un ascensor, que arranca y se eleva. Calcula el peso aparente del pasajero si:

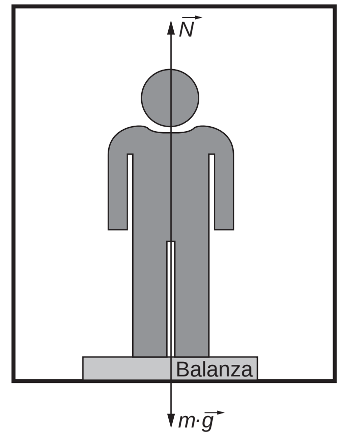
a) El ascensor asciende acelerando a 2 m · s^{-2}.

b) El ascensor detiene el movimiento de subida frenando a 2 m · s^{-2}.

c) El ascensor desciende acelerando a 2 m · s^{-2}.

d) El ascensor detiene el movimiento de bajada frenando con esa misma aceleración.

e) El ascensor se mueve, en subida o bajada, con velocidad uniforme.



El pasajero está sometido a la fuerza peso y a la reacción normal del suelo (peso aparente); la reacción coincide con el peso que registra la balanza:

$$|N| = |P'|$$

El peso aparente del pasajero, en cada uno de los supuestos que propone el enunciado de la actividad, de acuerdo con la segunda ley de la dinámica, es el siguiente:

a) En este caso:

$$N - m \cdot g = m \cdot a$$

$$N = m \cdot (g + a) = 60 \cdot (9{,}8 + 2) = 708 \text{ N}$$

b) Ahora el ascensor frena al subir. Por tanto:

$$N = m \cdot (g - a) = 60 \cdot (9{,}8 - 2) = 468 \text{ N}$$

c) En este caso:

$$N = m \cdot (g - a) = 60 \cdot (9{,}8 - 2) = 468 \text{ N}$$

d) Cuando el ascensor frena en el movimiento de bajada:

$$N = m \cdot (g + a) = 60 \cdot (9{,}8 + 2) = 708 \text{ N}$$

e) Si sube:

$$N = m \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = 588 \text{ N}$$

Si baja:

$$N = m \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = 588 \text{ N}$$

2. Imagina que vienes de hacer la compra y subes al ascensor con dos bolsas de plástico, bastante pesadas, llenas hasta los topes con lo que has comprado. Un vecino sube al ascensor contigo y, para que no sueltes las bolsas y se te desparrame lo que llevas en ellas, pulsa el botón del piso al que vas. Amablemente, le das las gracias mientras el ascensor se pone en marcha... Poco después estáis los dos limpiando el ascensor y preguntándoos qué ha podido ocurrir... ¿Serías capaz de explicarlo? Antes de responder, piensa en las respuestas que hayas dado al resolver la actividad anterior.

La situación que plantea el enunciado es similar a la del apartado a) de la actividad anterior. Cuando el ascensor acelera en su subida, el peso aparente de las bolsas aumenta; si las bolsas de plástico llenas se encontraban sometidas a una tensión elevada para su resistencia, ese peso adicional ha terminado por romperlas, cayéndose su contenido.

2.6. VELOCIDAD DE ESCAPE

1. **La masa del Sol es 324 440 veces mayor que la de la Tierra, y su radio, 108 veces mayor que el terrestre:**

   a) ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la de la Tierra?

   b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 720 km · h^{-1}? Considera g = 10 m · s^{-2}.

   a) La intensidad del campo gravitatorio, g, es proporcional a la fuerza con la que el Sol o la Tierra atraen determinado cuerpo:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = g \cdot m$$

Así, el cociente entre el peso de un cuerpo (fuerza con que es atraído) en el Sol o la Tierra y la intensidad del campo gravitatorio en cada planeta es el mismo.

Teniendo presente lo anterior, y según la definición de campo gravitatorio, podemos escribir:

$$\frac{F_{Sol}}{F_{Tierra}} = \frac{g_{Sol}}{g_{Tierra}} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{Sol}}{R_{Sol}^2}}{G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}}$$

Sustituyendo los datos que proporciona el enunciado:

$$\frac{F_{Sol}}{F_{Tierra}} = \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}} \cdot \frac{R_{Tierra}^2}{R_{Sol}^2} = \frac{324\,440}{1} \cdot \frac{1}{(108)^2} = 27{,}82 \;\rightarrow\; F_{Sol} = 27{,}8 \cdot F_{Tierra}$$

   b) Para resolver este apartado, debemos tener en cuenta que el campo gravitatorio es conservativo, y si solo actúan las fuerzas del campo, se conserva la energía del sistema (formado en este caso por el cuerpo que estamos considerando).

Por tanto:

$$E_{superficie} = E_{altura\_h}$$

$$-G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m}{R_{Sol}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m}{R_{Sol} + h}$$

de donde resulta:

$$-G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol}} + \frac{v^2}{2} = -G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol} + h}$$

Recuerda que en el apartado anterior hemos obtenido la relación:

$$g_{Sol} = G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol}^2} \rightarrow g_{Sol} = G \cdot \frac{324\,440 \cdot M_{Tierra}}{(108 \cdot R_{Tierra})^2} = \frac{324\,440}{108^2} \cdot g_{Tierra}$$

de donde resulta:

$$G \cdot M_{Sol} = g_{Sol} \cdot R_{Sol}^2 = \frac{324\,440}{108^2} \cdot g_{Tierra} \cdot 108^2 \cdot R_{Tierra}^2 =$$
$$= 324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2$$

Por tanto:

$$-G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol}} + \frac{v^2}{2} = -G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol} + h}$$
$$-\frac{324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2}{108 \cdot R_{Tierra}} + \frac{v^2}{2} = -\frac{324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2}{108 \cdot R_{Tierra} + h}$$

Desarrollando la expresión anterior, y despejando, resulta:

$$108 \cdot R_{Tierra} + h = \frac{2 \cdot 108 \cdot 324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^3}{2 \cdot 324\,440 \cdot R_{Tierra}^2 + 108 \cdot R_{Tierra} \cdot v^2}$$
$$h = 108 \cdot R_{Tierra} \cdot \frac{v^2}{6\,008 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra} - v^2}$$

Observa que h queda en función del radio de la Tierra, que no es un dato que proporcione el enunciado del problema. Por ello, y dado que la velocidad con que se realiza el lanzamiento es relativamente baja, vamos a suponer que la intensidad del campo gravitatorio solar es prácticamente constante en cualquier punto de la trayectoria que recorre el proyectil.

Por tanto, situando el origen de potenciales en la superficie solar, la conservación de la energía nos permite escribir ahora la siguiente relación:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g_{Sol} \cdot h_{máx} \rightarrow h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot g_{Sol}}$$

en la que, sustituyendo los datos que proporciona el enunciado, resulta:

$$h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot 27{,}82 \cdot g_{Tierra}} = \frac{\left(\frac{720\,000}{3\,600}\right)^2}{2 \cdot 27{,}82 \cdot 10} = 71{,}89 \text{ m}$$

Observa que, ascendiendo tan solo 72 metros, la intensidad del campo gravitatorio no se modifica, y resulta aceptable la aproximación que hemos establecido.

2. En la actividad anterior, calcula la velocidad de escape que debería adquirir un cuerpo para salir del campo gravitatorio del Sol.

Dato: $R_{Sol} = 6{,}82 \cdot 10^8$ m.

Para calcular la velocidad de escape, hemos de aplicar la expresión:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_{Sol} \cdot R_{Sol}}$$

Teniendo en cuenta la relación del campo gravitatorio entre la Tierra y el Sol (obtenida anteriormente) y el radio del Sol, podemos calcular directamente la velocidad de escape:

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{g_{Sol}}{g_{Tierra}} \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Sol}} = \sqrt{2 \cdot 27{,}82 \cdot 10 \cdot 6{,}82 \cdot 10^8} = 616 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. En un planeta cuyo radio es $R_T/2$, la aceleración de la gravedad en su superficie es de 5 m · s^{-2}. Calcula: la relación M_P/M_T y la velocidad de escape desde la superficie del planeta, si g_T = 10 m · s^{-2} y M_T = 5,98 · 10^{24} kg.

De la relación entre las expresiones que corresponden al campo gravitatorio de la Tierra y el planeta desconocido podemos despejar la relación que existe entre las masas de los planetas:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G \cdot \frac{M_P}{R_P^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} \rightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{R_P^2 \cdot g_P}{R_T^2 \cdot g_T} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{8}$$

La velocidad de escape puede calcularse mediante la expresión:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_P \cdot R_P}$$

El campo gravitatorio del planeta es un dato del enunciado. El radio del planeta lo podemos obtener a partir del radio de la Tierra. Para calcular el valor del radio de la Tierra, consideraremos g = 10 m · s^{-2}.

De ese modo:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow R_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{10}} = 6\,315{,}6 \text{ km}$$

Por tanto, la velocidad de escape del planeta resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_P \cdot \frac{R_T}{2}} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot \frac{6\,315{,}6 \cdot 10^3}{2}} = 5{,}62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.7. LEYES DE KEPLER

1. Aplica la tercera ley de Kepler para calcular la distancia que separa cada planeta del Sol. Busca los datos que precises para ello en una enciclopedia.

Consulta la respuesta a esta actividad en la siguiente.

2. Entre todos los planetas que orbitan en torno al Sol, ¿cuál es el que se mueve más lento? ¿Por qué? Justifícalo, aplicando las leyes de Kepler.

Para que cada profesor o profesora resuelva estas cuestiones con sus alumnos del modo que estime más procedente, incluimos una tabla con los datos astronómicos que corresponden a los planetas del sistema solar:

Características de los planetas del Sistema Solar								
Nombre	Diámetro (1)	Distancia al sol (2)	Período de revolución (3)	Período de rotación (4)	Excentricidad	Inclinación respecto a la eclíptica (°)	Masa (5)	Densidad media ($kg \cdot m^{-3}$)
Mercurio	0,38	0,387	0,241	59	0,206	7	0,053	5 440
Venus	0,95	0,723	0,615	243	0,007	3,4	0,815	5 160
Tierra	1,00	1,000	1,000	1	0,017	0	1,000	5 620
Marte	0,53	1,524	1,881	1,03	0,093	1,9	0,107	3 950
Júpiter	11,2	5,203	11,862	0,41	0,048	1,3	318,00	1 330
Saturno	9,41	9,539	29,458	0,44	0,056	2,5	95,22	690
Urano	3,98	19,182	84,015	0,67	0,047	0,8	14,55	1 560
Neptuno	3,84	30,057	164,788	0,65	0,009	1,8	17,23	2 270
Plutón	0,27	39,75	247,7	6,39	0,25	17,1	0,003	7 800

(1) En diámetros terrestres (2) En distancias Tierra-Sol (3) En años terrestres (4) En días terrestres
(5) En masas terrestres

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Del análisis dimensional de la constante de gravitación universal se desprende que podemos expresar esta constante en función de sus magnitudes fundamentales como:

a) $M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$. **c)** $M^{-1} \cdot L^2 \cdot T^{-1}$.

b) $M^2 \cdot L^2 \cdot T^{-1}$. **d)** $M^2 \cdot L^3 \cdot T^{-2}$.

Obtendremos las dimensiones de la constante G a partir de la expresión que permite calcular la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$G = \frac{[R]^2 \cdot [g]}{[M]} = \frac{L^2 \cdot L \cdot T^{-2}}{M} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1}$$

La respuesta correcta es, por tanto, la **a)**.

2. Un satélite artificial, de masa *M*, gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio *R*, con una velocidad *v*. Si cambia de órbita, pasando a otra más próxima a la Tierra, debe:

a) **Disminuir la velocidad.**

b) **Aumentar la velocidad.**

c) **No necesita modificar su velocidad.**

d) **La velocidad no influye; son otros factores los que intervienen.**

La velocidad con que se mueve un satélite en órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Si se aproxima a la Tierra, disminuye el radio de la órbita, r, y aumenta, por tanto, la velocidad, v. La respuesta correcta es la **b).**

3. Al ser *G* una constante universal:

a) **El campo gravitatorio que crea una masa es igual en todos los puntos del espacio.**

b) **El campo gravitatorio que crea una masa no depende del medio que rodea al cuerpo.**

c) **El campo gravitatorio que crea una masa depende del medio que rodea al cuerpo.**

d) **Al menos dos de las afirmaciones anteriores son ciertas.**

Que G sea una constante universal implica que, a pesar del medio, una masa de determinado valor creará a su alrededor siempre el mismo campo gravitatorio. La respuesta correcta es la **b).**

4. El momento angular de la Luna respecto a la Tierra y el de la Tierra respecto al Sol son constantes. Podemos afirmar, por tanto, que el momento de la Luna respecto al Sol:

a) **Es constante.**

b) **No es constante; es mayor en el novilunio (luna nueva).**

c) **No es constante; es mayor en el plenilunio (luna llena).**

d) **Necesitamos más datos para poder indicar algo en uno u otro sentido.**

El momento angular de la Luna respecto al Sol depende en cada instante de la distancia a que se encuentran y de la velocidad con que la Luna se mueve respecto al Sol. Es necesario, por tanto, analizar con mayor detalle la órbita de la Luna para poder afirmar algo al respecto. La respuesta correcta es la **d).**

5. Dos masas, *m* y *m'*, están separadas una distancia *R*. Si las aproximamos hasta una distancia 0,1 · *R*, el módulo de la fuerza gravitatoria que actúa entre ellas:

a) **Disminuye 100 veces.**

b) **Disminuye 10 veces.**

c) **Aumenta 10 veces.**

d) **Aumenta 100 veces.**

Las respectivas fuerzas gravitatorias, antes y después de acercar las masas, son:

$$\left|F\right| = G \cdot \frac{m \cdot m'}{R^2} \quad ; \quad \left|F'\right| = G \cdot \frac{m \cdot m'}{(0,1 \cdot R)^2} = G \cdot \frac{m \cdot m'}{0,01 \cdot R^2}$$

Dividiendo una entre otra:

$$\frac{\left|F'\right|}{\left|F\right|} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot m'}{0,01 \cdot R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot m'}{R^2}} = \frac{1}{0,01} \rightarrow \frac{\left|F'\right|}{\left|F\right|} = 100$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **d).**

6. Las teorías de la evolución estelar muestran que, en ciertas etapas de su evolución, las estrellas ordinarias, como el Sol, pueden hincharse considerablemente (gigantes rojas) o contraerse de forma catastrófica (enanas blancas). En el caso del Sol:

a) Si se convierte en gigante roja, nos atraerá con más fuerza.

b) Si se convierte en enana blanca, nos atraerá con menos fuerza.

c) En ambos casos, se modificará la órbita de la Tierra.

d) De lo anterior no se deduce ningún cambio gravitacional apreciable para la Tierra.

El campo gravitatorio que el Sol produce sobre la Tierra viene dado por:

$$g_{Sol} = G \cdot \frac{M_{Sol}}{R^2_{Tierra\_Sol}}$$

Aunque la estrella se contraiga o se agrande, su masa no variará. Del mismo modo, el hecho de que varíe el volumen de la estrella tampoco hará cambiar la distancia Tierra-Sol. Es decir, un cambio como el citado no tendrá influencias gravitacionales sobre la Tierra. La respuesta correcta es, por tanto, la **d).**

No obstante, dicho cambio sí influiría sobre el campo gravitatorio en la superficie del Sol. Si se convirtiese en enana blanca, el radio disminuiría y el campo en la superficie del Sol aumentaría. Si pasara a gigante roja, el efecto sería el contrario.

7. Si un satélite que está girando alrededor de la Tierra pierde parte de su energía por fricción, el radio de su nueva órbita es:

a) Mayor.

b) Menor.

c) Se mantiene constante.

La energía mecánica total que posee un satélite en órbita, suma de sus energías cinética y potencial, es:

$$E_{mec} = E_c + E_p \rightarrow E_{mec} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

El signo que corresponde a la energía es negativo, ya que el satélite es un objeto ligado al campo gravitatorio terrestre. Si se analiza la expresión anterior, es fácil comprender que, si la energía de un satélite disminuye, el radio de la nueva órbita debe hacerlo también. La respuesta correcta es, por tanto, la **b).**

8. Indica cómo será la órbita de un planeta si se mueve siempre con la misma velocidad.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la trayectoria debe ser circular, ya que, de ese modo, el área barrida por unidad de tiempo será siempre la misma.

EJERCICIOS

9. La velocidad de escape, ¿depende de la masa del objeto que queremos que escape de la atracción del campo gravitatorio? Razona la respuesta.

Se denomina velocidad de escape la velocidad mínima con que debe lanzarse un cuerpo que se encuentra sometido a la acción de un campo gravitatorio para que escape de forma efectiva a dicho campo.

Para ello debemos comunicar energía cinética a la nave en una cantidad tal que compense su energía potencial gravitatoria (negativa). Por tanto, $E_c + E_p = 0$, de donde resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0$$

Vemos en esta expresión que tanto el término correspondiente a la energía cinética como el correspondiente a la energía potencial, son proporcionales a la masa del objeto.

Por tanto, la igualdad se cumplirá independientemente de cuál sea la masa del objeto.

Simplificando, resulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

10. Un astronauta se aproxima a un planeta desconocido, que posee un satélite. El astronauta realiza las siguientes mediciones: radio del planeta, radio de la órbita circular del satélite y período de revolución del satélite. Indica si puede, con ayuda de estas mediciones (indica con cuáles), calcular:

a) La masa del planeta.

b) La masa del satélite.

c) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

d) La presión atmosférica en la superficie del planeta.

a) La medida de la masa del planeta puede obtenerse a partir de la tercera ley de Kepler, dado que conocemos el radio de la órbita del satélite, R_s, y el período, T:

$$\frac{R_s^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_p}{4 \cdot \pi^2} \rightarrow M_p = \frac{4 \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{R_s^3}{T^2}$$

b) No podemos obtener la masa del satélite, pues no disponemos de ningún dato acerca de la fuerza gravitatoria entre ambos cuerpos o de la energía potencial del satélite.

c) La aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) en la superficie se puede hallar a partir de la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2}$$

donde R_p es el radio del planeta y M_p se ha averiguado en el apartado a).

d) No podemos calcular la presión atmosférica. De hecho, ni siquiera se sabe si el planeta tiene atmósfera, ni de qué sustancia o sustancias estaría compuesta.

11. ¿Es posible que un satélite artificial describa una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 1 km/s? Razona la respuesta.

La fuerza centrípeta que mantiene un satélite en órbita alrededor de la Tierra es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae. Por tanto:

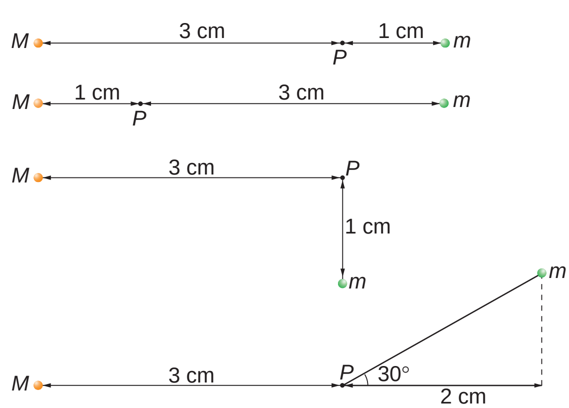
$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Al simplificar y despejar, se obtiene la distancia respecto al centro de la Tierra a que girará un satélite con una velocidad de 1 km/s:

$$r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(1\,000)^2} = 3{,}99 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Esta distancia es, aproximadamente, la distancia entre la Tierra y la Luna.

12. Calcula la intensidad de campo gravitatorio que crean dos masas, *M* y *m*, en un punto *P*, en los cuatro casos representados en la figura. En todos los casos, las intensidades de los campos creados por *M* y *m* tienen en *P* como módulo 5 y 20 N/kg, respectivamente.



Se trata de construir los vectores campo gravitatorio en el punto *P* para cada una de las situaciones propuestas. En cada caso, supondremos un sistema de referencia *OXY* situado en el punto *P*. Debemos tener en cuenta que el campo gravitatorio tiene la dirección de la línea que une la masa que lo crea y el punto *P*, estando dirigido su sentido hacia la masa.

Observa que las distancias que se proporcionan en la figura no son datos útiles, puesto que ya tenemos los módulos del campo creado por cada masa en el punto P como dato del enunciado. En cada uno de los casos obtendremos el vector campo gravitatorio que crea cada masa. Luego aplicaremos el principio de superposición:

$$\vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = g_M \cdot \vec{u}_{r_M} + g_m \cdot \vec{u}_{r_m}$$

Caso a)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = +20 \cdot \vec{i} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15 \cdot \vec{i} \quad \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = +20 \cdot \vec{i} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15 \cdot \vec{i} \quad \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso c)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = -20 \cdot \vec{j} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (-5 \cdot \vec{i} - 20 \cdot \vec{j}) \quad \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso d)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = 20 \cdot (cos\ 30° \cdot \vec{i} + sen\ 30° \cdot \vec{j}) \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (12{,}32 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}) \ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

13. En la tabla figuran los radios orbitales promedio y los períodos de revolución de algunos planetas del sistema solar:

	Tierra	Marte	Júpiter
Radio orbital	149	228	778
Período de revolución	31,6	59,4	374,3

El radio se mide en megakilómetros, y el período, en megasegundos.

a) ¿Justifican los datos la tercera ley de Kepler?

b) Escribe la expresión que corresponde a dicha ley y deduce, a partir de ella, la ley de la gravitación universal.

Considera circulares las órbitas que describen los planetas en su movimiento alrededor del Sol.

a) Según la tercera ley de Kepler, la relación entre el período de rotación de un planeta y el radio de su órbita es:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_{\text{Sol}}}{4 \cdot \pi^2} = \text{cte}$$

Si realizamos para cada uno de los planetas de la tabla del enunciado la operación r^3/T^2, resulta:

Planeta	r^3/T^2
Tierra	$3\,312{,}7 \cdot 10^{15}$
Marte	$3\,359{,}2 \cdot 10^{15}$
Júpiter	$3\,361{,}2 \cdot 10^{15}$

Aunque el valor en los tres casos no es exactamente el mismo, podemos afirmar que los resultados corroboran la tercera ley de Kepler.

b) La Tierra se mueve alrededor del Sol describiendo un m.c.u.

La fuerza centrípeta a que está sometida la Tierra viene dada por la expresión:

$$F_c = m_T \cdot a_c = m_T \cdot \frac{v^2}{r}$$

de donde podemos dejar la velocidad en función del período:

$$F_c = \frac{m_T \cdot v^2}{r} = m_T \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = m_T \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

Despejamos ahora el término T^2 de la ecuación de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \text{cte} \cdot r^3$$

Por último, si introducimos este último témino en la ecuación de la fuerza centrípeta, resulta:

$$F_c = m_T \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{\text{cte} \cdot r^3} = \text{cte} \cdot \frac{m_T}{r^2}$$

Si hacemos lo mismo suponiendo que es el Sol el que orbita en torno a la Tierra, obtenemos una expresión similar con la masa del Sol; y de la integración de ambas, obtenemos la expresión que proporciona la ley de la gravitación universal.

14. Calcula el período de un satélite artificial que describe una órbita alrededor de la Tierra a una distancia de 10 km sobre su superficie.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²**

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,370$ **km**

La velocidad con que orbita un satélite a 10 km sobre la superficie de la Tierra es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6\,370 + 10) \cdot 10^3}} = 7\,907 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período es el tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta alrededor de la Tierra. Por tanto:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 10) \cdot 10^3}{7\,907} = 5\,070 \text{ s}$$

$$T = 1 \text{ h } 24' \, 30''$$

15. Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale −200 J hasta otro donde vale −400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por o contra el campo?

a) −200 J b) 200 J c) −600 J

La energía potencial que posee una masa, m, que se encuentra en el seno de un campo gravitatorio es:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

siendo M la masa que crea el campo; como sabes, el signo negativo indica que la masa m está ligada al campo gravitatorio.

El trabajo externo que es necesario realizar para que la masa se desplace es:

$$W = \Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = -400 - (-200) = -200 \text{ J}$$

El signo negativo obtenido indica que la masa se desplaza por sí misma; su energía potencial disminuye. La respuesta correcta es, por tanto, la **a).**

16. La Tierra tarda un año en describir su órbita en torno al Sol. Esta órbita es, aproximadamente, circular, con radio $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m. Sabiendo que $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻², calcula la masa del Sol.

La fuerza centrípeta que obliga a la Tierra a girar alrededor del Sol es, precisamente, la fuerza gravitatoria que este ejerce sobre ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_T \cdot v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot M_S}{R^2}$$

En la expresión anterior, M_T y M_S son las masas de la Tierra y del Sol, respectivamente; v es la velocidad orbital de la Tierra, y R, el radio de su órbita, dato que proporciona el enunciado del ejercicio. Si despejamos de ella la velocidad orbital de la Tierra, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R}}$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} v = \omega \cdot R \\ \omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R$$

Podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R}}$$

La masa del Sol es, por tanto:

$$M_s = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

17. **Si un cuerpo tiene un peso de 100 N sobre la superficie terrestre, calcula su peso en la superficie de otro planeta cuya masa sea el doble que la de la Tierra y su radio sea el triple que el de la Tierra.**

Las expresiones que corresponden al peso del cuerpo en el planeta y en la Tierra son:

$$P_{planeta} = m \cdot g_{planeta}$$
$$P_{Tierra} = m \cdot g_{Tierra}$$

De acuerdo con los datos que proporciona el enunciado, las intensidades de los campos gravitatorios en la superficie del planeta y en la de la Tierra son:

$$g_{Tierra} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \; ; \; g_{planeta} = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2} = G \cdot \frac{2 \cdot M_T}{(3 \cdot R_T)^2} = \frac{2}{9} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{2}{9} \cdot g_{Tierra}$$

Como la masa del cuerpo no varía, la relación entre el peso del cuerpo en ambos planetas es:

$$\frac{P_{Tierra}}{P_{planeta}} = \frac{m \cdot g_{Tierra}}{m \cdot g_{planeta}} = \frac{m \cdot g_{Tierra}}{m \cdot \frac{2}{9} \cdot g_{Tierra}} = \frac{9}{2}$$

Por tanto:

$$P_{planeta} = \frac{2}{9} \cdot P_{Tierra} = \frac{2}{9} \cdot 100 = 22{,}2 \text{ N}$$

18. **La distancia entre el Sol y Mercurio es $57{,}9 \cdot 10^6$ km y entre el Sol y la Tierra es $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Suponiendo que las órbitas de ambos planetas son circulares, calcula la velocidad con que ambos giran alrededor del Sol, si $M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.**

Las expresiones que permiten calcular la velocidad orbital de Mercurio y de la Tierra, respectivamente, en su órbita alrededor del Sol, son:

$$v_M = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{d_{SM}}}$$

$$v_T = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{d_{ST}}}$$

Por tanto:

$$v_M = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{57{,}9 \cdot 10^9}} = 4{,}79 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{149{,}6 \cdot 10^9}} = 2{,}98 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La relación entre ambas velocidades es:

$$\frac{v_M}{v_T} = \frac{4{,}79 \cdot 10^4}{2{,}98 \cdot 10^4} = 1{,}6 \rightarrow v_M = 1{,}6 \cdot v_T$$

19. Un planeta posee un radio doble que el de la Tierra, siendo su densidad igual a la de la Tierra. ¿Dónde será mayor el peso de un objeto, en el planeta o en la Tierra? Especifica cuánto.

Si las densidades de ambos planetas son iguales, se cumple:

$$d_p = \frac{M_p}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_p^3} = \frac{M_p}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2 \cdot R_T)^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T^3} = d_T$$

De la expresión anterior podemos deducir la relación entre las masas del planeta y de la Tierra:

$$\frac{M_p}{(2 \cdot R_T)^3} = \frac{M_T}{R_T^3} \rightarrow M_p = 8 \cdot M_T$$

Teniendo en cuenta que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es $g_T = 9{,}8$ m/s^2, podemos obtener la que corresponde al planeta:

$$g_p = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2} = G \cdot \frac{8 \cdot M_T}{(2 \cdot R_T)^2} = \frac{8}{4} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 2 \cdot g_T = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, al ser la intensidad del campo gravitatorio del planeta el doble de la que corresponde a la Tierra, el peso de cualquier objeto también será el doble, ya que:

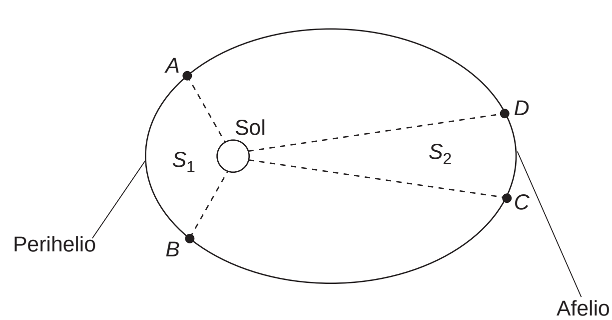
$$\left.\begin{array}{l} P_p = m \cdot g_p = m \cdot 2 \cdot g_T \\ P_T = m \cdot g_T \end{array}\right\} \rightarrow \frac{P_p}{P_T} = \frac{m \cdot 2 \cdot g_T}{m \cdot g_T} = 2 \rightarrow P_p = 2 \cdot P_T$$

20. El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima al Sol), el cometa está a 8,75 · 10^7 km del Sol, mientras que en el afelio (posición más alejada del Sol), se encuentra a 5,26 · 10^9 km de este:

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?

a) De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler, el tiempo que tarda el planeta en pasar del punto *A* al *B* ha de ser igual al que tarda en pasar de *C* a *D*, ya que el valor de las superficies S_1 y S_2 es el mismo. Por tanto, es fácil deducir, a la vista de la gráfica, que la velocidad en el perihelio debe ser mayor que en el afelio.



En lo que respecta a la aceleración podemos escribir:

$$a_{afelio} = \frac{v^2_{afelio}}{R_{afelio}} \quad ; \quad a_{perihelio} = \frac{v^2_{perihelio}}{R_{perihelio}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$v_{afelio} < v_{perihelio} \quad ; \quad R_{afelio} > R_{perihelio}$$

se deduce que la aceleración en el perihelio es mayor que en el afelio:

$$\frac{v^2_{afelio}}{R_{afelio}} < \frac{v^2_{perihelio}}{R_{perihelio}} \rightarrow a_{afelio} < a_{perihelio}$$

b) Las expresiones que corresponden a la energía potencial en el afelio y en el perihelio, respectivamente, son:

$$E_{p_{afelio}} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{afelio}} \quad ; \quad E_{p_{perihelio}} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{perihelio}}$$

Si tenemos en cuenta que $R_{perihelio} < R_{afelio}$, obtenemos que, en valor absoluto:

$$E_{p_{perihelio}} < E_{p_{afelio}}$$

En lo que respecta a la energía mecánica, esta, en valor absoluto, es mayor en el perihelio que en el afelio, ya que la expresión que le corresponde es:

$$\left.\begin{array}{l} E_{m_{afelio}} = -\dfrac{1}{2} \cdot G \cdot \dfrac{M_S \cdot m_c}{R_{afelio}} \\[2ex] E_{m_{perihelio}} = -\dfrac{1}{2} \cdot G \cdot \dfrac{M_S \cdot m_c}{R_{perihelio}} \end{array}\right\} \rightarrow R_{perihelio} < R_{afelio} \rightarrow |E_{m_{perihelio}}| > |E_{m_{afelio}}|$$

21. La Luna es, aproximadamente, esférica, con radio $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ m y masa $m = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

a) Calcula la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

b) Si se deja caer una piedra desde una altura de 2 m sobre la superficie lunar, ¿cuál será su velocidad al chocar con la superficie?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²

a) La intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en la superficie de la Luna es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} \rightarrow g_L = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^6)^2} = 1{,}62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Este apartado se puede resolver aplicando las ecuaciones cinemáticas que corresponden al movimiento (m.r.u.a.) o mediante el principio de conservación de la energía. En este último caso se obtiene:

$$E_p\ (h = 2 \text{ m}) = E_c\ (h = 0 \text{ m}) \rightarrow m \cdot g_L \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}62 \cdot 2} = 2{,}54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

PROBLEMAS

22. Se sabe que la distancia promedio Tierra-Luna es 384 000 km y que la Luna tarda 28,5 días en describir una vuelta completa en torno a la Tierra. Con esos datos, calcula la distancia a que debe encontrarse un satélite artificial que gira en torno a la Tierra para que su período de revolución sea un día.

El problema podemos resolverlo haciendo uso de la tercera ley de Kepler. En este caso, hemos de considerar la Tierra como el punto fijo y la Luna como un punto que se mueve con m.c.u. alrededor de la Tierra. Al aplicar dicha ley a la Luna y al satélite obtenemos:

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{cte} \rightarrow \frac{r^3_{Luna}}{T^2_{Luna}} = \frac{r^3_{satélite}}{T^2_{satélite}}$$

Despejando y sustituyendo, resulta:

$$r_{satélite} = \sqrt[3]{\frac{r^3_{Luna}}{T^2_{Luna}} \cdot T^2_{satélite}} = \sqrt[3]{\frac{(384 \cdot 10^6)^3}{28{,}5^2} \cdot 1} = 41{,}16 \cdot 10^6 \text{ m} = 41\,160 \text{ km}$$

23. Calcula la distancia media al Sol del cometa Kohoutec, sabiendo que su período estimado es 10^6 años.

El problema podemos resolverlo aplicando la tercera ley de Kepler, de donde despejamos directamente la distancia al cometa:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{4 \cdot \pi^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_S}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2}$$

Expresando el período en segundos, y conocida la masa del Sol, $M_s = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, resulta:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{4 \cdot \pi^2} \cdot (10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 1{,}495 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

FE DE ERRATAS: la solución de este problema que se ofrece en la página 414 del libro del alumno es incorrecta. La solución correcta es $r = 1{,}495 \cdot 10^{15}$ m.

24. Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 150 000 km de distancia de su centro. Si hubiese otro satélite en órbita circular alrededor de la Luna que tuviese la misma velocidad, ¿a qué distancia del centro de la Luna se encontraría? La masa de la Luna es 0,0123 veces la de la Tierra y su volumen es cincuenta veces menor.

Como el satélite se encuentra en órbita circular alrededor de un cuerpo describiendo un m.c.u., la fuerza resultante es la fuerza centrípeta, que coincide con la fuerza gravitatoria. Es decir:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

De la igualdad anterior podemos despejar la velocidad. En el caso de la Tierra, resulta:

$$v_T = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r_T}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{1,5 \cdot 10^8}}$$

Y en el caso de la Luna:

$$v_L = \sqrt{G \cdot \frac{M_L}{r_L}} = \sqrt{G \cdot \frac{0,0123 \cdot M_T}{r_L}}$$

En el enunciado se indica que, en ambos casos, las velocidades deben coincidir. Por tanto:

$$\frac{0,0123 \cdot M_T}{r_L} = \frac{M_T}{1,5 \cdot 10^8} \rightarrow$$
$$\rightarrow r_L = 1,5 \cdot 10^8 \cdot 0,0123 = 1,845 \cdot 10^6 \text{ m}$$

El segundo satélite debe situarse a $1,845 \cdot 10^6$ m del centro de la Luna.

25 ¿Con qué velocidad angular de rotación debe girar un satélite artificial, alrededor de la Tierra, para que lo haga en una órbita de radio el doble del radio de la Tierra?

Datos: R_T = 6 370 km; g = 9,81 m/s²

El satélite realiza un m.c.u. alrededor de la Tierra. Por tanto, la fuerza centrípeta que lo mueve coincide con la fuerza gravitatoria.

Teniendo en cuenta, además, que la órbita tiene un radio que es dos veces el radio de la Tierra, resulta:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(2 \cdot R_T)^2} = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_T}$$

Despejando en la expresión anterior, podemos obtener la velocidad:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R_T}}$$

En el enunciado nos proporcionan el dato del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra; esto es:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Introduciendo este dato en la expresión de la velocidad, se obtiene:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R_T}} = \sqrt{g_T \cdot \frac{R_T}{2}}$$

Por otra parte, de la definición de la velocidad angular y operando, obtenemos:

$$\omega = \frac{v}{2 \cdot R_T} \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{\dfrac{g_T \cdot R_T}{2}}}{2 \cdot R_T} = \sqrt{\frac{g_T}{8 \cdot R_T}}$$

Sustituyendo valores:

$$\omega = \sqrt{\frac{g_T}{8 \cdot R_T}} = \sqrt{\frac{9,81}{8 \cdot 6\,370 \cdot 10^3}} = 4,388 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la solución que se ofrece en la página 414 del libro del alumno es la que se obtiene considerando $g = 9,8$ m/s^2.

26. Un proyectil sale disparado perpendicularmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 5 000 m/s. Calcula la altura que alcanzará.

La energía mecánica total del proyectil debe ser la misma en la superficie de la Tierra y en el punto en el que alcanza la máxima altura. Por tanto, suponiendo que alcanza ese punto con velocidad nula, resulta:

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T + h}$$

Al simplificar, resulta:

$$-G \cdot \frac{M}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M}{R_T + h}$$

y despejando h:

$$\frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2 \cdot G \cdot M} = \frac{1}{R_T + h} \rightarrow h = \frac{1}{\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{v^2}{2 \cdot G \cdot M}} - R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow h = R_T \cdot \left[\frac{1}{1 - \dfrac{v^2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M}} - 1 \right]$$

Al sustituir en esta última expresión el dato que aporta el enunciado, y suponiendo conocidos los valores de la masa y del radio de la Tierra, obtenemos la altura que alcanzará el proyectil:

$$h = 6,38 \cdot 10^6 \cdot \left[\frac{1}{1 - \dfrac{5\,000^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} - 1 \right] = 1,594 \cdot 10^6 = 1594 \text{ km}$$

27. Un satélite de 250 kg de masa describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre su superficie de 500 km. Calcula:

a) Su velocidad.

b) Su período de revolución.

c) Las energías cinética y potencial del satélite.

d) La energía necesaria para ponerlo en órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

$R_T = 6\,370$ **km;** $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ **kg**

a) Como el satélite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra, describiendo un m.c.u., la fuerza resultante es la fuerza centrípeta, que coincide con la fuerza gravitatoria.

Es decir:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

de donde podemos obtener la velocidad:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}} =$$

$$= \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3}} = 7\,632{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) Al tratarse de un m.c.u., el período viene dado por:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 500) \cdot 10^3}{7\,632{,}4} = 5\,655{,}6\ \mathrm{s}$$

c) Las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 7\,632{,}4^2 = 7{,}28 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -14{,}56 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

d) La energía necesaria para poner en órbita el satélite es el incremento de energía entre la situación inicial (sobre la superficie de la Tierra) y la del satélite en órbita.

Sobre la superficie terrestre, el satélite solo tiene energía potencial:

$$E_i = E_{pi} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{6\,370 \cdot 10^3} = -15{,}7 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Cuando está en órbita, su energía es la suma de las energías potencial y cinética, calculadas anteriormente:

$$E_f = E_{cf} + E_{pf} = 7{,}28 \cdot 10^9 - 14{,}56 \cdot 10^9 = -7{,}28 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Por tanto, la energía necesaria resulta:

$$\Delta E = E_f - E_i = -7{,}28 \cdot 10^9 - (-15{,}7 \cdot 10^9) = 8{,}42 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

28 **Un satélite de 300 kg de masa se mueve en una órbita circular a 5 · 10⁷ m por encima de la superficie terrestre. Calcula la fuerza de gravedad que actúa sobre el satélite, la velocidad con que se mueve y el período con que orbita. Considera R_T = 6 500 km.**

Al no dar como datos ni el valor de la constante de gravitación universal, G, ni el de la masa de la Tierra, M, utilizaremos el dato, conocido, de que la intensidad del campo gravitatorio terrestre es, en la superficie de la Tierra:

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R_T^2} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Con este supuesto, la fuerza de gravedad que actúa sobre el satélite es:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{G \cdot M \cdot m \cdot R_T^2}{R_T^2 \cdot R^2} = m \cdot g_0 \cdot \frac{R_T^2}{R^2}$$

$$F = m \cdot g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + 5 \cdot 10^7)^2} = 300 \cdot 9,8 \cdot \frac{(6,5 \cdot 10^6)^2}{(6,5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^7)^2} = 38,91 \text{ N}$$

Al igualar la fuerza de la gravedad con la fuerza centrípeta:

$$38,91 = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{300 \cdot v^2}{R_T + 5 \cdot 10^7}$$

con lo que la velocidad del satélite es:

$$v = \sqrt{\frac{38,91 \cdot (6,5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^7)}{300}} = 2\,707,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período del satélite es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (56,5 \cdot 10^6)}{2\,707,1} = 131\,136,62 \text{ s}$$

Expresado en horas:

$$T = 131\,136,62 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 36,43 \text{ horas}$$

29. En la superficie de un planeta de 1 000 km de radio, la aceleración de la gravedad es 2 m/s². Teniendo esto en cuenta, calcula:

a) La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa que se encuentra situado en la superficie del planeta.

b) La velocidad de escape desde su superficie.

c) La masa del planeta.

Dato: G = 6,67 · 10⁻¹¹ U.I.

a) Teniendo en cuenta la expresión de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

la energía potencial se puede expresar como:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} = -\frac{G \cdot M}{R^2} \cdot R \cdot m = -g \cdot R \cdot m = -2 \cdot 10^6 \cdot 50 = -10^8 \text{ J}$$

b) La velocidad de escape, v, verifica:

$$E_m = E_p + E_c = 0$$

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 0$$

por lo que:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) De la expresión $g = G \cdot M/R^2$, se obtiene:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{2 \cdot (10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,998 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

30. La Luna tiene una masa, aproximada, de $7,36 \cdot 10^{22}$ kg, y su radio es $1,74 \cdot 10^6$ m. Con estos datos, calcula la distancia que recorrerá en cinco segundos un cuerpo que cae libremente en las proximidades de su superficie.

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ U.I.

En primer lugar, calculamos la intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en la superficie de la Luna:

$$g_L = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aplicando las leyes del m.r.u.a., obtenemos la distancia que habrá recorrido el cuerpo al cabo de 5 segundos:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot g_L \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,62 \cdot 5^2 = 20,25 \text{ m}$$

31. Una cápsula espacial, de masa *m*, que viaja entre la Tierra y la Luna, se encuentra a una distancia *X* del centro de la Tierra. Suponiendo que la distancia entre la Tierra y la Luna es *L* y teniendo en cuenta las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra y la Luna, exclusivamente, calcula la expresión que permite hallar la fuerza resultante que actúa sobre la nave. Demuestra que esa fuerza es nula a la distancia:

$$\frac{L}{1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

siendo M_L y M_T las masas de la Luna y de la Tierra, respectivamente.

La fuerza resultante será la suma de las ejercidas por la Luna y por la Tierra. Ambas tienen la misma dirección, aunque distinto sentido.

Si tomamos el origen del sistema de referencia en la Tierra, las fuerzas ejercidas por la Tierra y por la Luna sobre la nave son:

$$\vec{F}_T = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

$$\vec{F}_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(L - X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

donde $\vec{u}_{TL}$ es un vector unitario en la dirección que une la Luna y la Tierra y en el sentido Tierra-Luna.

Si sumamos ambas fuerzas:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_T + \vec{F}_L = -G \cdot m \cdot \left(\frac{M_T}{X^2} - \frac{M_L}{(L - X)^2} \right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Comprobemos que la fuerza es nula para la distancia indicada en el enunciado. Igualando el módulo de la fuerza a cero obtenemos:

$$\vec{F}_R = \frac{M_T}{X^2} - \frac{M_L}{(L - X)^2} = 0$$

$$\frac{M_T}{X^2} = \frac{M_L}{(L - X)^2} \rightarrow \left(\frac{L - X}{X} \right)^2 = \frac{M_L}{M_T} \rightarrow \frac{L - X}{X} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \rightarrow$$

$$\rightarrow L - X = X \cdot \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \rightarrow X \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \right) = L$$

$$X = \frac{L}{1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

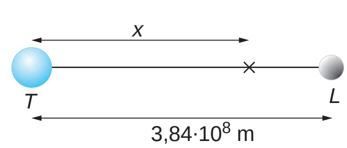
32 **Al enviar un satélite a la Luna se le sitúa en una órbita que corta la recta que une los centros de la Tierra y la Luna por el punto en que las fuerzas que sufre el satélite por la atracción de los dos astros son iguales. Cuando el satélite se encuentra en ese punto, calcula:**

a) La distancia a la que está del centro de la Tierra.

b) La relación que existe entre las energías potenciales del satélite, debidas a la Tierra y a la Luna.

Datos: La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y la distancia que separa la Tierra de la Luna es 3,84 · 10⁸ m.

a) En el esquema adjunto hemos representado la Tierra, la Luna y el punto que nos solicitan.



Si aplicamos la ley de la gravitación y tenemos en cuenta que en ese punto se han de igualar las fuerzas gravitatorias, podemos escribir:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{x^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m_s}{(3,84 \cdot 10^8 - x)^2}$$

Dado que la masa de la Tierra es $M_T = 81 \cdot M_L$, la expresión anterior queda:

$$\frac{81 \cdot M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(3,84 \cdot 10^8 - x)^2}$$

$$80 \cdot x^2 - 6,220 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot x + 1,194 \cdot 393 \cdot 6 \cdot 10^{19} = 0$$

cuya resolución nos da dos soluciones:

$$x_1 = 4,32 \cdot 10^8 \text{ m} \quad ; \quad x_2 = 3,456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

De estas dos posibles soluciones, la que tiene sentido físico, de acuerdo con el enunciado del problema, es la que nos da una distancia comprendida “entre” la Tierra y la Luna; es decir:

$$x = 3,456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) La fracción de energía potencial del satélite que corresponde al campo gravitatorio terrestre es:

$$E_{p_T} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{3,456 \cdot 10^8}$$

mientras que la que corresponde al campo gravitatorio lunar vale:

$$E_{p_L} = -G \cdot \frac{M_L \cdot m_s}{0,384 \cdot 10^8} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{81 \cdot 0,384 \cdot 10^8}$$

La relación entre ambas es, por tanto:

$$\frac{E_{p_T}}{E_{p_L}} = \frac{0,384 \cdot 81}{3,456} = 9$$

33. La mayor velocidad de giro de un satélite de la Tierra, conocida como primera velocidad cósmica, es la que se obtendría para un radio orbital igual al radio terrestre, R_T. Teniendo esto en cuenta, calcula:

a) La primera velocidad cósmica.

b) El período de revolución que le corresponde si orbita con esa velocidad.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ **N** $\cdot$ **m**$^2 \cdot$ **kg**$^{-2}$

$M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ **kg**

$R_T = 6,37 \cdot 10^6$ **m**

a) Al igualar la fuerza centrípeta a que está sometido el satélite con la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él, obtenemos el valor de la primera velocidad cósmica:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T^2} = \frac{m_s \cdot v^2}{R_T}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^{6}}} = 7\,913\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El período de revolución del satélite será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_T}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,37 \cdot 10^6}{7\,913} = 5\,058\ \text{s}$$

34 **En la superficie de un planeta de 2 km de radio la aceleración de la gravedad es de 3 m · s^{-2}. Calcula la velocidad de escape desde la superficie del planeta y la masa del planeta.**

Dato: *G* = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

La velocidad de escape la calculamos de acuerdo con la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R^2} \cdot R} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2\,000} = 109,54\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y la masa del planeta:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3 \cdot 2\,000^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,8 \cdot 10^{17}\ \text{kg}$$

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: la solución correcta de este problema es la que aparece en esta página, y no la que se da en la página 414 del libro del alumno.

35. La nave espacial lunar *Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

a) La velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.

b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

Datos: *G* = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

Masa de la Luna: M_L = 7,36 · 10^{22} kg

Radio medio lunar: R_L = 1 470 km

a) La velocidad lineal de la nave se obtiene al igualar la fuerza centrípeta que actúa sobre ella con la gravitatoria y despejar la velocidad:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_L \cdot m_n}{R^2} = m_n \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_L}{R}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1\,470 + 100) \cdot 10^{3}}} = 1\,768,3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

siendo el período del movimiento:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (1\,470 + 100) \cdot 10^3}{1\,768,3} = 5\,578,6\ \text{s}$$

b) La velocidad de escape se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1\,470 + 100) \cdot 10^{3}}} = 2\,500,7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Esta es la velocidad de escape desde la órbita que indica el enunciado; de ahí el valor utilizado para R.

36. El radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 370 km. Si elevamos sin rozamiento un objeto de 20 kg de masa a una altura de 300 km sobre su superficie:

a) ¿Cuánto pesa el objeto a esa altura?

b) ¿Cuál será el incremento de su energía potencial?

c) Si se dejara caer desde esa altura, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²**

Masa y radio de la Tierra:

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,370$ **km**

a) La intensidad del campo gravitatorio que crea la Tierra a 300 km de altura es:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{[(6\,370 + 300) \cdot 10^3]^2} = 8{,}97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por tanto, el peso de un objeto de 20 kg a esa altura será:

$$P = m \cdot g = 20 \cdot 8{,}97 = 179{,}3 \text{ N}$$

b) La expresión que permite calcular la energía potencial gravitatoria de una masa m en el campo gravitatorio creado por la Tierra, cuya masa es M_T, a una distancia R de su centro es:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R}$$

Por tanto, la energía potencial de la masa m en la superficie de la Tierra es:

$$E_{p1} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 20}{6\,370 \cdot 10^3} = -1\,252{,}3 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Y la que le corresponde a 300 km sobre la superficie:

$$E_{p2} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 20}{(6\,370 + 300) \cdot 10^3} = -1\,196 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Por tanto, el incremento de su energía potencial será:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -1\,196 \cdot 10^6 - (-1\,252{,}3 \cdot 10^6) = 56{,}3 \cdot 10^6 \text{ J}$$

c) De acuerdo con el teorema de conservación de la energía, la energía mecánica del objeto a 300 km de altura (que es energía potencial) debe ser igual a su energía mecánica justo antes de llegar a la superficie terrestre (energía cinética). Por tanto, despreciando el rozamiento:

$$E_{mec}\ (h = 300 \text{ km}) = E_{mec}\ (\text{sup.}) \rightarrow -1\,252{,}3 \cdot 10^6 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -1\,196 \cdot 10^6$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1196 \cdot 10^6 + 1252{,}3 \cdot 10^6)}{20}} = 2\,373 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

37. La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. La masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, y $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²:

a) Calcula la distancia que separa el centro de la Tierra del centro de la Luna.

b) Calcula la masa de la Luna, sabiendo que una partícula de masa *m* podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3{,}4 \cdot 10^8$ m.

c) Si en la Luna, cuyo radio es $1{,}7 \cdot 10^6$ m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

a) La fuerza centrípeta que hace que la Luna orbite en torno a la Tierra es, precisamente, la fuerza gravitatoria que esta ejerce sobre la primera. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_L \cdot v_L^2}{r_{TL}} = G \cdot \frac{M_L \cdot M_T}{r_{TL}^2} \rightarrow r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{v_L^2}$$

Por otro lado, si suponemos que la órbita de la Luna es circular, podemos escribir:

$$v_L = \omega \cdot r_{TL} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, la distancia Tierra-Luna, r_{TL}, resulta:

$$r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}\right)^2} \rightarrow r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 3{,}9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) Si la partícula se encuentra en equilibrio, la resultante de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre ella ha de ser nula. Si llamamos r a la distancia que separa la partícula del centro de la Tierra, podemos escribir lo siguiente:

$$F_L = F_T \rightarrow G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(r_{TL} - r)^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow M_L = M_T \cdot \frac{(r_{TL} - r)^2}{r^2}$$

$$M_L = 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3{,}9 \cdot 10^8 - 3{,}4 \cdot 10^8)^2}{(3{,}4 \cdot 10^8)^2} = 12{,}98 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

c) La intensidad del campo gravitatorio creado por la Luna a una altura de 10 m es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{12{,}98 \cdot 10^{22}}{(1{,}7 \cdot 10^6 + 10)^2} = 2{,}99 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La velocidad con que el objeto llegará al suelo es, por tanto:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 2{,}99 \cdot 10} = 7{,}74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

38 Un satélite de 1 000 kg de masa gira en una órbita geoestacionaria.

Calcula:

a) Su velocidad angular.

b) El módulo de su aceleración normal.

c) Su energía total.

Dato: Radio de la Tierra, R_T = 6 370 km

a) Un satélite geoestacionario completa un giro cada 24 horas; ese es el valor de un período. Por tanto, su velocidad angular será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El módulo de su aceleración normal se calcula de acuerdo con la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Para obtenerlo, necesitamos conocer el radio de la órbita del satélite, R. Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{\omega^2}}$$

La masa de la Tierra, M_T, la calculamos como sigue:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por tanto, el radio de la órbita y la aceleración normal son:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}}{(7{,}27 \cdot 10^{-5})^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (7{,}27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7 = 0{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) La energía total del satélite en su órbita es:

$$E_T = E_p + E_c = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

$$E_T = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{42{,}2 \cdot 10^6} = -4{,}71 \cdot 10^9 \text{ J}$$

39. Un astronauta, con 100 kg de masa (incluyendo el traje), se encuentra sobre la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica y 2,4 km de diámetro, cuya densidad media es 2,2 g · cm^{-3}. Determina:

a) La velocidad con que debe impulsarse al astronauta para abandonar el asteroide.

b) ¿Cómo se denomina dicha velocidad?

c) El astronauta carga ahora con una mochila cuya masa es 40 kg. ¿Le será más fácil salir del asteroide? ¿Por qué?

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

a) La velocidad que permitirá al astronauta abandonar el asteroide es la velocidad de escape, cuyo valor es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{ast}}{R_{ast}}}$$

A partir de la densidad del asteroide y de su diámetro, datos que facilita el enunciado del problema, podemos calcular su masa:

$$d_{ast} = \frac{M_{ast}}{V_{ast}} \rightarrow M_{ast} = d_{ast} \cdot V_{ast} = d_{ast} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3_{ast}$$

$$M_{ast} = 2{,}2 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2{,}4 \cdot 10^3}{2}\right)^3 = 1{,}59 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

Por tanto, la velocidad de escape resulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{ast}}{R_{ast}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}59 \cdot 10^{13}}{1{,}2 \cdot 10^3}} = 1{,}33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Como se ha indicado en el apartado anterior, esa velocidad se denomina **velocidad de escape.**

c) La velocidad de escape es independiente de la masa del objeto que quiere escapar de la atracción del campo gravitatorio; sin embargo, si la masa aumenta 40 kg, será necesario comunicarle más energía para que alcance dicha velocidad.

40 **Se desea situar un satélite artificial de 50 kg de masa en una órbita circular sobre el ecuador de modo que se mueva con un radio de giro igual al doble del terrestre. Calcula:**

a) La energía que hay que comunicar al satélite y la velocidad orbital de este.

b) La energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²** → $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km

a) La velocidad orbital del satélite la calculamos como sigue:

$$F_c = F_G \rightarrow m_s \cdot \frac{v_s^2}{2 \cdot R_T} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(2 \cdot R_T)^2} \rightarrow v_s = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}} = 5\,595{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La energía mecánica del satélite en su órbita es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 =$$

$$= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T}$$

Por otro lado, la energía que posee en la superficie de la Tierra es:

$$E_{p_0} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}$$

A esta energía hay que añadirle cierta energía cinética, E_{c_0}, para que alcance la órbita. Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{p_0} + E_{c_0} = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} \rightarrow E_{c_0} = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} - E_{p_0}$$

$$E_{c_0} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} - \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}\right) = \frac{3}{4} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}$$

$$E_{c_0} = \frac{3}{4} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 50}{6\,370 \cdot 10^3} = 2{,}35 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) La energía cinética adicional que hay que aportar al satélite es aquella que haga que su energía potencial sea cero, así como la energía cinética (ya que basta con que el satélite llegue "al infinito" con velocidad cero). Por tanto:

$$E_{mec_{órb}} + E_{c_{adicional}} = 0 \rightarrow E_{c_{adicional}} = -E_{mec_{órb}} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T}$$

$$E_{c_{adicional}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 50}{2 \cdot 6\,370 \cdot 10^3} = 7{,}83 \cdot 10^8 \text{ J}$$

41. Un satélite artificial se dice geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra:

a) ¿A qué altura están dichos satélites?

b) ¿Qué momento cinético respecto al centro de la Tierra tiene un satélite geoestacionario si su masa es de 100 kg?

c) ¿Por qué no puede haber un satélite geoestacionario en la vertical de las islas Baleares?

Datos: $g_0 = 9{,}81$ m · s^{-2}; $R_T = 6\,370$ km.

a) Un satélite artificial es geoestacionario si su vector posición respecto al centro de la Tierra corta siempre a la superficie de esta en el mismo punto. La órbita geoestacionaria se encuentra a cierta altura sobre el ecuador; su período de revolución es de un día solar (24 horas).

La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre él es la fuerza centrípeta que le obliga a orbitar en torno a ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m_s \cdot v^2}{R} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

Por otro lado:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Igualando las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Si tenemos en cuenta, además, que:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Obtenemos, al sustituir $G \cdot M_T$ en la expresión anterior:

$$R = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot (24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Por tanto, la altura a que se encuentran dichos satélites, será:

$$h = R - R_T = 4,22 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) El momento cinético o angular del satélite respecto al centro de la Tierra lo calculamos de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) \rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\, \alpha$$

El satélite está sometido a una fuerza central ejercida por la Tierra; por tanto, su momento angular permanecerá constante. Al ser su trayectoria circular, el ángulo, α, que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$ será de 90°. Por tanto:

$$L = r \cdot m \cdot v$$

El valor de la velocidad orbital del satélite, v, es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4,22 \cdot 10^7}{24 \cdot 3\,600} = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$L = r \cdot m \cdot v = R \cdot m \cdot v = 4,22 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 3,07 \cdot 10^3 = 1,30 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

c) En la vertical de las islas Baleares no puede haber un satélite geoestacionario, ya que estas no se encuentran en el ecuador; una órbita es geoestacionaria si su eje de giro coincide con el de la Tierra y su período es el mismo que el de esta.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42. Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Si su período de revolución es T_1 = 5 665 s, determina:

a) La velocidad del satélite en la órbita.

b) Las energías cinética, potencial y total del satélite en la citada órbita, y la necesaria para transferir este satélite a otra órbita de período T_2 = 7 200 s.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²

R_T = 6 370 km

a) La velocidad de órbita del satélite la obtenemos como sigue:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 \cdot 10^3 + 500 \cdot 10^3)}{5\,665} = 7\,619{,}68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía cinética del satélite en la órbita es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,619{,}68^2 = 2{,}9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía potencial del satélite en la órbita la obtenemos a partir de la expresión:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

Teniendo en cuenta que:

$$g_0 = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_T + h} = \frac{-9{,}81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -5{,}79 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía total del satélite en la órbita será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E_1 = E_c + E_p = 2{,}9 \cdot 10^9 - 5{,}79 \cdot 10^9 = -2{,}89 \cdot 10^9 \text{ J}$$

El resultado negativo obtenido indica que el satélite está ligado a la Tierra.

La energía necesaria para transferir el satélite a otra órbita de período $T_2 = 7\,200$ s la calculamos como se indica. En primer lugar, aplicando la tercera ley de Kepler, podemos obtener el radio de la nueva órbita:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{R_2^3}{(R_T + h)^3} \rightarrow R_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2^2 \cdot (R_T + h)^3}{T_1^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7\,200^2 \cdot [(6\,370 + 500) \cdot 10^3]^3}{5\,665^2}} = 8{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A partir de este dato, podemos calcular la velocidad en la nueva órbita, v_2:

$$T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8{,}06 \cdot 10^6}{7\,200} = 7\,034{,}38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la energía total del satélite en esa nueva órbita será:

$$E_2 = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_2} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,034{,}38^2 - \frac{9{,}81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{8{,}06 \cdot 10^6} = -2{,}46 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Finalmente, la energía necesaria para transferir el satélite de una órbita a otra será la diferencia entre las energías totales del satélite en cada una de ellas. Por tanto:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -2{,}46 \cdot 10^9 - (-2{,}89 \cdot 10^9) = 0{,}43 \cdot 10^9 \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

3 CAMPO GRAVITATORIO: GENERALIZACIÓN

3.1. CONCEPTO FÍSICO DE CAMPO

1. Cita dos ejemplos, al menos, de campo creado por una magnitud activa escalar y otros dos ejemplos de campo creado por una magnitud activa vectorial.

Ejemplos de campos escalares:

- Supongamos un corte transversal de un terreno. Es de esperar que existan diferentes materiales que, normalmente, estarán organizados por capas o estratos. Como cada material tiene distinta densidad, podemos definir un campo de densidades para dicho corte transversal.

- En toda columna de fluido expuesto a la presión atmosférica (por ejemplo, en una presa), la presión aumenta a medida que aumenta la profundidad. Es posible, por tanto, asociar un campo de presiones, en función de la altura, para dicha columna de fluido.

- El relieve de un terreno hace que cada punto tenga una altura diferente, medida generalmente a partir del nivel de altura del mar. Este campo de alturas es lo que se representa en los mapas topográficos, dando lugar a las curvas de nivel.

  Las curvas de nivel son las líneas isoescalares del correspondiente campo de alturas; es decir, las líneas formadas por los puntos situados a la misma altura.

Ejemplos de campos vectoriales:

- Supongamos un mecanismo móvil, tipo biela-manivela. Podemos definir un campo de aceleraciones para cada uno de los puntos que forman parte de los diferentes sólidos rígidos del mecanismo.

- Imagina una viga empotrada en uno de sus extremos, con una carga puntual situada en su extremo libre. Dicha carga hace que el momento que soporta cada sección de viga vaya creciendo conforme nos alejamos del punto de aplicación de la carga y avanzamos hacia el extremo empotrado. Es decir, existe una distribución de momentos (esto es, un campo de momentos) a lo largo de la viga.

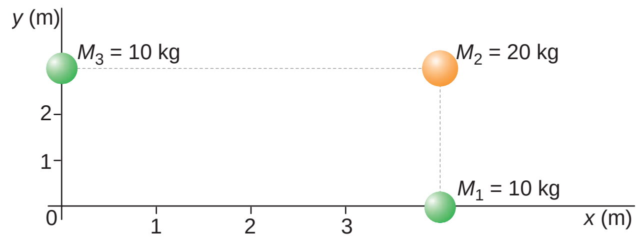
- Toda carga eléctrica crea en sus proximidades un campo de fuerzas que tiende a atraer o a repeler las cargas que se sitúan cerca de ella. Este campo de fuerzas recibe el nombre de campo eléctrico.

2. En cada uno de los ejemplos anteriores, señala cuál es la magnitud activa. En los campos vectoriales, señala si son o no son campos de fuerzas.

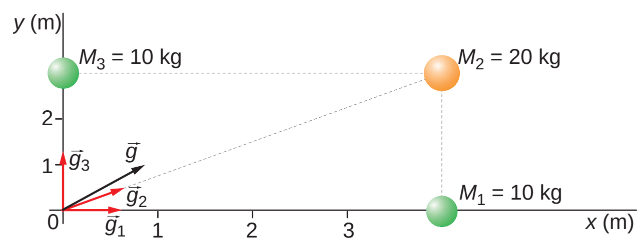
En los ejemplos de campos escalares, las magnitudes activas son la densidad, la presión y la altura, respectivamente. En el caso de los vectoriales son, respectivamente, la aceleración, los momentos y la fuerza eléctrica, que genera un campo de fuerzas.

3.2. CAMPO GRAVITATORIO

1. Dibuja el vector intensidad del campo gravitatorio que crea en el origen un sistema de masas como el de la figura, teniendo en cuenta la dirección y el sentido que le corresponde.



El vector intensidad de campo gravitatorio que corresponde a la distribución de masas indicada es el que se muestra en la ilustración:



2. En la actividad anterior, calcula el vector intensidad de campo gravitatorio. Considera $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.

Para calcular analíticamente el vector intensidad del campo gravitatorio, aplicaremos el teorema de superposición.

En la figura correspondiente a la actividad anterior hemos indicado los vectores unitarios en la dirección y el sentido del campo creado por cada una de las masas en el origen de coordenadas. Por tanto:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{g}_i = G \cdot \frac{M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + G \cdot \frac{M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 + G \cdot \frac{M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3$$

siendo:

$$\vec{u}_1 = \vec{i} \quad ; \quad \vec{u}_2 = \frac{4}{5} \cdot \vec{i} + \frac{3}{5} \cdot \vec{j} = 0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_3 = \vec{j}$$

Por tanto:

$$\vec{g} = G \cdot \left(\frac{M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 + \frac{M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3 \right) =$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left[\frac{10}{4^2} \cdot \vec{i} + \frac{20}{5^2} (0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j}) + \frac{10}{3^2} \cdot \vec{j} \right] =$$

$$= 10^{-10} \cdot (0,84 \cdot \vec{i} + 1,06 \cdot \vec{j}) \ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3.3. INTENSIDAD DE CAMPO Y POTENCIAL

1. **Considera el sistema físico propuesto en la primera actividad del epígrafe anterior. Calcula el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas y en el punto medio del rectángulo que forma dicho punto y los tres puntos en que se sitúan las masas.**

   Dado el carácter escalar del potencial gravitatorio, el que corresponde a un punto será la suma algebraica de los potenciales que crean cada una de las tres masas en dicho punto. Por tanto, en el origen:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=3} - G \cdot \frac{M_i}{r_i} = -G \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \frac{M_i}{r_i} = - G \cdot \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3} \right)$$

$$V_0 = - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{4} + \frac{20}{5} + \frac{10}{3} \right) = 6,56 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

   Y en el punto medio del rectángulo que indica el enunciado, teniendo en cuenta que la distancia de cada masa a ese punto es 2,5 m, obtenemos:

$$V = - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{2,5} \cdot (M_1 + M_2 + M_3) =$$

$$= - \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{2,5} \cdot (10 + 20 + 10) = 1,07 \cdot 10^{-9} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

2. **Dejamos libre, en el origen del sistema de coordenadas, una masa de 1 mg. Suponiendo que no existen rozamientos y que el plano *XY* es perfectamente horizontal, indica hacia dónde se moverá dicha masa (si se mueve). Justifica tu respuesta.**

   La masa se moverá en la dirección y el sentido del vector intensidad de campo gravitatorio (calculado en la segunda actividad del epígrafe anterior).

   En particular, la masa estará sometida a una fuerza:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \rightarrow \vec{F} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-10} \cdot (0,84 \cdot \vec{i} + 1,06 \cdot \vec{j}) =$$

$$= 1 \cdot 10^{-16} \cdot (0,84 \cdot \vec{i} + 1,06 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

3.4. ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. **¿Existe algún punto en el que el potencial entre la Tierra y la Luna sea nulo? ¿Y la intensidad del campo gravitatorio?**

   Como se aprecia en la gráfica de la página 72 del libro del alumno, el potencial entre la Tierra y la Luna es siempre negativo; no se anula nunca.

   En lo que respecta al campo gravitatorio, en primer lugar calculamos el campo gravitatorio creado por cada cuerpo en un punto cualquiera de la recta que une ambos cuerpos. Tomaremos como eje *OX* positivo la línea Tierra-Luna en el sentido Tierra-Luna. El origen del eje será el centro de la Tierra.

De este modo, y teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y que la distancia que las separa es $3{,}84 \cdot 10^8$ m:

$$\vec{g}_T = -G \cdot \frac{81 \cdot M_L}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL} \quad ; \quad \vec{g}_L = G \cdot \frac{M_L}{(L - X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

Si aplicamos el principio de superposición y sustituimos:

$$\vec{g}_T + \vec{g}_L = -G \cdot M_L \cdot \left(\frac{81}{X^2} - \frac{1}{(3{,}84 \cdot 10^8 - X)^2} \right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Al igualar a cero esta expresión, obtenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita es la distancia X medida respecto al centro de la Tierra, distancia a la cual el campo gravitatorio se anula:

$$80 \cdot X^2 - 6{,}22 \cdot 10^{10} \cdot X + 1{,}194 \cdot 10^{19} = 0 \rightarrow X = 3{,}46 \cdot 10^8 \text{ m}$$

2. ¿Cada cuánto tiempo se produce una pleamar? ¿Y una bajamar?

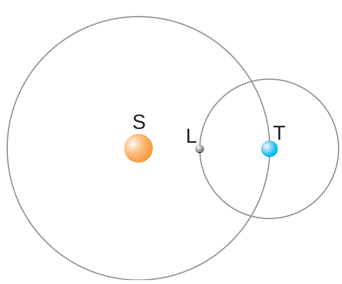
En cada giro de la Luna, que equivale a un día lunar, se producen dos pleamares y dos bajamares. Estos fenómenos se suceden cada poco más de seis horas, ya que el día lunar tiene una duración aproximada de 24 horas y 51 minutos.

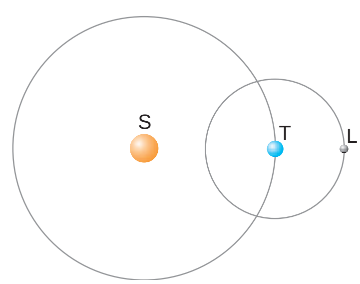
3. Dibuja las posiciones del Sol y de la Luna respecto a un punto de la Tierra en los siguientes supuestos:

a) Cuando se produce una marea viva.

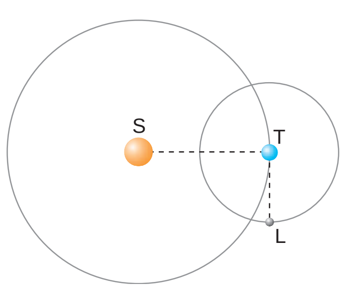
b) Cuando se produce una marea muerta.

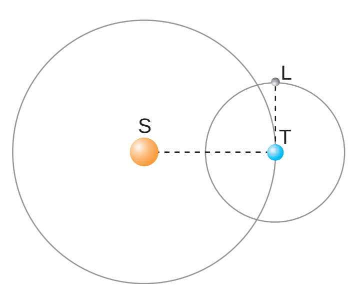
a) Las siguientes figuras muestran las posiciones relativas del Sol, la Tierra y la Luna cuando se produce una marea viva en situación de Luna nueva (izquierda) y de Luna llena (derecha):





b) La marea muerta se produce cuando el Sol y la Luna atraen a la Tierra formando un ángulo recto entre sí, como se muestra en las siguientes figuras:

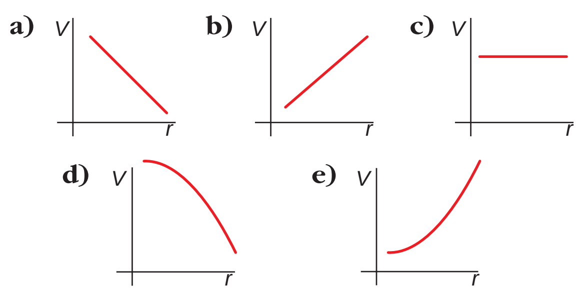




ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. ¿Cuál de las figuras que siguen muestra cómo varía el potencial gravitatorio que crea una masa, *M*, en función de la distancia?

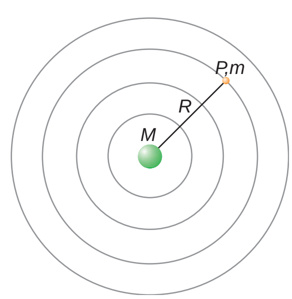


La expresión del módulo del potencial gravitatorio creado por una masa puntual es:

$$V(r) = G \cdot \frac{M}{r}$$

lo que indica que el potencial gravitatorio es inversamente proporcional a la distancia. Gráficamente, esto se representa con una hipérbola, según se muestra en la figura **e).**

2. Un objeto puntual *P*, de masa *m*, se encuentra en el interior del campo gravitatorio que crea otra masa, *M*. Dicho objeto se mueve con m.c.u., de radio *R*, alrededor de la masa *M*:



a) Calcula la energía que consume al dar una vuelta.

b) Si el objeto estuviera inicialmente en reposo, ¿cómo se movería? Indícalo sobre la figura.

a) El campo gravitatorio es un campo conservativo. En este tipo de campos, el trabajo que realiza la carga o la masa que se desplaza de un punto a otro no depende de la trayectoria, sino de las posiciones inicial y final. Como la partícula da una vuelta, las posiciones inicial y final coinciden, y, por tanto, $W_{ciclo} = 0$.

Teniendo en cuenta, además, que $W = -\Delta E_p$, la variación de energía será nula. La masa puntual no consume energía al dar una vuelta completa.

b) Toda masa abandonada en el seno de un campo gravitatorio tiende a moverse en el sentido de potenciales decrecientes. Es decir, la masa m situada en el punto P se moverá perpendicularmente a las líneas equipotenciales, acercándose a la masa M.

3. Comenta la siguiente frase: "Dado un campo de fuerzas, siempre es posible encontrar una energía potencial asociada a él".

Dado un campo de fuerzas, solo podemos asociarle una energía potencial si el campo es conservativo. Por tanto, la afirmación que hace el enunciado de la cuestión es falsa.

4. Calcula el campo y el potencial gravitatorios que crean dos masas puntuales iguales, separadas 1 m entre sí, en el punto medio de la recta que las une. Expresa el resultado en función de *G* y *m*.

Dos masas puntuales iguales crearán, en el punto medio de la recta que las une, campos del mismo valor y de sentido contrario; por tanto, se anulan:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$$

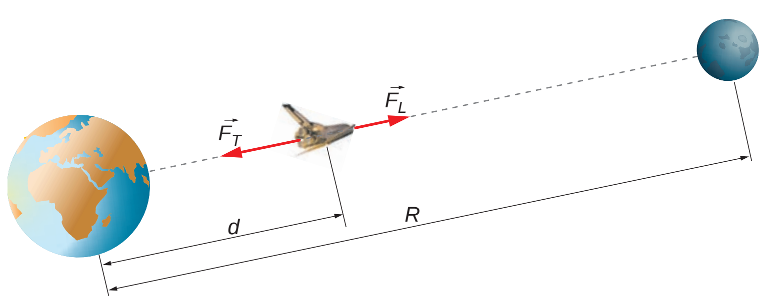
El potencial es una magnitud escalar; por tanto, para obtenerlo sumamos algebraicamente el que crea cada masa:

$$V_1 = G \cdot \frac{m}{d} = G \cdot \frac{m}{0,5} = V_2$$

$$V = V_1 + V_2 = 2 \cdot \frac{G \cdot m}{0,5} = 4 \cdot G \cdot m$$

5. Describe cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa *m* en su viaje de la Tierra a la Luna. Supón que la Tierra y la Luna están en reposo y que la nave se mueve siguiendo la dirección que une sus centros.

En la trayectoria que sigue la nave espacial desde la Tierra hasta la Luna, está sometida a las fuerzas gravitatorias de ambas, como se indica en la siguiente ilustración:



La fuerza total que actúa sobre la nave (su peso), si tomamos como origen del sistema de referencia el centro de la Tierra, es:

$$\vec{P} = \vec{F}_G = \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d^2} + G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(R-d)^2}\right) \cdot \vec{i} \text{ N}$$

donde el vector $\vec{i}$ apunta hacia el centro de la Luna.

Cuando la nave se encuentra sobre la superficie terrestre, podemos considerar despreciable la atracción lunar sobre ella; por tanto, su peso será:

$$\vec{P}_{Tierra} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \cdot \vec{i} = -9{,}81 \cdot m \cdot \vec{i} \text{ N}$$

A medida que la nave se aleja de la Tierra y se acerca a la Luna, la fuerza gravitatoria terrestre disminuye y aumenta la fuerza gravitatoria lunar sobre ella. En concreto, cuando se encuentra en la superficie de la Luna, su peso será:

$$\vec{P}_{Luna} = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{R_L^2} \cdot \vec{i} = g_L \cdot m \cdot \vec{i}$$

En este caso, el peso está dirigido hacia la Luna, donde hemos considerado despreciable la atracción terrestre.

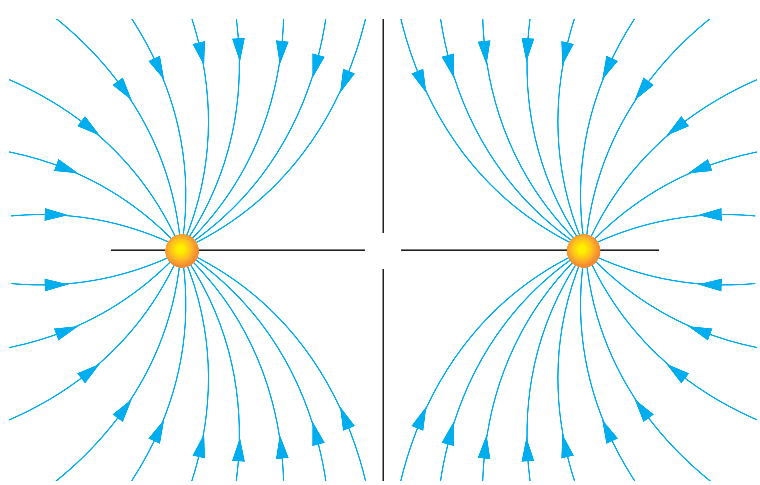
Por tanto, inicialmente, el peso de la nave en la Tierra vale 9,81 · m, dirigido hacia la Tierra; después va disminuyendo, hasta que en algún punto se anula (allí donde el campo gravitatorio creado por la Tierra y la Luna es nulo), y luego aumenta de nuevo, hasta que en la superficie lunar su valor es $g_L \cdot m$, dirigido hacia el centro de la Luna.

6. Dibuja las líneas del campo gravitatorio producido por dos masas puntuales iguales separadas una cierta distancia.

a) ¿Existe algún punto donde la intensidad del campo gravitatorio sea nula? En caso afirmativo, indica dónde.

b) ¿Existe algún punto donde el potencial gravitatorio sea nulo? En caso afirmativo, indica dónde.

En la siguiente figura se representan las líneas de fuerza que solicita el enunciado:



a) El campo gravitatorio que crea cada una de las masas es:

$$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 \quad ; \quad \vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2$$

El campo gravitatorio resultante será nulo en el punto en que: $\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$; es decir, $\vec{g}_1 = -\vec{g}_2$. Por tanto:

$$-G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2$$

La igualdad anterior se cumplirá solo en el caso de que los vectores unitarios tengan la misma dirección y sentidos opuestos. En ese caso, resulta:

$$G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2}$$

Como las masas son iguales, ha de cumplirse que:

$$r_1^2 = r_2^2 \rightarrow r_1 = r_2$$

El punto que cumple la condición es el punto medio de la recta que las une. Por tanto, sí existe un punto en el que la intensidad de campo gravitatorio se anula.

b) El potencial gravitatorio creado por cada una de las masas es:

$$V_1 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} \quad ; \quad V_2 = -\frac{G \cdot m_2}{r_2}$$

El potencial total es la suma algebraica de los anteriores. Por tanto, teniendo en cuenta que ambas masas son iguales, obtenemos:

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} + \left(-\frac{G \cdot m_2}{r_2}\right) = -G \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

De acuerdo con la expresión obtenida, el potencial gravitatorio creado por ambas masas siempre es negativo, y no nulo.

EJERCICIOS

7. En la superficie de la Luna, el período de un péndulo simple de 1 m de longitud es $T = 4{,}7$ s. Si el radio de la Luna es $R_L = 1\,738$ km:

a) Determina la gravedad en la superficie lunar.

b) Determina la velocidad de escape en la superficie de la Luna.

a) La expresión que permite calcular el período de un péndulo simple es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_L}}$$

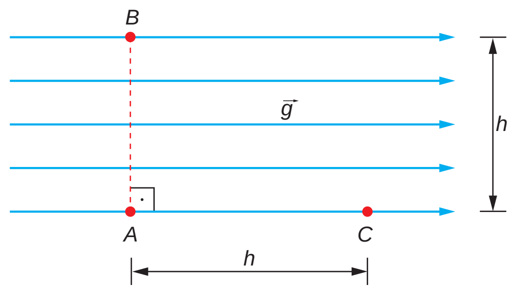
Por tanto:

$$g_L = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1}{4{,}7^2} = 1{,}79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) El valor de la velocidad de escape es:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}79 \cdot 1\,738 \cdot 10^3} = 2\,492{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8. En cierta región del espacio existe exclusivamente un campo gravitatorio uniforme, como se indica en la figura:



Se traslada una masa desde el punto *A* hasta el punto *B* y otra igual del punto *A* al punto *C*. Los trabajos realizados por el campo gravitatorio son, respectivamente:

a) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

b) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = -m \cdot g \cdot h$

c) $W_{AB} = m \cdot g \cdot h$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

d) $W_{AB} = m \cdot g \cdot h$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

El trabajo del campo para conducir la masa de *A* a *B* es:

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 90° = 0$$

dado que la fuerza (que tiene la misma dirección que el campo gravitatorio) y el desplazamiento son perpendiculares.

Por otra parte, para conducir la masa de *A* a *C:*

$$W_{A \rightarrow C} = F \cdot d = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 0° = m \cdot g \cdot h$$

Observa que el signo del trabajo es positivo, ya que el vector desplazamiento y el vector campo gravitatorio tienen la misma dirección y sentido (el trabajo es realizado por las fuerzas del campo).

La respuesta correcta es la **a).**

9. En la superficie de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio es, aproximadamente, seis veces la existente en la superficie de la Luna. Sabemos que, en la Tierra, un hilo se rompe si se le cuelga un objeto de 5 kg. ¿Qué masa, expresada en kilogramos, rompería ese mismo hilo en la Luna? Razona la respuesta.

La tensión máxima que soporta el hilo se corresponde con el peso máximo que dicho hilo puede soportar, que, si la masa que cuelga es *m,* resulta ser:

$$T = m \cdot g$$

En la Luna, la masa, *m',* que podrá soportar será la correspondiente al peso que ejerza la misma tensión que en la Tierra:

$$T = m' \cdot g_L$$

siendo g_L la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.

Al igualar los segundos miembros de las expresiones anteriores, resulta:

$$T = m' \cdot g_L = m \cdot g \rightarrow m' = \frac{g}{g_L} \cdot m$$

Si tenemos en cuenta que:

$$g = 6 \cdot g_L \rightarrow g_L = \frac{g}{6}$$

obtenemos el valor de la mayor masa que puede soportar:

$$m' = \frac{g}{g/6} \cdot m = 6 \cdot m$$

$$m' = 6 \cdot 5 = 30 \text{ kg}$$

10. Calcula la gravedad, *g*, en función de la que existe en la superficie de la Tierra, para un punto situado a una altura, *h*, mucho menor que el radio de esta, *R*.

La aceleración de la gravedad, que es el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra, viene dada por la expresión:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Para un punto próximo a la superficie de la Tierra, podemos escribir:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2 \cdot \left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2}$$

Si desarrollamos el binomio de la expresión anterior, resulta:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{h}{R_T} + \left(\frac{h}{R_T}\right)^2$$

En esta expresión podemos despreciar el término de segundo orden, ya que, según se nos dice en el enunciado, $h << R_T$.

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior, podemos establecer la igualdad:

$$g = \frac{g_0}{1 + \dfrac{2 \cdot h}{R_T}}$$

que es el resultado pedido.

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

11. La energía potencial que corresponde a una molécula viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}}$$

En esta expresión, *a* y *b* son dos constantes de valor positivo, y *x*, la distancia entre átomos. ¿Para qué valores de *x* se anula *U*(*x*)? ¿Para qué valores de *x* pasa *U*(*x*) por un mínimo?

La función se anulará en los puntos que cumplan $U(x) = 0$.

$$U(x) = 0 \rightarrow \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0 \rightarrow a = b \cdot x^6 \rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$$

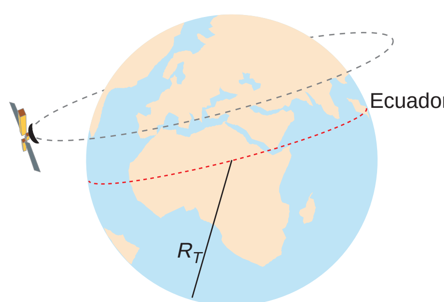
Los extremos relativos (máximos y mínimos locales) de una función se dan para aquellos valores en los que la primera derivada se anula. Por tanto:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = 0 = -\frac{12 \cdot a}{x^{13}} - \frac{6 \cdot b}{x^7}$$

Resolviendo la ecuación, resulta:

$$12 \cdot a = 6 \cdot b \cdot x^6 \rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{2 \cdot a}{b}}$$

12. **Razona por qué es imposible que un satélite artificial describa en torno a la Tierra una órbita que, como la de la figura, no está contenida en el plano del ecuador, sino en otro paralelo a él.**



La fuerza centrípeta que mantiene un satélite en órbita circular en torno a la Tierra es la fuerza gravitatoria que esta ejerce sobre él:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza central, dirigida hacia el centro de la Tierra.

Si un satélite describiera una órbita en un plano paralelo al que contiene el ecuador, la dirección de la fuerza gravitatoria (central) no coincidiría con la dirección de la fuerza centrípeta (que es perpendicular a la dirección del vector velocidad y cuyo sentido está dirigido hacia el centro de curvatura), lo que va en contra de las leyes que rigen el movimiento de los satélites artificiales en torno a la Tierra.

13. **Un planeta tiene un radio que es tres veces mayor que el de otro. Si la densidad de ambos es la misma, ¿en cuál de los dos es mayor el peso de un mismo cuerpo? ¿Cómo afecta esto a la masa de un cuerpo?**

Sabemos que las densidades de los dos planetas son iguales, aunque sus masas y radios son diferentes. Esto nos lleva a:

$$d_1 = d_2 \rightarrow 1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\left(\frac{M_1}{V_1}\right)}{\left(\frac{M_2}{V_2}\right)} = \frac{\frac{M_1}{4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3}}{\frac{M_2}{4/3 \cdot \pi \cdot R_2^3}} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

A partir de la igualdad anterior, es posible calcular la relación entre sus masas:

$$1 = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{(3 \cdot R_2)^3}{R_2^3} = \frac{3^3}{1} = 27$$

Para comprobar en qué planeta es mayor el peso, veamos la relación entre el campo gravitatorio en la superficie de cada uno:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G \cdot \frac{M_1}{R_1^2}}{G \cdot \frac{M_2}{R_2^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3$$

Es decir, en el planeta 1 el peso de un cuerpo es tres veces superior que en el planeta 2.

Este hecho no guarda influencia alguna sobre la masa del cuerpo. Recordemos que la masa de un cuerpo es la cantidad de materia de este. Es una magnitud intrínseca y universal; no depende del lugar donde nos encontremos.

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

PROBLEMAS

14 Un saltador de longitud consigue una marca de 9,20 metros. ¿Cuál sería la marca de ese mismo saltador en la superficie de la Luna, suponiendo que la longitud del salto es inversamente proporcional a la gravedad?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ **kg**

$M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ **kg;** $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ **kg**

Se trata de hallar la relación entre los campos gravitatorios en las superficies de la Tierra y de la Luna.

Con los datos que nos proporciona el enunciado podemos relacionar ambos campos gravitatorios, de forma que:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{G \cdot \frac{M_{Tierra}}{R^2{}_{Tierra}}}{G \cdot \frac{M_{Luna}}{R^2{}_{Luna}}}$$

Si sustituimos cada término por su valor, podremos despejar directamente la relación entre ambos campos:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{\dfrac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,38 \cdot 10^{6})^2}}{\dfrac{7,34 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^{6})^2}} = 6,06$$

El enunciado nos indica que la distancia del salto es inversamente proporcional al campo gravitatorio de cada planeta. Por tanto:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{d_{Luna}}{d_{Tierra}}$$

$$d_{Luna} = \frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} \cdot d_{Tierra} = 6,06 \cdot 9,20 = 55,75 \text{ m}$$

15. Calcula el campo que crea la Tierra, supuesta puntual, sobre un asteroide situado a 100 000 km de ella.

Dato: $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ U.I.

El campo gravitatorio creado por la Tierra en un punto alejado de ella cierta distancia viene dado por:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M_T}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

donde R es la distancia del centro de la Tierra al asteroide. De este modo, resulta:

$$\vec{g} = -6,673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(100 \cdot 10^{6})^2} \cdot \vec{u}_r = -4 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

16. En el problema anterior, calcula la energía potencial que posee dicho asteroide cuando lo situamos en ese punto, debido a la acción que ejerce sobre él el campo gravitatorio terrestre.

Dato: La masa del asteroide es 10^9 kg.

Antes de calcular la energía potencial, hemos de calcular el potencial gravitatorio:

$$V = -G \cdot \frac{M_T}{R} = -6,673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{100 \cdot 10^{6}} = -4 \cdot 10^{6} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La energía potencial tendrá un valor:

$$E_p = m_{asteroide} \cdot V = 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^6) = -4 \cdot 10^{15} \text{ J}$$

17. Una niña, de 32 kg de masa, está situada sobre la superficie terrestre:

a) ¿Cuál es su peso?

b) ¿Cuál sería su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar el radio?

c) ¿Cuál sería su peso si el radio de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar la masa?

d) ¿Cuál sería su peso si la masa y el radio de la Tierra se redujesen a la mitad?

a) El peso de la niña será $P = m \cdot g$, donde g es el campo gravitatorio en la superficie de la Tierra. Expresado en función del radio y de la masa de la Tierra:

$$P = m \cdot g \rightarrow P = 32 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

b) Hablar de reducción del peso equivale a hablar de reducción de la intensidad del campo gravitatorio, pues ambas magnitudes son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R_T^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow g' = 0{,}5 \cdot g$$

El peso sería ahora la mitad:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 0{,}5 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 16 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

c) Procediendo del mismo modo que en el apartado anterior:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \frac{M_T}{(R_T / 2)^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = 4 \rightarrow g' = 4 \cdot g$$

El peso sería ahora:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 4 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 128 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

es decir, cuatro veces mayor.

d) Por último, en este caso:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \frac{M_T / 2}{(R_T / 2)^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = 2 \rightarrow g' = 2 \cdot g$$

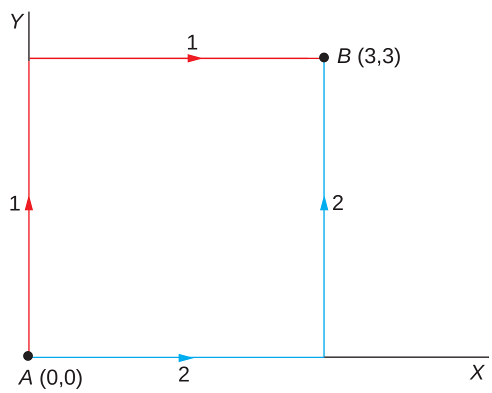
el peso se duplicaría:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 64 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

18 **Una partícula se mueve del punto *A* al punto *B*, impulsada por una fuerza:**

$$\vec{F} = 2 \cdot x \cdot \vec{i} - 5 \cdot y \cdot \vec{j}$$



a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 1.

b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 2.

a) El trabajo necesario para desplazar la partícula se obtiene resolviendo la integral:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy)$$

para cada uno de los caminos especificados.

Para la trayectoria número 1:

$$W_1 = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy) = \int_0^0 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^3 5 \cdot y \cdot dy + \int_0^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_3^3 5 \cdot y \cdot dy$$

$$W_1 = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - 5 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3 = 9 - 22{,}5 = -13{,}5 \text{ J}$$

b) Del mismo modo, para la trayectoria 2:

$$W_2 = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy) = \int_0^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^0 5 \cdot y \cdot dy + \int_3^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^3 5 \cdot y \cdot dy$$

$$W_2 = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - 5 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3 = 9 - 22{,}5 = -13{,}5 \text{ J}$$

Como vemos, el trabajo es el mismo y no depende de la trayectoria.

19. Dado el campo de fuerzas:

$$\vec{A} = \frac{6 \cdot x^2 - 4}{2 \cdot x} \cdot \vec{i}$$

en el que *A* se mide en newton cuando *r* se expresa en metros, calcula la diferencia de potencial que existe entre dos puntos situados, respectivamente, a unas distancias $x_1 = 1$ m y $x_2 = 2$ m del centro del campo.

El potencial asociado a un campo de fuerzas se calcula a partir de la expresión:

$$V = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para hallar la diferencia de potencial entre ambos puntos, aplicamos la expresión que corresponde:

$$\Delta V = -\int_1^2 \frac{6 \cdot x^2 - 4}{2 \cdot x} \cdot dx = -\int_1^2 \left(3 \cdot x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx$$

$$\Delta V = -\left.\frac{3 \cdot x^2}{2}\right|_1^2 + 2 \cdot ln\ x\Big|_1^2 = -(6 - 1{,}5) + 2 \cdot (ln\ 2 - ln\ 1) = -3{,}11\ \text{J}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

20 **Determina el campo gravitatorio (módulo, dirección y sentido) resultante de los campos gravitatorios individuales de la Tierra y del Sol, en un punto situado en la recta que une la Tierra y el Sol, a una distancia de 4 · 10⁵ km de la Tierra.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M_{Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$

$M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$

$d_{Tierra\text{-}Sol} = 15 \cdot 10^7\ \text{km}$

Si tomamos como origen del sistema de referencia el centro de la Tierra, los campos gravitatorios que crean la Tierra y el Sol, respectivamente, son:

$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^8)^2} = 2{,}49 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_S = \frac{G \cdot M_S}{(r_{T-S} - r)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{[(1500 - 4) \cdot 10^8]^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El campo gravitatorio total será la suma de ambos; como lo que hemos calculado son sus módulos, el módulo del campo gravitatorio total será su resta, y estará dirigido hacia el mayor; es decir, hacia el Sol, sobre la recta que une este con la Tierra. Por tanto:

$$g_{total} = g_S - g_T = 5{,}93 \cdot 10^{-3} - 2{,}49 \cdot 10^{-3} = 3{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

4.1. MOVIMIENTOS PERIÓDICOS

1. Conocido el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra, y sabiendo que la Luna no emite luz propia, sino que refleja la que recibe del Sol, explica las fases de la Luna y la periodicidad con que se producen.

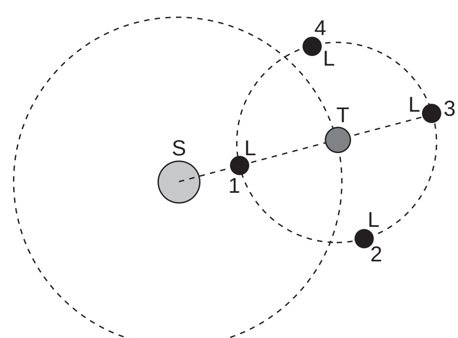
La Luna efectúa un giro a la Tierra cada 28 días, aproximadamente. Según la posición en que se encuentre respecto al Sol y la Tierra, la Luna puede interceptar o no los rayos de luz que proceden del Sol. En la posición 1 (véase la gráfica de la cuestión 2), la Luna intercepta la luz que recibe del Sol y la refleja, impidiendo que llegue a la Tierra. Debido a ello, la Luna no se verá; es la fase que denominamos luna nueva.

En la figura de la siguiente cuestión están representadas las cuatro fases de la Luna. Las fases se representan cada cuarto de vuelta. Ello supone que, si el ciclo total es de 28 días, se produzca una fase cada semana.

2. ¿En qué sentido (horario o antihorario) gira la Luna en torno a la Tierra? Dedúcelo de la forma en que se suceden las fases lunares.

Las fases se suceden del siguiente modo: luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante.

Partiremos de la posición de luna nueva (posición número 1). Para deducir el sentido de giro, recurrimos a la observación. En cuarto creciente, la Luna tiene forma de D. La posición de la figura que se corresponde con esa observación es la posición número 2. En ese instante, la Luna recibe la luz por el lado derecho, que es el que vemos iluminado. Por tanto, la Luna realiza un recorrido antihorario.



3. Al colgar un objeto de 300 g de un muelle, se produce en este un alargamiento de 3,5 cm. Calcula su constante recuperadora.

La fuerza que produce el alargamiento del muelle es el peso del objeto que se cuelga de él:

$$P = m \cdot g = 0{,}3 \cdot 9{,}8 = 2{,}94 \text{ N}$$

Teniendo en cuenta la expresión que corresponde a la fuerza elástica recuperadora, dada por la ley de Hooke, despejando y sustituyendo los datos de que disponemos, obtenemos el valor de la constante recuperadora del resorte:

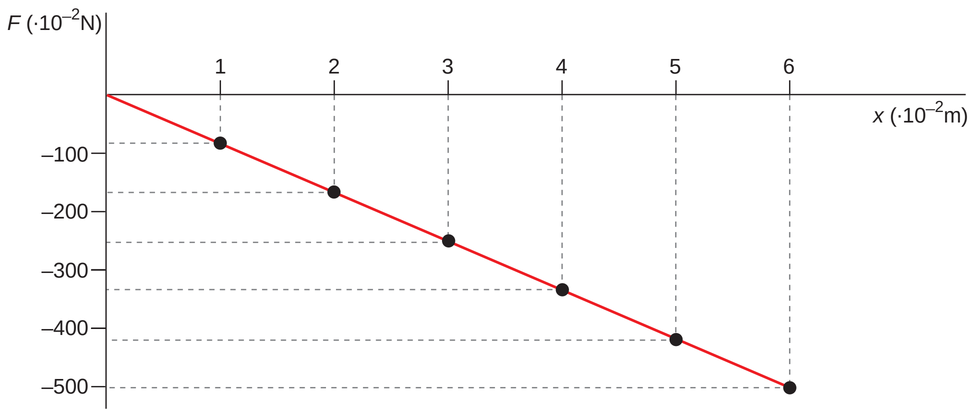
$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{2{,}94}{0{,}035} = 84 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

4. Confecciona un gráfico que muestre cómo varía la fuerza recuperadora del muelle anterior en función de la distancia para deformaciones que vayan de 0 a 6 cm.

La fuerza recuperadora que ejerce el muelle, de acuerdo con la ley de Hooke, es:

$$F = -k \cdot x$$

Esta fuerza es de sentido contrario a la que ejerce la masa que cuelga de él, y tiene su mismo valor. Su representación gráfica es una recta, como se muestra a continuación:



4.2. ESTUDIO CINEMÁTICO DEL M.A.S.

1. Un cuerpo oscila con m.a.s. de acuerdo con la ecuación:

$$\boldsymbol{x = 3 \cdot sen\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

en la que todas las magnitudes se expresan en unidades S.I.:

a) Calcula la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial del movimiento.

b) Escribe las ecuaciones de la velocidad y la aceleración del movimiento.

c) Calcula la elongación, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 2$ s.

a) La ecuación de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

donde:

A = amplitud ; ω = frecuencia angular

t = tiempo ; φ = fase inicial

Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 3 \cdot sen\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

las magnitudes características del movimiento del cuerpo resultan:

$$A = 3 \text{ m} \quad ; \quad \omega = 10 \cdot \pi \text{ rad} \cdot s^{-1} \quad ; \quad \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia angular y el período, podemos obtener también este último:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{10 \cdot \pi} = 0{,}2 \text{ s}$$

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la expresión que permite calcular la elongación es:

$$x = 3 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y la aceleración:

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 \cdot \pi \cdot cos \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -300 \cdot \pi^2 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Para el instante $t = 2$ s, los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración son:

$$x = 3 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 = 3 \text{ m}$$

$$v = 30 \cdot \pi \cdot cos \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$a = -300 \cdot \pi^2 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = -300 \cdot \pi^2 \text{ m} \cdot s^{-2}$$

2. Una partícula se mueve con m.a.s. En el instante inicial se encuentra a 10 cm de la posición de equilibrio, siendo su velocidad nula. Si el período del movimiento es 10 s, escribe las ecuaciones que le corresponden para la elongación, la velocidad y la aceleración.

Las ecuaciones generales de la posición, la velocidad y la aceleración en un m.a.s. son:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

En el instante inicial, la velocidad es nula ($v = 0$). Por tanto:

$$v(0) = A \cdot \omega \cdot cos\ \varphi = 0 \rightarrow cos\ \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, del dato del período podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{10} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

La amplitud del movimiento la obtenemos teniendo en cuenta que en el instante inicial la elongación es de 10 cm:

$$x(0) = A \cdot sen\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \rightarrow A = 0{,}1\ \text{n}$$

Conocidos los valores de la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial, podemos escribir las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow x = 0{,}1 \cdot sen\left(0{,}2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow v = 0{,}02 \cdot \pi \cdot cos\left(0{,}2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow a = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot sen\left(0{,}2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. La elongación de un m.a.s. viene dada por la ecuación $x = 25 \cdot sen\ (4 \cdot t)$. En esta expresión, x viene dada en mm si t se expresa en s. Indica la amplitud, la frecuencia y el período del movimiento. Escribe las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración y calcula los valores máximos de ambas magnitudes.

La ecuación general de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

donde:

$$A = \text{amplitud} \quad ; \quad \omega = \text{frecuencia angular}$$

$$t = \text{tiempo} \quad ; \quad \varphi = \text{fase inicial}$$

Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 25 \cdot sen\ (4 \cdot t)$$

resulta:

$$A = 25\ \text{mm} \quad ; \quad \omega = 4\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \varphi = 0\ \text{rad}$$

El período está relacionado con la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = 1{,}57\ \text{s}$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración:

$$v = 100 \cdot cos\ (4 \cdot t)$$

$$a = -400 \cdot sen\ (4 \cdot t)$$

La velocidad máxima se obtiene cuando $cos\ (4 \cdot t) = 1$, siendo su valor:

$$v_{máx} = 100\ \text{mm/s}$$

y la aceleración máxima, cuando $sen\ (4 \cdot t) = -1$:

$$a_{máx} = 400\ \text{mm/s}^2$$

4.3. DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE UN M.A.S.

1. Calcula las expresiones que permiten calcular la velocidad y la aceleración con que se mueve un cuerpo que oscila unido al extremo de un muelle.

La ecuación de la posición para el muelle que oscila es:

$$x = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

Al derivar respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración:

$$v = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

$$a = -A \cdot \frac{k}{m} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

2. Calcula el período con que oscila un péndulo de 1 m de longitud en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es 9,8 m · s^{-2}.

El período de oscilación del péndulo lo podemos calcular a partir de la siguiente expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2 \text{ s}$$

3. Calcula la longitud de un péndulo cuyo período de oscilación es (2,31 ± 0,01) s, si oscila en un lugar de la Tierra en el que *g* = (9,806 ± 0,001) m · s^{-2}. Expresa el resultado con todas sus cifras significativas.

NOTA: Consulta en el CD los contenidos relacionados con cálculo de errores, que estudiaste el curso pasado.

El período de oscilación de un péndulo es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Despejando, la longitud del péndulo será:

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2{,}31^2 \cdot 9{,}806}{4 \cdot \pi^2} = 1{,}325428 \text{ m}$$

Para calcular el valor que daremos como bueno, tenemos en cuenta los criterios de error vistos el curso pasado.

De ese modo, al tratarse de una medida indirecta, resulta:

$$\frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Delta l = l \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta g}{g} \right)$$

$$\Delta l = 1,325428 \cdot \left(2 \cdot \frac{0,01}{2,31} + \frac{0,001}{9,806} \right)$$

$$\Delta l = 0,0116 \text{ m}$$

Como imprecisión del período y de la aceleración de la gravedad hemos considerado una unidad de la última cifra significativa en cada caso, y para el número "pi" hemos supuesto un valor exacto, entendiendo por exacto el valor que proporciona la calculadora con todos los dígitos que ofrece. De acuerdo con las normas que ya conocemos, la longitud se expresará en la forma:

$$l = 1,33 \pm 0,01 \text{ m}$$

4.4. ENERGÍA ASOCIADA A UN M.A.S.

1. Una masa de 200 g está suspendida de un muelle. Debido a ello, este se deforma 4 cm. A continuación, separamos el muelle 10 cm de la posición de equilibrio y lo dejamos en libertad.

En esas condiciones, calcula la frecuencia, la frecuencia angular y la amplitud del m.a.s. que describe la masa.

La frecuencia angular del sistema será su frecuencia propia, dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sabemos que, al colocar una masa de 200 g, el muelle se estira 4 cm. Eso nos permite calcular la constante elástica, ya que la fuerza elástica recuperadora, dada por la ley de Hooke, es igual y opuesta al peso del cuerpo:

$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{0,04} = 49 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Por tanto, la frecuencia angular (o propia) del sistema resulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{0,2}} = 15,65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

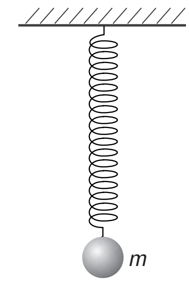
siendo la frecuencia:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{15,65}{2 \cdot \pi} = 2,49 \text{ Hz}$$

La amplitud del movimiento es de 10 cm.

2. **Calcula la elongación para la que, en un oscilador armónico de amplitud *A*, la energía cinética y la energía potencial elástica son iguales.**

Supongamos una masa m, puntual, suspendida de un muelle sin masa.



De acuerdo con el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} E_{p_e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \\ E_c = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow x = \pm\, v \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. **Un muelle de 10 cm de longitud requiere un trabajo exterior de 20 J para comprimirlo hasta 8 cm. Calcula su constante elástica.**

A partir de la expresión del trabajo realizado al comprimir el muelle:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow k = \frac{2 \cdot W}{x^2}$$

Sustituyendo los datos de que disponemos, se obtiene:

$$k = \frac{2 \cdot 20}{0{,}1^2} = 4\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES

1. **De acuerdo con lo expuesto en este apartado de ampliación de contenidos, señala cómo será el movimiento armónico simple resultante si los dos movimientos que interfieren:**

a) Son de igual fase.

b) Son de igual fase y amplitud.

c) Están en oposición de fase.

d) Están en oposición de fase y tienen la misma amplitud.

e) Están en cuadratura de fase.

f) Están en cuadratura de fase y tienen la misma amplitud.

En todos los casos, el m.a.s. resultante será de la misma frecuencia que los dos movimientos que se superponen si estos son de igual frecuencia. Estudiaremos lo que sucede con la amplitud y la fase del m.a.s. resultante.

a) Movimientos de igual fase. En este caso, la amplitud resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\,(\theta_1 - \theta_2)} \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\, 0} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

Por tanto:

$$A_R = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

La amplitud resultante es la suma de las amplitudes.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta + A_2 \cdot sen\ \theta}{A_1 \cdot cos\ \theta + A_2 \cdot cos\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = tg\ \theta \rightarrow \Phi = \theta$$

La fase del movimiento resultante coincide con la fase de los movimientos que dan lugar a él.

b) Movimientos de igual fase y amplitud. En este caso, la amplitud resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\theta_1 - \theta_2)} \\ Si\ \ \theta_1 = \theta_2 = \theta \ \text{ y } \ A_1 = A_2 = A \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A \cdot A \cdot cos\ 0} = \sqrt{4 \cdot A^2} = 2 \cdot A$$

La amplitud resultante es igual a la suma de las amplitudes de los dos movimientos.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A \cdot sen\ \theta + A \cdot sen\ \theta}{A \cdot cos\ \theta + A \cdot cos\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = tg\ \theta \rightarrow \Phi = \theta$$

La fase del movimiento resultante coincide con la fase de los movimientos que dan lugar a él.

c) Movimientos en oposición de fase. Dos movimientos se encuentran en oposición de fase si sus fases iniciales difieren en "pi" radianes, es decir, si: $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la amplitud del movimiento resultante es:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ \pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

Por tanto:

$$A_R = A_1 - A_2$$

Como vemos, la amplitud resultante es la diferencia de amplitudes.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ \theta_2}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_2}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ (\theta_1 + \pi)}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ (\theta_1 + \pi)} =$$

$$= \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 - A_2 \cdot sen\ \theta_1}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 - A_2 \cdot cos\ \theta_1} = tg\ \theta_1 \rightarrow \Phi = \theta_1$$

d) Movimientos en oposición de fase y con igual amplitud. Valiéndonos de lo expuesto para el caso anterior:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ \pi} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

Al ser $A_1 = A_2$, $A_R = 0$. La amplitud es nula. La interferencia es total y el movimiento nulo.

Como el movimiento es nulo, el desfase también lo será.

e) Movimientos en cuadratura de fase. Decimos que dos movimientos se encuentran en cuadratura de fase si sus fases iniciales cumplen la relación: $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la amplitud del movimiento resultante es:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\pi/2)} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

En cuanto a la fase inicial del movimiento resultante:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ \theta_2}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_2}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_1}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 - A_2 \cdot sen\ \theta_1} = \frac{tg\ \theta_1 + \dfrac{A_2}{A_1}}{1 - \dfrac{A_2}{A_1} \cdot tg\ \theta_1}$$

f) Movimientos en cuadratura de fase e igual amplitud. Valiéndonos de los cálculos anteriores, resulta para la amplitud:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\pi/2)} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Como $A_1 = A_2 = A$:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{2 \cdot A^2} = \sqrt{2} \cdot A$$

Mientras que para la fase, aplicando igualmente que $A_1 = A_2 = A$:

$$tg\ \Phi = \frac{tg\ \theta_1 + \dfrac{A_2}{A_1}}{1 - \dfrac{A_2}{A_1} \cdot tg\ \theta_1} \rightarrow tg\ \Phi = \frac{1 + tg\ \theta_1}{1 - tg\ \theta_1}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Señala cuál será el desplazamiento de una partícula que se mueve efectuando un movimiento armónico simple al cabo de un período completo.

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico. Al cabo de un período completo, la partícula se encontrará de nuevo en la misma posición; por tanto, su desplazamiento, que es una magnitud vectorial, será nulo.

2. Sabemos que la velocidad de una partícula que describe un movimiento armónico simple es nula en ciertos instantes. Con esta información, ¿podemos conocer su posición en esos instantes?

Las expresiones que corresponden, respectivamente, a la posición y a la velocidad en un movimiento armónico simple son:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Observa que, en los instantes en que la velocidad se anula, $cos\ (\omega \cdot t + \theta_0) = 0$, y, por tanto, $sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$ alcanza un valor máximo, positivo ($sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) = +1$) o negativo ($sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) = -1$). En consecuencia, en esos instantes la partícula se encontrará en los puntos de amplitud máxima:

$$x = A \quad ; \quad x = -A$$

3. ¿Qué valor toma la aceleración de un oscilador armónico, de amplitud *A* y frecuencia *f*, cuando su velocidad es máxima?

¿Y cuando su elongación es máxima?

Las ecuaciones que corresponden a la posición, la velocidad y la aceleración de un oscilador armónico de amplitud A y frecuencia f son, respectivamente:

$$x = A \cdot sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

$$v = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

$$a = -A \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

Los valores máximo y mínimo de la velocidad son:

$$v_{máx} = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \quad ; \quad v_{mín} = -A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

Estos valores se dan cuando $cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = 1$ o $cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = -1$. En esos instantes, el valor de la elongación y de la aceleración es cero, ya que en ellos se cumple que $sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = 0$.

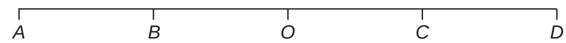
Del mismo modo, cuando la elongación es máxima, la aceleración es mínima:

$$x = A \rightarrow a = -A \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot f^2$$

y cuando la elongación es mínima, la aceleración es máxima:

$$x = -A \rightarrow a = A \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot f^2$$

4. El siguiente esquema representa un movimiento armónico simple:



Señala si son positivos, negativos o nulos los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración de la partícula que describe dicho movimiento en los siguientes casos:

a) La partícula se encuentra en *O* y se desplaza hacia *D*.

b) La partícula se encuentra en *C* y se desplaza hacia *O*.

c) La partícula está en el punto *D*.

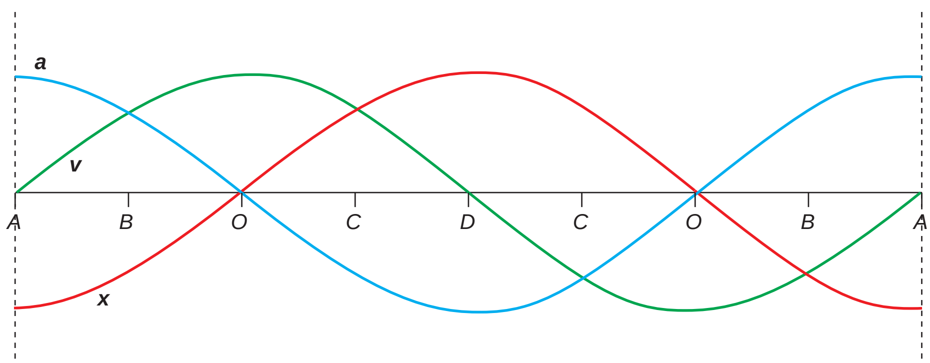
d) La partícula pasa por *O* y se dirige hacia *A*.

e) La partícula está en *A*.

f) La partícula pasa por *B*, de camino hacia *O*.

En primer lugar, debemos tener en cuenta que, en un m.a.s., los sentidos que corresponden a la elongación y a la aceleración siempre son opuestos.

En la siguiente figura se representa la posición, la velocidad y la aceleración que corresponden a una partícula que efectúa una oscilación completa:



De acuerdo con ella, las respuestas a los casos que propone el enunciado son las siguientes (en ellas, la letra A designa el valor máximo de la elongación, es decir, la amplitud del movimiento).

a) $x = 0$
$v > 0$
$a = 0$

b) $x > 0$
$v < 0$
$a < 0$

c) $x = A > 0$
$v = 0$
$a < 0$ (valor mínimo)

d) $x = 0$
$v < 0$
$a = 0$

e) $x = -A < 0$
$v = 0$
$a > 0$ (valor máximo)

f) $x < 0$
$v > 0$
$a > 0$

5. En un movimiento armónico simple, la energía es proporcional:

a) Al ángulo de fase.

b) A la amplitud.

c) Al cuadrado de la amplitud.

d) A la frecuencia.

La expresión de la energía mecánica de un m.a.s. es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot A^2 = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot A^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

Como se puede apreciar en la expresión anterior, la energía de un m.a.s. es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de vibración.

Por tanto, la respuesta correcta es la **c).**

6. Si se duplica la amplitud de un oscilador armónico simple, ¿cómo varía su energía?

La energía de un oscilador armónico simple se puede expresar del siguiente modo:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Si se duplica la amplitud:

$$E'_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = 4 \cdot E'_m$$

Por tanto, al duplicar la amplitud, la energía se multiplica por cuatro.

EJERCICIOS

7. Un muelle vibra con una frecuencia angular de 30 rad · s^{-1}. Sabiendo que la masa del muelle es 100 g, calcula su constante elástica.

A partir de la expresión de la frecuencia propia del sistema, obtenemos la constante elástica del muelle:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 \cdot m = 30^2 \cdot 0{,}1 = 90 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

8. Calcula la longitud del hilo del que cuelga la masa en un péndulo simple cuyo período es 2 segundos.

Aplicando directamente la expresión que permite calcular el período para un péndulo simple, obtenemos el siguiente resultado:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2^2 \cdot 9{,}8}{4 \cdot \pi^2} = 0{,}993 \text{ m}$$

9. Un péndulo formado por un hilo inextensible, del que cuelga una masa de 400 g, tiene un período de 2 segundos. Calcula la longitud del péndulo.

El período de un péndulo no depende de la masa que cuelga de él, sino de su longitud y del valor de la aceleración de la gravedad; por tanto, el dato de la masa es innecesario. Si tomamos el valor de 9,8 m/s² para la aceleración de la gravedad, la longitud del péndulo será:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2^2 \cdot 9,8}{4 \cdot \pi^2} = 0,993 \text{ m}$$

10. Cuando una masa, m_1, cuelga del extremo inferior de un resorte vertical, este realiza oscilaciones con movimiento armónico simple, de período T_0. Calcula el período de las oscilaciones cuando se agrega una masa m_2 a dicho resorte.

Partiendo del primer dato, podemos calcular la constante elástica del resorte:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \rightarrow k = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_1}{T_0^2}$$

El muelle sigue siendo el mismo. No obstante, ahora se le añade una segunda masa, m_2, con lo que el período pasa a ser:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Si sustituimos la constante del muelle por su valor y simplificamos la expresión resultante, el período queda en la forma:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{\left(\dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_1}{T_0^2}\right)}} = T_0 \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

11. Dos objetos, de la misma masa, se encuentran unidos a sendos muelles, idénticos. Se estiran a la vez, el primero 10 cm y el segundo 5 cm, y se dejan en libertad. ¿Cuál de los dos objetos alcanzará primero la posición de equilibrio?

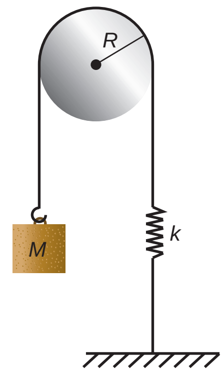
El período de oscilación de una partícula ligada a un muelle cuando este oscila libremente es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Por tanto, en un movimiento armónico simple, el período (y, en consecuencia, la frecuencia) es independiente de la amplitud.

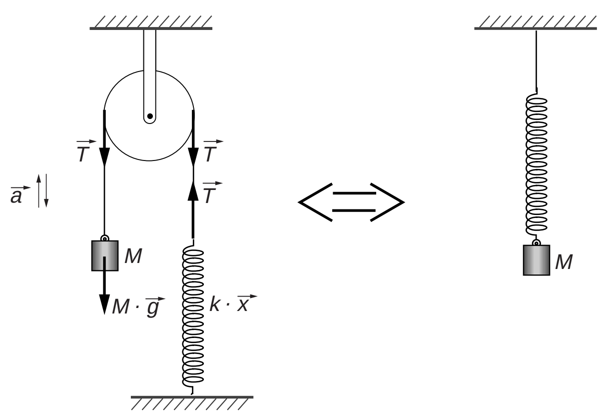
Como en el caso que propone el enunciado tanto la masa como el muelle son iguales, los dos objetos alcanzarán a la vez la posición de equilibrio.

12. En el esquema de la figura, la masa *M* se encuentra en la posición de equilibrio, *k* es la constante elástica del muelle, y *R*, el radio de la polea.



Calcula el período de las oscilaciones que realizará al desplazar ligeramente la masa *M* de dicha posición.

Si consideramos despreciable el efecto de rotación de la polea, el dispositivo es similar a un muelle ideal que separamos de su posición de equilibrio.



El período será, por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$$

13. Variando la longitud de un péndulo simple y midiendo el período de oscilación que corresponde a dicha longitud, se puede determinar con precisión el valor de la aceleración de la gravedad. Diseña una experiencia que permita calcular dicho valor. Ten en cuenta los criterios que debes seguir al realizar una experiencia práctica.

Podemos despejar el valor de la aceleración de la gravedad de la expresión que permite calcular el período de oscilación de un péndulo simple:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Teniendo en cuenta que la aceleración de la gravedad depende únicamente de la longitud del hilo y del período de la oscilación, puede determinarse de manera indirecta como se indica a continuación.

Diseño de la experiencia:

- Enganchamos un hilo fino a una bola. Es preferible que la bola sea pequeña y de densidad elevada para que interaccione poco con el aire y se disminuya al máximo el rozamiento. Es conveniente realizar la experiencia en un lugar cerrado, sin corrientes de aire.
- Enganchamos el péndulo a un punto fijo (por ejemplo, el techo).
- Separamos la bola de la vertical un ángulo pequeño (menor de 5°); de lo contrario, la hipótesis que nos ha llevado a obtener el resultado no es válida.
- Medimos el período de las oscilaciones. Para ello, dejamos oscilar el péndulo y, tras realizar una o dos oscilaciones, medimos el tiempo que tarda en realizar diez oscilaciones, al menos. De ese modo, la imprecisión en la medida del tiempo que tarda en realizarse una oscilación disminuye de forma apreciable.
- Realizamos varias mediciones para distintas longitudes del hilo.
- Tras aplicar la fórmula para cada longitud, obtendremos diversos valores para la gravedad. Como valor de la gravedad tomaremos el valor medio de todos ellos.

14. Comprueba que en un movimiento armónico simple la relación entre la velocidad y la posición viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)}$$

La expresión que permite calcular la elongación o posición en un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

siendo la de la velocidad:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Por tanto:

$$\frac{x}{A} = sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) \quad ; \quad \frac{v}{A \cdot \omega} = cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Si elevamos al cuadrado ambas expresiones y las sumamos, el segundo miembro será igual a la unidad:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1$$

de donde resulta, al despejar:

$$\omega^2 \cdot x^2 + v^2 = A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$$

15. La expresión:

$$\boldsymbol{x = 0{,}2 \cdot sen\ (\pi \cdot t)}$$

en la que *x* se mide en metros si *t* se mide en segundos, describe el movimiento de una partícula. Se pide:

a) **La amplitud, el período, la frecuencia y la frecuencia angular que corresponden al movimiento.**

b) **Obtén las ecuaciones $v = f(t)$ y $a = f(t)$.**

c) **Completa una tabla como la que se adjunta:**

t	x	v	a
0			
$T/4$			
$T/2$			
$3 \cdot T/4$			
T			
$5 \cdot T/4$			
$3 \cdot T/2$			
$7 \cdot T/4$			
$2 \cdot T$			

d) **Haz la representación gráfica de las ecuaciones $x = f(t)$, $v = f(t)$ y $a = f(t)$. Utiliza para ello los valores de la tabla anterior.**

a) La ecuación de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

donde: A es amplitud; ω, la frecuencia angular; t,el tiempo, y φ, la fase inicial. Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 0{,}2 \cdot sen\ (\pi \cdot t)$$

resulta:

$$A = 0{,}2 \text{ m} \quad ; \quad \omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \varphi = 0$$

A partir de la relación que existe entre la frecuencia angular y el período, obtenemos este último:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

Por tanto, la frecuencia, que es la inversa del período, es:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

b) Las ecuaciones que corresponden a la velocidad y a la aceleración del movimiento las obtenemos derivando la ecuación de la posición respecto al tiempo. De ese modo:

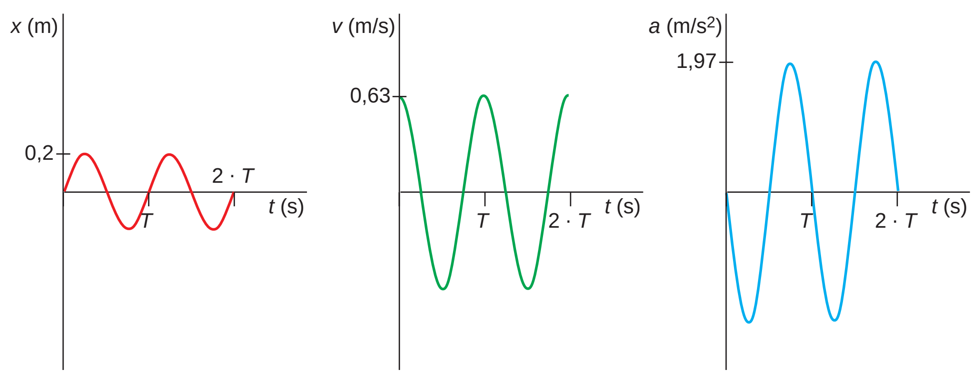
$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}2 \cdot \pi \cdot cos(\pi \cdot t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}2 \cdot \pi^2 \cdot sen(\pi \cdot t)$$

c) La tabla que solicita el enunciado es la siguiente:

t	*x*	*v*	*a*
0	0	0,63	0
T/4	0,2	0	–1,97
T/2	0	–0,63	0
3 · *T*/4	–0,2	0	1,97
T	0	0,63	0
5 · *T*/4	0,2	0	–1,97
3 · *T*/2	0	–0,63	0
7 · *T*/4	–0,2	0	1,97
2 · *T*	0	0,63	0

d) La representación gráfica de los valores de la tabla anterior es:



PROBLEMAS

16. Una partícula oscila con movimiento armónico simple de amplitud 0,5 cm y 15 Hz de frecuencia. Calcula la velocidad y la elongación al cabo de un segundo de comenzar el movimiento.

Los datos que proporciona el enunciado del problema son:

$$A = 0{,}5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = 15 \text{ Hz}$$

A partir de la frecuencia, podemos calcular la frecuencia angular del movimiento armónico simple:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 30 \cdot \pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La ecuación de la posición de una partícula que describe un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Si consideramos la fase inicial nula, la ecuación que representa el movimiento de la partícula es:

$$x = 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ (30 \cdot \pi \cdot t)$$

En ella, x se expresa en metros si t se expresa en segundos. Si derivamos la expresión anterior respecto al tiempo, obtenemos las expresiones que corresponden a la velocidad y a la aceleración de la partícula:

$$v = 30 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot cos\ (30 \cdot \pi \cdot t)$$

$$a = -30^2 \cdot \pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ (30 \cdot \pi \cdot t)$$

Al cabo de un segundo de iniciarse el movimiento, los valores de la elongación, de la velocidad y de la aceleración son:

$$x\ (t = 1\ s) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ (30 \cdot \pi \cdot 1) = 0$$

$$v\ (t = 1\ s) = 30 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot cos\ (30 \cdot \pi \cdot 1) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot \pi = 0{,}47\ m \cdot s^{-1}$$

$$a\ (t = 1\ s) = 30^2 \cdot \pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ (30 \cdot \pi \cdot 1) = 0$$

17. Calcula el valor máximo de la aceleración de un m.a.s. cuya amplitud es 8 mm y cuya frecuencia es 450 Hz.

Los datos de que disponemos son:

$$A = 8\ mm = 8 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$f = 450\ Hz$$

El período y la frecuencia angular del m.a.s. son:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{450} = 0{,}002\ s$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 450 = 900 \cdot \pi \cdot rad \cdot s^{-1}$$

La expresión que proporciona la posición en un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t \cdot \theta_0)$$

Considerando nula la fase inicial, $\theta_0 = 0$, la ecuación de la posición es:

$$x = 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ (900 \cdot \pi \cdot t)$$

En esta expresión, x se mide en metros si t se expresa en segundos. Al derivarla respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de la velocidad:

$$v = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 900 \cdot \pi \cdot cos\ (900 \cdot \pi \cdot t)$$

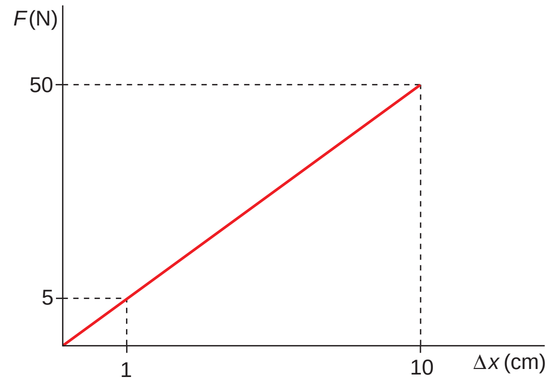
Al derivar esta última, de nuevo, respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de la aceleración:

$$a = -8 \cdot 10^{-3} \cdot 900^2 \cdot \pi^2 \cdot sen\ (900 \cdot \pi \cdot t)$$

cuyo valor máximo se obtiene cuando $sen\ (900 \cdot \pi \cdot t) = -1$, siendo este:

$$a_{máx} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 900^2 \cdot \pi^2 = 63\,955{,}04\ m \cdot s^{-2}$$

18. El comportamiento elástico de un muelle es el que se indica en la figura.



Del muelle cuelga una masa de 1,5 kg. En cierto instante, el muelle se separa 8 cm de la posición de equilibrio, comenzando a oscilar. Calcula:

a) La constante elástica del muelle.

b) La frecuencia angular.

c) El período de las oscilaciones que efectúa la masa.

a) La figura nos proporciona información suficiente para deducir la constante elástica del muelle, ya que:

$$F = k \cdot \Delta x \rightarrow k = \frac{\Delta F}{\Delta(\Delta x)} = \frac{50-5}{(10-1) \cdot 10^{-2}} = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Conocida la constante elástica, la frecuencia angular del sistema se obtiene de forma inmediata:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{1,5}} = 18,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) El período de las oscilaciones se calcula a partir de su relación con la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{18,25} = 0,344 \text{ s}$$

19. Al colocar un objeto de 250 g suspendido de un resorte se produce un alargamiento de 3,5 cm. Si a continuación se estira hasta 5 cm y se deja oscilar libremente el sistema, este describe un movimiento armónico simple:

a) Calcula la fuerza recuperadora que ejerce el resorte.

b) Escribe la ecuación del movimiento armónico simple que describe el objeto.

a) La constante elástica del resorte es la relación entre la fuerza aplicada (el peso del objeto) y el alargamiento producido. En efecto, a partir de la ley de Hooke::

$$F_e = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,25 \cdot 9,8}{0,035} = 70 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Cuando el muelle se estira hasta 5 cm, la fuerza recuperadora que este ejerce es:

$$F_e = -k \cdot x = -70 \cdot 0{,}05 = -3{,}5 \text{ N}$$

El signo negativo indica que la fuerza recuperadora es de sentido contrario a la elongación.

b) La ecuación general de la elongación de una masa sujeta al extremo de un muelle puede escribirse en la forma:

$$x = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

En el caso del movimiento que describe el enunciado, la amplitud es:

$$A = 5 \text{ cm} - 3{,}5 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

ya que la posición de equilibrio está situada a 3,5 cm de la longitud en reposo del muelle.

Si consideramos la fase inicial nula, $\theta_0 = 0$, la ecuación del movimiento, expresada en unidades del S.I., es:

$$x = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{70}{0{,}25}} \cdot t\right)$$

20. Una partícula se mueve con movimiento armónico simple, según una línea recta. Del movimiento de la partícula se conoce su velocidad máxima, $v = 0{,}4$ m · s^{-1}, y su aceleración máxima, $a = 0{,}6$ m · s^{-2}. Teniendo en cuenta estos datos, determina el período y la frecuencia del movimiento.

Las expresiones que permiten calcular el valor absoluto de la velocidad máxima y de la aceleración máxima en un m.a.s. son:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \quad ; \quad a_{máx} = A \cdot \omega^2$$

Dividiendo entre sí ambas expresiones:

$$\frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega \rightarrow \omega = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con el dato de la frecuencia angular obtenemos fácilmente el período y la frecuencia del movimiento:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \\ f = 1/T \end{array}\right\} \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1{,}5}{2 \cdot \pi} = 0{,}239 \text{ Hz} \rightarrow T = 4{,}19 \text{ s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

21. Un péndulo está formado por un hilo inextensible del que cuelga una masa de 100 g. Dicho péndulo se mueve con movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento que le corresponde es:

$$\boldsymbol{y = cos\,(20 \cdot \pi \cdot t)}$$

Determina la ecuación de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante.

La ecuación de la velocidad y la de la aceleración las obtenemos derivando, respecto al tiempo, la ecuación de la posición proporcionada por el enunciado:

$$v = \frac{dy}{dt} = -20 \cdot \pi \cdot sen\,(20 \cdot \pi \cdot t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -20^2 \cdot \pi^2 \cdot cos\,(20 \cdot \pi \cdot t)$$

22. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con m.a.s. En el punto $x = 2$ cm lleva una velocidad de 8 cm · s^{-1} y en el punto $x = 6$ cm lleva una velocidad de 3 cm · s^{-1}. Calcula:

a) La frecuencia angular.

b) El período y la frecuencia del movimiento.

c) La amplitud de la vibración.

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: el segundo valor de la velocidad que aparece en el enunciado debe estar expresado en cm · s^{-1}, no en m · s^{-1}.

a) Las expresiones generales de la posición y de la velocidad de una partícula que efectúa un m.a.s. son:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \theta_0) \quad ; \quad v = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Si consideramos la fase inicial nula, $\theta_0 = 0$, podemos escribir, para el primer instante de tiempo, t_1:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t_1) \\ 8 = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t_1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{A} = sen\,(\omega \cdot t_1) \\ \dfrac{8}{A \cdot \omega} = cos\,(\omega \cdot t_1) \end{array}\right.$$

Si elevamos las dos expresiones al cuadrado y las sumamos, el miembro de la derecha es igual a la unidad. Por tanto:

$$\frac{4}{A^2} + \frac{64}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 64 = 0 \qquad [1]$$

De manera similar, para el instante de tiempo t_2 podemos escribir lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t_2) \\ 3 = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t_2) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{6}{A} = sen\,(\omega \cdot t_2) \\ \dfrac{3}{A \cdot \omega} = cos\,(\omega \cdot t_2) \end{array}\right.$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y operando, se obtiene:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{9}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{36 \cdot \omega^2 + 9}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 9 = 0 \qquad [2]$$

Si restamos la expresión [1] de la [2] y despejamos ω, obtenemos el valor de la frecuencia angular:

$$32 \cdot \omega^2 - 55 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{55}{32}} = 1,31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1,31}{2 \cdot \pi} = 0,21 \text{ Hz}$$

El período del movimiento será:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,21} = 4,79 \text{ s}$$

c) La amplitud de la vibración la podemos obtener directamente a partir de las expresiones [1] o [2]. Por ejemplo, si partimos de la ecuación [1], se obtiene:

$$4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 64 = 0 \rightarrow A^2 = \frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,31^2 + 64}{1,31^2}} = 6,42 \text{ m}$$

Por tanto, la ecuación general del m.a.s. que efectúa la partícula es:

$$x = 6,42 \cdot sen\ (1,31 \cdot t)$$

En ella, la posición se expresa en centímetros si el tiempo se expresa en segundos.

23 **Una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte situado en posición vertical y lo comprime 10 cm. La masa es impulsada hacia abajo, hasta que comprime el muelle 20 cm. Tras esto, el sistema queda en libertad. Calcula:**

a) La constante elástica del muelle.

b) La amplitud y el período de las oscilaciones.

c) La posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante.

a) La constante elástica del resorte es la relación entre fuerza aplicada y alargamiento:

$$F = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{5 \cdot 9,8}{0,1} = 490 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) El sistema está en equilibrio cuando, debido al peso del cuerpo, el muelle se ha contraído 10 cm respecto a su longitud natural. No obstante, el muelle se separa de dicha posición de equilibrio hasta que la elongación máxima respecto a su longitud natural es de 20 cm. Por tanto, la amplitud del movimiento será:

$$A = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

Por otra parte, el período de las oscilaciones resulta:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5}{490}} = 0,635 \text{ s}$$

c) En el instante en que se inicia el movimiento, la amplitud es máxima. Este dato permite calcular la fase inicial:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \\ x(0) = A \cdot sen\ (\omega \cdot 0 + \varphi) = A \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

En cuanto a la frecuencia angular del movimiento, resulta:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,635} = 9,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conocidas la fase inicial y la frecuencia, estamos en condiciones de determinar las ecuaciones que proporcionan la posición y la velocidad en cada instante:

$$x = 0,1 \cdot sen\left(9,9 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = 0,99 \cdot cos\left(9,9 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

24. La ecuación del m.a.s. con que se mueve un objeto viene dada por:

$$\boldsymbol{y = sen\,(6 \cdot \pi \cdot t + \pi)}$$

Calcula:

a) La amplitud, la frecuencia y el período de las oscilaciones.

b) La energía potencial de la masa en cualquier instante.

c) La energía cinética de la masa en cualquier instante.

d) La energía total de la masa en cualquier instante.

a) La ecuación general de posición de un m.a.s. tiene por expresión:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Identificando los parámetros de la ecuación general con la ecuación del problema, la amplitud resulta:

$$A = 1 \text{ m}$$

La frecuencia angular es, por comparación con la ecuación general:

$$\omega = 6 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conocido este valor, es inmediato obtener el período y la frecuencia:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \\ f = \dfrac{1}{T} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{6 \cdot \pi} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ s} \ ; \ f = \frac{1}{T} = 3 \text{ Hz}$$

b) La expresión que proporciona la energía potencial en un movimiento armónico simple es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot sen^2\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

En nuestro caso, la energía potencial de la masa en función del tiempo es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot 1^2 \cdot sen^2\ (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

$$E_p = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot sen^2\ (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) \text{ J}$$

c) Para la energía cinética obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot cos^2 (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot 1^2 \cdot cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

$$E_c = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) \text{ J}$$

d) La energía total es la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E = E_p + E_c$$

$$E = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot [sen^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) + cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)]$$

$$E = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

25. Una partícula de 6 g de masa se mueve a lo largo del eje *X*, atraída hacia el origen con una fuerza que, en newton, es diez veces su distancia, *x*, respecto al origen. Si la partícula parte del reposo en la posición *x* = 5 cm, calcula la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento que describe.

Si existe una fuerza que atrae la partícula hacia el centro, esta debería mantenerse siempre en el origen. No obstante, como ha sido separada 5 cm, ha almacenado cierta energía y, fruto de ello, describe un m.a.s. sobre el eje *X* alrededor del origen. La amplitud de este movimiento armónico simple son los 5 cm de separación iniciales:

$$A = 5 \text{ cm}$$

La fuerza a la que está sometida la partícula es proporcional a la distancia y de sentido contrario (m.a.s.), a razón de $10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; es decir:

$$\left.\begin{cases} F = -k \cdot x \\ F = -10 \cdot x \end{cases}\right\} \rightarrow k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Para calcular el período del movimiento, sustituimos en la expresión que sigue, obteniendo el resultado que se indica:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,006}{10}} = 0,154 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del período; por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,154} = 6,5 \text{ Hz}$$

26 Un muelle de constante elástica $3,5 \cdot 10^5$ N · m^{-1} está comprimido 6 cm. Al soltarlo y llegar a su posición de equilibrio, actúa sobre un cuerpo cuya masa es de 250 g. Calcula la velocidad que le comunica.

La energía potencial que almacena el muelle cuando está comprimido una distancia *x* es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Por tanto:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 10^5 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2 = 630 \text{ J}$$

Si consideramos el sistema libre de rozamientos, esa energía potencial le será comunicada a la masa, que se encuentra en la posición de equilibrio, en forma de energía cinética. Por tanto, la velocidad que alcanzará la masa será:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 630}{0{,}250}} = 71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

27. Calcula la energía potencial elástica acumulada en un muelle de constante elástica 3 500 N · m⁻¹ en el instante en que está comprimido y mide 5 cm. Sabemos que su longitud natural es 8 cm.

Si la longitud natural del muelle es 8 cm y cuando está comprimido mide 5 cm, la contracción que experimenta es de 3 cm. Por tanto, la energía potencial que acumula en esta situación es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,500 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 1{,}575 \text{ J}$$

28. Un muelle, situado en un plano horizontal, lleva unido un objeto de 175 g y está comprimido 7 cm respecto a su longitud natural. Su constante elástica es 2 500 N · m⁻¹.

Calcula la velocidad que llevará el objeto cuando pase por el punto de equilibrio:

a) En ausencia de rozamientos.

b) Cuando actúa una fuerza de rozamiento constante de 56 N.

a) En ausencia de rozamientos, la energía potencial elástica del muelle en el estado de máxima elongación se transforma en energía cinética cuando pasa por el punto de equilibrio:

$$E_{p_{máx}} = E_{c_{máx}}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando:

$$v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \rightarrow v = x \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v = 0{,}07 \cdot \sqrt{\frac{2\,500}{0{,}175}} = 8{,}37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Cuando actúa una fuerza de rozamiento, una parte de la energía potencial elástica inicial debe emplearse en vencer esta fuerza de rozamiento:

$$E_{p_{máx}} + W_{roz} = E_c$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - F_{roz} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando y sustituyendo valores, la velocidad del objeto resulta:

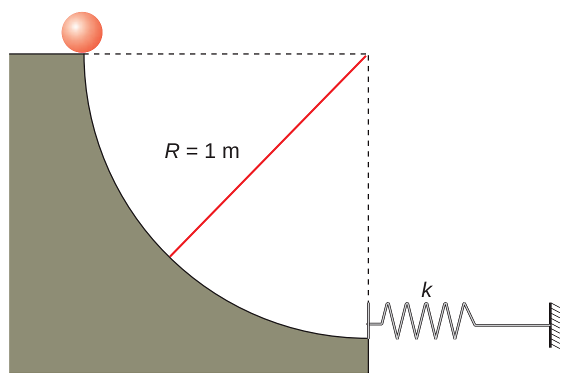
$$v^2 = \frac{k}{m} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot F_{roz}}{m} \cdot x \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot F_{roz}}{m} \cdot x}$$

$$v = \sqrt{\frac{2500}{0,175} \cdot 0,07^2 - \frac{2 \cdot 56}{0,175} \cdot 0,07} = 5,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Como vemos, la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento hace disminuir la velocidad del objeto.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

29 **Una masa de 5 kg comienza a caer, sin rozamiento, por el plano de la figura.**



Cuando llega al final, golpea el resorte, llegando a comprimirlo 5 cm. Calcula:

a) La constante elástica del resorte.

b) El período de las oscilaciones que describe el muelle al ser golpeado.

a) Cuando la bola, que está en lo alto del plano, llega hasta el muelle, transmite toda la energía potencial que tenía arriba en forma de energía potencial gravitatoria. El balance energético podemos expresarlo como:

$$\Delta E_{pot.\ gravitatoria} = \Delta E_{pot.\ elástica} \rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Si despejamos la constante elástica del resorte, resulta:

$$k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot R}{x^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9,8 \cdot 1}{0,05^2} = 39\,200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Suponiendo que la masa del muelle es despreciable frente a la de 5 kg, y que esta queda "pegada" al resorte, que no se dobla, el período de las oscilaciones se calcula directamente a partir de la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5}{39\,200}} = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

30. Una partícula se mueve con movimiento armónico simple. En el instante inicial se encuentra a 10 cm de su posición de equilibrio, que es la que ocupa cuando se encuentra en reposo. Si su frecuencia de vibración es 40 Hz, calcula la ecuación de la posición, la ecuación de la velocidad y la ecuación de la aceleración del movimiento.

La ecuación de la posición de un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Los 10 cm de separación, respecto al reposo, son la amplitud del movimiento. Por tanto, si en $t = 0$ se encuentra en su máxima elongación:

$$x(0) = A \cdot sen\ (\omega \cdot 0 + \varphi) = A \rightarrow sen\ \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, recuerda que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 80 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$x = 0,1 \cdot sen\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si derivamos la ecuación de la posición respecto al tiempo, obtenemos la de la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot \pi \cdot cos\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando la expresión anterior, obtenemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = -640 \cdot \pi^2 \cdot sen\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

31. Un cuerpo de 300 g se mueve con movimiento armónico simple, siendo su frecuencia angular 15 rad/s. Si la amplitud con que se mueve vale 6 cm, calcula:

a) La constante elástica.

b) La energía potencial que almacena.

c) La velocidad máxima.

a) La constante elástica se puede determinar a partir de la masa y de la frecuencia angular del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 \cdot m = 15^2 \cdot 0,3 = 67,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) En un m.a.s., la energía mecánica viene dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 0,06^2 \cdot 15^2 = 0,12 \text{ J}$$

Este valor coincide con la energía potencial máxima de un m.a.s., que se alcanza en los puntos en los que la elongación es máxima y la energía cinética es nula.

c) La ecuación de la velocidad en un m.a.s. es:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Cuando la velocidad sea máxima, el coseno valdrá 1. Por tanto:

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

$$v_{máx} = 0{,}06 \cdot 15 = 0{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

32. Una persona carga el maletero de un coche con 50 kg de paquetes. Ello hace que descienda el centro de gravedad del vehículo 0,4 cm. Calcula:

a) La constante elástica de los muelles amortiguadores del coche.

b) El período de vibración si se retiran los paquetes del automóvil.

c) El período de vibración cuando los paquetes están dentro del coche.

d) La frecuencia angular del movimiento armónico en ambos casos.

a) La constante elástica de los muelles se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley de Hooke el valor de la fuerza que comprime los amortiguadores, que es el peso de los paquetes:

$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{50 \cdot 9{,}8}{0{,}004} = 122\,500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Al quitar las maletas, la masa que permanece vibrando es solo la del automóvil. Como no nos dan la masa del coche, supondremos que se trata de un utilitario pequeño, de, aproximadamente, 700 kg de masa. Por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_{coche}}{k}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{700}{122\,500}} = 0{,}475 \text{ s}$$

c) En el caso contrario, al añadir las maletas, la masa que vibra es mayor. En ese caso, el período resulta:

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_{coche} + m_{maleta}}{k}}$$

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{700 + 50}{122\,500}} = 0{,}492 \text{ s}$$

d) De la relación entre el período y la frecuencia angular deducimos el valor de esta última para cada uno de los casos analizados en el problema:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}475} = 13{,}23 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega' = \frac{2 \cdot \pi}{T'} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}492} = 12{,}78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

33. La expresión que permite calcular el período del péndulo simple es:

$$\boldsymbol{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

En dicha expresión, *l* es su longitud. Calcula la expresión que proporciona la velocidad del m.a.s. correspondiente, sabiendo que su amplitud es 5 cm, y la longitud del péndulo, 0,98 m.

Teniendo en cuenta la longitud del péndulo, podemos calcular el período y, en consecuencia, la frecuencia angular del movimiento:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,98}{9,8}} = 1,987 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{1,987} = 3,16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Sabemos que la ecuación general de la velocidad de un m.a.s. es:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Luego, suponiendo la fase inicial nula (no se indica nada al respecto) e identificando componentes:

$$v = 0,05 \cdot 3,16 \cdot cos\ (3,16 \cdot t + 0) = 0,158 \cdot cos\ (3,16 \cdot t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34. Una partícula se mueve con un m.a.s. de 0,1 m de amplitud y 40 Hz de frecuencia. Calcula la velocidad de dicha partícula cuando pasa por la posición *x* = 0,05 m, medida desde su posición de equilibrio.

Para determinar la posición, necesitamos conocer la frecuencia angular, que se obtiene a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 80 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La fase inicial la supondremos nula, pues no se indica nada al respecto. De este modo, resulta:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t) = 0,1 \cdot sen\ (80 \cdot \pi \cdot t)$$

Para calcular la velocidad de la partícula, hemos de saber, en primer lugar, el intante en que ocupa la posición $x = 0,005$ m. Si despejamos de la ecuación de la elongación, resulta:

$$x(t) = 0,1 \cdot sen\ (80 \cdot \pi \cdot t) = 0,05 \rightarrow sen\ (80 \cdot \pi \cdot t) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 80 \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{1}{6 \cdot 80} \text{ s}$$

Si derivamos la ecuación de la posición y sustituimos, obtenemos la velocidad de la partícula en función del tiempo:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t) \rightarrow v(t) = 8 \cdot \pi \cdot cos\ (80 \cdot \pi \cdot t)$$

En el instante en que la partícula se encuentra en x = 0,05 m, su velocidad es:

$$v\left(t = \frac{1}{6 \cdot 80}\right) = 8 \cdot \pi \cdot cos\left(80 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6 \cdot 80}\right) =$$
$$= 8 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} = 21,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

35 Sobre una partícula, de 200 g de masa, actúa una fuerza elástica $F = -20 \cdot x$, siendo x la distancia desde la posición de equilibrio. Desplazamos la partícula 10 cm de dicha posición de equilibrio y la dejamos en libertad. Calcula:

a) La frecuencia angular, el período y la frecuencia del m.a.s. que describe la partícula.

b) La energía que posee la partícula.

a) La expresión de la ley de Hooke proporciona la constante elástica, de la que deducimos las magnitudes que nos piden:

$$F = -k \cdot x \rightarrow k = \frac{|F|}{|x|} = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 0,2 \cdot \pi = 0,628 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,628} = 1,592 \text{ Hz}$$

b) La energía mecánica de la partícula es:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1^2 \cdot 10^2 = 0,1 \text{ J}$$

36. Si colgamos una masa, *m*, de un muelle de constante elástica *k* y hacemos oscilar verticalmente el sistema que se forma, el movimiento que describe la masa es armónico simple.

Para comprobarlo, hemos colgado de un muelle de constante *k*, desconocida, un masa variable. Haciendo oscilar el conjunto, los períodos obtenidos han sido los reflejados en la tabla de la derecha.

Con los datos anteriores, confecciona un gráfica que muestre cómo varía el período, en función de la masa suspendida del muelle. ¿Qué forma tiene la curva? ¿Podemos obtener alguna conclusión?

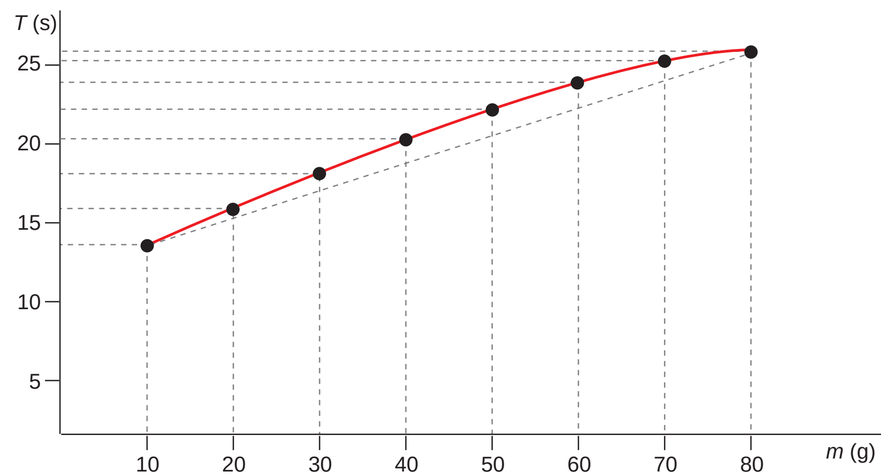
Masa (g)	Período (s)
10,00 ± 0,01	14,03 ± 0,03
20,00 ± 0,01	16,34 ± 0,03
30,00 ± 0,01	18,57 ± 0,03
40,00 ± 0,01	20,68 ± 0,05
50,00 ± 0,01	22,38 ± 0,01
60,00 ± 0,01	24,01 ± 0,04
70,00 ± 0,01	25,45 ± 0,03
80,00 ± 0,01	26,81 ± 0,07

Confecciona otra gráfica que muestre la relación que existe entre la masa y el cuadrado del período. ¿Encuentras ahora alguna relación?

Calcula, con los datos anteriores, el valor que corresponde a la constante elástica del muelle y el error con que viene afectado dicho valor. Justifica el proceso analítico que sigues.

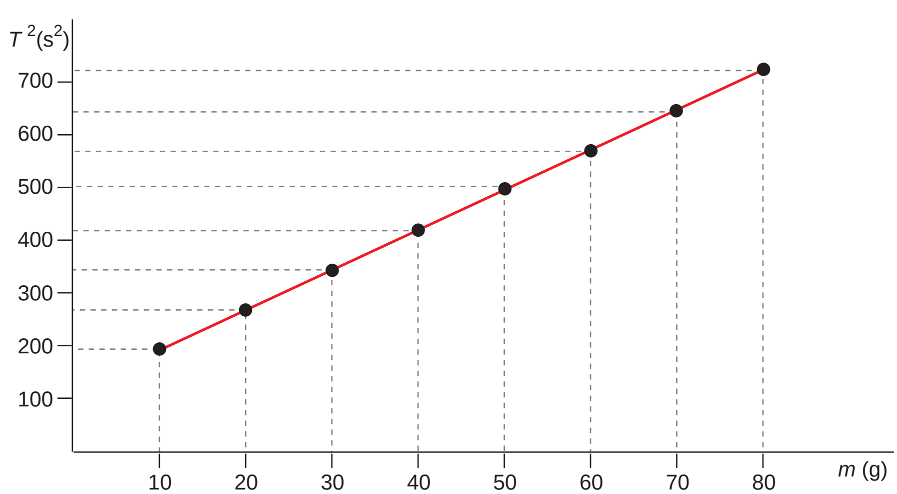
NOTA: Consulta, si lo necesitas, el apéndice sobre cálculo de errores que se incluye en el CD.

Al representar en una gráfica los resultados que se muestran en la tabla, obtenemos:



En la gráfica se puede observar que cuanto mayor es la masa que cuelga, mayor es el período de las oscilaciones. Sin embargo, la relación entre ambas magnitudes no es lineal; la pendiente de la curva no es constante.

La gráfica que muestra la relación entre la masa y el cuadrado del período es la siguiente:



En ella vemos que la relación entre ambas magnitudes es lineal. La masa es, por tanto, directamente proporcional al cuadrado del período.

En un m.a.s., el período y la masa están relacionados por medio de la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si en esta expresión despejamos el cuadrado del período, obtenemos:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \cdot m = \text{cte} \cdot m$$

La constante que aparece en la expresión anterior es la pendiente de la gráfica T^2-m:

$$\text{cte} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{m_1 - m_2} = \frac{500{,}9 - 196{,}8}{(50 - 10) \cdot 10^{-3}} = 7\,602{,}5$$

Teniendo en cuenta este resultado, podemos calcular la constante elástica del muelle:

$$\text{cte} = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4 \cdot \pi^2}{\text{cte}} = \frac{4 \cdot \pi^2}{7\,602{,}5} = 5{,}19 \cdot 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

NOTA: Dependiendo del par de puntos que hayamos tomado para calcular la pendiente, su valor puede variar ligeramente, haciéndolo también el valor que asignamos a la constante elástica del muelle. La realización del cálculo de errores correspondiente se puede hacer si el profesor o profesora lo estima procedente.

5 MOVIMIENTO ONDULATORIO

5.1. EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Indica cómo podemos comprobar que, cuando una onda se propaga por una cuerda, hay transporte de energía, pero no transporte de materia.

Un procedimiento sencillo puede ser dibujar marcas, a intervalos regulares, en la cuerda tensa. Se observa que, al sacudir transversalmente la cuerda, los puntos marcados oscilan alrededor de la posición de equilibrio, pero no se desplazan en la dirección de propagación de la onda.

2. Cita cuatro movimientos, al menos, que se produzcan en la naturaleza y sean de tipo ondulatorio. Clasifica cada uno de dichos movimientos según los criterios indicados en el epígrafe.

Algunos ejemplos de movimientos, clasificados en función de la dirección de propagación, son los siguientes:

- Unidimensionales: la vibración de una cuerda de guitarra al pulsarla o la de un muelle que describe un m.a.s.
- Bidimensionales: las ondas que se crean en la superficie de un vaso cuando golpeamos el vidrio con el dedo, las que se generan en el tímpano o en un tambor y las que se generan en una cubeta de ondas.
- Tridimensionales: la propagación de ondas de radio en el aire al ser emitidas por una antena; el sonido emitido por un instrumento musical cuando se propaga por el aire o la propagación de la luz en el vacío.

En función de la forma en que se transmite la perturbación, las ondas anteriores se clasifican como se muestra en la siguiente tabla:

Onda longitudinal	Onda transversal
Sonido emitido por un instrumento musical.	Vibración de una cuerda de guitarra.
Vibración de un muelle que describe un m.a.s.	Propagación de ondas de radio en el aire.
	Propagación de la luz en el vacío.
	Ondas en la superficie de un vaso.
	Cubeta de ondas.
	Ondas en el tímpano o en un tambor.

La naturaleza de estas ondas es mecánica, excepto la que corresponde a la propagación de las ondas de radio en el aire y a la luz en el vacío, que es electromagnética.

3. El sonido y la luz son dos ejemplos de propagación ondulatoria. ¿Qué semejanzas y qué diferencias existen entre estos dos tipos de onda?

Las semejanzas y las diferencias son las que se indican a continuación:

Semejanzas

- Ambas son ondas tridimensionales; se propagan en las tres direcciones del espacio.
- Ambas pueden ser planas o esféricas, dependiendo de la distancia a la que nos encontremos del foco.

Diferencias

- El sonido es una onda de naturaleza mecánica: solo se propaga por un medio material. En cambio, la luz es una onda no mecánica, que también se propaga por el vacío. Prueba de ello es que somos capaces de observar las estrellas.
- La luz se propaga mediante ondas transversales. En cambio, el sonido se propaga mediante ondas longitudinales.

5.2. MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Determina la ecuación de dimensiones que corresponde a la frecuencia.

Por su definición, la frecuencia es la inversa del período, el cual se mide en segundos. Por tanto:

$$[f] = \left[\frac{1}{T}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{-1}$$

2. Una onda se propaga por una cuerda con una velocidad de 40 m · s^{-1} y cada onda completa ocupa 25 cm. Calcula:

a) La frecuencia de la oscilación.

b) La longitud de onda que corresponderá al movimiento ondulatorio si la onda pasa a otra cuerda, unida a la primera, en la que la velocidad de propagación es la mitad.

a) Si tenemos en cuenta la relación entre la velocidad de propagación, la longitud de onda y la frecuencia:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Y de acuerdo con los datos que proporciona el enunciado obtenemos, al sustituir:

$$f = \frac{40}{0,25} = 160 \text{ Hz}$$

b) Como se explica en el ejemplo de este epígrafe en el libro del alumno, la frecuencia es una magnitud propia del movimiento ondulatorio y es independiente de las características del medio. Por tanto, si la onda pasa a otra cuerda en la que la velocidad de propagación es la mitad ($20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), la longitud de onda del movimiento ondulatorio será:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20}{160} = 0{,}125 \text{ m}$$

3. La longitud de onda de los sonidos que podemos percibir oscila entre 1,7 cm y 17 m. Calcula la frecuencias que corresponde a cada una de estas longitudes de onda, si la velocidad de propagación del sonido en el aire es, aproximadamente, $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Si tenemos en cuenta la relación entre la frecuencia, la velocidad de propagación y la longitud de onda del movimiento ondulatorio:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

La frecuencia que corresponde a un sonido de longitud de onda 1,7 cm es:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340}{1{,}7 \cdot 10^{-2}} = 20\,000 \text{ Hz}$$

Y la que corresponde al sonido de 17 m de longitud de onda:

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340}{17} = 20 \text{ Hz}$$

Por tanto, el intervalo de frecuencias de ondas sonoras audibles por un oído humano sano oscila entre 20 Hz y 20 000 Hz. Sobre esto profundizaremos en la unidad 6, cuando estudiemos la propagación del sonido.

4. Las frecuencias que corresponden a las ondas que forman la zona visible del espectro oscilan entre $7{,}9 \cdot 10^{14}$ Hz (violeta) y $4{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz (rojo). Calcula el correspondiente intervalo de longitudes de onda. Recuerda que estas ondas se mueven a la velocidad de la luz.

A partir de la expresión que relaciona la longitud de onda con la frecuencia y la velocidad de propagación:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Se obtiene, teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$):

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}9 \cdot 10^{14}} = 3{,}80 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{4{,}0 \cdot 10^{14}} = 7{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

5.3. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Expresa la velocidad de propagación de la onda en función de la frecuencia angular y del número de onda.

La velocidad de propagación de la onda se expresa, en función del período y la frecuencia, como se indica:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia angular, la frecuencia y el período, se obtiene:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \; ; f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

Por tanto:

$$v = \frac{\lambda \cdot \omega}{2 \cdot \pi}$$

El número de onda es el número de longitudes de onda que contiene una longitud $2 \cdot \pi$:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

La velocidad de propagación en función del número de onda es:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

2. De una onda que viaja por una cuerda, se conocen los siguientes datos: $A = 3$ cm; $v = 5$ m · s^{-1}; $f = 20$ Hz.

Escribe la ecuación de la onda en función de la posición y del tiempo: $y = f(x, t)$.

La ecuación de propagación de una onda unidimensional se puede escribir como sigue:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

En el caso que nos ocupa:

$$A = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{5} = 8 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$y\,(x, t) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t - 8 \cdot \pi \cdot x) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot sen\,[8 \cdot \pi \cdot (5 \cdot t - x)]$$

En la expresión anterior, x e y se miden en metros si t se mide en segundos.

3. **La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:**

$$y = 0{,}02 \cdot sen\,[\pi \cdot (50 \cdot t - 2 \cdot x)]$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en metros si *t* se mide en segundos. Calcula la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda, así como su frecuencia de vibración.

Si comparamos la ecuación de la onda que propone el enunciado:

$$y = 0{,}02 \cdot sen\,(50 \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional:

$$y\,(x,\,t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

e identificamos términos, se obtiene:

$$A = 0{,}02 \text{ m} \;\; ; \;\; \omega = 50 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \;\; ; \;\; k = 2 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

Teniendo en cuenta la definición de número de onda, podemos calcular la longitud de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1 \text{ m}$$

Por su parte, el período y la frecuencia de vibración del movimiento son:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{50 \cdot \pi} = 0{,}04 \text{ s} \;;\; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}04} = 25 \text{ Hz}$$

Y la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 1 \cdot 25 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. **Indica cuál de las expresiones siguientes representa la ecuación de una onda transversal que se propaga en sentido positivo por el eje de abscisas con una velocidad de 5 m/s, tiene una amplitud de 1 m y una frecuencia de 10 Hz:**

a) $y = cos\,[2 \cdot \pi\,(10 \cdot t - 5 \cdot x)]$

b) $y = cos\,[2 \cdot \pi\,(10 \cdot t + x)]$

c) $y = cos\,[4 \cdot \pi\,(5 \cdot t - x)]$

El sistema de referencia elegido para expresar las ecuaciones de onda del enunciado se ha tomado de tal modo que la vibración asociada al movimiento se propague en la dirección del eje *Y*, y la propagación, en la dirección del eje *X*. Cuando $x = 0$ y $t = 0$ (origen), el valor de la elongación es de 1 m.

La ecuación general de este movimiento ondulatorio es:

$$y\,(x,\,t) = A \cdot cos\,(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

El factor $(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$ se denomina fase del movimiento ondulatorio. El símbolo $\pm$ indica la posibilidad de que la perturbación se propague por el eje de abscisas en sentido positivo (signo –) o negativo (signo +). En el enunciado se indica que la onda se propaga en el sentido positivo del eje de abscisas; por tanto, la fase debe llevar signo negativo, con lo que la opción b) queda descartada.

Las ondas a) y c) tienen una amplitud de 1 m. La frecuencia angular que les corresponde es:

$$\omega_a = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 20 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_c = 4 \cdot \pi \cdot 5 = 20 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y su frecuencia de vibración es:

$$\omega_a = 2 \cdot \pi \cdot f_a \to f_a = \frac{\omega_a}{2 \cdot \pi} = \frac{20 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 10 \text{ Hz}$$

$$\omega_c = 2 \cdot \pi \cdot f_c \to f_c = \frac{\omega_c}{2 \cdot \pi} = \frac{20 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 10 \text{ Hz}$$

Para calcular la velocidad de propagación que les corresponde:

$$v = \lambda \cdot f$$

hemos de calcular primero la longitud de onda de cada una, que podemos obtener a partir del número de onda, k:

$$k_a = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_a} \to \lambda_a = \frac{2 \cdot \pi}{k_a} = \frac{2 \cdot \pi}{5 \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{1}{5} \text{ m}^{-1}$$

$$k_c = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_c} \to \lambda_c = \frac{2 \cdot \pi}{k_c} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{2} \text{ m}^{-1}$$

Por tanto, la velocidad de propagación es:

$$v_a = \lambda_a \cdot f_a = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_c = \lambda_c \cdot f_c = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La ecuación que representa una onda con las características descritas por el enunciado es la **c).**

5. Dada la ecuación de onda:

$$\boldsymbol{y\,(x,\,t) = 0{,}04 \cdot sen\,[\pi \cdot (x - t)]}$$

Calcula la distancia que separa dos puntos que se encuentren en fase y la que separa otros dos que se encuentren en oposición de fase.

Dos puntos consecutivos están en fase si, en un instante dado, su diferencia de fase, $\Delta\varphi$, es $2 \cdot \pi$ radianes. Por tanto:

$$\Delta\varphi = \pi \cdot [(x - t) - (x' - t)] = 2 \cdot \pi \to x - x' = 2 \text{ m}$$

Dos puntos consecutivos se encuentran en oposición de fase si, en un instante dado, su diferencia de fase es π radianes. Por tanto:

$$\Delta\varphi = \pi \cdot [(x - t) - (x' - t)] = \pi \to x - x' = 1 \text{ m}$$

5.4. ENERGÍA E INTENSIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. **Calcula el coeficiente de absorción de un material que, con un espesor de 20 cm, reduce a la décima parte la intensidad de una onda sonora.**

   El coeficiente de absorción, β, de un material podemos calcularlo a partir de la expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

   Sabemos que, tras pasar por un material cuyo espesor es 20 cm, la relación entre las intensidades de entrada y de salida es: $I = 0{,}1 \cdot I_0$. Por tanto:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \rightarrow \beta = \frac{ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{-x} = \frac{ln\left(\frac{0{,}1 \cdot I_0}{I_0}\right)}{-0{,}2} = -\frac{ln 0{,}1}{0{,}2} = 11{,}51 \text{ m}^{-1}$$

2. **Un foco emite ondas amortiguadas, cuya amplitud viene dada por la expresión:**

$$\boldsymbol{A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}}}$$

   En esta expresión, β es el coeficiente de absorción del medio por el que las ondas se propagan, siendo su valor 0,1 m^{-1}.

   Si a una distancia de 5 m del foco la amplitud del movimiento de las partículas que vibran es 0,3 mm, calcula la amplitud del movimiento ondulatorio que describen las partículas que se encuentran a una distancia de 20 m del foco.

   Con los datos que proporciona el enunciado de la actividad podemos calcular la amplitud inicial del movimiento ondulatorio, A_0.

$$A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}} \rightarrow A_0 = A \cdot x \cdot e^{-\beta \cdot x} = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 5} = 9{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}91 \text{ mm}$$

   A una distancia de 20 m del foco, la amplitud del movimiento de las partículas será:

$$A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20}} = 3{,}36 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

5.5. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. INTERFERENCIAS

1. **Dos ondas de la misma *f*, λ y *A* se mueven en la misma dirección y sentido. Calcula la amplitud de la onda resultante, sabiendo que la amplitud de las ondas es 0,4 cm y su diferencia de fase, es π/2 radianes.**

   La expresión que proporciona la amplitud de la onda resultante es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

La amplitud de ambas ondas es la misma, $A_1 = A_2 = A_0$; por tanto:

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2 \cdot A_0^2 \cdot cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2 \cdot A_0^2 \cdot [1 + cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

Sustituyendo los datos que proporciona el enunciado se obtiene:

$$A = \sqrt{2 \cdot 0,4^2 \cdot (1 + cos\ \pi/2)} = \sqrt{2 \cdot 0,4^2} = 0,57 \text{ cm}$$

2. Dos focos sonoros emiten ondas de la misma frecuencia, 100 Hz, y amplitud, 4 cm. Las distancias a un punto *P* son, respectivamente, x_1 = 100 m y x_2 = 103,4 m. Si v_{sonido} (aire) = 340 m · s^{-1}, calcula:

a) La ecuación de la onda que produce en el punto *P* cada foco por separado.

b) La ecuación de la onda resultante de la interferencia en dicho punto.

a) Las magnitudes características de estos movimientos ondulatorios son:

$f = 100 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 200 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$A = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$

$v = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v \cdot T = 340 \cdot 0,01 = 3,4 \text{ m}$

$k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot \pi}{3,4} = 0,59 \cdot \pi$

Si tenemos en cuenta la ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional:

$$\chi\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Obtenemos, para cada onda:

$$\chi_1\ (100,\ t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t - 0,59 \cdot \pi \cdot 100) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [\pi \cdot (200 \cdot t - 59)] = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_1)$$

$$\chi_2\ (103,4,\ t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t - 0,59 \cdot \pi \cdot 103,4) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [\pi \cdot (200 \cdot t - 61)] = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_2)$$

En estas ecuaciones, *x* se mide en metros si *t* se expresa en segundos.

b) De acuerdo con el principio de superposición, el movimiento resultante de los dos movimientos anteriores es su suma:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2$$

El resultado que se obtiene es otro movimiento ondulatorio armónico:

$$\chi = A_R \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_0)$$

donde:

$$A_R = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A^2 \cdot cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2 \cdot A^2 \cdot 1 + [cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)]} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot [1 + cos\ (-59 \cdot \pi + 61 \cdot \pi)]} = 0,08\ \text{m}$$
$$\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = -59 \cdot \pi + 61 \cdot \pi = 2 \cdot \pi$$

Por tanto, la ecuación de la onda resultante de la interferencia en el punto P es:

$$\chi = 0,08 \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot \pi) = 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t + 1)]$$

5.6. ONDAS ESTACIONARIAS

1. Calcula la distancia que separa dos vientres consecutivos de una onda armónica.

La condición que cumplen los vientres de la onda es:

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que separa dos vientres consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} - 1 \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

2. Calcula la distancia que separa dos nodos consecutivos de una onda armónica.

La condición que cumplen los nodos de la onda es:

$$x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que separa dos nodos consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} - (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = (5 - 3) \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

3. En una onda armónica, calcula la distancia que separa un nodo del vientre que le antecede o que le precede.

Como hemos visto en las dos actividades anteriores, la distancia entre dos nodos o entre dos vientres es $\lambda/2$. Por tanto, la distancia entre un nodo y un vientre es la mitad, $\lambda/4$.

Fíjate en las figuras y fotografías de la página 123 del libro.

4. A la vista de los resultados de las tres actividades anteriores, ¿qué conclusiones se pueden obtener?

Además de los resultados obtenidos en dichas actividades, la conclusión más importante que se obtiene es que la longitud de onda no puede tomar cualquier valor. Es una magnitud cuantizada, cuyo valor viene determinado por el de n.

5.7. DIFRACCIÓN

1. ¿Qué significa la expresión "propagación no rectilínea del rayo"?

La expresión alude al fenómeno físico de la difracción, que se produce cuando en la propagación de una onda se interpone un obstáculo o una rendija de tamaño comparable a su longitud de onda.

Este fenómeno no se puede explicar considerando la propagación rectilínea del movimiento ondulatorio, pero sí al tener en cuenta el principio de Huygens, según el cual cada punto del medio alcanzado por el movimiento ondulatorio se convierte a su vez en foco emisor.

2. Investiga qué significa la expresión "difracción de electrones".

La difracción de electrones demuestra el comportamiento ondulatorio de las partículas materiales; en este caso, de los electrones.

Esta experiencia fue realizada en 1927 por Davisson y Germer, que dispersaron electrones en la superficie de un cristal metálico, como si se tratase de ondas electromagnéticas.

5.8. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

1. Comprueba el cambio de fase que se produce en la reflexión. Utiliza para ello un muelle o una cuerda fijos por un extremo y haz que viaje por él un pulso de onda.

2. Comprueba el fenómeno de la refracción experimentalmente y de forma cualitativa. Utiliza para ello dos cuerdas unidas, una ligera y otra más pesada, por las que viaja un pulso de onda.

Ambas actividades son experiencias prácticas cuya realización recomendamos en el aula.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Responde verdadero o falso a las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

a) En un movimiento ondulatorio, el número de onda equivale a la frecuencia.

b) Cuando un pulso de onda, que se mueve por una cuerda fija por un extremo, llega a ese extremo, puede reflejarse y/o invertirse.

c) Cada partícula de una cuerda por la que se propaga un tren de ondas realiza un movimiento vibratorio armónico.

a) **Falsa.** La frecuencia, *f*, es el número de oscilaciones que se producen en un segundo. Por su parte, el número de onda, *k*, es el número de longitudes de onda que contiene una longitud $2 \cdot \pi$.

b) **Falsa.** Cuando un pulso de onda que se mueve por una cuerda que tiene un extremo fijo, alcanza ese extremo, se refleja e invierte. De ese modo se genera el pulso reflejado, que saldrá invertido respecto al pulso incidente.

c) **Verdadera.** Cada partícula de la cuerda alcanzada por la perturbación vibra alrededor de su posición de equilibrio, reproduciendo la vibración original del punto inicialmente perturbado.

2. Haz una clasificación de los movimientos ondulatorios atendiendo a los siguientes criterios:

a) Necesidad o no de medio material para propagarse.

b) Relación entre las direcciones de propagación y de vibración de las partículas del medio.

c) Forma del frente de onda.

Pon ejemplos aclaratorios en cada supuesto.

a) Atendiendo a su naturaleza, las ondas pueden ser mecánicas o electromagnéticas. Las primeras, como el sonido o la perturbación que se transmite por una cuerda, necesitan un medio material para propagarse; las segundas, por el contrario, no lo necesitan; es el caso, por ejemplo, de la propagación de la luz, que es una onda electromagnética.

b) Según la forma en que se transmite la perturbación, las ondas se clasifican en:

- Longitudinales, si la dirección de propagación coincide con la dirección de vibración de las partículas del medio. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el sonido.

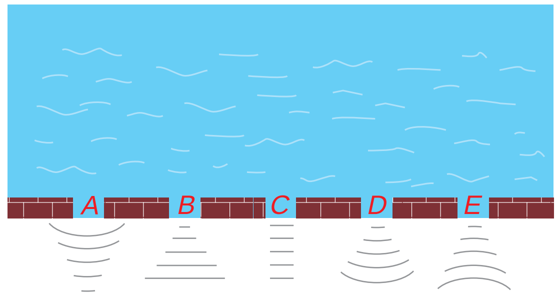
- Transversales, si la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de vibración. Las ondas electromagnéticas son transversales, al igual que las que se propagan por una cuerda.

c) Según la dirección de propagación, las ondas se clasifican en unidimensionales, como las que se propagan por una cuerda tensa; bidimensionales, como las que se propagan por la superficie de un estanque, y tridimensionales, como las ondas sonoras propagándose en el aire.

En las primeras, el frente de onda es un punto; en las segundas, una circunferencia o una línea recta (a una cierta distancia de la perturbación el frente de onda se puede considerar prácticamente lineal), y en las terceras, el frente de onda es una esfera (en puntos lejanos la curvatura disminuye, por lo que el frente de onda se puede considerar plano).

NOTA: Recomendamos la realización de experiencias en la cubeta de ondas, donde se pueden generar y visualizar distintos tipos de fenómenos asociados a ellas.

3. Un frente de olas planas llega al muro de un puerto y pasa a través de él. ¿Qué figura muestra mejor la evolución de las olas?



Estamos ante un caso de difracción. La difracción se produce cuando un obstáculo impide el avance de parte de un frente de onda. Si la longitud de onda de la perturbación es comparable con el tamaño del obstáculo, los puntos del frente de onda que no chocan con el obstáculo se convierten, de acuerdo con el principio de Huygens, en centros emisores de nuevos frentes de ondas. De ese modo, se genera un frente de ondas esféricas, con centro en la parte libre del obstáculo, que explica que la onda se propague por detrás de él.

La respuesta correcta es, por tanto, **D,** a no ser que la abertura sea mucho mayor que la longitud de onda de la vibración, en cuyo caso la respuesta correcta sería **C.**

4. Cuando la luz pasa de un medio a otro, se modifica su velocidad y su longitud de onda. ¿Se modifica también su frecuencia?

No. La frecuencia es una magnitud propia del movimiento ondulatorio y es independiente de las características del medio.

5. Al alejarnos de un foco puntual emisor de ondas esféricas, la intensidad de dicha onda va disminuyendo. ¿Quiere esto decir que no se cumple el principio de conservación de la energía?

La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que nos encontramos del foco. La onda no se propaga indefinidamente, ya que a una distancia suficientemente alejada del foco llega tan debilitada que puede resultar inapreciable. Este fenómeno se denomina atenuación de la onda, cuya energía, en el caso de una onda esférica, ha de repartirse en superficies cada vez más grandes a medida que nos alejamos del foco.

Además de este fenómeno, existe otro, la absorción, por el que parte de la energía que transporta la onda es absorbida por el medio material por el que se propaga, debido al rozamiento.

Estos dos fenómenos, atenuación y absorción, explican por qué la intensidad de la onda va disminuyendo a medida que nos alejamos del foco emisor. Por tanto, sí se cumple el principio de conservación de la energía.

6. ¿Qué es la intensidad de un movimiento ondulatorio? ¿Cómo depende de la amplitud?

La intensidad de una onda es la relación entre la potencia que propaga la onda y la superficie perpendicular a la dirección de propagación de esta:

$$I = \frac{P}{S}$$

Para cualquier tipo de onda:

$$I = \frac{cte \cdot \omega^2 \cdot A^2}{S}$$

Por tanto, la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, A, y al cuadrado de la frecuencia angular, ω.

7. ¿Cómo varían con la distancia al foco la intensidad y la amplitud de las ondas esféricas?

La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que nos encontramos del foco:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Por su parte, la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la distancia al foco:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

8. Explica brevemente en qué consisten los fenómenos de atenuación y de absorción de una onda.

Consúltese la cuestión 5 o las páginas 115 y 116 del libro del alumno.

9. Explica qué son las interferencias entre dos frentes de onda. ¿Por qué no hay interferencias entre los dos haces de luz procedentes de los faros de un coche?

La interferencia de ondas es la acción simultánea, sobre una partícula, de dos o más movimientos ondulatorios.

En el caso de los haces de luz que proceden de los faros de un coche no se producen interferencias, ya que la diferencia de fase entre los dos haces no es constante, sino que depende del tiempo; decimos en este caso que las fuentes son incoherentes.

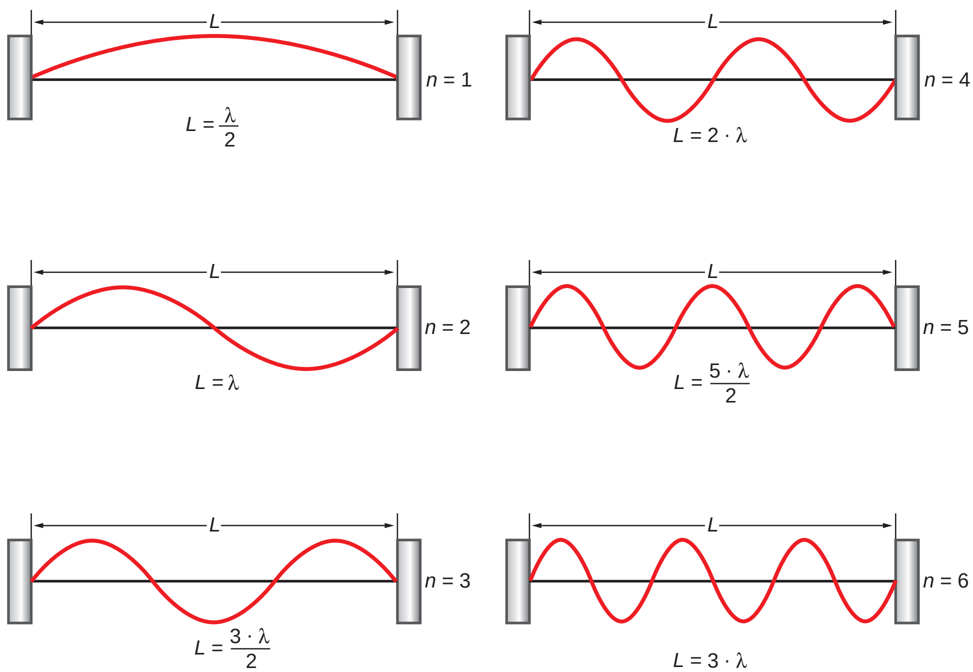
10. ¿Qué diferencia existe entre una onda viajera y una onda estacionaria?

Una onda estacionaria, a diferencia de una onda viajera, no propaga energía. En ella existen puntos que no vibran (nodos), otros que vibran con la amplitud máxima (vientres) y otros que vibran con amplitudes intermedias. En una onda viajera todos los puntos vibran del mismo modo.

11. Dibuja las seis primeras ondas estacionarias producidas en una cuerda, fija por ambos extremos, de longitud *L*. A la vista de las gráficas, deduce la relación que ha de existir entre la longitud de la cuerda y la longitud de onda del

movimiento ondulatorio que se propaga por ella para que se produzcan ondas estacionarias.

Las gráficas que solicita el enunciado de la cuestión son las que se muestran:



A partir de ellas se puede deducir que la expresión que relaciona la longitud de la cuerda con la longitud de onda de las ondas estacionarias que se generan en ella es:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \ (n = 1, 2, 3...)$$

12. Enuncia el principio de Huygens. Utilízalo para explicar el fenómeno de la difracción de una onda a través de una rendija de longitud *d*. Acompaña la explicación de algún dibujo.

La difracción es el fenómeno de propagación no rectilínea de un rayo, que se produce cuando en la propagación de una onda se interpone un obstáculo (rendija) de tamaño comparable a su longitud de onda, λ, y se manifiesta porque el rayo no se propaga rectilíneamente.

Este fenómeno no se puede explicar considerando la propagación rectilínea del movimiento ondulatorio, pero sí al tener en cuenta el principio de Huygens, según el cual cada punto del medio alcanzado por el movimiento ondulatorio se convierte a su vez en foco emisor.

Como documentación gráfica, consúltense las imágenes incluidas en la página 125 del libro del alumno.

13. Explica qué se entiende por difracción y en qué condiciones se produce.

Consúltese la respuesta a la actividad anterior.

14. Explica los fenómenos de reflexión y de refracción de una onda, y las leyes que los rigen. De las siguientes magnitudes, v, λ, f y T, indica cuáles varían y cuáles no.

La reflexión es el fenómeno que se produce cuando una onda que avanza por un medio incide sobre la superficie que lo separa de otro medio de propiedades elásticas distintas. Como consecuencia de ello, se produce un cambio en la dirección y sentido de propagación. Las leyes que rigen este fenómeno físico, denominadas leyes de Snell para la reflexión, son las siguientes:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.
- Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda que se propaga por un medio cuando pasa a otro medio en el que su velocidad de propagación es diferente. La ley de Snell para la refracción es la siguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}}$$

En ella, $\hat{i}$ es el ángulo de incidencia; $\hat{r}$, el de refracción, y v_1 y v_2, la velocidad de propagación de la onda en cada medio.

Al producirse cualquiera de estos fenómenos, la frecuencia, f, no varía, ya que esta es una magnitud propia del movimiento ondulatorio.

El período, al ser la inversa de la frecuencia, tampoco varía:

$$T = \frac{1}{f}$$

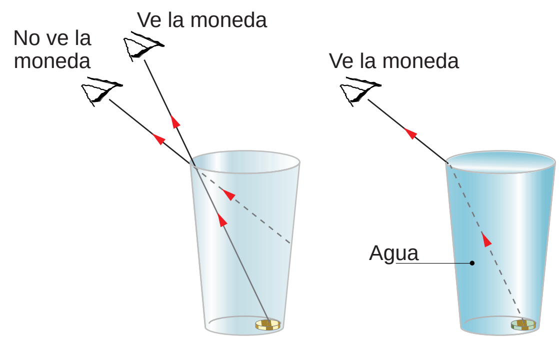
En la refracción se modifica la velocidad de propagación, ya que esta depende del medio por el que se propague el movimiento ondulatorio. La velocidad de propagación se relaciona con el período y la frecuencia mediante la longitud de onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Como la velocidad de propagación varía en la refracción y tanto la frecuencia como el período no lo hacen, la longitud de onda sí varía, de manera directamente proporcional a la velocidad de propagación.

15. Introducimos una moneda en un vaso y ajustamos nuestro ojo para verla enrasada exactamente. Hecho esto, bajamos la posición de nuestra cabeza hasta que la moneda deja de ser visible. Sin desplazar ahora la mirada, hacemos que alguien llene el vaso con agua. Al hacerlo, vemos de nuevo la moneda. ¿Puedes explicar el motivo de que ocurra esto?

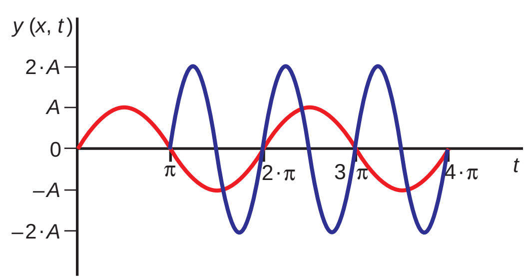
Que esto sea posible se debe al fenómeno de la refracción. Si llenamos el vaso de agua, el rayo de luz que, procedente de la moneda, llega al borde del vaso, en la superficie de separación agua-aire, cambia de dirección, alejándose de la normal, como se aprecia en la figura de la página siguiente. Este cambio de dirección hace posible que veamos la moneda.



EJERCICIOS

16. Dibuja en una misma gráfica dos ondas, de manera que una tenga doble amplitud que la primera, su frecuencia sea doble que la de la otra y presente un desfase de π radianes respecto a la primera.

La gráfica que solicita el enunciado del ejercicio es la siguiente:



17. La frecuencia de una nota musical es 440 Hz. Calcula la longitud de onda de su sonido cuando se propaga en el aire ($v = 340$ m/s) y cuando lo hace en el agua ($v = 1440$ m/s).

La expresión que relaciona la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación es:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia no varía cuando el movimiento ondulatorio cambia de medio, se obtienen los siguientes resultados:

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{f} = \frac{340}{440} = 0{,}77 \text{ m}$$

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{f} = \frac{1\,440}{440} = 3{,}27 \text{ m}$$

18. Dos ondas tienen la misma amplitud, siendo sus frecuencias respectivas 256 y 512 Hz. ¿Cuál posee mayor intensidad?

La intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, A, y al cuadrado de la frecuencia angular, ω. Como la amplitud de las ondas que describe el enunciado es la misma, poseerá más intensidad la onda de mayor frecuencia (512 Hz), ya que la frecuencia de vibración es directamente proporcional a la frecuencia angular:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

19. Por una cuerda tensa se transmiten simultáneamente dos ondas transversales cuyas ecuaciones, utilizando unidades S.I., son:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}04 \cdot sen\ (10 \cdot x - 600 \cdot t)}$$

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}04 \cdot sen\ (10 \cdot x + 600 \cdot t)}$$

Escribe la ecuación de la perturbación resultante que aparecerá en la cuerda.

Si comparamos las ecuaciones del enunciado con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Y realizando algunas sencillas operaciones, podemos determinar las magnitudes características de las ondas que interfieren:

$$A_1 = A_2 = A = 0{,}04 \text{ m}$$

$$k_1 = k_2 = k = 10 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{10} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ m}$$

$$\omega = 600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f_1 = f_2 = f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{600}{2 \cdot \pi} = \frac{300}{\pi} \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow T_1 = T_2 = T = \frac{1}{300/\pi} = \frac{\pi}{300} \text{ s}$$

Las ondas que interfieren tienen la misma amplitud, frecuencia, longitud de onda y naturaleza, y se propagan en la misma dirección y sentidos opuestos. Por tanto, el resultado de la interferencia es una onda estacionaria.

Para sumarlas hay que tener en cuenta la siguiente relación trigonométrica:

$$sen\ \alpha + sen\ \beta = 2 \cdot sen\ \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}$$

La ecuación de la perturbación producida por las ondas que interfieren es:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0{,}04\ sen\ \frac{10 \cdot x - 600 \cdot t + 10 \cdot x + 600 \cdot t}{2} \cdot$$

$$\cdot\ cos\ \frac{10 \cdot x - 600 \cdot t - 10 \cdot x - 600 \cdot t}{2} = 0{,}02\ sen\ (10 \cdot x)\ cos\ (-600 \cdot t) =$$

$$= A_R \cdot cos\ (-600 \cdot t) = A_R \cdot cos\ (600 \cdot \text{t})$$

En la expresión anterior, $A_R = 0{,}08\ sen \cdot (10 \cdot x)$ es la amplitud de la onda estacionaria, cuyo valor varía entre 0 (en los nodos) y 0,08 (en los vientres).

20. Una onda armónica se propaga en dirección *OX* y sentido positivo. Dicha onda tiene las siguientes características:

$$\boldsymbol{A = 25 \text{ cm} \ ; \ v_{propagación} = 2 \text{ m/s} \ ; \ k = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Escribe la ecuación que corresponde al movimiento ondulatorio.

La ecuación general de onda podemos escribirla en la forma:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

El número de onda permite calcular la longitud de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1 \text{ m}$$

Conocida la velocidad de propagación, podemos calcular la frecuencia y la frecuencia angular:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2}{1} = 2 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4 \cdot \pi \ \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

De ese modo, la ecuación de onda queda en la forma:

$$y(x,t) = 0{,}25 \cdot sen(4 \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot x) = 0{,}25 \cdot sen\ [2 \cdot \pi\ (2 \cdot t - x)]$$

21. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 8 \cdot sen\ [\pi \cdot (100 \cdot t - 8 \cdot x)]}$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en cm y *t* en segundos. Calcula el tiempo que tardará una onda en recorrer una distancia de 25 m.

Si comparamos la ecuación que proporciona el enunciado del ejercicio:

$$y\ (x,\ t) = 8 \cdot sen\ [\pi \cdot (100 \cdot t - 8 \cdot x)]$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Identificando términos y realizando algunas sencillas operaciones, podemos determinar las magnitudes características de la onda:

$A = 8$ cm

$$\omega = 100 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\ ;\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{100 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 50 \text{ Hz}\ ;\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s}$$

$$k = 8 \cdot \pi \ \text{ rad} \cdot \text{cm}^{-1}\ ;\ \ k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{8 \cdot \pi} = 0{,}25 \text{ m}$$

$$v = \lambda \cdot f = 0{,}25 \cdot 50 = 12{,}5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, el tiempo que tardará la onda en recorrer 25 m será:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{25}{0{,}125} = 200 \text{ s}$$

22. Se hace vibrar transversalmente un extremo de una cuerda de gran longitud con un período de 0,5 · π s y una amplitud de 0,2 cm, propagándose a través de ella una onda con una velocidad de 0,1 m · s^{-1}:

a) Escribe la ecuación de la onda.

b) Explica qué características de la onda cambian si:

– Se aumenta el período de vibración en el extremo de la cuerda.

– Se varía la tensión de la cuerda.

a) La ecuación general del movimiento ondulatorio que realiza una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de abscisas es:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

A partir de los datos que proporciona el enunciado del ejercicio podemos obtener las magnitudes características de la onda:

$A = 0{,}2$ cm

$T = 0{,}5 \cdot \pi \text{ s} \ ; f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}5 \cdot \pi} = \dfrac{2}{\pi} \text{ Hz}$

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{2}{\pi} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{0{,}1}{2/\pi} = 0{,}05 \cdot \pi \text{ m}$

$k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot \pi}{0{,}05 \cdot \pi} = 40 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$

Con todo ello, la ecuación que resulta es:

$$y(x,t) = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (4 \cdot t - 40 \cdot x) = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [4 \cdot (t - 10 \cdot x)]$$

b) Si aumentamos el período de vibración en el extremo de la cuerda:

– La frecuencia de vibración disminuirá, ya que esta es la inversa del período de vibración. La frecuencia angular disminuirá del mismo modo, al ser directamente proporcional a la frecuencia de vibración.

– Como no hay cambio de medio, la velocidad de propagación se mantendrá constante. Para que esto sea así, la longitud de onda debe aumentar en la misma proporción en que disminuye la frecuencia de vibración.

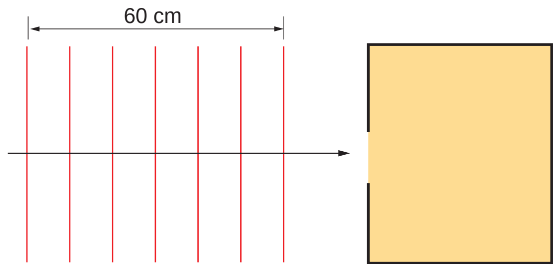
Para analizar que ocurre si se varía la tensión de la cuerda, recuerda que la velocidad de propagación de las ondas transversales producidas en una cuerda se corresponde con la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En ella, T es la tensión de la cuerda, expresada en *N,* y μ, su densidad lineal, expresada en kg/m.

Por tanto, si T varía, v también lo hace.

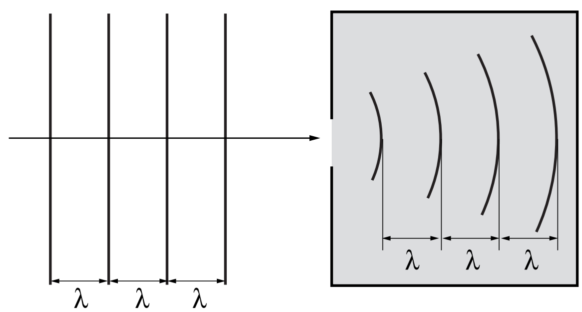
23. La figura muestra un frente de ondas plano, que llega a una habitación cuya puerta está abierta:



a) Copia la figura y dibuja sobre ella el frente de ondas que se forma al atravesar la puerta.

b) Calcula la longitud de onda, λ, de la perturbación tras atravesar la puerta.

a) En este caso se produce un fenómeno de difracción. La difracción se produce cuando un obstáculo impide el avance de parte de un frente de onda. Al llegar el frente de ondas al orificio, sus puntos se convierten, de acuerdo con el principio de Huygens, en centros emisores de nuevos frentes de ondas, obteniendo como resultado la envolvente de todos ellos.

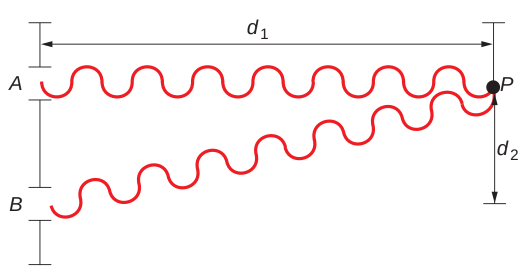


Ello explica que la forma del frente de ondas cambie al atravesar la onda la abertura.

b) La forma del frente de ondas cambia al atravesar la abertura. Sin embargo, la velocidad de propagación y la frecuencia no lo hacen. La longitud de onda antes y después de que se atraviese la abertura es la misma:

$$\lambda = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}$$

24. ¿Qué diferencia de caminos provocará una interferencia constructiva en el punto *P*? ¿Y una interferencia destructiva?



Indica el resultado en función de la longitud de onda, λ, del movimiento ondulatorio.

Para que se produzca interferencia constructiva, las distancias desde los puntos de origen (A y B) hasta el punto P han de cumplir la siguiente relación:

$$x_{BP} - x_{AP} = \lambda \cdot n$$

De acuerdo con las cotas que se indican en la figura, resulta:

$$x_{BP} - x_{AP} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1 = \lambda \cdot n$$

siendo $n = 1, 2, 3, ...$

Para que se produzca una interferencia destructiva, las distancias desde los puntos de origen (A y B) hasta el punto P considerado han de cumplir la siguiente relación:

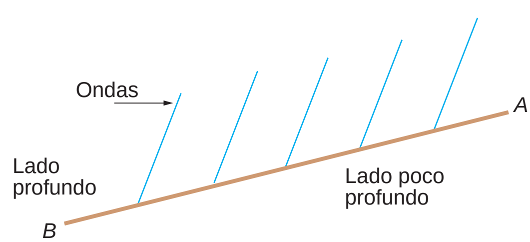
$$x_{BP} - x_{AP} = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

En función de las cotas indicadas en el dibujo:

$$x_{BP} - x_{AP} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1 = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

siendo $n = 0,1, 2, ...$

25. Un frente de ondas se propaga por la superficie de un estanque hasta que llega a un obstáculo. La frecuencia del movimiento ondulatorio es 100 Hz y la longitud de onda 10 cm.



a) **Dibuja un diagrama como el que se adjunta y, sobre él, sitúa los sucesivos frentes de onda, para explicar qué ocurre en el lado poco profundo del estanque.**

b) **¿Qué nombre recibe el fenómeno que se produce al encontrarse el movimiento ondulatorio con el obstáculo?**

c) **¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en el lado más profundo del estanque?**

a) En la parte en que el estanque es profundo se producirá la reflexión de las ondas al chocar contra la pared del estanque. Por el contrario, en la parte en que este es poco profundo, el fenómeno que se producirá será similar al que se produce en una playa con las olas del mar: la onda, al alcanzar el punto inferior en la vibración, rozará contra el fondo, dando lugar a la formación de olas.

b) Cuando el frente de ondas incide sobre el obstáculo, se produce una reflexión de las ondas.

c) En el enunciado se proporcionan los datos necesarios para calcular la velocidad de propagación en el lado profundo del estanque, donde no existen perturbaciones con el fondo:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0{,}1 \cdot 100 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

PROBLEMAS

26 Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cdot sen\ [\pi \cdot (50 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]}$$

en la que todas las magnitudes se expresan en unidades del S.I. Calcula:

a) La frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados 2 m.

a) Si comparamos la ecuación de la onda:

$$y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cdot sen\ [\pi \cdot (50 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)]$$

Identificando términos y realizando algunas sencillas operaciones obtenemos el valor de las magnitudes que solicita el enunciado del problema:

$$\omega = 50 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\ ;\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{50 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 25 \text{ Hz}\ ;\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25} = 0{,}04 \text{ s}$$

$$k = 0{,}5 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\ ;\ k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5 \cdot \pi} = 4 \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 4 \cdot 25 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados 2 m es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot t - k \cdot x_2 - (\omega \cdot t - k \cdot x_1) = \omega \cdot t - k \cdot x_2 - \omega \cdot t + k \cdot x_1 =$$
$$= k \cdot (x_1 - x_2) = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0 - 2) = -\pi \text{ rad}$$

27. Se genera en una cuerda una onda transversal cuya velocidad de propagación es 2 m/s, su amplitud $8 \cdot 10^{-3}$ m y su longitud de onda 0,2 m. Determina:

a) La frecuencia y el número de onda.

b) La velocidad máxima que pueden tener los puntos de la cuerda.

a) La frecuencia de la onda la podemos obtener a partir de la expresión que relaciona la longitud de onda con la velocidad de propagación:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Sustituyendo valores, la frecuencia resulta:

$$f = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ Hz}$$

El número de onda es:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow k = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}2} = 10 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Para obtener la velocidad máxima de cualquier punto de la cuerda, escribimos, en primer lugar, la ecuación de la onda:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y\,(x, t) = 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(10 \cdot t - \frac{x}{0{,}2}\right)\right] =$$

$$= 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen(20 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos la velocidad:

$$v\,(x,\, t) = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot \pi \cdot cos\,(20 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$$

Para que la velocidad sea máxima, el coseno debe valer +1. Por tanto:

$$v_{máx} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot \pi = 0{,}16 \cdot \pi \text{ m/s}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

28. Una onda armónica presenta las siguientes características: $A = 10$ cm ; $v_{propagación} = 10$ m/s ; $k = 20 \cdot \pi$ rad · m^{-1}.

Con estos datos, determina:

a) La ecuación de onda.

b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 80 cm.

c) La diferencia de fase entre dos puntos separados 60 cm.

a) La ecuación general de una onda armónica podemos expresarla en la forma:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \theta\right)\right]$$

La longitud de onda se puede calcular a partir del número de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{20 \cdot \pi} = 0{,}1 \text{ m}$$

Por su parte, el período resulta:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01 \text{ s}$$

Como no se indica nada al respecto, supondremos que la fase inicial es nula. Así:

$$y\ (x,t) = 0,1 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{0,01} - \frac{x}{0,1}\right)\right] =$$

$$= 0,1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t - 10 \cdot x)]$$

b) Para dos puntos separados 80 cm, la diferencia de fase resulta:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{t}{0,01} - \frac{x}{0,1}\right) - \left(\frac{t}{0,01} - \frac{x'}{0,1}\right)\right]$$

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x'}{0,1} - \frac{x}{0,1}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot 0,8 = 16 \cdot \pi \text{ rad}$$

Como 16 · π es múltiplo de 2 · π, podemos afirmar que ambos puntos vibran en fase.

c) Si los dos puntos están separados 60 cm, al sustituir en la expresión anterior, resulta:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x'}{0,1} - \frac{x}{0,1}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot \left(x' - x\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot 0,6 = 12 \cdot \pi \text{ rad}$$

Del mismo modo que antes, como 12 · π es múltiplo de 2 · π, podemos afirmar que ambos puntos vibran en fase.

Estos resultados son perfectamente lógicos, ya que, en cualquier movimiento ondulatorio, los puntos que vibran en fase están separados un número entero de longitudes de onda, que en nuestro caso es 10 cm.

29. Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cdot cos\ (50 \cdot t - 2 \cdot x)}$$

En esta expresión, las magnitudes se miden en unidades S.I. Calcula:

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) El estado de vibración de una partícula situada a 20 cm del foco en el instante $t = 0{,}5$ s.

a) La ecuación general de un movimiento ondulatorio puede escribirse de la forma:

$$y(x,t) = A \cdot cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Al comparar esta expresión con la del enunciado:

$$y(x,t) = 0,4 \cdot cos(50 \cdot t - 2 \cdot x)$$

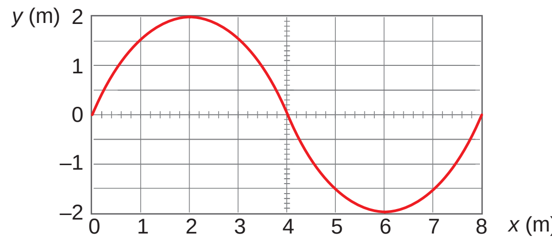
Como $\omega = k \cdot v$, identificando:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Sustituyendo en el punto indicado:

$$y(0,2\ ,\ 0,5) = 0,4 \cdot cos(50 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,2\ ) = 0,364 \text{ m}$$

30. **En la figura que sigue se representa una onda transversal que viaja en la dirección positiva del eje de abscisas:**



Sabiendo que la velocidad de propagación es $v = 4$ m/s, escribe la ecuación que representa el movimiento de la onda. Determina la velocidad de vibración del punto situado en $x = 4$ m, así como su valor máximo.

Para escribir la ecuación de la onda, necesitamos conocer su amplitud, A, su período, T, y su longitud de onda, λ. De la figura se deduce:

$$A = 2 \text{ m} \quad ; \quad \lambda = 8 \text{ m}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la velocidad de propagación de la onda, el período resulta:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \rightarrow T = \frac{8}{4} = 2 \text{ s}$$

La ecuación general del movimiento armónico simple es:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

En este caso, sustituyendo valores, la ecuación de la onda es de la forma:

$$y\,(x, t) = 2 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{8}\right)\right]$$

$$y\,(x, t) = 2 \cdot sen\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

La velocidad de un punto situado a cuatro metros del origen la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación de la posición y sustituyendo valores:

$$v\,(x, t) = 2 \cdot \pi \cdot cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor $x = 4$ m, obtenemos la velocidad de ese punto:

$$v\,(4, t) = 2 \cdot \pi \cdot cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = 2 \cdot \pi \cdot cos\,(\pi \cdot t - 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

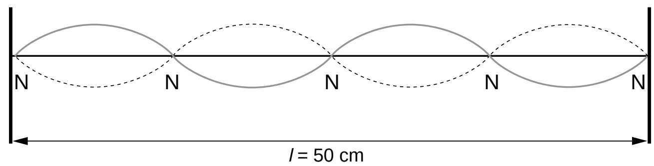
El valor máximo se obtiene cuando el coseno vale +1. En ese caso:

$$v_{máx}\,(x = 4 \text{ m}) = 2 \cdot \pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

31 **Se hace vibrar una cuerda de 0,5 metros, sujeta por los dos extremos. La cuerda tiene cinco nodos, siendo la amplitud de vibración 2 cm y la velocidad de propagación de las ondas 10 m/s. Calcula la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.**

Al estar sujeta por los extremos, la cuerda tiene dos nodos en los extremos.



Como en total hay cinco nodos, podemos calcular la frecuencia de la vibración, ya que, para una onda estacionaria con nodos en los extremos:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$$

En nuestro caso, $n = 4$, pues se empieza a contar desde $n = 0$. Debemos tener en cuenta que en el origen es donde se encuentra el primer nodo. De este modo:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} = \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}5} = 40 \text{ Hz}$$

Por tanto, la longitud de onda, que también se puede deducir del gráfico, resulta:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{10}{40} = 0{,}25 \text{ m}$$

32. Una onda transversal que se propaga por una cuerda coincidente con el eje *X*, tiene por expresión matemática (magnitudes en unidades S.I.):

$$\boldsymbol{y(x, t) = 2 \cdot sen\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)}$$

a) Determina la velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

b) Calcula el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.

a) Si comparamos la onda del enunciado:

$$y(x, t) = 2 \cdot sen\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

identificando términos y operando obtenemos:

$A = 2$ m

$$\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ ; \ \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{7}{2 \cdot \pi} = \frac{3{,}5}{\pi} \text{ Hz} \ ; \ T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{3{,}5} \text{ s}$$

$$k = 4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \; ; \; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \; ; \; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}$$

Con estos valores obtenemos la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3,5}{\pi} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La velocidad de vibración de las partículas del medio la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación de la onda:

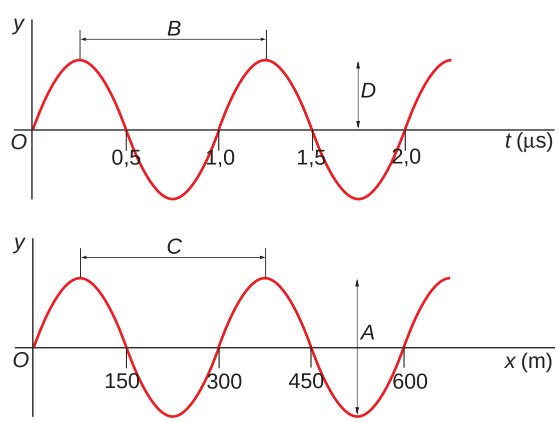
$$v\,(x,\, t) = \frac{dy\,(x,\, t)}{dt} = 14 \cdot cos\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)$$

El valor máximo se obtendrá cuando $cos\,(7 \cdot t - 4 \cdot x) = 1$. En ese caso:

$$v_{máx} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Recuerda que no debes confundir la velocidad de propagación de la onda con la velocidad de vibración de las partículas del medio, que efectúan un movimiento vibratorio.

33. Las gráficas que siguen muestran el movimiento de una onda:



La primera representa el desplazamiento, *y*, frente al tiempo, *t*, en determinada posición, *x*. La segunda muestra el desplazamiento, *y*, frente a la posición, *x*, en un instante de tiempo, *t*.

a) Expresa las variables que se indican en función de los parámetros *A*, *B*, *C*, *D*: amplitud, longitud de onda, frecuencia y período.

b) Calcula la velocidad de propagación de la onda.

c) Escribe la ecuación de propagación de la onda, sabiendo que se trata de una onda transversal que se propaga en la dirección *OX*.

a) Para resolver este problema, es preciso entender con claridad el significado de ambas gráficas.

La primera muestra cómo cambia, a medida que transcurre el tiempo, el estado de vibración en que se encuentra una determinada partícula que ha sido alcanzada por la perturbación y que se encuentra en una posición relativa, *x*, que no cambia.

La segunda muestra el estado de vibración de distintos puntos alcanzados por la perturbación en un mismo instante. El efecto equivale a una fotografía instantánea de una zona alcanzada por la perturbación.

– Amplitud: Corresponde a la cota *D*. La amplitud es la máxima separación, desde su posición de equilibrio, de una partícula alcanzada por la vibración.

– Longitud de onda: Corresponde a la cota *C*. La distancia señalada es la que separa dos puntos que se encuentran en el mismo estado de vibración.

– Período: Corresponde a la cota *B*. Es el intervalo de tiempo que transcurre para que un punto alcance de nuevo el mismo estado de vibración.

– Frecuencia: Es la inversa del período: $f = 1/B$.

b) La velocidad de propagación de la onda se calcula a partir de la expresión:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{300}{10^{-6}} = 3 \cdot 10^{8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El resultado que obtenemos es, precisamente, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

c) La ecuación general de una onda que se propaga en la dirección *OX* es:

$$y(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \theta\right)\right]$$

Sustituyendo los datos que ya conocemos:

$$y(x, t) = D \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{300}\right)\right]$$

El parámetro *D* no tiene un valor concreto, porque no se indican valores numéricos en la escala de elongaciones. En cuanto a la fase, θ, esta es nula, porque en el instante inicial ($t = 0$ s) la elongación en el foco ($x = 0$) es nula.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34 **Dada la ecuación de onda:**

$$\boldsymbol{y (x, t) = 0{,}1 \cdot sen\, [2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot x + t)]}$$

Calcula:

a) Su amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

b) La distancia mínima que separa dos puntos que se encuentran en fase y otros dos que se encuentran en oposición de fase.

c) ¿Por qué hablamos de distancia mínima en el apartado anterior?

a) La ecuación general de una onda es:

$$y(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Si comparamos la ecuación general con la del problema:

$$y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen\, [2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot x + t)]$$

obtenemos directamente los siguientes valores:

$$\text{Amplitud, } A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$\text{Frecuencia, } f = 1 \text{ Hz}$$

$$\text{Longitud de onda: } 1/\lambda = 2 \rightarrow \lambda = 0{,}5 \text{ m}$$

$$\text{Velocidad de propagación, } v = \lambda/f = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La diferencia de fase entre dos puntos es:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Para dos puntos en fase, la diferencia de fase mínima es $2 \cdot \pi$, luego:

$$2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Por tanto, la distancia entre ambos puntos es:

$$x - x' = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ m}$$

c) Dos puntos consecutivos en oposición de fase son aquellos cuya diferencia de fase es π ($\Delta\varphi = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$):

$$\pi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Simplificando la expresión anterior, resulta:

$$1 = 4 \cdot (x - x') \rightarrow x - x' = 0{,}25 \text{ m}$$

d) Existen multitud de puntos que vibran en fase y en oposición de fase. Entre dos puntos cualesquiera de una recta que parta del foco de la perturbación, separados una distancia igual a una longitud de onda, existen dos puntos que vibran en fase. Si la distancia que los separa es igual a media longitud de onda, existen dos puntos vibrando en oposición de fase.

35. Una onda tiene la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{y\,(x,\ t) = 0{,}25 \cdot sen\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)}$$

En esta expresión, las magnitudes se miden en unidades S.I. Calcula:

a) Su longitud de onda, frecuencia y amplitud.

b) La velocidad de una partícula del medio situada a 2 m del foco cuando han transcurrido 4 s.

c) La diferencia de fase de un punto del medio cuando han transcurrido 10 s.

a) Si comparamos la ecuación del enunciado:

$$y\,(x,\ t) = 0{,}25 \cdot sen\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\,(x,\ t) = 0{,}25 \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

identificamos términos y realizamos algunas sencillas operaciones, obtenemos:

$A = 0{,}25$ m

$$\omega = 2 \text{ rad} \cdot s^{-1} \; ; \; \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{2}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi} \text{ Hz} \; ; \; T = \frac{1}{f} = \pi \text{ s}$$

$$k = 5 \text{ rad} \cdot m^{-1} \; ; \; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 0{,}4 \cdot \pi \text{ m}$$

b) La velocidad de vibración de las partículas del medio la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$v\,(x,\,t) = \frac{dy\,(x,\,t)}{dt} = 0{,}5 \cdot cos\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)$$

La velocidad que corresponde a una partícula del medio que se encuentra a 2 m, transcurridos 4 s, es:

$$v\,(2,\,4) = 0{,}5 \cdot cos\,(2 \cdot 4 - 5 \cdot 2) = 0{,}5 \cdot cos\,(-2) = -0{,}21 \text{ m} \cdot s^{-1}$$

c) La diferencia de fase de un punto del medio, transcurridos 10 s, se calcula del siguiente modo:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2 \cdot t_2 - 5 \cdot x) - (2 \cdot t_1 - 5 \cdot x) = 2 \cdot (t_2 - t_1) = 2 \cdot 10 = 20 \text{ rad}$$

36. Se hace vibrar una cuerda de 0,5 metros, sujeta por los dos extremos. La cuerda tiene tres nodos y la amplitud de vibración es 1,2 cm, siendo la velocidad de propagación de las ondas 100 m/s. Escribe la ecuación de la onda estacionaria y calcula la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.

Al estar sujeta por los extremos, la cuerda tiene dos nodos en los extremos. Como en total hay tres nodos, esto nos permite calcular la frecuencia de la vibración a partir de la longitud de la cuerda, ya que, para una onda estacionaria con nodos en los extremos:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} \rightarrow f = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 0{,}5} = 200 \text{ Hz}$$

En nuestro caso, hemos tomado $n = 2$, pues se empieza a contar por $n = 1$, situación que corresponde al modo de vibración fundamental, con un nodo en cada extremo. El modo $n = 2$ corresponde a un nodo en cada extremo y otro nodo equidistante de ambos, que es el modo de vibración correspondiente a la onda del enunciado.

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{100}{200} = 0{,}5 \text{ m}$$

La ecuación general de una onda armónica estacionaria se escribe en la forma:

$$y = 2 \cdot A \cdot cos\,(k \cdot x) \cdot sen\,(\omega \cdot t)$$

El número de onda, k, y la frecuencia angular, ω, son:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5} = 4 \cdot \pi \text{ rad} \cdot m^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 200 = 400 \cdot \pi \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

Por tanto, la ecuación de la onda estacionaria resulta:

$$y = 0{,}024 \cdot cos\,(4 \cdot \pi \cdot x) \cdot sen\,(400 \cdot \pi \cdot t) \text{ m}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

37 **Una onda estacionaria tiene por ecuación:**

$$\boldsymbol{y = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \cos\,(40 \cdot \pi \cdot t)}$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en cm, y *t,* en segundos. Determina:

a) La amplitud y la velocidad de fase de las ondas componentes.

b) La distancia que existe entre dos nodos consecutivos.

c) La velocidad de una partícula situada en el punto $x = 1{,}5$ cm en cualquier instante.

a) La ecuación general que corresponde a una onda estacionaria es:

$$y = 2 \cdot A \cdot \cos\,(k \cdot x) \cdot \operatorname{sen}\,(\omega \cdot t)$$

Si la comparamos con la que ofrece el enunciado del problema:

$$y = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \cos\,(40 \cdot \pi \cdot t)$$

La amplitud con que oscila cada punto de la onda estacionaria depende de la posición; la frecuencia es la misma para todos, y coincide con la de las ondas que interfieren.

Dicha amplitud es:

$$A'(x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = 2 \cdot A \cdot \cos\,(k \cdot x)$$

Donde A es la amplitud de las ondas componentes. Por tanto:

$$5 = 2 \cdot A \rightarrow A = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

La longitud de onda la calculamos como sigue:

$$k = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{cm}^{-1};\ k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi/3} = 6 \text{ cm}$$

Y el período:

$$\omega = 40 \cdot \pi \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}\ ;\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{40 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 20 \text{ Hz}\ ;\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de fase es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{0{,}05} = 120 \text{ cm/s}$$

b) La condición que cumplen los nodos de la oscilación es:

$$x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que existe entre dos nodos consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} - (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = (5 - 3) \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

c) La ecuación que corresponde a la velocidad de vibración de las partículas es:

$$v\,(x,\,t) = \frac{dy\,(x,\,t)}{dt} = 40 \cdot \pi \cdot 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t) =$$

$$= 200 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t)$$

Por tanto, la velocidad de una partícula situada a 1,5 cm en cualquier instante será:

$$v\,(1{,}5,\,t) = 200 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1{,}5\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t) =$$

$$= 200 \cdot \pi \cdot cos\,\frac{\pi}{2} \cdot cos\,(40 \cdot \pi \cdot t) = 0$$

De acuerdo con el resultado obtenido, ese punto es un nodo; por tanto, su elongación y su velocidad son siempre nulos.

38. Una fuente emisora de 4 W produce ondas esféricas en un medio no absorbente. Calcula la intensidad de la onda a 1 m de distancia del foco emisor.

La intensidad de una onda esférica se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Por tanto, a un metro de distancia del foco emisor, la intensidad de la onda será:

$$I = \frac{4}{4 \cdot \pi \cdot 1^2} = 0{,}32\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

39 Un frente de ondas plano posee una intensidad de 10^{-2} W · m^{-2} cuando incide en un medio absorbente de 0,1 m de espesor. Si a la salida la intensidad se ha reducido a una décima parte de la inicial, calcula:

a) El coeficiente de absorción del medio.

b) El espesor de semiabsorción.

a) La intensidad de una onda tras atravesar un medio material absorbente se calcula mediante la siguiente expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

En el caso que nos ocupa, $I = I_0/10$, y $x = 0{,}1$ m. Por tanto:

$$\frac{I_0}{10} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 0{,}1} \rightarrow ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\beta \cdot 0{,}1 \rightarrow -ln\ 10 = -\beta \cdot 0{,}1$$

$$\beta = \frac{-ln\ 10}{-0{,}1} = 23\ \text{m}^{-1}$$

b) El espesor de semiabsorción, $D_{1/2}$, es aquel que reduce a la mitad la intensidad inicial de la onda. Por tanto:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-23 \cdot D_{1/2}} \rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right) = -23 \cdot D_{1/2} \rightarrow -ln\ 2 = -23 \cdot D_{1/2}$$

$$D_{1/2} = \frac{-ln\ 2}{-23} = 0{,}03\ \text{m}$$

40. El coeficiente de absorción de un determinado medio es 0,5 cm^{-1}. Calcula cuál ha de ser su espesor para que la intensidad de una onda que lo atraviesa se reduzca a la quinta parte de la incidente.

La unidad S.I. en que se expresa el coeficiente de absorción es m^{-1}. Por tanto:

$$\beta = 0{,}5 \text{ cm}^{-1} = 50 \text{ m}^{-1}$$

La expresión que relaciona la intensidad de la onda incidente, I_0, y la que se obtiene, I, tras atravesar una distancia, x, de material absorbente es:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Teniendo en cuenta que:

$$I = \frac{I_0}{5} \quad ; \quad \beta = 50 \text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo y operando, obtenemos:

$$\frac{I_0}{5} = I_0 \cdot e^{-50 \cdot x} \rightarrow ln\,\frac{1}{5} = -50 \cdot x$$

$$x = \frac{ln\,\frac{1}{5}}{-50} = 0{,}0322 \text{ m} = 3{,}22 \text{ cm}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

41. Una placa de vidrio tiene un espesor de 0,9 cm, siendo $n = 1{,}55$. Calcula cuánto tardará un haz de luz en pasar a través de ella.

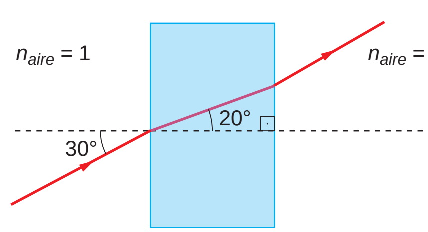
El índice de refracción de la placa de vidrio es la relación entre la velocidad de propagación del haz de luz en el aire y la velocidad de propagación a través de la placa de vidrio. Por tanto:

$$n = \frac{v_{aire}}{v_{vidrio}} \rightarrow v_{vidrio} = \frac{v_{aire}}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}55} = 1{,}93 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Como la placa de vidrio tiene un espesor de 0,9 centímetros, el haz de luz tardará en atravesarla:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{vidrio}} = \frac{0{,}9 \cdot 10^{-2}}{1{,}93 \cdot 10^8} = 4{,}66 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

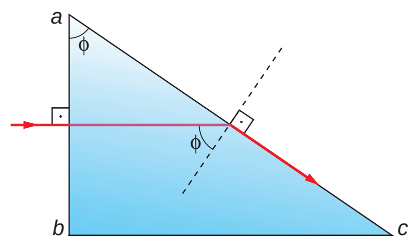
42. Calcula el índice de refracción del bloque de vidrio de la figura, si este se encuentra en el aire ($n_{aire} = 1$).



Aplicando directamente las leyes de Snell a la refracción, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow n_2 = \frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} \cdot n_1 = \frac{sen\ 30°}{sen\ 20°} \cdot 1 = 1,462$$

43. Un rayo de luz incide, como se indica en la figura, sobre la cara *ab* de un prisma de cristal cuyo índice de refracción toma el valor *n* = 1,52.



Calcula:

a) El valor máximo del ángulo ϕ que hace que el rayo salga totalmente reflejado en la cara *ac*.

b) Ese mismo ángulo si el prisma está sumergido en agua (índice de refracción del agua = 4/3).

a) Como se aprecia en la ilustración, la línea que separa los dos medios es la recta *ac*, siendo la normal la recta perpendicular a ella, de trazo discontinuo.

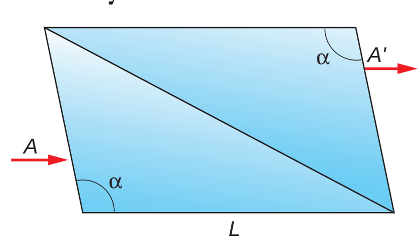
Si el rayo sale reflejado en la cara *ac*, el ángulo que forma con la normal es 90°. Por tanto, al aplicar la ley de Snell, resulta:

$$\frac{sen\ \phi}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \phi = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 90° = \frac{1}{1,52} \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi = arcsen\left(\frac{1}{1,52}\right) = 41,14°$$

b) El índice de refracción del medio que rodea al prisma cambia. Por tanto:

$$\frac{sen\ \phi}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \phi = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 90° = \frac{1,33}{1,52} \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi = arcsen\left(\frac{1,33}{1,52}\right) = 61,31°$$

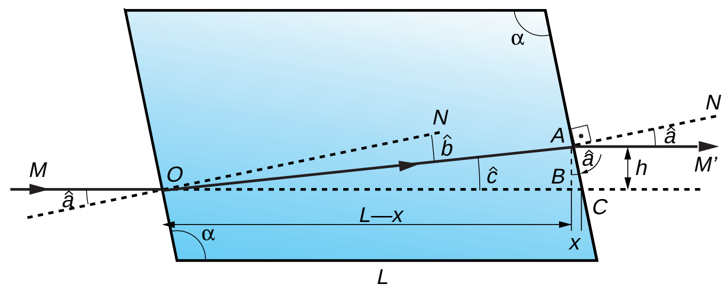
44 Un prisma, que se encuentra en el aire, está formado por dos prismas iguales, unidos como se indica en la figura. Los ángulos que se señalan miden 101,5°. Un rayo *A*, que incida como se indica, saldrá desplazado por *A'*. ¿Cuánto se desplazará verticalmente el rayo?



Datos: n_{prisma} = 1,6; L = 10 cm.

El ángulo que forma el rayo incidente con la normal es:

$$\hat{a} = 101{,}5 - 90 = 11{,}5°$$



Si aplicamos la ley de Snell a este sistema, podemos calcular el ángulo de refracción:

$$\frac{sen\ \hat{a}}{sen\ \hat{b}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{b} = sen\ \hat{a} \cdot \frac{n_1}{n_2} = sen\ 11{,}5° \cdot \frac{1}{1{,}6} = 0{,}1246 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{b} = arcsen\ 0{,}1246 = 7{,}16°$$

Por tanto, el ángulo marcado en la figura como $\hat{c}$, resulta:

$$\hat{c} = \hat{a} - \hat{b} = 11{,}5° - 7{,}16° = 4{,}34°$$

En cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman podemos escribir:

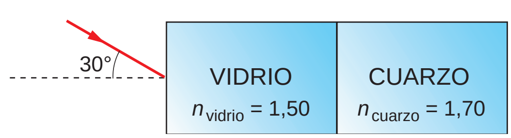
$$ABC \rightarrow \frac{x}{h} = tg\ \hat{a} \quad ; \quad OAB \rightarrow \frac{h}{L-x} = tg\ \hat{c}$$

De las dos expresiones anteriores podemos despejar el desplazamiento vertical del rayo, h:

$$h = L \cdot \frac{tg\ \hat{c}}{1 + tg\ \hat{c} \cdot tg\ \hat{a}} = 0{,}1 \cdot \frac{tg\ 4{,}34°}{1 + tg\ 4{,}34° \cdot tg\ 11{,}5°} =$$

$$= 7{,}47 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 7{,}47\ \text{mm}$$

45. Completa el diagrama adjunto, indicando la trayectoria que seguirá un rayo de luz amarilla monocromática que pasa a través del vidrio y del cuarzo, para salir de nuevo al aire:



Como conocemos el ángulo de incidencia del rayo y los índices de refracción del aire, del vidrio y del cuarzo, podemos determinar cuál será la desviación que sufre el rayo a medida que va atravesando cada medio. Para ello, simplemente hemos de aplicar la ley de Snell.

Al pasar del aire al vidrio, el ángulo de refracción es:

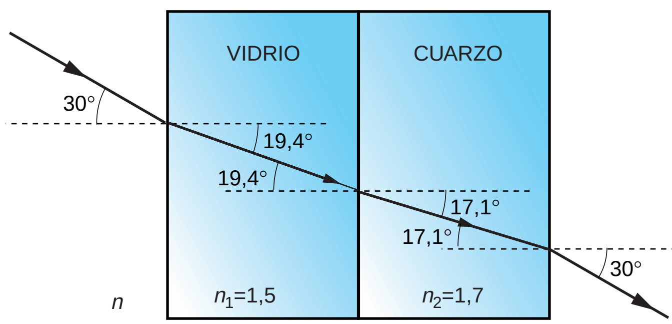
$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_1}{n} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n}{n_1} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1}{1{,}5} \cdot sen\ 30° = \frac{1}{3} \rightarrow \hat{r} = 19{,}47°$$

Si trazamos otra normal a la línea de separación vidrio-cuarzo, en el punto en que incide el rayo refractado, el ángulo de incidencia con que llega el rayo al cuarzo es el que hemos calculado anteriormente. Por tanto:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1{,}5}{1{,}7} \cdot sen\ 19{,}47° = 0{,}294 \rightarrow \hat{r} = 17{,}1°$$

Por último, al salir al aire:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n}{n_2} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_2}{n} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1{,}7}{1} \cdot sen\ 17{,}1° = 0{,}5 \rightarrow \hat{r} = 30°$$



Como vemos, el rayo sale paralelo a la dirección de entrada.

6 ACÚSTICA

6.1. ONDAS SONORAS

1. ¿Cómo medirías la velocidad del sonido en el aire?

Un procedimiento puede ser el siguiente. Imagina que estás frente a un pozo y conoces la distancia, *h,* que existe entre la boca del pozo y la superficie del agua que contiene. Con un cronómetro puedas medir el tiempo, *t,* que tarda en llegar a tus oídos el sonido del choque de una piedra que cae desde la boca del pozo. Ese tiempo *t* será la suma del tiempo que tarde la piedra en llegar a la superficie del agua, t_1, que podemos obtener utilizando las ecuaciones cinemáticas de la caída libre, y del tiempo t_2, que es el que tarda el sonido en llegar desde la superficie del agua hasta nuestro oído:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + t_2 \rightarrow t_2 = t - \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Por tanto, la velocidad de propagación del sonido en el aire será:

$$v_{sonido}\,(aire) = \frac{h}{t_2} = \frac{h}{t - \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}}}$$

2. Calcula la velocidad de propagación del sonido en el aire a –20 ºC, 0 ºC, 20 ºC, 40 ºC, 60 ºC y 80 ºC.

La velocidad de propagación del sonido en el aire se calcula a partir de la expresión:

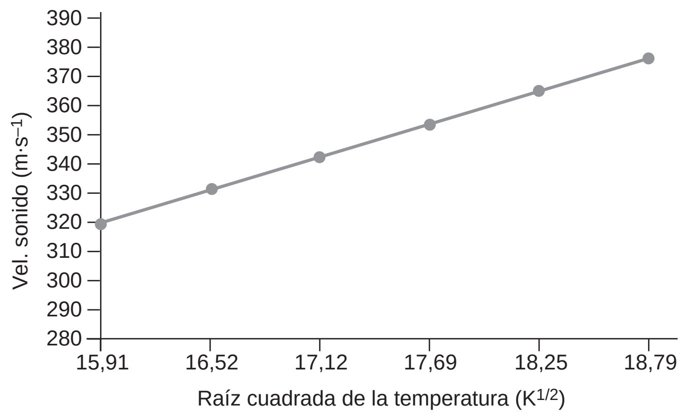
$$v = 20{,}1 \cdot \sqrt{T}$$

siendo *T* la temperatura absoluta a que se encuentra la muestra de aire. Para las temperaturas propuestas, los valores que corresponden a la velocidad de propagación del sonido resultan:

Temperatura (K)	Velocidad de prop. sonido ($m \cdot s^{-1}$)
253	319,7
273	332,1
293	334,1
313	355,6
333	366,8
353	377,6

3. **Dibuja los resultados que obtienes en el ejercicio anterior en una gráfica. Representa en el eje de ordenadas la velocidad del sonido en el aire, y en el de abscisas, la raíz cuadrada de la temperatura. Justifica el resultado que obtienes.**

Al representar los datos gráficamente, obtenemos el siguiente resultado:



Como se aprecia en la gráfica, al aumentar la temperatura del aire, aumenta la velocidad de propagación del sonido. En dicha gráfica se comprueba que existe una relación lineal entre la velocidad de propagación del sonido en el aire y la raíz cuadrada de la temperatura absoluta a que este se encuentra.

4. **Tomando para la velocidad del sonido en el aire el valor 344 m · s^{-1}, calcula las longitudes de onda que corresponden a las frecuencias audibles extremas.**

Para un oído humano sano, las frecuencias audibles extremas se encuentran entre 16 Hz y 20 000 Hz, aproximadamente. Si consideramos el valor de la velocidad del sonido que indica el enunciado, se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{344}{16} = 21{,}5 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{344}{20\,000} = 0{,}0172 \text{ m}$$

5. **Una onda sonora provoca una variación de presión en el aire que viene dada por la siguiente expresión:**

$$\boldsymbol{P(x, t) = 0{,}75 \cdot cos \left[\frac{\pi}{2} \cdot (x - 340 \cdot t) \right]}$$

donde *P* se mide en pascales, *x* en metros y *t* en segundos. Calcula:

a) La amplitud de la presión.

b) La longitud de onda.

c) La frecuencia.

d) La velocidad de la onda sonora.

a) La amplitud de la presión es de 0,75 Pa.

b) Teniendo en cuenta que:

$$k = \frac{\pi}{2} \; ; \; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi/2} = 4 \text{ m}$$

c) La frecuencia angular es:

$$\omega = 340 \cdot \frac{\pi}{2} = 170 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la frecuencia de vibración será:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{170 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 85 \text{ Hz}$$

d) La velocidad de propagación de la onda sonora es:

$$v = \lambda \cdot f = 4 \cdot 85 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6.2. CUALIDADES DEL SONIDO

1. Obtén la expresión que permite calcular las frecuencias de las ondas estacionarias en un tubo de aire con los dos extremos abiertos y en otro tubo con un extremo abierto y el otro cerrado.

a) Teniendo en cuenta que las longitudes de onda se corresponden con la siguiente expresión:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

La frecuencia se obtiene a partir de la expresión:

$$v_n = \lambda_n \cdot f \rightarrow f_n = \frac{v_n}{\lambda_n} = \frac{v_n \cdot n}{2 \cdot L}$$

b) Del mismo modo que en el apartado anterior:

$$\lambda_n = \frac{4 \cdot L}{2 \cdot n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, 3...) \rightarrow f_n = \frac{v \cdot (2 \cdot n + 1)}{4 \cdot L} \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

2. El tubo más largo de un órgano mide 10,52 m y está abierto por ambos extremos.

Calcula su frecuencia fundamental.

El órgano es un instrumento formado por tubos abiertos por ambos extremos; por tanto, la relación entre la frecuencia de la onda que emite y la longitud de cada tubo viene dada por:

$$f_n = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$$

Para la frecuencia fundamental, $n = 1$. Por tanto:

$$f_1 = \frac{1 \cdot 340}{2 \cdot 10,52} = 16,16 \text{ Hz}$$

3. **La nota más baja que podemos hacer sonar en una flauta es el *do* de la primera línea adicional por debajo del pentagrama (en clave de *sol*), cuya frecuencia es 262 Hz. Con esos datos, calcula la longitud efectiva que debe tener la flauta.**

Una flauta es un tubo abierto por uno de sus extremos. Para este tipo de tubos, la relación entre la frecuencia de la onda que emite y la longitud del tubo viene dada por:

$$f_n = \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot v}{4 \cdot l}$$

La nota más grave que podemos hacer sonar en una flauta es su frecuencia fundamental, por lo que $n = 0$. Por tanto, al despejar la longitud l, resulta:

$$f_n = \frac{v}{4 \cdot l} \rightarrow l = \frac{v}{4 \cdot f} = \frac{340}{4 \cdot 262} = 0,324 \text{ m} = 32,4 \text{ cm}$$

6.3. LA AUDICIÓN

1. **En la detección de bancos de peces se utilizan ultrasonidos. ¿A qué distancia del barco se encuentra el banco de peces, si el eco sonoro tarda 7 s en llegar?**

Dato: v_s (agua) = 1 500 m · s^{-1}

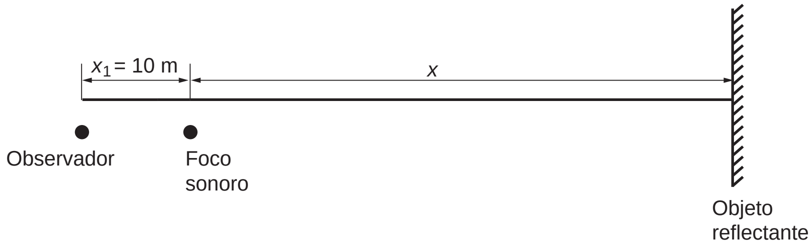
En 7 s, la onda sonora va y vuelve. Por tanto, para llegar al banco de peces necesita la mitad de tiempo: 3,5 s.

De acuerdo con ello, la distancia a la que se encuentra el banco de peces es:

$$d = v \cdot t = 1\,500 \cdot 3,5 = 5\,250 \text{ m}$$

2. **Un observador está situado a 10 m de un foco sonoro. El eco producido por un objeto situado detrás del foco lo percibe con un desfase de 0,25 s. Calcula la distancia a que se encuentra el objeto reflectante.**

La situación que plantea el enunciado de la actividad es la siguiente:



El tiempo que tarda el sonido en llegar al observador es:

$$t_1 = \frac{x_1}{v} = \frac{10}{344} = 0{,}029 \text{ s}$$

Y el que tarda en percibir el eco:

$$t_2 = \frac{x_1 + 2 \cdot x}{v} = \frac{10 + 2 \cdot x}{v}$$

El desfase es, por tanto:

$$t_2 - t_1 = \frac{10 + 2 \cdot x}{v} - 0{,}029$$

La distancia a que se encuentra el objeto reflectante del foco sonoro es:

$$x = \frac{v \cdot \left[\left(t_2 - t_1\right) + 0{,}029\right] - 10}{2} = \frac{344 \cdot \left(0{,}25 + 0{,}029\right) - 10}{2} = 43 \text{ m}$$

Y la distancia a que se encuentra el objeto del foco sonoro es:

$$d = x_1 + x = 10 + 43 = 53 \text{ m}$$

6.4. INTENSIDAD Y NIVEL DE INTENSIDAD

1. Comenta la frase siguiente: "En el espacio nadie puede oír tus gritos".

Las ondas sonoras son ondas mecánicas y necesitan, por tanto, un medio material para propagarse. En el espacio no es posible la transmisión, ya que no existe un medio material que la haga posible. Sin embargo, sí oirías tus propios gritos, al transmitirse la vibración desde las cuerdas vocales al oído a través del propio cuerpo.

2. ¿En qué se diferencia la música del ruido?

La forma de las ondas musicales es periódica. Aunque su forma no sea perfectamente senoidal, excepto en el caso de notas puras, una nota musical se caracteriza por tener un período (y, por tanto, frecuencia) perfectamente determinado.

El ruido es la superposición de un gran número de ondas no armónicas, de muy distintas frecuencias, y su evolución es completamente aleatoria. En un ruido no es posible definir el período de la onda.

3. ¿Qué entendemos por umbral de audición? ¿Y por umbral de dolor?

El umbral de audición es la mínima intensidad sonora que estimula el oído. Es el valor límite de la intensidad sonora que nos permite percibir un sonido.

El umbral de dolor es la intensidad sonora a partir de la cual nuestro oído sufre molestias físicas.

Estos dos umbrales no son invariables; dependen fuertemente de la frecuencia. Para cada frecuencia existe un umbral de audición y un umbral de dolor.

4. Una onda acústica deja de percibirse a una distancia de 30 km del foco que la emite. Suponiendo que no existe absorción por parte del medio, calcula el nivel de intensidad, en dB, a 3 km del foco.

La intensidad sonora, en dB, podemos calcularla mediante la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde d_0 es la distancia umbral, donde la sensación sonora es nula.

Con los datos del enunciado podemos calcular el nivel de intensidad a 3 km del foco:

$$S = 20 \cdot log \frac{d_0}{d} \rightarrow S = 20 \cdot log \frac{30}{3} = 20 \text{ dB}$$

5. En la actividad anterior, calcula la distancia a que debemos encontrarnos del foco, para que el nivel de intensidad alcance 60 dB.

En este ejercicio conocemos la sensación sonora y debemos calcular la distancia, *d*. Despejando de la siguiente igualdad, obtenemos:

$$S = 20 \cdot log \frac{d_0}{d} \rightarrow 10^{\frac{S}{20}} = \frac{d_0}{d} \rightarrow d = \frac{d_0}{10^{\frac{S}{20}}} = \frac{30\,000}{10^{\frac{60}{20}}} = 30 \text{ m}$$

6. Mediante un sonómetro se mide el nivel de ruido en una discoteca, cifrándose dicho nivel en 110 dB. Calcula la intensidad media, en W · m^{-2}, de ruido en el local.

La intensidad sonora podemos calcularla mediante la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es la intensidad umbral, que es de 10^{-12} W · m^{-2}.

Con los datos del enunciado podemos calcular la intensidad media, *I*, para la cual la sensación sonora es de 110 db:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{S}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{110}{10}} = 0{,}1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

7. En una gran ciudad existen estaciones de medida y control del ruido ambiental. En una de estas estaciones, situada en una céntrica plaza, se puede leer que el nivel de ruido es 77,8 dB. Calcula la intensidad media, expresada en W · m^{-2}, de ruido que hay en la plaza.

A partir de la siguiente expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es la intensidad umbral, que es de 10^{-12} W · m^{-2}, calculamos la intensidad media, I, para la que la sensación sonora es de 77,8 db:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{S}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{77,8}{10}} = 6,03 \cdot 10^{-5}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

8. Calcula la intensidad de un sonido de 7 000 Hz que produce la misma sensación sonora (en fon) que otro sonido de 200 Hz cuyo nivel de intensidad es 40 dB.

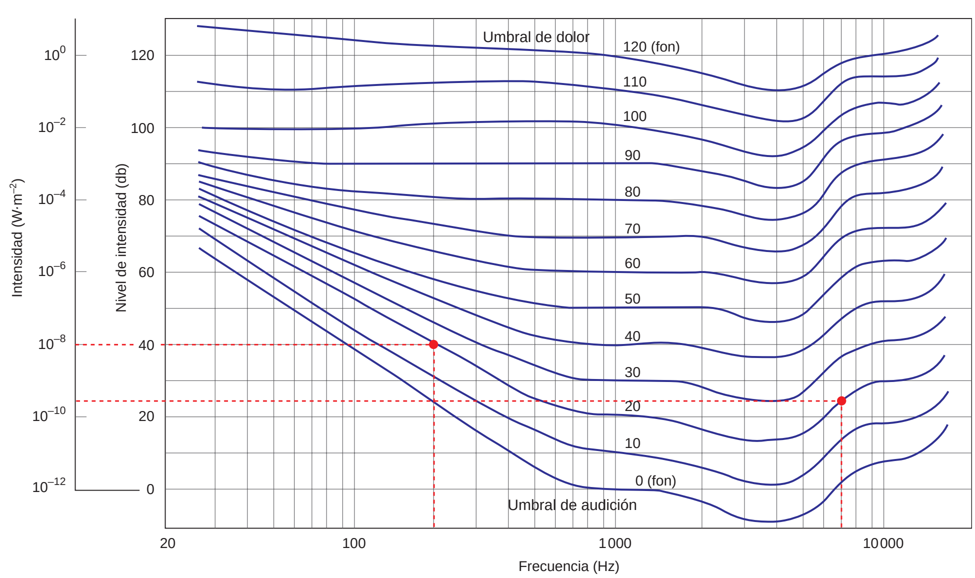
Según se aprecia en la gráfica de la página 146 del libro del alumno, la sensación sonora, en fon, de un sonido de 200 Hz y 40 dB de nivel de intensidad es, aproximadamente:

$$S_{200\ \text{Hz}} = 20 \text{ fon}$$

Para averiguar la intensidad de un sonido de 7 000 Hz que produce esa misma sensación sonora, 20 fon, debemos buscar, en la gráfica mencionada, el valor de la intensidad (la ordenada) correspondiente al punto de corte de la curva que corresponde a la sensación sonora de 20 fon con la abscisa $f = 7\,000$ Hz. Haciendo esto obtenemos:

$$I = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Curvas de igual sonoridad para distintas frecuencias



6.5. LA CONTAMINACIÓN ACÚSTICA

1. ¿Qué utilidad tiene el doble acristalamiento que se pone en las ventanas de las viviendas de nueva construcción?

El doble acristalamiento que se coloca en las ventanas de algunas viviendas de nueva construcción cumple una doble función: sirve para mitigar los efectos de la contaminación acústica y, por otro lado, actúa como un excelente aislante térmico.

2. **El aire que encierran entre sí los dos cristales que forman el doble acristalamiento es aire seco. ¿Qué pasaría si fuese aire húmedo?**

La conductividad térmica del aire seco es mucho menor que la del aire húmedo. El aire seco, al estar encerrado dentro del doble acristalamiento, convierte la ventana en una cámara estanca que evita, en su mayor parte, que la energía escape de la vivienda por conducción. Además, de ese modo, la insonorización acústica es mejor.

3. **Propón algunas soluciones que sirvan para mitigar la contaminación acústica que produce la circulación en una autopista.**

El ruido producido por los coches que circulan por una autopista es una sensación bastante molesta, especialmente cuando esta pasa cerca de núcleos urbanos de población. Para disminuir sus efectos se han ideado varias soluciones. En primer lugar, las autopistas se construyen sobre depresiones en el suelo. De ese modo, el ruido producido por la circulación de los automóviles rebota contra los taludes y se amortigua.

Además, se coloca masa vegetal a su alrededor, lo que ayuda a minimizar el impacto acústico. Esta solución se complementa, especialmente en los casos en que la anterior no es posible, como ocurre cuando el núcleo urbano está muy cerca de la autopista, con la instalación de barreras físicas, como muros de hormigón o acristalamientos. De este modo, el sonido se refleja y vuelve a la autopista amortiguado, sin propagarse apenas fuera de ella.

4. **Calcula el espesor de semiabsorción de un material, sabiendo que, con un espesor de 10 cm, reduce a la décima parte la intensidad de una onda sonora.**

La intensidad que resulta cuando una onda atraviesa cierto expesor, x, de un material absorbente se puede calcular utilizando la expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

En este caso:

$$I = \frac{I_0}{10} \quad ; \quad x = 0{,}1 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\frac{I_0}{10} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 0{,}1} \rightarrow ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\beta \cdot 0{,}1 \rightarrow -ln\ 10 = -\beta \cdot 0{,}1$$

$$\beta = \frac{-ln\ 10}{-0{,}1} = 23 \text{ m}^{-1}$$

Si tenemos en cuenta ahora la relación entre el espesor de semiabsorción, $D_{1/2}$ y el coeficiente de absorción de un material, β, obtenemos el primero:

$$D_{1\backslash 2} = \frac{ln2}{\beta} = \frac{0{,}693}{0{,}23} = 0{,}030 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

6.6. EFECTO DOPPLER

1. **La frecuencia con que emite la bocina de un coche estacionado es 400 Hz. Calcula la frecuencia que percibe un receptor que se mueve hacia el coche con una velocidad de 100 km · h^{-1}.**

En este caso, el receptor se mueve radialmente respecto al foco, acercándose a este. Por tanto:

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) = 400 \cdot \left(1 + \frac{100 \cdot \frac{1\,000}{3\,600}}{340}\right) = 432{,}68 \text{ Hz}$$

Al acercarse el receptor al foco emisor, la frecuencia aparente aumenta.

2. Un tren que se mueve a una velocidad de 90 km · h⁻¹ se acerca a una estación y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 650 Hz. Calcula la longitud de onda de las ondas sonoras que se propagan delante del tren.

Calcula también la frecuencia que percibe un observador situado en la estación. Dato: La velocidad del sonido en el aire es 344 m · s⁻¹.

En este caso el foco se desplaza radialmente respecto al observador, acercándose a este. Por tanto, la frecuencia que percibe un observador situado en la estación es:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v - v_F} = 650 \cdot \frac{344}{344 - 90 \cdot \frac{1\,000}{3\,600}} = 700{,}94 \text{ Hz}$$

Por tanto, la frecuencia que percibe el observador aumenta.

La longitud de onda aparente de las ondas debida al movimiento del foco es:

$$\lambda' = \lambda - \frac{v_F}{f}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344}{650} = 0{,}53 \text{ m}^{-1}$$

Obtenemos:

$$\lambda' = 0{,}53 - \frac{90 \cdot \frac{1\,000}{3\,600}}{650} = 0{,}49 \text{ m}^{-1}$$

3. Calcula la velocidad, en km · h⁻¹, a la que viaja un reactor cuya velocidad es Mach 1,8.

El número de Mach es la relación que existe entre la velocidad con que se desplaza un foco sonoro y la velocidad con que se propaga el sonido en el medio por el que se desplaza:

$$N.^o \ Mach = \frac{v_f}{v_{sonido}}$$

Para un avión que se desplaza en el aire a una velocidad de 1,8 Mach:

$$Mach = \frac{v_{avión}}{v_{sonido\_aire}} \rightarrow v_{avión} = v_{sonido\_aire} \cdot Mach =$$

$$= 340 \cdot 1{,}8 = 612 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2\,203 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

4. Expresa, en km · h^{-1}, la velocidad a la que debe moverse un objeto para "romper" la barrera del sonido en el aire, es decir, para desplazarse más rápido que el sonido.

Suponiendo que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m · s^{-1}, para romper la barrera del sonido el objeto se moverá a una velocidad, en km · h^{-1}, superior a:

$$340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1\text{ km}}{1\,000\text{ m}}\cdot\frac{3\,600\text{ s}}{1\text{ h}} = 340\cdot 3{,}6 = 1224\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \rightarrow v > 1224\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Indica si podemos aplicar las afirmaciones que siguen a las ondas sonoras que emite un gong cuando es golpeado.

a) Emite ondas transversales.

b) Emite ondas estacionarias.

c) El aire de desplaza desde el gong hasta el oído.

d) Existe un transporte neto de materia.

e) La onda se amortigua al propagarse.

a) **Falso.** Las ondas sonoras son longitudinales; las partículas vibran en la dirección en que se propagan las ondas.

b) **Falso.** En este caso no existe ningún tubo o cuerda donde podamos asegurar que la onda, en los extremos, tiene determinado estado de vibración.

c) **Falso.** El aire no se desplaza, sino que vibra, transmitiendo una onda de presión.

d) **Falso.** Existe un transporte de energía, pero no de materia.

e) **Verdadero.** La onda se amortigua al propagarse, tanto por efecto de la atenuación (debida a la distancia) como de la absorción (fruto del rozamiento con el aire).

2. Indica si podemos aplicar las afirmaciones que siguen a las ondas sonoras que emite una flauta cuando suena.

a) Emite ondas longitudinales.

b) Emite ondas estacionarias.

c) El aire se desplaza desde la flauta al oído.

d) La energía se transmite desde la flauta hasta el oído.

a) **Verdadero.** Las ondas emitidas por una flauta son ondas sonoras y, como tales, son ondas longitudinales.

b) **Verdadero.** La flauta aprovecha las ondas estacionarias que se producen en un tubo hueco, que es la estructura básica de un instrumento de viento. Las ondas se reflejan en los extremos del tubo, formando un nodo o un vientre, dependiendo del lado del tubo que consideremos.

c) **Falso.** El aire no se desplaza, sino que vibra, transmitiendo una onda de presión.

d) **Verdadero.** Efectivamente, la onda sonora transmite la energía desde la flauta hasta nuestro oído.

3. Explica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) La velocidad del sonido en el aire, a 20 ºC es doble que a 10 ºC.

b) Dos sonidos de la misma intensidad y la misma frecuencia son indistinguibles sea cual sea la fuente sonora.

c) Si la intensidad de una onda sonora se duplica, también se duplica la sensación sonora que produce dicho sonido.

d) Una onda de choque se produce cuando un foco sonoro se desplaza a mayor velocidad que el sonido.

a) **Falso.** Si consideramos el aire como un gas ideal, de composición constante, formado por partículas diatómicas, la velocidad de propagación de las ondas sonoras, expresada en $m \cdot s^{-1}$, resulta proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta:

$$v = 20{,}1 \cdot \sqrt{T}$$

Por tanto, a una temperatura $T_1 = 10\ °C = 283\ K$:

$$v_1 = 20{,}1 \cdot \sqrt{283} = 338{,}13\ m \cdot s^{-1}$$

Y a otra $T_2 = 20\ °C = 293\ K$:

$$v_2 = 20{,}1 \cdot \sqrt{293} = 344{,}06\ m \cdot s^{-1}$$

Como se observa, la velocidad del sonido no se duplica al hacerlo la temperatura del aire.

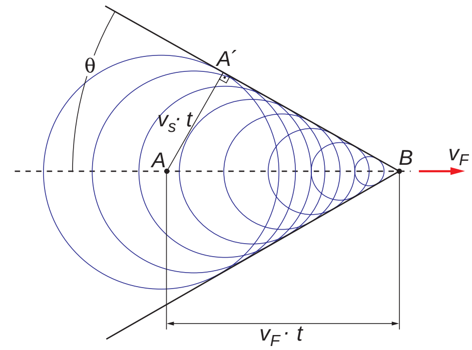
b) **Falso.** Además de la intensidad y la frecuencia (tono), un sonido difiere de otros en el timbre.

c) **Falso,** ya que la relación entre la sensación sonora y la intensidad de la onda sonora no es directa, sino logarítmica:

$$S = log \frac{I}{I_0}$$

d) **Verdadero.** Cuando un foco sonoro se mueve con $v > v_{sonido}$, la situación que se produce es la del gráfico de la página siguiente:

En él se observa que el foco no tiene ondas delante, mientras que detrás las ondas se apilan unas encima de otras formando lo que se conoce como onda de choque u onda de Mach. Cuando la onda de choque llega al receptor se oye un fuerte estampido sónico. Se dice entonces que la fuente sonora "ha roto la barrera del sonido".



4. ¿Qué característica, acerca de la forma de la onda, distingue las notas musicales del ruido?

La forma de las ondas musicales es periódica. Aunque su forma no sea perfectamente senoidal (excepto si se trata de notas puras), una nota musical se caracteriza por ser periódica: la forma de la onda se repite cada cierto intervalo de tiempo.

En cambio, las ondas de ruido son completamente irregulares. No puede definirse en ellas un período, porque su evolución es totalmente aleatoria. Su forma cambia continuamente.

5. ¿Por qué deben afinarse los instrumentos musicales? ¿Influye la temperatura en la frecuencia que emite un instrumento de viento?

Las frecuencias a las que puede emitir un instrumento musical con nodo en un extremo y vientre en otro y las de un instrumento con vientres o nodos en ambos extremos son, respectivamente:

$$f_n = \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot v}{4 \cdot l} \quad ; \quad f_n = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$$

Observa que, en ambas expresiones, aparece un término que corresponde a la velocidad de propagación del sonido en el aire. Dicha velocidad depende de la temperatura, de acuerdo con la relación:

$$v = 20{,}1 \cdot \sqrt{T}$$

Por tanto, al hacer sonar una misma nota, si aumenta la temperatura del instrumento musical, aumenta la frecuencia a la que emite, y suena más agudo. Del mismo modo, al descender la temperatura, el instrumento disminuye la frecuencia a la que emite la nota, y suena más grave. Para contrarrestar este fenómeno, podemos variar la longitud, *l*, del tubo que suena. Es lo que hace un clarinetista cuando introduce o saca ligeramente la campana del clarinete.

6. Al emitir un sonido agudo se puede llegar a romper una copa de vidrio fino. ¿Por qué?

Este hecho es un ejemplo de resonancia de las ondas materiales; en este caso, de resonancia de las ondas sonoras (ondas de presión).

Las ondas sonoras actúan sobre el vidrio, que, al entrar en resonancia, sobrepasa su límite elástico, rompiéndose.

7 ¿Se puede considerar el decibel como unidad de intensidad?

No. El bel es la unidad de sensación sonora, y su décima parte es el decibel. La unidad de intensidad sonora es el W · m^{-2}.

8. Un sonido de 60 dB, ¿tiene doble intensidad que otro de 30 dB?

El nivel de intensidad sonora, expresado en decibel, se puede calcular de acuerdo con la siguiente expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \text{ dB}$$

Por tanto, para cada caso podemos escribir:

$$S_1 = 10 \cdot log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{S_1}{10}} = I_0 \cdot 10^{\frac{60}{10}} = I_0 \cdot 10^6$$

$$S_2 = 10 \cdot log \frac{I_2}{I_0} \rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{S_2}{10}} = I_0 \cdot 10^{\frac{30}{10}} = I_0 \cdot 10^3$$

Por tanto, la relación entre las intensidades es:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 \cdot 10^6}{I_0 \cdot 10^3} = 10^3 = 1\,000$$

Un sonido de 60 dB tiene 1 000 veces más intensidad que otro de 30 dB.

9. Se puede oír lo que se dice al otro lado de una esquina, pero no se puede ver sin asomarse. ¿Cómo explicas ese fenómeno?

Se debe a sus diferentes longitudes de onda. Las ondas sonoras de longitud de onda más corta son las que corresponden a una frecuencia de 20 000 Hz:

$$\lambda_{\text{son mín}} = \frac{v}{f} = \frac{340}{20\,000} = 0{,}017 \text{ m}$$

Las ondas luminosas de longitud de onda más larga corresponden a las de menor frecuencia (rojo):

$$\lambda_{\text{lum máx}} = \frac{c}{f_{\text{rojo}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} = 7{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Observa que:

$$\lambda_{\text{son mín}} >> \lambda_{\text{lum máx}}$$

Esto implica que los “obstáculos” o “rendijas” que producen difracción en las ondas sonoras son de dimensiones mucho mayores que las que la provocan en la luz (caso de las esquinas).

10. Dos altavoces están emitiendo una nota proporcionada por un generador de señales puras. Si nos situamos en medio de los dos altavoces, observamos que el sonido es más fuerte que si nos desplazamos a cualquiera de los dos lados. ¿Responde alguna de las siguientes afirmaciones a por qué se produce este fenómeno?

a) Se produce una refracción del sonido entre los dos altavoces.

b) Se produce una interferencia destructiva entre los dos altavoces.

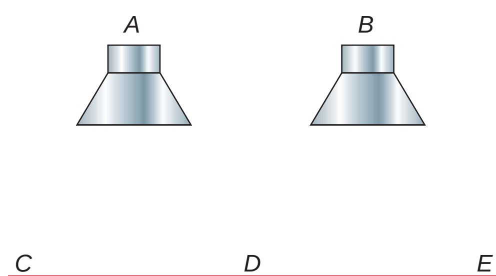
c) Es consecuencia del efecto Doppler.

d) Se produce una interferencia constructiva entre los dos altavoces.

La respuesta correcta es la **d).**

Se produce una interferencia constructiva. Debido a ello, las amplitudes sonoras se suman y la intensidad sonora aumenta.

11. Se sitúan como se indica en la figura dos altavoces, *A* y *B*, que producen la misma nota (mismo tono y timbre) con la misma intensidad. Un micrófono recorre la línea *CE* y se observa que hay posiciones en las que el sonido es más intenso que en otras.



a) ¿Por qué existen esas regiones? ¿Dónde puedes situar una de ellas?

b) ¿Qué puede deducirse acerca de las dos fuentes, si las distancias *AD* y *BD* son iguales?

a) Lo que recoge el micrófono pone de manifiesto el fenómeno de interferencia. En aquellos puntos en los que la interferencia es constructiva, la amplitud de la onda será mayor, y, en consecuencia, aumentará la intensidad sonora, mientras que en los puntos con interferencia destructiva, la intensidad sonora se reducirá.

En el punto *D* habrá, probablemente, una zona de interferencia constructiva.

b) Para una interferencia constructiva:

$$x_{AD} - x_{BD} = \lambda \cdot n$$

y, para una interferencia destructiva:

$$x_{AD} - x_{BD} = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

Si las distancias *AD* y *BD* son iguales, debe existir un máximo de intensidad (interferencia constructiva) en el punto *D*.

12. Un reproductor de cinta tiene un rango de frecuencias [200 - 6 000] Hz, mientras que otro comprende el rango de frecuencias [60 - 20 000] Hz.

a) ¿En qué se diferencian?

b) Si te ofreciesen un reproductor con un rango de frecuencias [600-30 000] Hz, ¿valdría la pena pagar más por él que por el segundo de los otros dos reproductores? ¿Por qué?

a) El segundo reproductor abarca un mayor campo de frecuencias sonoras; de hecho, abarca casi todo el campo de frecuencias audible para un oído humano. En el primero de ellos, los sonidos agudos no se pueden reproducir, lo que sí es posible en el segundo.

En el primer reproductor, el sonido pierde parte de su timbre (además de no reproducirse los sonidos agudos, no se reproducen los armónicos de aquellos sonidos de menor frecuencia que están por encima de 6 000 Hz). Ello hace que el sonido que emite el aparato no sea tan agradable.

b) No valdría la pena. El límite audible de un oído humano sano está comprendido entre 20 Hz y 20 000 Hz. Por tanto, es absurdo pagar un precio extra por un aparato que emite sonido en un rango de frecuencias [20 000 - 30 000] Hz, que nuestro oído es incapaz de detectar.

EJERCICIOS

13. La nota *do* natural de la escala musical tiene una frecuencia de 262 Hz. Calcula la longitud de onda que le corresponde en el aire y en el agua. (Velocidad del sonido en el agua: $v_a = 1\,500$ m · s^{-1}).

La expresión que relaciona la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas sonoras es:

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

Por tanto, la longitud de onda de la nota *do* natural en el aire es:

$$\lambda\,(\text{aire}) = \frac{v_{sonido}\,(\text{aire})}{f} = \frac{340}{262} = 1{,}30 \text{ m}$$

Y en el agua:

$$\lambda\,(\text{agua}) = \frac{v_{sonido}\,(\text{agua})}{f} = \frac{1\,500}{262} = 5{,}73 \text{ m}$$

Recuerda que la frecuencia es una magnitud propia del movimiento ondulatorio.

14. La frecuencia de la nota *do* una octava por encima del *do* natural es doble que la de este. Explica a qué es debido y calcula la longitud de onda que le corresponde en el aire y en el agua.

Lo que se enuncia en el ejercicio es la relación entre la frecuencia de una misma nota en dos octavas consecutivas. Básicamente, la frecuencia de cada tecla de la octava que sigue a otra es el doble de la que corresponde a la misma tecla de la octava anterior. Del mismo modo, la frecuencia de la misma tecla que le precede en la octava anterior es la mitad. Por ejemplo, para el caso de la nota *la*:

$$f\,(\textit{la} \text{ natural}) = 440 \text{ Hz}$$

$$f\,(\textit{la} \text{ anterior}) = \frac{440}{2} = 220 \text{ Hz}$$

$$f\,(\textit{la} \text{ siguiente}) = 440 \cdot 2 = 880 \text{ Hz}$$

Por tanto, si tenemos en cuenta los datos del ejercicio anterior:

$$v_{sonido}(\text{agua}) = 1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad f\,(do \text{ natural}) = 262 \text{ Hz}$$

la frecuencia de la nota *do* de la siguiente octava será:

$$f\,(do \text{ siguiente}) = 2 \cdot f\,(do \text{ natural}) = 2 \cdot 262 = 524 \text{ Hz}$$

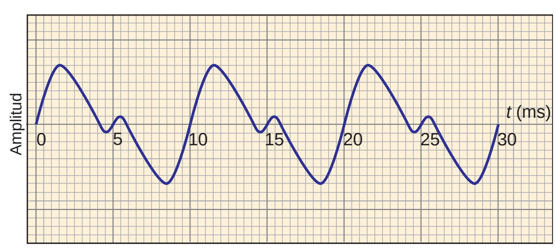
Por tanto:

$$\lambda\,(\text{aire}) = \frac{v_{sonido}\,(\text{aire})}{f} = \frac{340}{524} = 0{,}65 \text{ m}$$

$$\lambda\,(\text{agua}) = \frac{v_{sonido}\,(\text{agua})}{f} = \frac{1\,500}{524} = 2{,}86 \text{ m}$$

Observa que, en cada caso, la longitud de onda es la mitad de la calculada en el apartado anterior, lo cual es lógico, dado que las velocidades de propagación en el aire y en el agua no varían y que la frecuencia es una magnitud propia de la onda sonora.

15. La figura muestra la onda que produce una fuente sonora. En el gráfico se representa la amplitud de la onda en función del tiempo.



a) ¿Qué podemos decir acerca de la nota emitida? ¿Es una nota pura?

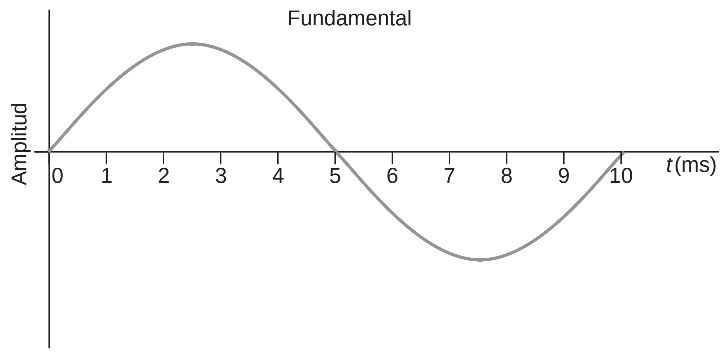
b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental con que se emite este sonido?

c) ¿Qué frecuencia tiene el armónico que acompaña a la nota fundamental?

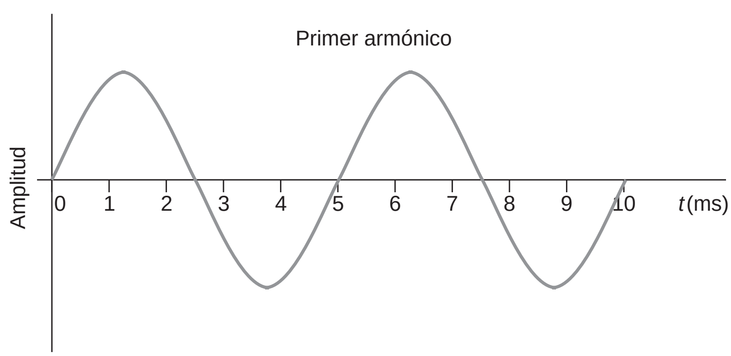
a) La nota emitida no es una nota pura, porque la forma de onda no es completamente senoidal.

b) El período de una nota con armónicos no difiere respecto al de la nota fundamental pura. Esto se debe a que los armónicos son notas cuya frecuencia es múltiplo de la que corresponde a la nota fundamental. En este caso, la nota fundamental tiene un período de 10 ms, lo que supone una frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ Hz}$$



c) Cuando la amplitud de la nota fundamental pasa por 0, también lo hace el armónico. Este hecho es el que nos da la clave para calcular su período. Si nos fijamos en la forma de la onda resultante, deducimos que el período del armónico es 5 ms.

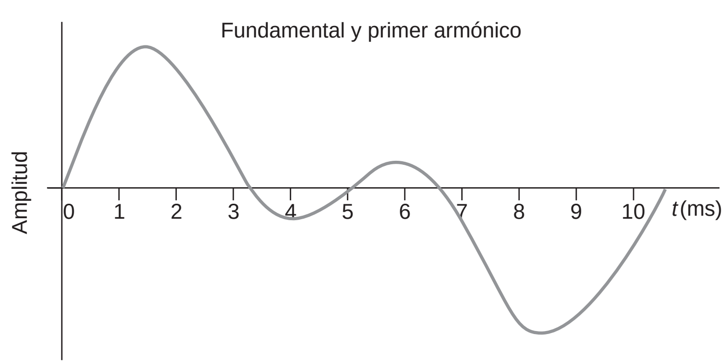


Por tanto, su frecuencia resulta:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$$

que es un múltiplo de la fundamental, 100 Hz.

La suma de ambas nos da como resultado la que nos proponen en el enunciado:



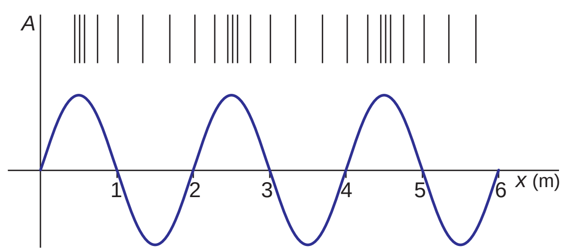
16. El sónar ha sido utilizado en muchas aplicaciones, principalmente en navegación. Un barco pesquero utiliza esta forma de localización por ecos para buscar bancos de peces. El barco lanza un primer sonido, que es recibido 60 milisegundos después. Si la velocidad del sonido en el agua es 1 500 m/s, calcula a qué distancia están nadando los peces.

En 60 milisegundos, la onda sonora va y vuelve. Por tanto, para llegar hasta los peces solo necesita la mitad del tiempo: 30 milisegundos.

De acuerdo con ello, la distancia a la que se encuentran es:

$$d = v \cdot t = 1\,500 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 45 \text{ m}$$

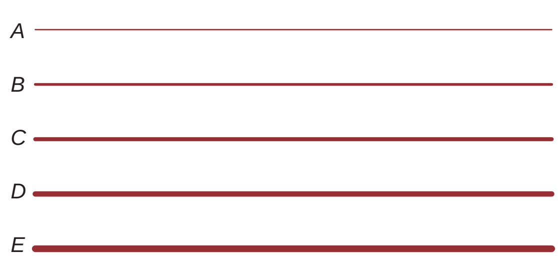
17. Un diapasón está generando ondas de 165 Hz. La longitud de onda se puede ver en el gráfico. Calcula la velocidad de propagación del sonido en el aire en esas condiciones.



Como se aprecia en la ilustración, la longitud de onda es 2 m. Por tanto, la velocidad de propagación del sonido en el aire debe ser:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda \cdot f = 165 \cdot 2 = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

18. En la figura se muestran varias cuerdas, que son iguales en todo menos en grosor. ¿A cuál de ellas le corresponde la frecuencia fundamental más alta?



Si suponemos un modelo ideal, como el que venimos estudiando, la frecuencia fundamental de la cuerda la podemos calcular a partir de la expresión:

$$f_n = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} \rightarrow f_1 = \frac{v}{2 \cdot l}$$

Como vemos, solo depende de la longitud. Ello nos permite afirmar que la frecuencia fundamental de todas ellas es la misma.

Sin embargo, lo cierto es que las cuerdas más finas tienen una frecuencia fundamental superior (suenan más agudo). Este hecho debe atribuirse a la facilidad que tiene una cuerda de menor masa para vibrar, como consecuencia de un menor rozamiento con el aire. De hecho, en los instrumentos de cuerda, las cuerdas de mayor grosor producen notas más graves, y las más finas, notas más agudas. La respuesta correcta es ***A***.

19. En la figura se muestran varias cuerdas, que son iguales en todo menos en longitud. ¿A cuál de ellas le corresponde la frecuencia fundamental más alta?

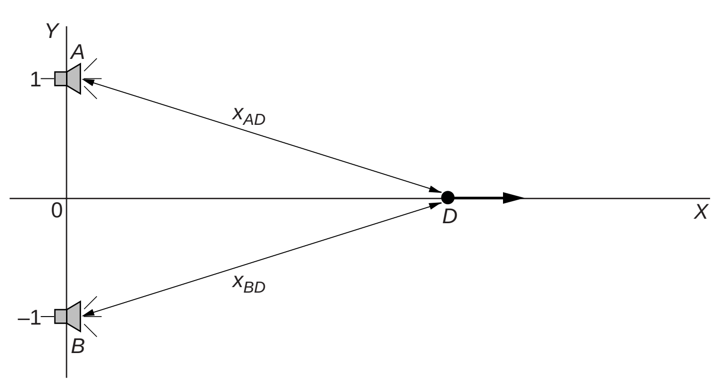
La frecuencia fundamental de una cuerda que vibra la podemos calcular a partir de la expresión:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$$

Por tanto, cuanto menor sea la longitud de la cuerda, mayor será la frecuencia fundamental (más aguda sonará). La respuesta correcta es ***A***.

20. Dos altavoces están accionados en fase por un amplificador y emiten con una frecuencia de 600 Hz. Los altavoces están situados sobre el eje *OY*, uno en (0, 1) m y el otro en (0, –1) m. Un observador situado en el origen comienza a moverse por el eje de abscisas, hacia valores positivos de este. Calcula el ángulo para el que se recibirá el primer máximo y el primer mínimo de interferencia (excluye el origen como solución del problema).

La representación del problema es:



Los puntos que registran un máximo han de cumplir la siguiente relación:

$$x_{AD} - x_{BD} = \lambda \cdot n$$

y los que registran un mínimo:

$$x_{AD} - x_{BD} = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

En la línea por la que se mueve el observador, todos los puntos equidistan respecto de ambos altavoces: $x_{AD} = x_{BD}$ ($n = 0$). Por tanto, la condición de máximo se dará en todos los puntos y, en consecuencia, la interferencia será constructiva en todos ellos.

21. Calcula el nivel de intensidad sonora de una onda cuya intensidad es de 10^{-10} W · m^{-2}. (Intensidad umbral: $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}).

Para calcular el nivel de intensidad sonora, en dB, hacemos uso de la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

Por tanto:

$$S = 10 \cdot log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20 \text{ dB}$$

22. Calcula la intensidad de una onda sonora que produce una sensación sonora de 30 dB.

La intensidad de la onda sonora, expresada en W · m^{-2}, se calcula como sigue:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{S}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{30}{10}} = 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

23. Demuestra que si se duplica la intensidad de una onda sonora, el nivel de intensidad aumenta en 3 dB.

La expresión que relaciona la intensidad de una onda sonora con el nivel de intensidad es:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{S_1}{10}}$$

Al imponer la condición de que la intensidad de una onda sea el doble de la que corresponde a la otra, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{S_1}{10}} \\ I_2 = 2 \cdot I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{S_2}{10}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{2 \cdot I_1}{I_1} = \frac{I_0 \cdot 10^{\frac{S_2}{10}}}{I_0 \cdot 10^{\frac{S_1}{10}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 = 10^{\frac{S_2 - S_1}{10}} \rightarrow log\, 2 = \frac{S_2 - S_1}{10} \rightarrow 10 \cdot log\, 2 = S_2 - S_1$$

$$S_2 \simeq 3 + S_1$$

Efectivamente, el nivel de intensidad aumenta en 3 dB.

24. Un reactor se mueve a una velocidad Mach 2,5 a una altura de 5 000 m. Calcula el ángulo que la onda de choque forma con la trayectoria del reactor.

El ángulo de la onda de choque se puede calcular teniendo en cuenta la relación deducida en la página 151 del libro del alumnado:

$$sen\ \theta = \frac{v_s}{v_F}$$

En ella, v_s es la velocidad de la onda, en este caso el sonido, y v_F la velocidad del foco. El número de Mach, dato que proporciona el enunciado, es la relación inversa:

$$\text{Número de Mach} = \frac{v_F}{v_s} \rightarrow v_F = \text{Número de Mach} \cdot v_s$$

$$v_F = 2{,}5 \cdot 340 = 850 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El ángulo de la onda de choque es:

$$sen\ \theta = \frac{v_s}{v_F} \rightarrow \theta = arcsen\ \frac{v_s}{v_F} = arcsen\ \frac{340}{850} = 23{,}58°$$

PROBLEMAS

25. Una onda sonora, que se propaga por el aire, produce una variación de presión que viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{P\,(x,\, t) = sen\left[\pi \cdot \left(\frac{x}{2} + 170 \cdot t\right)\right]}$$

en la que *P* se mide en pascal, *x* en metros y *t* en segundos. Calcula:

a) La amplitud de la presión.

b) La longitud de onda.

c) La frecuencia.

d) La velocidad de la onda sonora.

Para obtener las magnitudes que solicita el enunciado, identificamos la ecuación que nos proporciona este con la ecuación general de un movimiento ondulatorio:

$$P(x,\, t) = A \cdot sen\ (k \cdot x - \omega \cdot t)$$

a) La amplitud de la presión es de 1 Pa.

b) Teniendo en cuenta que:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad ; \quad k = \frac{\pi}{2}$$

la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi/2} = 4 \text{ m}$$

c) La frecuencia angular es:

$$\omega = 170 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la frecuencia de vibración será:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{170 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 85 \text{ Hz}$$

d) La velocidad de propagación de la onda sonora es:

$$v = \lambda \cdot f = 4 \cdot 85 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

que corresponde a la velocidad de las ondas sonoras.

26. Una persona deja caer verticalmente una piedra desde lo alto de un puente elevado y oye el choque contra el agua cuatro segundos después. Calcula la altura a que se encuentra del agua.

Los cuatro segundos que tarda la persona en oír el choque serán la suma del tiempo que tarda la piedra en chocar contra el agua (t_1) más el tiempo que tarda la onda sonora procedente del choque en alcanzar nuestros oídos. Teniendo en cuenta que la piedra efectúa una caída libre, podemos escribir:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + t_2 \rightarrow 4 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9,8}} + t_2 \qquad [1]$$

Por otro lado, la altura a que se encuentra el agua y el tiempo t_2 están relacionadas entre sí de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v_s = \frac{h}{t_2} \rightarrow h = v_s \cdot t_2 \rightarrow h = 340 \cdot t_2 \qquad [2]$$

Las expresiones [1] y [2] forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos a continuación:

$$4 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9,8}} + t_2 \rightarrow 4 = \sqrt{\frac{2 \cdot 340 \cdot t_2}{9,8}} + t_2 \rightarrow 4 - t_2 = \sqrt{69,39 \cdot t_2}$$

$$16 - 8 \cdot t_2 + t_2^2 = 69,39 \cdot t_2 \rightarrow t_2^2 - 77,39 \cdot t_2 + 16 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$t_2 = 0,21 \text{ s}$$

$$t_2 = 77,18 \text{ s}$$

Obviamente, el segundo resultado que ofrece la resolución es físicamente absurdo, porque es menor que 4 s; por tanto, $t_2 = 0,21$ s.

Si sustituimos el resultado en [2], obtenemos:

$$h = 340 \cdot t_2 = 340 \cdot 0,21 = 71,4 \text{ m}$$

27 Un altavoz emite con una potencia de 20 W.

a) Calcula la intensidad de la onda sonora a una distancia de 5 m del altavoz.

b) ¿Cuál será el nivel de intensidad de la onda sonora correspondiente, expresado en dB?

a) La intensidad sonora en función de la distancia a la que se encuentra la fuente se calcula con ayuda de la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{20}{4 \cdot \pi \cdot 5^2} = 6,37 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) Para expresar el valor en dB:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

siendo I_0 la intensidad umbral, que es de 10^{-12} W · m^{-2}. Por tanto, sustituyendo el dato obtenido en el apartado anterior, resulta:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot log \frac{6,37 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 108 \text{ dB}$$

28. Una fuente sonora emite con una potencia de 15 W. Determina:

a) La intensidad de esta fuente a 6 y 12 metros de distancia, respectivamente.

b) El nivel de intensidad de la onda sonora, en dB, para ambas situaciones.

c) ¿Cuál es la relación entre las amplitudes a 6 y 12 metros?

d) Despreciando la absorción del medio, ¿a qué distancia dejaría de escucharse el sonido?

a) La intensidad, en función de la distancia, se calcula con la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow \begin{cases} I_6 = \dfrac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \dfrac{15}{4 \cdot \pi \cdot 6^2} = 3,316 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ I_{12} = \dfrac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \dfrac{15}{4 \cdot \pi \cdot 12^2} = 8,29 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \end{cases}$$

b) Para calcular el nivel de intensidad de la onda sonora, expresado en dB, hacemos uso de la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es la intensidad umbral, que es 10^{-12} W · m^{-2}.

Por tanto:

$$S_6 = 10 \cdot log \frac{3,316 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 105,2 \text{ dB}$$

$$S_{12} = 10 \cdot log \frac{8,29 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 99,2 \text{ dB}$$

c) La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. De ese modo, resulta:

$$\frac{I_6}{I_{12}} = \frac{A_6^2}{A_{12}^2} \rightarrow \frac{A_6}{A_{12}} = \sqrt{\frac{I_6}{I_{12}}} = \sqrt{\frac{3,316 \cdot 10^{-2}}{8,29 \cdot 10^{-3}}} = 2$$

La amplitud de la onda a 6 m es doble que a 12 m.

d) La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d_0^2}{d^2}$$

A la distancia a la que el sonido dejaría de percibirse, suponiendo despreciable la absorción del medio, la intensidad del sonido debería ser, precisamente, la intensidad umbral. Por tanto:

$$\frac{I_6}{I_0} = \frac{d_0^2}{d_6^2} \rightarrow d_0 = d_6 \cdot \sqrt{\frac{I_6}{I_0}} \rightarrow d_0 = 6 \cdot \sqrt{\frac{3,316 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}}} \simeq 1\,093\,000 \text{ m} = 1\,093 \text{ km}$$

El resultado que obtenemos es absurdo, porque no tiene en cuenta la absorción de la onda por el medio, un fenómeno que tiene gran importancia.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

29. Se realizan medidas del nivel de ruido en el interior de una discoteca, siendo este de 96 dB. Si la pared tiene un espesor de 12 cm y su coeficiente de absorción es $\beta = 0{,}08$ cm^{-1}, calcula:

a) La intensidad de la onda sonora en el exterior.

b) El nivel de intensidad de la onda sonora o sensación sonora, en el exterior, expresado en dB.

a) En primer lugar, calculamos la intensidad sonora, expresándola en W · m^{-2}:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{S}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{96}{10}} = 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Teniendo en cuenta la absorción de la pared, la intensidad en el exterior resulta:

$$I' = I \cdot e^{-\beta \cdot x} = 3{,}98 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0{,}08 \cdot 12} = 1{,}52 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) Expresada en decibelios, esta intensidad sonora equivale a:

$$S = 10 \cdot log \frac{I'}{I_0} = 10 \cdot log \frac{1,52 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 91,8 \text{ dB}$$

30. A una altura de 2 m, el ruido del tráfico, en una calle de tráfico intenso, produce una sensación sonora de 80 dB. ¿Qué sensación sonora produce a una altura de 25 m?

La intensidad de la onda sonora, a una altura de 2 m, teniendo en cuenta el valor de la intensidad umbral, 10^{-12} W · m^{-2}, se calcula como sigue:

$$S_1 = 10 \cdot log \frac{I_{2\text{ m}}}{I_0} \rightarrow I_{2\text{ m}} = I_0 \cdot 10^{\frac{S_1}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Por tanto, la potencia de la onda sonora es:

$$I_{2\text{ m}} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r_1^2} \rightarrow P = I_{2\text{ m}} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_1^2 = 10^{-4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \text{ W}$$

Y el valor de la intensidad sonora a 25 m de altura:

$$I_{25\ \mathrm{m}} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r_2^2} \rightarrow P = \frac{16 \cdot 10^{-4} \cdot \pi}{4 \cdot \pi \cdot 25^2} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

Finalmente, obtenemos el valor de la sensación sonora a una altura de 25 m:

$$S_2 = 10 \cdot \log \frac{I_{25\ \mathrm{m}}}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{6{,}4 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 58\ \mathrm{dB}$$

31 Una cuerda se fija entre dos soportes que se encuentran a 1,36 m de distancia. La frecuencia de la nota fundamental que se obtiene al hacer vibrar la cuerda es 150 Hz. Si la cuerda se sujeta por un punto situado a 0,34 m de uno de los extremos y se hace vibrar ligeramente, ¿qué frecuencia escucharemos?

Conocida la frecuencia fundamental ($n = 1$), podemos obtener la velocidad del sonido en el medio:

$$f = \frac{v}{2 \cdot l} \rightarrow v = f \cdot 2 \cdot l = 150 \cdot 2 \cdot 1{,}36 = 408\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

El enunciado nos dice que la cuerda vibra ligeramente, lo que nos hace suponer que la cuerda, una vez acortada, emitirá también en su frecuencia fundamental, que será:

$$f = \frac{v}{2 \cdot l} = \frac{408}{2 \cdot 0{,}34} = 600\ \mathrm{Hz}$$

32. La nota más baja que podemos hacer sonar en un clarinete tiene una frecuencia de 147 Hz. Conocido ese dato, calcula la longitud efectiva que debe tener el clarinete, si puede asimilarse a una columna de aire con uno de los extremos abierto y el otro cerrado.

Para un tubo abierto por un solo extremo, la relación entre frecuencia y longitud viene dada por:

$$f = \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot v}{4 \cdot l} \quad \forall n = 0, 1, 2\ldots$$

Cuando hablamos de la frecuencia de la nota más baja, $n = 0$, y la longitud del tubo resulta:

$$f = \frac{v}{4 \cdot l} \rightarrow l = \frac{v}{4 \cdot f} = \frac{340}{4 \cdot 147} = 0{,}578\ \mathrm{m} = 57{,}8\ \mathrm{cm}$$

33. Calcula los armónicos que presenta una flauta por debajo de 1 350 Hz si su longitud efectiva es de 62 cm.

A partir de la longitud efectiva de la flauta, hemos de calcular, para una frecuencia igual a 1 350 Hz, el número, n, que corresponde al armónico. A partir de ahí bajaremos dicho número, n, de unidad en unidad, a fin de obtener los armónicos restantes.

Teniendo en cuenta que una flauta puede considerarse un tubo con sus dos extremos abiertos, el armónico correspondiente a esta frecuencia resulta:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v \cdot n}{2 \cdot L} \rightarrow n = \frac{2 \cdot f_n \cdot L}{v} = \frac{2 \cdot 1350 \cdot 0,62}{340} = 4,92$$

Aproximamos a $n = 5$, ya que el valor de la velocidad del sonido en el aire puede variar fácilmente en función de la temperatura y n debe ser un número entero.

Los armónicos que quedan por debajo de $n = 5$ se recogen en la tabla que sigue. Hemos tomado para la velocidad del sonido en el aire: $v = 340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Número de armónico, *n*	4	3	2	1
Frecuencia (Hz)	1 097	822	548	274

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34. **Un órgano con tubos abiertos por ambos extremos es capaz de reproducir sonidos comprendidos entre 65 Hz y 2 090 Hz. Calcula la longitud que corresponde al tubo más largo y al tubo más corto de ese órgano.**

En ambos casos, el enunciado se refiere a las frecuencias fundamentales de los tubos ($n = 1$). Por tanto, las longitudes asociadas a dichas frecuencias resultan:

$$f_1 = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} \rightarrow l_1 = \frac{n \cdot v}{2 \cdot f_1} = \frac{1 \cdot 340}{2 \cdot 65} = 2,62\ \text{m}$$

$$f_2 = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} \rightarrow l_2 = \frac{n \cdot v}{2 \cdot f_2} = \frac{1 \cdot 340}{2 \cdot 2\,090} = 8,13 \cdot 10^{-2} = 8,13\ \text{cm}$$

35 **¿Cuál es la relación entre las intensidades de dos sonidos de 60 y 70 dB?**

Las intensidades de dichos sonidos serán:

$$S_1 = 10 \cdot log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{70}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{70}{10}} = 1 \cdot 10^{-5}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$S_2 = 10 \cdot log \frac{I_2}{I_0} \rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

siendo la relación entre ambas: $I_1/I_2 = 10$.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

36. **¿Qué relación existe entre las intensidades de dos sonidos de 83 y 93 dB?**

Las intensidades de dichos sonidos serán:

$$S_1 = 10 \cdot log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{93}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{93}{10}} = 1,99 \cdot 10^{-3}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$S_2 = 10 \cdot log \frac{I_2}{I_0} \rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{83}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{83}{10}} = 1,99 \cdot 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

siendo la relación entre ambas: $I_1/I_2 = 10$.

37. ¿Qué conclusiones podemos extraer de las dos actividades anteriores?

Debido a la escala logarítmica empleada para la sonoridad, si dos sensaciones sonoras tienen una diferencia de diez unidades (esto es, 10 db), una intensidad es diez veces superior a la otra.

38. El tímpano tiene un área de unos 85 mm². Calcula la intensidad sonora que recibe si es alcanzado por una onda sonora de 100 dB que no se refleja, sino que se transmite por completo.

La intensidad sonora que llega al tímpano la obtenemos a partir de la definición de la sensación sonora:

$$S_1 = 10 \cdot log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 0,01 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

39. En el problema anterior, calcula la potencia, medida en watt, que recibe el tímpano al ser alcanzado por el sonido.

Si tenemos en cuenta el área del tímpano, la potencia que este recibe es:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow P = I \cdot S = 0,01 \cdot (85 \cdot 10^{-6}) = 85 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

40 Se quiere construir el cerramiento de un local de ocio. Se calcula que dentro de él la intensidad sonora será 100 dB. Sin embargo, por imposición de las ordenanzas de ruido de la ciudad, el nivel que puede llegar al exterior no debe sobrepasar los 60 dB. Si la pared del local ha de medir 15 cm, calcula el coeficiente de absorción mínimo del cerramiento, para que el local cumpla la normativa.

La intensidad sonora en el interior y en el exterior del local es, respectivamente, de 100 dB y 60 dB. Expresado en W · m^{-2}, resulta:

$$S_{int} = 10 \cdot log \frac{I_{int}}{I_0} \rightarrow I_{int} = I_0 \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$S_{ext} = 10 \cdot log \frac{I_{ext}}{I_0} \rightarrow I_{ext} = I_0 \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Sustituyendo en la expresión que permite calcular la absorción, despejamos el valor que corresponde al coeficiente de absorción del material:

$$I_{ext} = I_{int} \cdot e^{-\beta \cdot x} \rightarrow \beta = \frac{ln\left(\frac{I_{ext}}{I_{int}}\right)}{-x} = \frac{ln\left(\frac{10^{-6}}{10^{-2}}\right)}{-0,15} = 61,40 \text{ m}^{-1}$$

41. Calcula la fracción de potencia acústica que habrá de eliminarse para disminuir el nivel de intensidad de un ruido de 90 a 60 dB.

La potencia de una onda está relacionada con su intensidad por medio de la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow P = I \cdot S$$

Por tanto, calcular la fracción de potencia es equivalente a calcular la relación entre la intensidad inicial de la onda y su intensidad después de haber reducido el nivel de intensidad hasta el valor deseado.

Las intensidades de la onda correspondientes a los niveles de intensidad de 90 dB y 60 dB se calculan a partir de la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde S es el nivel de intensidad, e I_0, la intensidad umbral, de valor 10^{-12} W · m^{-2}. Por tanto:

$$90 = 10 \cdot log \frac{I_{90}}{I_0} \rightarrow I_{90} = I_0 \cdot 10^{\frac{90}{10}} = 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$60 = 10 \cdot log \frac{I_{60}}{I_0} \rightarrow I_{60} = I_0 \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La fracción de intensidad que hay que eliminar es:

$$\chi_{eliminar} = 1 - \frac{I_{60}}{I_{90}} = 0,999$$

Por tanto, la potencia de la onda debe rebajarse en un 99,9%.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42. Un observador en reposo pretende medir la velocidad de un coche basándose en el efecto Doppler. Para ello, mide la frecuencia del motor del coche cuando se acerca y cuando se aleja, obteniendo como resultado 500 Hz y 450 Hz, respectivamente. Con esos datos, calcula la velocidad con que se mueve el vehículo.

La lectura que realiza el observador es la frecuencia aparente, f'. Por otra parte, el observador se mantiene en reposo ($v_0 = 0$ m · s^{-1}).

Si planteamos las ecuaciones que corresponden a las situaciones en que el foco se acerca y se aleja, obtenemos el siguiente resultado:

$$f'_1 = f \cdot \frac{v}{v - v_F} = f \cdot \frac{340}{340 - v_F} = 500 \text{ Hz}$$

$$f'_2 = f \cdot \frac{v}{v + v_F} = f \cdot \frac{340}{340 + v_F} = 450 \text{ Hz}$$

En estas expresiones, la incógnita que nos interesa es v_F. Para despejarla, dividimos entre sí ambas expresiones:

$$\frac{500}{450} = \frac{\dfrac{340}{340 - v_F}}{\dfrac{340}{340 + v_F}} = \frac{340 + v_F}{340 - v_F} \rightarrow 340 \cdot (500 - 450) = v_F \cdot (450 + 500) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_F = \frac{340 \cdot 50}{950} = 17,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

43 Maite se encuentra en el portal de su casa, mientras oye cómo se acerca una moto emitiendo un ruido que, a efectos del problema, asimilaremos a un sonido de frecuencia 1 500 Hz. La moto se acerca con una velocidad de 54 km/h. Con esos datos, calcula:

a) La frecuencia que percibe mientras la moto se acerca hacia ella. La dirección en que se mueve la moto es la recta que une la moto con Maite.

b) La frecuencia que percibe si, tras pasar la moto por delante de ella, se aleja con la misma velocidad. Al igual que en el caso anterior, la moto se mueve en una dirección definida, en todo momento, por la recta que une a Maite con la moto.

c) La frecuencia del ruido percibido si Maite monta en su moto y persigue al conductor de la otra moto con una velocidad de 10 m/s.

a) El problema es una aplicación del efecto Doppler. Consideraremos en todos los apartados que la velocidad del sonido en el aire es 340 m · s^{-1}.

En este caso, el foco se acerca al observador. Por tanto, la frecuencia aparente que este percibe es:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v - v_F} = 1\,500 \cdot \frac{340}{340 - 54 \cdot \left(\dfrac{1\,000}{3\,600}\right)} = 1569,2 \text{ Hz}$$

b) Ahora, la moto (el foco) se aleja del observador, que sigue permaneciendo en reposo. La velocidad del foco cambia de signo, y, por tanto:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v + v_F} = 1500 \cdot \frac{340}{340 + 54 \cdot \left(\dfrac{1\,000}{3\,600}\right)} = 1\,436,6 \text{ Hz}$$

c) En esta ocasión, tanto el foco como el observador se mueven. El observador se acerca hacia el foco y el foco se aleja del observador. Por tanto:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_0}{v + v_F} = 1500 \cdot \frac{340 + 10}{340 + 54 \cdot \left(\dfrac{1\,000}{3\,600}\right)} = 1\,478,9 \text{ Hz}$$

44. Un tren se acerca por una vía recta, haciendo sonar su silbato. La frecuencia con que emite el silbato es 1 000 Hz. Si el tren se mueve con una velocidad de 144 km/h, calcula:

a) La frecuencia que percibe un observador que se encuentra parado en el andén de la estación mientras se acerca el tren.

b) La frecuencia que percibe el observador si pasea por el andén de la estación, en dirección al tren, con una velocidad de 3,6 km/h.

c) La velocidad con que debería moverse ese observador, una vez ha pasado el tren, para percibir el sonido del silbato con una frecuencia de 975 Hz.

d) ¿En qué sentido debe hacerlo, si se mueve en la misma dirección que el tren?

a) El problema es una aplicación del efecto Doppler. Consideraremos en todos los apartados que la velocidad del sonido en el aire es 340 m · s^{-1}.

En este caso, el foco (el tren) se acerca al observador; por tanto, la frecuencia aparente que este percibe es:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v - v_F} = 1000 \cdot \frac{340}{340 - 144 \cdot \left(\frac{1000}{3600}\right)} = 1133{,}3 \text{ Hz}$$

b) Ahora, el observador también se mueve, aproximándose al foco. Por tanto:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_0}{v - v_F} = 1000 \cdot \frac{340 + 3{,}6 \cdot \left(\frac{1000}{3600}\right)}{340 - 144 \cdot \left(\frac{1000}{3600}\right)} = 1136{,}7 \text{ Hz}$$

c) Una vez ha pasado el tren por delante del observador, su velocidad cambia de signo. Debemos despejar ahora la velocidad con que debería moverse el observador a partir de la ecuación:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_0}{v + v_F} \rightarrow 975 = 1000 \cdot \frac{340 + v_0}{340 + 40} \rightarrow v_0 = 30{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d) El signo de la velocidad, v_0, es positivo, lo que indica que el observador se acerca hacia el foco. Ello quiere decir que el observador debería ir persiguiendo el tren con una velocidad igual a 30,5 m · s^{-1}.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

45. Un sonido emitido desde una fuente *F* alcanza un punto *P* tras viajar en un medio homogéneo por dos caminos. La diferencia de longitud entre ambos caminos es 1,2 m. Cuando la frecuencia del sonido aumenta, la intensidad resultante en *P* experimenta una serie de máximos y mínimos. Se produce un máximo cuando la frecuencia es 1 000 Hz; el siguiente máximo se produce a 1 200 Hz. Calcula la velocidad con que se propaga el sonido en ese medio.

Se trata de un problema donde intervienen los fenómenos de interferencias. El primer máximo se produce a una frecuencia de 1 000 Hz. Por tanto:

$$x_1 - x_2 = \lambda \cdot n = \frac{v}{f} \cdot n \rightarrow 1{,}2 = \frac{v}{1000} \cdot n$$

El máximo siguiente (n + 1) se produce a una frecuencia de 1 200 Hz:

$$x_1 - x_2 = \lambda \cdot (n+1) = \frac{v}{f} \cdot (n+1) \rightarrow 1{,}2 = \frac{v}{1200} \cdot (n+1)$$

Ambas ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: n y v.

Si las dividimos entre sí, podemos calcular el valor de n:

$$1 = 1{,}2 \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow n + 1 = 1{,}2 \cdot n \rightarrow n = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

Sustituyendo ahora en cualquiera de las ecuaciones anteriores, obtenemos la velocidad:

$$1{,}2 = \frac{v}{1200} \cdot (n+1) \rightarrow v = \frac{1200 \cdot 1{,}2}{n+1} = \frac{1200 \cdot 1{,}2}{5+1} = 240 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7 CAMPO ELÉCTRICO

7.1. FENÓMENOS DE ELECTRIZACIÓN

1. Un péndulo electrostático es un dispositivo formado por una esfera ligera, de material aislante, suspendida de un hilo de masa despreciable. Utilizando ese dispositivo, explica los siguientes fenómenos:

a) Si acercamos al péndulo una barra de ámbar, de plástico o de ebonita frotada previamente con lana, se atraen, pero, si entran en contacto, se repelen.

b) Si repetimos la experiencia con una barra de vidrio que hemos frotado con una tela de seda, se produce de nuevo el mismo fenómeno.

c) Si, previamente frotadas, aproximamos simultáneamente la barra de ámbar y la barra de vidrio al péndulo, sin que las dos barras estén en contacto, sobre el péndulo no se produce ningún efecto.

d) Al acercar dos péndulos que han estado en contacto con sendas barras de ámbar o de vidrio frotadas, se repelen. Pero si uno de los péndulos ha estado en contacto con una barra de vidrio y el otro con una barra de ámbar, ambas frotadas, al acercarlos se atraen.

Para interpretar los fenómenos que describe el enunciado, hemos de suponer que, al frotarlas, las barras adquieren una propiedad a la que denominamos carga eléctrica. Teniendo esto en cuenta:

a) La carga que adquiera la barra de ámbar, plástico o ebonita es negativa; al acercarla al péndulo atrae electrostáticamente las cargas positivas inducidas en este (cuerpo inicialmente neutro a nivel electrostático). Cuando se tocan la barra y el péndulo, se transfieren electrones a este último, que ya no será neutro. Se produce entonces una repulsión electrostática.

b) La carga que adquiere el vidrio es positiva. La atracción se produce en este caso entre ella y la carga negativa que induce en el péndulo, y la repulsión, entre cargas positivas después de entrar en contacto la barra y el péndulo.

c) Ello es debido a la existencia de dos tipos opuestos de carga: negativa, la que adquiere el ámbar, y positiva, la que adquiere el vidrio tras frotarlos.

d) Este fenómeno confirma la existencia de dos tipos opuestos de carga. En el primer caso, se repelen, ya que a ambos péndulos se les ha transferido el mismo tipo de carga (negativa el ámbar, y positiva, el vidrio); en el segundo caso, el vidrio transfiere a un péndulo carga positiva y el ámbar, al otro, carga negativa, por lo que se atraen electrostáticamente.

7.2. LEY DE COULOMB

1. La distancia que separa entre sí los dos protones de un núcleo de helio es del orden de 1 fm (10^{-15} m):

a) Calcula el módulo de la fuerza que ejerce cada uno de los protones sobre el otro.

b) Esta fuerza, ¿es de atracción o de repulsión?

Dato: q_p = 1,6 · 10^{-19} C

a) El módulo de la fuerza que ejercen entre sí dos cargas eléctricas viene dado por:

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(1 \cdot 10^{-15})^2} = 230,4 \text{ N}$$

b) La fuerza es de repulsión, dado que las cargas son del mismo signo, positivo.

2. ¿Cómo podemos justificar la estabilidad nuclear de un átomo que tenga más de un protón en el núcleo?

La estabilidad nuclear es producida por la fuerza nuclear fuerte, que mantiene unidos entre sí los nucleones, a pesar de la repulsión electrostática. Estudiamos esta interacción en la última parte del libro, en la unidad de física atómica y nuclear.

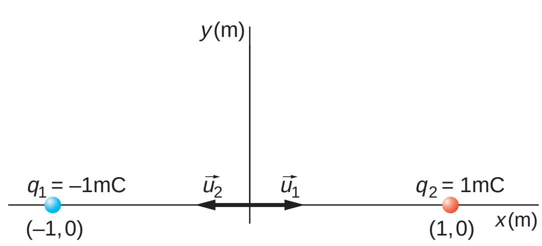
Si mantenemos constantes las demás variables (tipo de partículas, carga, masa y distancia a que se encuentran), la intensidad de la fuerza nuclear fuerte que actúa entre dos partículas es más de cien veces superior a la intensidad de la fuerza electrostática.

7.3. INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO

1. Calcula la intensidad del campo eléctrico que crea en el origen del sistema de referencia un dipolo formado por dos cargas, de +1 mC y −1 mC, situadas en (1,0) m y (−1,0) m, respectivamente.

Si colocamos en el origen del sistema de referencia una carga de 5 mC, ¿a qué fuerza eléctrica estará sometida?

La representación esquemática de la situación física que plantea el enunciado de la actividad es la siguiente:



En primer lugar, calculamos los vectores unitarios que unen las cargas con el origen del sistema de referencia:

$$\vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{i}$$
$$\vec{u}_2 = -1 \cdot \vec{i}$$

La intensidad del campo eléctrico es una magnitud aditiva, por lo que, aplicando el principio de superposición en el origen del sistema de referencia, tendremos:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{2} = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-1 \cdot 10^{-3}}{1^2} \cdot \vec{i} + \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1^2} \cdot \left(-1 \cdot \vec{i}\right) = -18 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} \right)$$

La fuerza eléctrica a que estará sometida una carga de 5 mC situada en el origen del sistema de referencia será:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot (-\vec{i}\,) = -9 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

2. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano *XOY* en los que se anula el campo eléctrico que crean dos cargas iguales situadas en (1,0) m y (–1,0) m.

Para resolver la actividad, ¿necesitas conocer el valor de las cargas? ¿Y el medio en que se encuentran? ¿Por qué?

La posición de las cargas es la misma que la representada en la actividad anterior, pero en este caso las dos cargas tienen idéntico valor y signo.

El campo eléctrico creado en cada punto por las dos cargas es la suma de los campos creados por cada una de ellas en ese punto, por lo que podemos aplicar el principio de superposición para calcular la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{2} \vec{E}_i = K \cdot \left(\frac{Q}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{Q}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right) = K \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right)$$

donde hemos tenido en cuenta que las dos cargas son iguales.

Por tanto, en los puntos en que se anula el campo eléctrico tenemos:

$$E_T = 0 \rightarrow \frac{1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 = 0$$

Es fácil comprobar que el único punto para el que se cumple esta relación es el punto medio entre las dos cargas, que en este caso es el origen de coordenadas, para el cual:

$$r_1 = r_2$$
$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$$

No es necesario conocer el valor de las cargas ni el medio en que se encuentran, puesto que, como vimos en la actividad anterior, estos dos valores afectan proporcionalmente al campo eléctrico creado por las dos cargas.

7.4. POTENCIAL ELÉCTRICO

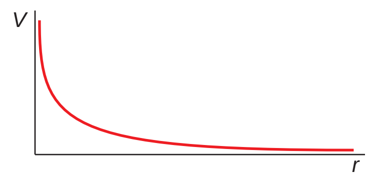
1. Explica el concepto de potencial eléctrico. ¿Qué potencial eléctrico crea una carga puntual? Dibuja en un sistema de coordenadas, de forma aproximada, cómo varía el potencial con la distancia a la carga. Dibuja sus superficies equipotenciales.

El potencial eléctrico de un punto situado en el seno de un campo eléctrico es la energía potencial que posee la unidad de carga positiva en el punto:

$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

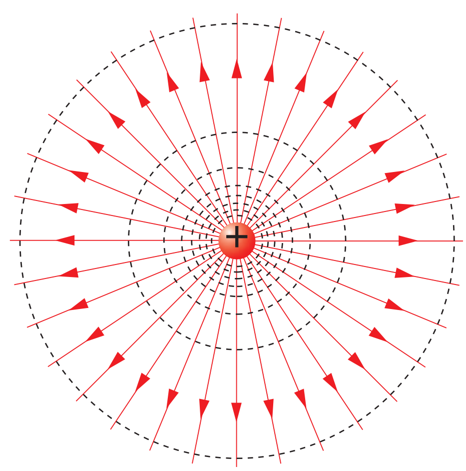
A diferencia del campo eléctrico o la fuerza eléctrica, el potencial eléctrico es una magnitud escalar; su signo es el mismo que el de la carga que crea el campo.

La representación gráfica aproximada de la variación del potencial eléctrico con la distancia a la carga puntual que crea el campo es la que se muestra a continuación:



En este caso, hemos considerado que la carga puntual que crea el campo es positiva. Observa que el potencial eléctrico se anula a una distancia infinita de la carga que lo crea.

Las superficies equipotenciales (líneas grises discontinuas) asociadas a una carga puntual positiva son las que se muestran en la siguiente ilustración:



2. Sean dos cargas puntuales a las que se mantiene en reposo y separadas cierta distancia. Si el potencial en los puntos del espacio que equidistan de las dos cargas es nulo, ¿qué se puede afirmar acerca de las cargas?

El potencial eléctrico que crea una carga puntual Q en un punto situado en el seno de un campo eléctrico a una distancia r es:

$$V = \frac{K \cdot Q}{r}$$

De acuerdo con el principio de superposición, el potencial creado por ambas cargas es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1} + \frac{K \cdot Q_2}{r_2}$$

Si imponemos la condición que indica el enunciado del problema, se obtiene:

$$r_1 = r_2 = r \rightarrow V = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 0 \rightarrow Q_1 = -Q_2$$

Por tanto, las dos cargas, iguales en valor y de signo opuesto, separadas una cierta distancia, forman un dipolo eléctrico.

7.5. TEOREMA DE GAUSS

1. Dado un campo vectorial definido en cada punto por el vector:

$$\vec{A} = K \cdot \frac{\vec{u}_r}{r^3}$$

en el que *K* es una constante:

a) Calcula el flujo de dicho campo a través de una superficie esférica centrada en el origen de coordenadas, de radio 3 cm.

b) Resuelve de nuevo el apartado anterior suponiendo ahora que el radio de la esfera es de 4 centímetros.

c) ¿Se crean, o desaparecen líneas de campo entre ambas esferas? Ten en cuenta los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores antes de responder.

d) ¿Es conservativo el campo de fuerzas derivado de dicho campo vectorial?

a) Para calcular el flujo, utilizamos la expresión:

$$\phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

El vector superficie tiene dirección radial, al igual que el vector campo; es decir, ambos vectores son paralelos. Por tanto:

$$d\,\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A \cdot dS \cdot cos\ 0° = A \cdot dS \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S} = A \cdot \int dS = A \cdot S = A \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 =$$
$$= \frac{K}{r^3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot K}{r}$$

Para $r = 3$ obtenemos:

$$\phi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot K \text{ Wb}$$

b) Del mismo modo, para $r = 4$:

$$\phi = \pi \cdot K \text{ Wb}$$

c) En los apartados anteriores se ha obtenido un valor para el flujo que disminuye con la distancia. Teniendo en cuenta que el flujo es proporcional a las líneas de fuerza del campo que atraviesan la superficie, en este caso desaparecen líneas de fuerza al pasar de la primera a la segunda esfera.

d) El resultado obtenido en el apartado anterior nos permite afirmar que el campo de fuerzas no es conservativo.

7.6. APLICACIONES DEL TEOREMA DE GAUSS

1. Calcula, aplicando el teorema de Gauss, el valor de la intensidad que corresponde a los siguientes campos:

a) Campo gravitatorio creado por una esfera maciza y homogénea, de radio *R* y masa *M*, en puntos situados en su interior.

b) Campo eléctrico creado por una carga esférica homogénea, de carga *Q* y radio *R*, en puntos situados en su interior.

c) Campo eléctrico que crea la carga anterior en puntos situados en su exterior.

a) El teorema de Gauss se puede aplicar al cálculo del campo eléctrico y del gravitatorio. De acuerdo con este teorema, en un campo vectorial conservativo, como el campo gravitatorio, el flujo que atraviesa una superficie cerrada es constante:

$$\Phi_g = \int_{sup.\ cerrada} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \text{cte}$$

Los puntos situados en el interior de la esfera cumplen la relación: $r < R$.

El campo gravitatorio que crea una esfera de radio R es conocido. Por tanto, podemos calcular el valor de la constante que aparece en la expresión anterior:

$$\Phi_g = \int_{esfera} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g \int_{esfera} dS = -G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{u}_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \vec{u}_R = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M$$

El campo gravitatorio creado en puntos situados en el interior de la esfera será, entonces:

$$\Phi_g = \int_{esfera} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_{esfera} g \cdot dS \cdot cos\,180° = -\int_{esfera} g \cdot dS$$

$$\Phi_g = \text{cte} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M_{int} = -\int_{esfera} g \cdot ds = -g \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$g = G \cdot \frac{M_{int}}{r^2} \quad ; \quad r < R$$

En forma vectorial:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M_{int}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad ; \quad r < R$$

b) La carga se reparte por la superficie; al ser nula la carga encerrada, el campo eléctrico en el interior, de acuerdo con el teorema de Gauss, es nulo.

c) En el exterior de la carga, $r > R$. Por tanto, aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon} = \int_{esfera} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{esfera} E \cdot dS \cdot cos\, 0° = \int_{esfera} E \cdot dS = E \cdot \int_{esfera} dS =$$

$$= E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \rightarrow E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \quad ; \quad r > R$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Explica el concepto de campo eléctrico creado por una o por varias partículas cargadas.

Se denomina campo eléctrico a cualquier región del espacio en la que una carga eléctrica está sometida a una fuerza eléctrica. La intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}$, en un punto es la relación que existe entre la fuerza que el campo ejerce sobre una carga situada en dicho punto y dicha carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Para calcular la intensidad del campo eléctrico creado por varias cargas puntuales, podemos hacer uso del principio de superposición:

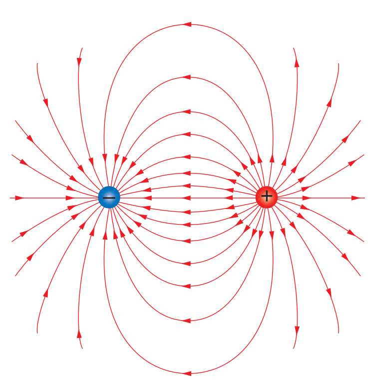
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

2. ¿Qué es una línea de fuerza de un campo eléctrico?

Las líneas de fuerza de un campo eléctrico son aquellas en las que el vector campo eléctrico, $\vec{E}$, es tangente a ellas en cada punto del campo.

3. Dibuja las líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico creado por dos cargas: una, Q_1, positiva, y la otra, Q_2, negativa, separadas una cierta distancia.

Las líneas de fuerza que solicita el enunciado de la cuestión son las que se muestran en la siguiente ilustración:



4. Enuncia el teorema de Gauss. Utilizando este teorema, comprueba que una esfera cargada eléctricamente se comporta en su exterior como una carga puntual situada en su centro.

El teorema de Gauss establece que en un campo vectorial conservativo, el flujo que atraviesa una superficie cerrada es constante.

De acuerdo con lo obtenido en la resolución del apartado c) de la actividad propuesta en la página 181 del libro del alumno y con lo explicado en el primer apartado de la página 180, la expresión que corresponde al campo eléctrico creado en ambos casos es la misma:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

5. Discute la siguiente afirmación: “Una carga o una masa en movimiento se mueve, en presencia de un campo eléctrico o gravitatorio, siguiendo las trayectorias de las líneas del campo”.

Las líneas de fuerza del campo eléctrico son aquellas en las que el vector campo eléctrico, $\vec{E}$, es tangente a ellas en cada punto del campo. Del mismo modo, en el caso del campo gravitatorio, $\vec{g}$, dicho vector será tangente a ellas en cada punto.

Si tenemos en cuenta las expresiones que corresponden a las fuerzas eléctrica y gravitatoria que se ejercen, respectivamente, sobre una carga q y una masa m:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$

Se observa que estas actúan sobre la carga o la masa en la misma dirección que el campo correspondiente; por tanto, la afirmación que expone el enunciado de la cuestión es verdadera. En el caso del campo eléctrico, el sentido del movimiento depende del signo de la carga.

6. Explica el concepto de energía potencial eléctrica y calcula la que tiene una partícula de carga q_2 situada a una distancia r de otra carga q_1.

La energía potencial eléctrica que posee una carga q situada en un punto, r, situado en el seno de un campo eléctrico es el producto de dicha carga por el potencial eléctrico existente en ese punto:

$$E_p = q \cdot V(\vec{r})$$

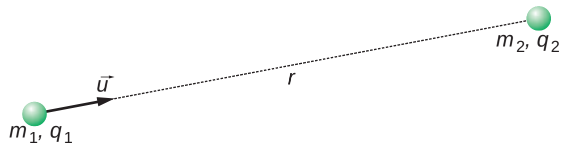
La energía potencial que corresponde a una partícula de carga q_2 situada a una distancia r de otra carga, q_2, es:

$$E_p = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

7. Un electrón, inicialmente en reposo, se pone en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico uniforme. ¿Se desplazará hacia regiones de mayor o de menor potencial electrostático? ¿Qué ocurrirá si consideramos un protón?

Los electrones se desplazan, espontáneamente, a regiones de mayor potencial, y los protones, a regiones de menor potencial.

8. Se tienen dos partículas de masas m_1 y m_2 y cargas q_1 y q_2 del mismo signo, como se indica:



Escribe, para la partícula m_1, la ley de fuerzas de la gravitación universal y la ley de Coulomb. Comenta las diferencias fundamentales que existen entre ambas leyes.

La expresión de la fuerza de atracción gravitatoria sobre m_1, es:

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Y la que corresponde a la fuerza de atracción electrostática:

$$\vec{F}_e = -K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Las diferencias fundamentales que existen entre ambas leyes son:

- El campo gravitatorio tiene siempre el mismo sentido; las líneas de fuerza siempre se dirigen hacia la masa que lo crea. Por su parte, el campo eléctrico tiene dos sentidos, que dependen del signo de la carga que lo crea: si es positiva, las líneas de fuerza salen de la carga, y, si es negativa, las líneas de fuerza entran en ella.
- Al ser G una constante universal, el campo gravitatorio creado por un cuerpo es independiente del medio que lo rodea (la interacción gravitatoria no es debilitada por el medio), lo que no ocurre con el campo eléctrico, que depende de la constante dieléctrica del medio.
- Las fuerzas de interacción son siempre atractivas en el caso del campo gravitatorio, y en el caso del campo eléctrico pueden ser atractivas o repulsivas, dependiendo del signo de las cargas eléctricas.
- Si comparamos los valores de G y de K, encontramos que, para masas y cargas cuyo valor sea la unidad, la fuerza de interacción electrostática es mucho mayor que la gravitatoria:

  – Fuerza gravitatoria:

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot m}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$$

  – Fuerza electrostática:

$$F_e = K \cdot \frac{q \cdot q}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 9 \cdot 10^9\ \text{N}$$

9. En un campo eléctrico constante de signo positivo, el potencial eléctrico:

a) Es nulo.

b) Es constante.

c) Disminuye de forma constante.

d) Aumenta de forma constante.

e) Disminuye con el cuadrado de la distancia.

El campo y el potencial están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si el campo es constante y el desplazamiento es en el sentido de $\vec{E}$:

$$dV = -E \cdot dr \rightarrow \int dV = -E \cdot \int dr \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta r$$

Si el campo eléctrico es constante, el potencial disminuye linealmente con la distancia. La respuesta correcta es **c).**

10. Una partícula cargada se desplaza en la dirección de un campo eléctrico, de forma que su energía potencial aumenta. ¿Qué signo tiene la carga?

La relación entre la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico es:

$$E_p = q \cdot V$$

Consideremos dos puntos, *A* y *B,* pertenecientes al campo eléctrico. Se ha de cumplir la condición de que:

$$\Delta E_p = q \cdot V_2 - q \cdot V_1 = q \cdot (V_2 - V_1) > 0$$

– Si se tratara de un protón, que se mueve espontáneamente a regiones de menor potencial:

$$V_2 < V_1 \rightarrow V_2 - V_1 < 0$$

Como $q > 0$, se obtendría que su energía potencial disminuiría:

$$\Delta E_p < 0$$

– En el caso de un electrón, que se desplaza espontáneamente a zonas de mayor potencial:

$$V_2 > V_1 \rightarrow V_2 - V_1 > 0$$

Como en este caso $q < 0$, su energía potencial también disminuiría:

$$\Delta E_p < 0$$

Por tanto, para que la energía potencial aumente, se ha de realizar trabajo sobre la carga. En ese caso, si la carga se dirige hacia potenciales crecientes, se trataría de un protón, y si lo hace hacia potenciales decrecientes, un electrón.

Si suponemos que la partícula, además de moverse en la misma dirección del campo, lo hace en el mismo sentido, lo hará hacia potenciales decrecientes; se trataría, por tanto, de una partícula cargada negativamente.

11. Si un electrón se mueve en la misma dirección y sentido que el correspondiente a las líneas de campo de un campo eléctrico uniforme, su energía potencial ¿aumentará, disminuirá o permanecerá constante? ¿Y si se mueve en dirección perpendicular a las líneas del campo eléctrico? Justifica ambas respuestas.

Como se ha explicado en la cuestión anterior, será necesario realizar un trabajo externo sobre el electrón, que quedará almacenado en forma de energía potencial que, por tanto, aumentará.

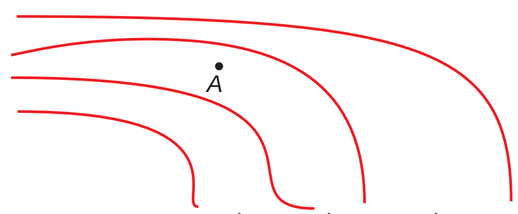
Si el electrón se mueve en dirección perpendicular a la del campo eléctrico, lo estará haciendo sobre una superficie equipotencial. Por tanto, su energía potencial no variará.

12. Analiza cómo son las líneas de fuerza del campo eléctrico producido por un hilo rectilíneo infinito y uniformemente cargado.

Como el hilo que se propone es infinitamente largo, las líneas de fuerza del campo eléctrico que crea serán, por simetría, radiales y dirigidas hacia fuera, si la densidad lineal de carga es positiva, y hacia dentro si esta es negativa.

NOTA: para completar esta cuestión, se sugiere la lectura del segundo apartado de la página 180 del libro del alumno.

13. En la figura se representan algunas superficies, correspondientes a una zona del espacio donde existe un campo electrostático.



a) ¿Qué dirección y sentido tendrán las líneas del citado campo eléctrico?

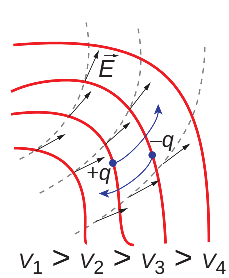
b) En el instante inicial, $t = 0$, situamos un electrón en el punto A y, desde el reposo, se deja en libertad. Calcula la dirección y el sentido de la trayectoria inicial que seguirá.

c) Una carga eléctrica, ¿se moverá siempre a lo largo de una línea del campo? Justifica la respuesta.

a) En las superficies que muestra la figura, el potencial eléctrico se mantiene constante. Las líneas de fuerza del campo eléctrico y, por tanto, la intensidad del campo eléctrico, son perpendiculares a las superficies equipotenciales con las que se cortan, ya que, en ellas:

$$V = \text{cte} \rightarrow dV = 0 \rightarrow -dV = 0 = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot dr \cdot \cos\theta \rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$$

La dirección y el sentido de las líneas del campo eléctrico son los que se muestran en la siguiente ilustración:



Como se observa, las líneas del campo eléctrico son líneas tangentes en cada punto al vector campo. Una carga positiva colocada en un punto de cualquiera de ellas seguirá el camino marcado por la línea de fuerza. Las cargas positivas se dirigen hacia potenciales decrecientes y las negativas, hacia potenciales crecientes.

b) De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, se moverá en una dirección perpendicular a la superficie equipotencial en el punto *A,* y su sentido estará dirigido hacia los potenciales crecientes.

c) Sí; las líneas de campo son las que indican el camino que seguirán las cargas eléctricas en su movimiento.

14. ¿Cómo es el campo eléctrico en el interior de una esfera metálica cargada? ¿Y el potencial?

De acuerdo con el teorema de Gauss:

$$\phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Como la carga encerrada por la esfera metálica es nula (recuerda que la carga se distribuye uniformemente por la superficie de la esfera), el flujo eléctrico que la atraviesa es nulo, y, en consecuencia, el campo eléctrico en su interior también lo será.

Si tenemos en cuenta la relación entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \text{Si } \vec{E} = 0 \rightarrow dV = 0 \rightarrow V = \text{cte}$$

Como en el interior de la esfera el campo eléctrico es nulo, el trabajo necesario para llevar una carga desde el infinito hasta cualquier punto del interior de la esfera coincide con el trabajo necesario para llevarla hasta su superficie. Por tanto, si consideramos que el radio de la esfera es *R,* el potencial eléctrico en cualquier punto de su interior es:

$$V(r) = V(R) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

15. Cierta distribución de cargas, que se encuentra en el interior de una esfera de 1 m de radio, crea un campo eléctrico, perpendicular en todo momento a la superficie de la esfera, que viene dado por:

$$\boldsymbol{E = E_0 \cdot \frac{1}{r^2}}$$

siendo $E_0 = 1\,000$ V · m^{-1} y *r* la distancia a que nos encontramos del centro de la esfera.

Calcula la carga que existe en el interior de la esfera, suponiendo que está en el vacío.

En la superficie de la esfera, $r = R$. Por tanto, el campo eléctrico en su superficie es:

$$E(r = R) = E_0 \cdot \frac{1}{R^2}$$

Aplicando el teorema de Gauss a la superficie esférica:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = \frac{E_0}{R^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = E_0 \cdot 4 \cdot \pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Despejando la carga Q, y sustituyendo los datos del enunciado:

$$Q = E_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 = 1\,000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-12} = 1{,}11 \cdot 10^{-7} \text{ C} = 0{,}11\ \mu\text{C}$$

EJERCICIOS

16. Calcula la intensidad del campo y el potencial en un punto distante 4 metros de una carga puntual de $6 \cdot 10^{-6}$ C situada en el vacío. Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻².

La intensidad del campo eléctrico que crea la carga puntual es:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{4^2} \cdot \vec{u}_r = 3\,375 \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

En ella, el vector $\vec{u}_r$, es un vector unitario situado en la recta que une la carga y el punto; al tratarse de una carga positiva, el campo eléctrico sale de ella.

Por su parte, el valor del potencial eléctrico, que es una magnitud escalar, es:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{4} = 13\,500 \text{ V}$$

17. Una carga eléctrica de 4 C es llevada desde un punto, donde existe un potencial de 15 V, a otro cuyo potencial es 40 V. Indica si gana o pierde energía y cuánta.

El trabajo necesario para llevar una carga eléctrica de un punto de un campo eléctrico a otro que se encuentra a distinto potencial es:

$$W = -q \cdot (V_2 - V_1)$$

En este caso:

$$W = -4 \cdot (40 - 15) = -100 \text{ J} \quad ; \quad W = -\Delta E_P \rightarrow E_{P_2} - E_{P_1} = 100 \text{ J}$$

El trabajo negativo indica que la carga no se traslada espontáneamente hacia el punto, sino que, como indica el enunciado, “la carga es llevada”; es decir, se realiza un trabajo sobre ella que aumenta su energía potencial. Por tanto, gana energía a expensas del trabajo exterior realizado sobre ella.

18. En el sistema de encendido de un motor de coche hay dos electrodos separados 0,7 mm. Si el aire comienza a ionizarse cuando el campo eléctrico alcanza un valor de $3{,}5 \cdot 10^6$ V · m⁻¹, ¿cuál es la diferencia de potencial que hemos de aplicar entre los dos electrodos para que se produzca la chispa?

El objetivo del encendido es provocar una chispa que haga detonar la mezcla aire-gasolina que se encuentra en el interior del cilindro. Para ello, el campo eléctrico entre los electrodos ha de ser suficientemente intenso. De este modo, se ioniza el aire y se establece una corriente de cargas eléctricas a través de él.

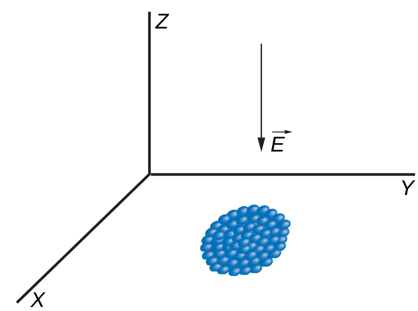
Los dos electrodos y el aire que se encuentra entre ellos, que actúa como dieléctrico, forman un condensador. Por ello, el fenómeno consistente en ionizar el aire se denomina también "perforar el dieléctrico".

La diferencia de potencial mínima que debemos aplicar en este caso es:

$$\Delta V = \Delta r \cdot E = 0{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{6} = 2\,450 \text{ V}$$

19. Cerca de la superficie de la Tierra, el campo eléctrico tiene un valor aproximado de 150 N · C^{-1}, y está dirigido hacia el centro de esta. Calcula el valor de la fuerza (módulo, dirección y sentido) que experimenta el núcleo de un átomo de plomo, que contiene 82 protones (q_p = 1,6 · 10^{-19} C), al encontrarse sobre la superficie terrestre.

La situación que describe el problema es la que se muestra en la figura.



La relación entre fuerza y campo eléctrico es:

$$\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E}$$

Teniendo en cuenta la carga del núcleo del átomo de plomo, así como la dirección y el sentido del vector campo, resulta:

$$\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E} = 82 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-150 \cdot \vec{k}) =$$
$$= -1{,}968 \cdot 10^{-15} \cdot \vec{k} \text{ N}$$

20. El núcleo de un átomo de plata tiene carga positiva, debido a los 47 protones que lo forman. Calcula el potencial que crea esta carga en un punto situado a 6 · 10^{-13} m del centro del núcleo.

Debido a la proximidad a la que se encuentran unos de otros, supondremos el conjunto de protones como una carga puntual. El potencial que crea esta carga viene dado por:

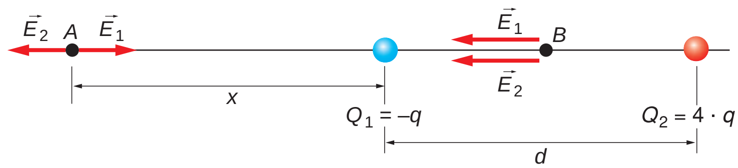
$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

Teniendo en cuenta que la carga de un protón es q = 1,6 · 10^{-19} C, el potencial será:

$$V = 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{47 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^{-13}} = 112\,800 \text{ V}$$

21. Sean dos cargas puntuales $Q_1 = -q$ y $Q_2 = +4 \cdot q$ colocadas a una distancia d. Razona y obtén en qué punto de la línea definida por las dos cargas el campo es nulo.

El punto que cumple la condición que solicita el enunciado del ejercicio será aquel en el que el vector campo creado por cada carga tenga el mismo valor y sus sentidos sean opuestos. De acuerdo con la siguiente figura:



Ese punto se encuentra fuera del segmento que une ambas cargas.

En el punto *A,* representado en la figura anterior, el módulo del campo eléctrico creado por cada carga es:

$$E_1 = K \cdot \frac{q}{x^2} \quad ; \quad E_2 = K \cdot \frac{4 \cdot q}{(d + x)^2}$$

Si igualamos ambos módulos y despejamos el valor de la distancia, *x,* obtenemos:

$$E_1 = E_2 \rightarrow K \cdot \frac{q}{x^2} = K \cdot \frac{4 \cdot q}{(d + x)^2} \rightarrow \frac{(d + x)^2}{x^2} = 4$$

$$3 \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x - d^2 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$x_1 = d \quad ; \quad x_2 = -\frac{d}{3}$$

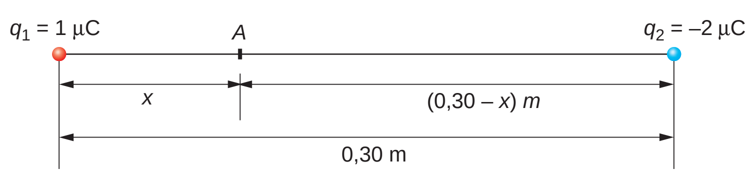
Desde el punto de vista físico, la solución válida es la primera; por tanto:

$$x = d$$

22. Considera dos cargas puntuales fijas $q_1 = 1$ μC y $q_2 = -2$ μC separadas una distancia $L = 30$ cm. Determina la distancia a q_1 del punto sobre la recta que une ambas cargas donde el potencial eléctrico es nulo. ¿Es también nulo allí el campo eléctrico?

El potencial eléctrico es una magnitud escalar que tiene el mismo signo que la carga que crea el campo; para calcular el potencial eléctrico creado por varias cargas puntuales, se puede aplicar el principio de superposición.

De acuerdo con el siguiente esquema:



el potencial creado en el punto *A* será:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q_1}{x} + K \cdot \frac{Q_2}{0{,}3 - x}$$

Si imponemos la condición de que el potencial eléctrico se anula en ese punto:

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{x} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 - x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-2}{0{,}3 - x} \rightarrow 0{,}3 - x = 2 \cdot x \rightarrow x = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1 \text{ m}$$

Por tanto, el potencial eléctrico se anula a 0,1 m de la carga positiva.

En cuanto al campo eléctrico, observa, que, en cualquier punto del segmento que une ambas cargas, el campo eléctrico que crean está dirigido hacia la derecha; por tanto, nunca será nulo el campo en ningún punto perteneciente a este segmento.

En particular, en el punto *A,* el módulo del campo eléctrico creado por ambas cargas es:

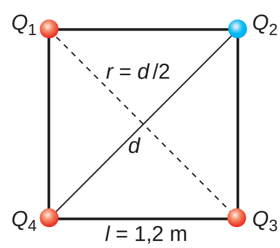
$$E = E_1 + E_2 = K \cdot \frac{Q_1}{x^2} + K \cdot \frac{Q_2}{(0{,}3 - x)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}1^2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(0{,}3 - 0{,}1)^2}\right) = 1{,}35 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Su sentido está dirigido hacia la derecha.

23. Cuatro cargas eléctricas de 10 nC, –12 nC, 20 nC y 25 nC están colocadas en los vértices de un cuadrado de 1,2 m de lado. Calcula el valor del potencial eléctrico en el centro del cuadrado.

El potencial eléctrico es una magnitud escalar cuyo valor podemos obtener sumando algebraicamente los potenciales eléctricos creados por cada carga.

De acuerdo con la siguiente figura:



El valor de la distancia que separa cada carga del centro del cuadrado es:

$$r = \frac{d}{2} \quad ; \quad d^2 = 1{,}2^2 + 1{,}2^2 \rightarrow d = 1{,}2 \cdot \sqrt{2} \text{ m} \quad ; \quad r = \frac{1{,}2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0{,}85 \text{ m}$$

Por tanto, el valor del potencial eléctrico en el centro del cuadrado es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2} + K \cdot \frac{Q_3}{r_3} + K \cdot \frac{Q_4}{r_4} =$$

$$= \frac{K}{r} \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) = \frac{9 \cdot 10^9}{0{,}85} \cdot (10 - 12 + 20 + 25) \cdot 10^{-9} = 456{,}08 \text{ V}$$

24. ¿Qué velocidad alcanzará una partícula cuya carga es 10^{-6} C y cuya masa es $2 \cdot 10^{-18}$ kg al desplazarse, partiendo del reposo, entre dos puntos donde existe una diferencia de potencial de 10^2 V?

El trabajo que realizan las fuerzas del campo eléctrico sobre la carga es:

$$W = q \cdot \Delta V$$

Ese trabajo se invierte en aumentar la energía cinética de la partícula:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

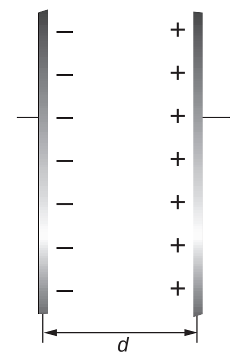
Igualando ambas expresions y despejando el valor de la velocidad, obtenemos:

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}$$

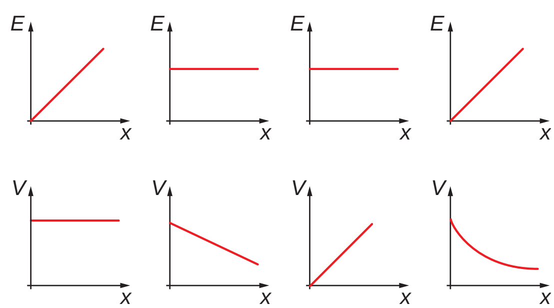
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-18}}} = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

25. La figura representa un condensador de placas paralelas.

¿En cuál de las gráficas se muestra cómo varían el campo eléctrico y el potencial eléctrico con la distancia, si tomamos como origen de potenciales la placa negativa?



a) b) c) d)



El campo eléctrico que existe en un condensador de placas paralelas puede considerarse constante. Por tanto:

$$dV = -E \cdot dr \rightarrow \int dV = -E \cdot \int dr \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta r$$

Es decir, cuando el campo eléctrico es constante, el potencial varía linealmente con la distancia. En nuestro caso, tomamos la placa negativa como origen de potenciales ($V = 0$) y de distancia, estando la placa cargada positivamente a potencial superior. Por tanto:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E \cdot dr \cdot cos\ 180° = E \cdot dr \rightarrow V = E \cdot r$$

Al alejarnos de la placa negativa, el potencial aumenta linealmente, desde $V = 0$, permaneciendo constante el campo en el interior del condensador. La gráfica correcta es **c).**

26. Una partícula cargada con $6 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 N · C^{-1} dirigido en sentido positivo del eje *OY*:

a) Describe la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto *A*, situado a 2 m del origen. ¿Aumenta o disminuye

la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento? ¿En qué se convierte dicha variación de energía?

b) Calcula el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto *A*.

a) Supongamos un sistema de coordenadas *OXY* centrado en la carga, que se encuentra en el punto (0, 0). Como la carga es positiva y el campo se encuentra dirigido en el sentido positivo del eje *OY*, la fuerza eléctrica que actuará sobre ella será:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F} = q \cdot E \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot \vec{j} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por tanto, la partícula se mueve en sentido positivo del eje de ordenadas.

Las coordenadas del punto A son: $A(0, 2)$ m. Las cargas positivas se dirigen espontáneamente hacia potenciales decrecientes; por tanto, su energía potencial disminuye, incrementando su energía cinética (aumenta su velocidad). El movimiento que realiza es un m.r.u.a., ya que la fuerza es constante, al ser el campo eléctrico uniforme.

b) El trabajo realizado por la fuerza eléctrica constante calculada en el apartado anterior es:

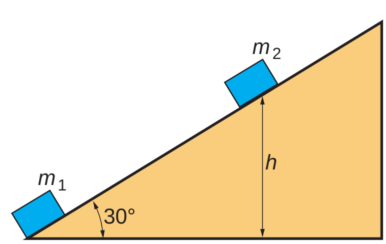
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\, 0° = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ese trabajo coincide con la diferencia de potencial (con signo cambiado) entre los dos puntos del campo considerados multiplicada por el valor de la carga:

$$W = -q \cdot (V_2 - V_1) \rightarrow V_2 - V_1 = \frac{W}{-q} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{-6 \cdot 10^{-6}} = -1\,000 \text{ V}$$

Observa que $V_2 < V_1$, lo cual es lógico, ya que la carga positiva se desplaza espontáneamente hacia potenciales decrecientes.

27. En el plano inclinado de la figura, en el que se pueden despreciar los rozamientos, se encuentran dos masas de 1 g cada una. Una de ellas, m_1, se encuentra fija en la base del plano, mientras que la otra, m_2, permanece, sin caer, a cierta altura, *h*. Si ambas masas tienen una carga positiva de 1 mC, calcula el valor de *h*.



La masa m_2 no se mueve, debido al equilibrio de fuerzas entre la componente del peso en la dirección del plano inclinado, que la haría caer, y la fuerza electrostática de repulsión, que la aleja de la otra carga:

$$F_{eléctrica} = P_x$$

Los valores de estas dos fuerzas son:

$$F_{eléctrica} = K \cdot \frac{q^2}{l^2}$$
$$P_x = m \cdot g \cdot sen\ 30°$$

Por tanto:

$$K \cdot \frac{q^2}{l^2} = m \cdot g \cdot sen\ 30°$$

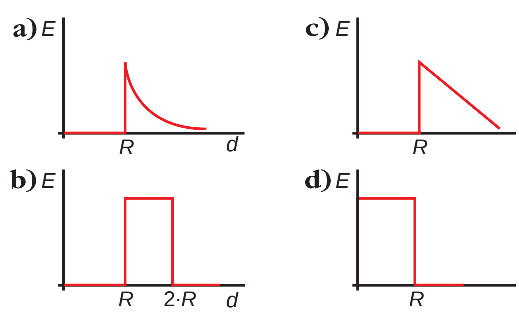
Despejando, obtenemos la distancia, l, que separa ambas masas:

$$l = \sqrt{K \cdot \frac{q^2}{m \cdot g \cdot sen\ 30°}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{(10^{-3})^2}{10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}} = 1\,354{,}57 \text{ m}$$

Por tanto, la masa 2 se encuentra a una altura:

$$h = l \cdot sen\ 30° = 1\,354{,}57 \cdot 0{,}5 = 677{,}285 \text{ m}$$

28. Se tiene una gota de mercurio de forma esférica y radio *R* cuya carga inicial es nula. ¿Qué figura muestra correctamente cómo varía la distribución del campo eléctrico en función de la distancia a que nos encontramos de su centro?



De acuerdo con el teorema de Gauss, el campo eléctrico en un conductor cargado y en equilibrio es nulo. Por tanto, desde el centro de la esfera hasta la distancia $r = R$, el campo eléctrico es nulo.

Sin embargo, para la superficie de la esfera y en puntos situados a una distancia del centro de la esfera superior al radio, el campo eléctrico tiene un valor:

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

lo que se corresponde con la gráfica **a).**

PROBLEMAS

29. Dos cargas eléctricas puntuales, de –20 y 90 μC se encuentran en el aire, separadas 15 cm:

a) Calcula el potencial en el punto medio de la recta que une ambas cargas.

b) Calcula, si existe, el punto entre ambas cargas en que el potencial eléctrico se anula.

a) El potencial creado por una carga puntual es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

Por tanto, el potencial creado por ambas en el punto medio de la recta que las une será:

$$V_{medio} = \sum_{i=1}^{2} K \cdot \frac{q_i}{r_i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-20 \cdot 10^{-6}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} + \frac{90 \cdot 10^{-6}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} \right) = 8{,}4 \cdot 10^6 \text{ V}$$

b) Si existe, supondremos que dicho punto se encuentra a una distancia de la carga negativa que representaremos por x. De este modo:

$$V = \sum_{i=1}^{2} K \cdot \frac{q_i}{r_i} = K \cdot \left(\frac{-20 \cdot 10^{-6}}{x} + \frac{90 \cdot 10^{-6}}{0{,}15 - x} \right) = 0$$

Despejando x en esta expresión, resulta:

$$\frac{20 \cdot 10^{-6}}{x} = \frac{90 \cdot 10^{-6}}{0{,}15 - x} \rightarrow 3 - 20 \cdot x = 90 \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{110} = 2{,}73 \cdot 10^{-2} = 2{,}73 \text{ cm}$$

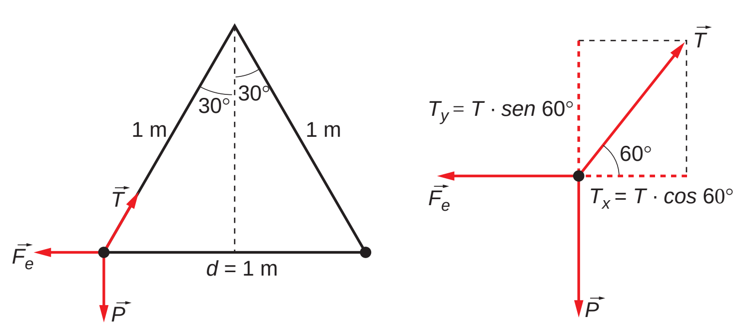
Como vemos, a 2,73 cm de la carga de −20 μC, el potencial eléctrico se anula.

30 **Dos esferas puntuales, iguales, están suspendidas de un mismo punto mediante hilos inextensibles y sin peso, de un metro de longitud cada uno. Determina la carga eléctrica que ha de poseer cada una de ellas para que el hilo forme un ángulo de 30º con la vertical.**

Datos: masa de cada esfera, $m = 10$ g.

$K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; $g = 9{,}8$ m · s⁻²

La situación que plantea el enunciado del problema es la que se representa a continuación:



Para que las esferas se encuentren como se indica en el enunciado del problema, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, el peso, $\vec{P}$, y la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$, deben estar equilibradas.

Al aplicar la segunda ley de la dinámica a las fuerzas que actúan en la dirección del eje X y a las que actúan en la del eje Y, se obtiene:

– Eje X:

$$T \cdot cos\ 60° = F_e \rightarrow T \cdot cos\ 60° = K \cdot \frac{Q^2}{d^2}$$

– Eje Y:

$$T \cdot sen\ 60° = m \cdot g$$

Si dividimos ambas expresiones entre sí, se obtiene:

$$tg\ 60° = \frac{m \cdot g \cdot d^2}{K \cdot Q^2} \rightarrow Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d^2}{K \cdot tg\ 60°}}$$

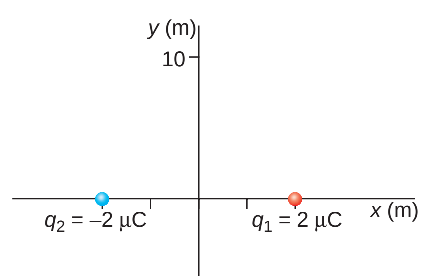
$$Q = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 1^2}{9 \cdot 10^9 \cdot tg\ 60°}} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

31. Dos cargas eléctricas puntuales de 2 y –2 μC cada una están situadas, respectivamente, en los puntos (2, 0) y (–2, 0) metros. Calcula:

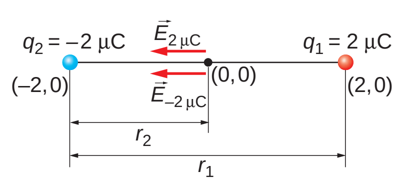
a) El campo eléctrico en (0, 0) y en (0, 10).

b) El trabajo necesario para transportar una carga *q'* de –1 μC desde (1, 0) a (–1, 0).

a) La situación que plantea el enunciado del problema es la siguiente:



En el origen, el campo eléctrico creado por ambas cargas estará dirigido hacia la izquierda, como se muestra en la siguiente ilustración:

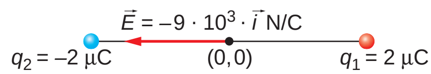


El cálculo del campo eléctrico resultante, $\vec{E}$, se realiza del siguiente modo:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}) = K \cdot \left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right) \cdot (-\vec{i}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2^2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2^2}\right) \cdot (-\vec{i}) = -9 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} \quad \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$



En el punto de coordenadas (0, 10) m, el campo que crea cada carga es el que se muestra en la ilustración de la derecha.

De acuerdo con la figura, la distancia de cada carga al punto considerado es:

$$d = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \text{ m}$$

El valor del ángulo α es:

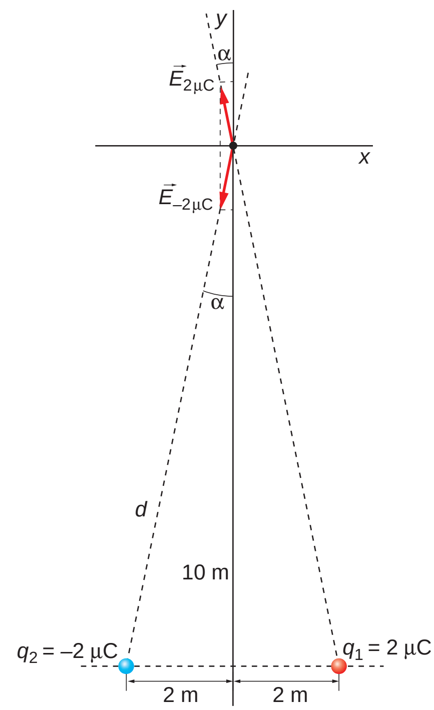
$$tg\ \alpha = \frac{2}{10} \rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}2 = 11{,}31°$$

Por tanto:

$$sen\ \alpha = sen\ 11{,}31° = 0{,}2$$

$$cos\ \alpha = cos\ 11{,}31° = 0{,}98$$

El campo eléctrico que crea la carga de 2 µC en el punto (10, 0) m es:



$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}) +$$

$$+ K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot (-sen\ \alpha \cdot \vec{i} + cos\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{104})^2} \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} + 0{,}98 \cdot \vec{j}) = 173 \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} + 0{,}98 \cdot \vec{j}) =$$

$$= -34{,}62 \cdot \vec{i} + 169{,}5 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el creado por la carga Q_2 en el punto (0, 10):

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot cos\ \alpha \cdot (-\vec{j}) = K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot (-sen\ \alpha \cdot \vec{i} - cos\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{104})^2} \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} - 0{,}98 \cdot \vec{j}) = 173 \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} - 0{,}98 \cdot \vec{j}) =$$

$$= -34{,}62 \cdot \vec{i} - 169{,}5 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico total en el punto (0, 10) m es la suma vectorial de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$. Observa que la componente de ambos campos en la dirección del eje *Y* tiene el mismo valor y son de sentidos opuestos, por lo que se anulan entre sí. El camo resultante será, por tanto:

$$\vec{E} = -34{,}62 \cdot \vec{i} - 34{,}62 \cdot \vec{i} = -69{,}24 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El potencial eléctrico que corresponde al punto (1, 0) m es:

– Potencial debido a la carga de 2 μC:

$$V_1\,(1, 0) = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1} = 18 \cdot 10^3 \text{ V}$$

– Potencial debido a la carga de –2 μC:

$$V_2\,(1, 0) = K \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{3} = -6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Por tanto, el potencial total en ese punto es:

$$V(1, 0) = V_1\,(1, 0) + V_2\,(1, 0) = 18 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Del mismo modo, para el punto (–1, 0) m:

– Potencial debido a la carga de –2 μC:

$$V_1\,(-1, 0) = K \cdot \frac{Q_1}{r'_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3} = 6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_2\,(-1, 0) = K \cdot \frac{Q_2}{r'_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{1} = -18 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El potencial total en ese punto es:

$$V(-1, 0) = V_1\,(-1, 0) + V_2\,(-1, 0) = 6 \cdot 10^3 - 18 \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El trabajo realizado por las fuerzas del campo para llevar una carga de –1 μC desde el primer punto al segundo se calcula del siguiente modo:

$$W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_{final} - V_{inicial}) =$$
$$= -(-1 \cdot 10^{-6}) \cdot (-12 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3) = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

El signo negativo indica que hay que realizar un trabajo exterior en contra de las fuerzas del campo, como corresponde a una carga negativa que se dirige hacia potenciales decrecientes.

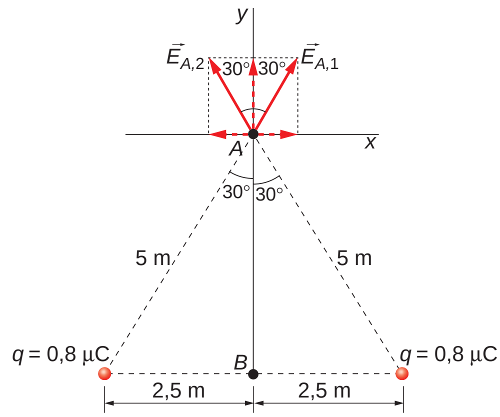
32. Dos partículas de carga $q = 0{,}8$ μC, cada una, están fijas en el vacío y separadas una distancia $d = 5$ m:

a) Determina el vector campo eléctrico que producen estas cargas en el punto *A*, que forma un triángulo equilátero con ambas.

b) Calcula el campo y el potencial eléctricos en el punto medio de la recta que las une.

Dato: $K = 1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) La representación esquemática de la situación física que propone el enunciado del problema es la siguiente:



El campo eléctrico en el punto A es la suma vectorial de los campos que crea cada carga por separado. La distancia de cada carga al punto A es:

$$d = 5 \text{ m}$$

Y el valor del ángulo α:

$$sen\ \alpha = \frac{2,5}{5} \rightarrow \alpha = arcsen\ \frac{1}{2} = 30°$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot (sen\ \alpha \cdot \vec{i} + cos\ \alpha \cdot \vec{j}) + K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot (sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + cos\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot [(sen\ \alpha - sen\ \alpha) \cdot \vec{i} + (cos\ \alpha + cos\ \alpha) \cdot \vec{j}] =$$

$$= K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot 2 \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{5^2} \cdot 2 \cdot cos\ 30° \cdot \vec{j} = 498,8 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) En el punto medio de la recta que une las cargas, el campo eléctrico que crea la primera es de sentido contrario al que crea la segunda, y sus sentidos son opuestos; por tanto, en ese punto el campo eléctrico total es cero.

El potencial eléctrico que corresponde a dicho punto es:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q_1}{d_1} + K \cdot \frac{Q_2}{d_2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$Q_1 = Q_2 = Q = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$d_1 = d_2 = d = 2,5 \text{ m}$$

se obtiene:

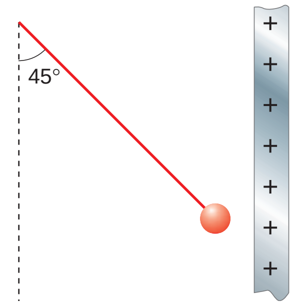
$$V = 2 \cdot K \cdot \frac{Q}{d} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{2,5} = 5\,760 \text{ V}$$

33. Una bolita, cargada eléctricamente, de 1 gramo de masa es atraída por una placa cargada de modo que forma un ángulo de 45° con la vertical, como se muestra en la figura:

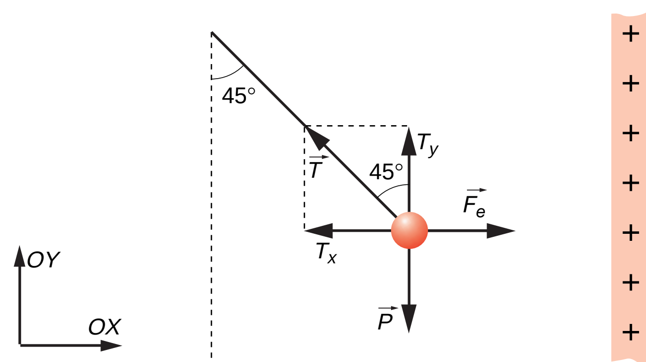
a) Dibuja un diagrama con las fuerzas que actúan sobre la bola cuando se encuentra en equilibrio.

b) Si el campo eléctrico en las proximidades de la placa es de 1050 V · m⁻¹, calcula el módulo y el signo de la fuerza que actúa sobre la bolita.

c) Calcula la carga que posee la bola cuando se encuentra en equilibrio.



a) Sobre la bolita actúan las fuerzas que se indican en la siguiente figura. Estas fuerzas son su propio peso, $\vec{P}$; la fuerza eléctrica de atracción, $\vec{F}_e$, que se produce entre cargas de distinto signo, y la tensión que soporta el hilo, $\vec{T}$, cuya dirección y sentido son los que se indican:



b) Planteamos el equilibrio de fuerzas en direcciones OX y OY:

$$OX \rightarrow -T \cdot sen\ 45° + F_e = 0 \rightarrow T \cdot sen\ 45° = q \cdot E$$

$$OY \rightarrow T \cdot cos\ 45° - m \cdot g = 0 \rightarrow T \cdot cos\ 45° = m \cdot g$$

Sustituyendo valores en la segunda expresión, podemos calcular la tensión:

$$T \cdot cos\ 45° = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{cos\ 45°} = \frac{10^{-3} \cdot 9,81}{cos\ 45°} = 1,387 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$$

Conocida la tensión, resulta inmediato calcular la fuerza eléctrica:

$$F_e = T \cdot sen\ 45° = 1,387 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ 45° = 9,81 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

c) Una vez calculada la fuerza eléctrica, podemos despejar la carga de la bolita:

$$F_e = q \cdot E \rightarrow q = \frac{F_e}{E} = \frac{9,81 \cdot 10^{-3}}{1050} = 9,34 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

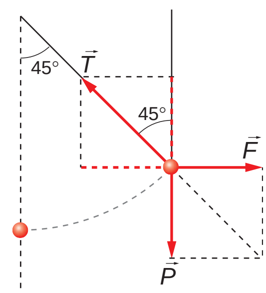
34. Una pequeña esfera de 0,2 g cuelga de un hilo de masa despreciable entre dos láminas verticales paralelas separadas 5 cm. La esfera tiene una carga positiva de 6 · 10⁻⁹ C:

a) ¿Qué diferencia de potencial entre las láminas hará que el hilo forme un ángulo de 45° con la vertical?

b) ¿Cuál será la intensidad del campo eléctrico entre las láminas?

c) Representa gráficamente las fuerzas que actúan sobre la esfera en la posición de equilibrio.

c) Las fuerzas que actúan sobre la esfera en equilibrio son las que se indican en la figura:



Fíjate en que la esfera, al estar cargada positivamente, se dirigirá hacia la placa negativa.

b) En la posición de equilibrio, la relación entre las dos componentes de la tensión es, de acuerdo con la figura anterior.

$$\left.\begin{array}{l} T \cdot sen\ 45° = q \cdot E \\ T \cdot cos\ 45° = P \end{array}\right\} \rightarrow tg\ 45° = \frac{q \cdot E}{P} \rightarrow P = q \cdot E$$

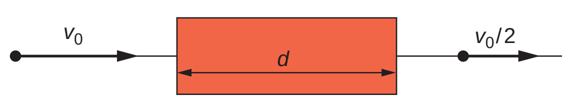
$$E = \frac{P}{q} = \frac{m \cdot g}{q} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{6 \cdot 10^{-9}} = 3{,}27 \cdot 10^{5}\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

a) Como el campo eléctrico entre ambas placas es uniforme:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta d \cdot cos\ 0° = -E \cdot d$$

$$V = -3{,}27 \cdot 10^{5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = -1{,}63 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}$$

35. Un electrón, con energía cinética inicial igual a 100 eV, penetra en la región sombreada de la figura de anchura $d = 10$ cm, donde se sabe que existe un campo eléctrico uniforme.



Se observa que el electrón atraviesa dicha región sin desviarse de su trayectoria rectilínea inicial, pero su velocidad a la salida es la mitad de la inicial.

Calcula:

a) La velocidad inicial, v_0, que posee el electrón antes de atravesar la región sombreada.

b) El módulo y la orientación del campo eléctrico dentro de esa región.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La energía cinética inicial del electrón, expresada en unidades del S. I., es:

$$E_c = 100 \text{ eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Teniendo en cuenta la expresión que corresponde a la energía cinética, podemos calcular la velocidad inicial, v_0, del electrón:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-17}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Como el electrón es frenado por el campo eléctrico y no es desviado por este, el campo eléctrico estará situado en la misma dirección, y su sentido será hacia la derecha.

El electrón, dentro de la región, estará sometido a la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

Teniendo en cuenta la segunda ley de la dinámica:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Podemos escribir:

$$\vec{F} = \vec{F}_e \rightarrow m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{m \cdot \vec{a}}{q}$$

Para obtener el valor de la intensidad del campo eléctrico, hemos de obtener en primer lugar, la aceleración a que está sometido el electrón, que podemos calcular aplicando las ecuaciones del m.r.u.a.:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2}{2 \cdot s}$$

$$a = \frac{-3 \cdot v_0^2}{8 \cdot s} = \frac{-3 \cdot (5{,}93 \cdot 10^6)^2}{8 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = -1{,}32 \cdot 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Finalmente, el valor del campo eléctrico es:

$$E = \frac{m \cdot a}{q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (-1{,}32 \cdot 10^{14})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 750 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el vector campo eléctrico:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{i} = 750 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

36. Consideramos las superficies equipotenciales producidas por una carga puntual $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C, colocada en el origen de coordenadas:

a) Calcula la separación entre la superficie equipotencial de 6 000 V y la de 2 000 V.

b) Calcula el trabajo que tiene que realizar un agente externo para mover una carga de prueba $q_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ C desde la superficie equipotencial de 6 000 V hasta la de 2 000 V sin variar su energía cinética.

a) La expresión que permite calcular el potencial que crea una carga en un punto es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r} \rightarrow r = \frac{K \cdot q}{V}$$

La superficie equipotencial de 2 000 V se encontrará a la siguiente distancia de la carga que crea el campo:

$$r_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2000} = 9 \text{ m}$$

Y la de 6 000 V:

$$r_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{6000} = 3 \text{ m}$$

La distancia entre ambas superficies es:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 9 - 3 = 6 \text{ m}$$

b) La energía potencial de la carga cuando se encuentra sobre dichas superficies equipotenciales es:

$$V_2 = 2000 \ V \rightarrow E_{p_2} = q \cdot V_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 = 3 \text{ J}$$

$$V_1 = 6000 \ V \rightarrow E_{p_1} = q \cdot V_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6000 = 9 \text{ J}$$

Al dejar la carga, positiva, en libertad, se moverá de mayor a menor potencial, aumentando su energía cinética y perdiendo energía potencial:

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = 3 - 9 = -6 \text{ J}$$

Como la carga no modifica su energía cinética, su movimiento debe ser uniforme; debe haber una fuerza exterior que, actuando sobre la carga, contrarreste las fuerzas del campo. El trabajo que realiza la fuerza exterior es de 6 J.

37. La expresión de un campo eléctrico uniforme es: $\vec{E} = 500 \cdot \vec{i}$ N · C^{-1}:

a) ¿Cómo serán sus superficies equipotenciales?

b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga de 2 μC desde el punto *P* (2, 3, 0) m hasta el punto *Q* (6, 5, 0) m.

c) Calcula la distancia que separa las superficies equipotenciales $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V.

a) Teniendo en cuenta que el vector campo eléctrico es perpendicular en todo punto a la superficie equipotencial y que este está dirigido en el sentido positivo del eje *X*, las superficies equipotenciales estarán situadas en el plano *YZ*.

b) El trabajo que realizan las fuerzas del campo se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$W_{F\,ext} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_2 - V_1) = q \cdot (V_1 - V_2) = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En el caso que propone el enunciado:

$$W_{F\,ext} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \int_2^6 500 \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot (6 - 2) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

El signo positivo indica que el trabajo lo realiza el propio campo (recuerda que una carga positiva se traslada espontáneamente hacia potenciales decrecientes).

c) Como el campo eléctrico es uniforme:

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} \rightarrow d = -\frac{V_2 - V_1}{E} = -\frac{20 - 10}{500} = -0{,}02 \text{ m}$$

El resultado obtenido indica que, según el eje X, V_2 está a la izquierda de V_1.

38. En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo de $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ s. Despreciando los efectos gravitatorios, calcula:

a) La intensidad del campo eléctrico entre las láminas.

b) La velocidad con que llega el electrón a la segunda lámina.

c) La diferencia de potencial entre las láminas.

a) El movimiento que realiza el electrón es un m.r.u.a. Con los datos de que disponemos podemos calcular su aceleración:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow s = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

$$a = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{(1{,}5 \cdot 10^{-8})^2} = 1{,}78 \cdot 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aplicando ahora la segunda ley de la dinámica, obtenemos la intensidad del campo eléctrico entre las láminas:

$$F = F_e \rightarrow m \cdot a = q \cdot E \rightarrow E = \frac{m \cdot a}{q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}78 \cdot 10^{14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1\,011{,}1 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) La velocidad con que llega el electrón a la segunda lámina es:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + 1{,}78 \cdot 10^{14} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-8} = 2{,}67 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

c) Como el campo eléctrico es uniforme, podemos calcular la diferencia de potencial entre las láminas a partir de la siguiente expresión:

$$E \cdot d = \Delta V \rightarrow \Delta V = 1\,011{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 20{,}22 \text{ V}$$

39. Dos partículas con cargas $q_1 = 1$ μC y $q_2 = 2$ μC están separadas una distancia $d = 0{,}5$ m:

a) Calcula la fuerza que actúa sobre la segunda y su energía potencial electrostática.

b) Si q_2 puede moverse, partiendo del reposo, ¿hacia dónde lo hará? Calcula su energía cinética cuando se haya desplazado 0,2 m respecto a su posición inicial.

c) ¿Cuánto trabajo habrá realizado hasta entonces el campo eléctrico?

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) La fuerza que actúa sobre la segunda partícula viene dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}$$

donde $\vec{E}$ es el campo creado por la carga q_1:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q_1}{r_2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}5^2} = 36\,000 \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Por tanto:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 36\,000 \cdot \vec{u}_r = 0{,}072 \cdot \vec{u}_r \text{ N}$$

Su energía potencial electrostática es:

$$E_p = q_2 \cdot V = q_2 \cdot K \cdot \frac{q_1}{r} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}5} = 0{,}036 \text{ J}$$

b) Al ser una carga positiva, se moverá en el sentido en que disminuya su energía potencial. Se moverá, por tanto, en la misma dirección y sentido que el campo eléctrico. Cuando se haya desplazado 0,2 m, estará a 0,7 m de la carga que crea el campo, q_1. En ese punto, su energía potencial es:

$$E_p' = q_2 \cdot K \cdot \frac{q_1}{r'} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}7} = 0{,}026 \text{ J}$$

Al ser el campo eléctrico conservativo, se cumple que:

$$-\Delta E_p = \Delta E_c \rightarrow \Delta E_c = -(0{,}026 - 0{,}036) = 0{,}010 \text{ J}$$

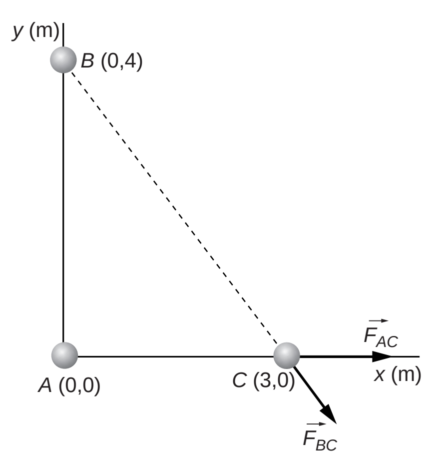
c) El trabajo realizado por el campo eléctrico coincide con el incremento de la energía cinética de la partícula (teorema de las fuerzas vivas):

$$W = 0{,}010 \text{ J}$$

40. Tres cargas iguales, de +100 μC, están situadas en el vacío, en los puntos *A* (0,0), *B* (0,4) y *C* (3,0). Las coordenadas se expresan en metros.

Calcula la fuerza que las dos primeras cargas ejercen sobre la tercera y el vector intensidad del campo eléctrico en el punto (3,0).

La situación de las cargas es la que se muestra en la figura:



Para determinar la fuerza total que actúa sobre la carga C debido a la acción de A y B, aplicamos el principio de superposición, calculando por separado la fuerza que ejerce cada carga (A y B) sobre C, y sumando ambos resultados.

La fuerza que ejerce A sobre C es:

$$\vec{F}_{AC} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \cdot \vec{i} = 10 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

Para calcular la fuerza que ejerce B sobre C, calculamos en primer lugar el vector unitario de la dirección en que está dirigida esa fuerza:

$$\vec{u}_r = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot \vec{i} - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot \vec{j}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \vec{i} - \frac{4}{5} \cdot \vec{j} = 0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}$$

La fuerza que ejerce B sobre C es, por tanto:

$$\vec{F}_{BC} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2 + 4^2} \cdot (0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}) =$$

$$= (2{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Al sumar ambas fuerzas, resulta:

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = (12{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Para calcular la intensidad del campo eléctrico, aplicamos, al igual que en el apartado anterior, el principio de superposición.

Para la carga A resulta:

$$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \cdot \vec{i} = 100\,000 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Mientras que para la carga B:

$$\vec{E}_{BC} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3^2 + 4^2} \cdot (0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}) =$$

$$= (2{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Al sumar ambos campos, obtenemos el resultado que nos piden:

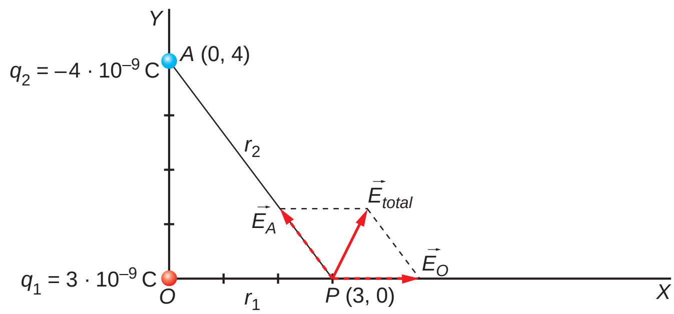
$$\vec{E} = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{BC} = (12{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

41. Una carga positiva de $3 \cdot 10^{-9}$ C está situada en el aire y en el origen, *O*, de un sistema de coordenadas. Una carga negativa puntual de $4 \cdot 10^{-9}$ C se coloca en el punto *A* de coordenadas (0,4), dadas en metros. Determina la intensidad del campo eléctrico y del potencial en el punto *P*, de coordenadas (3,0).

El campo que crean las cargas situadas en O y A lo calculamos aplicando el principio de superposición.

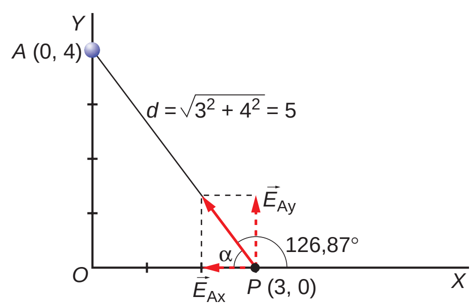
De acuerdo con la siguiente figura:



El campo eléctrico que la carga situada en *O* crea en *P* es:

$$\vec{E}_O = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{3^2} = 3 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico que la carga situada en *A* crea en *P* tiene dos componentes, como se aprecia en la siguiente ilustración:



De acuerdo con la figura:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = arcsen\ \frac{4}{5} = 53{,}13°$$

Por tanto:

$$\vec{E}_A = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{5^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= -0{,}86 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j}$$

El campo eléctrico total será la suma de ambos:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_O + \vec{E}_A = 3 \cdot \vec{i} - 0{,}86 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j} =$$

$$= 2{,}14 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j}$$

y su módulo:

$$E_T = \sqrt{2{,}14^2 + 1{,}15^2} = 2{,}43 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

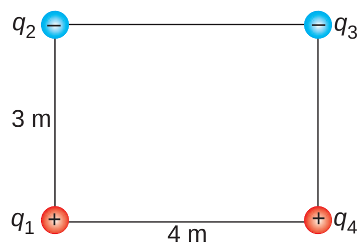
El potencial eléctrico en el punto *P* es la suma de los potenciales creados por las cargas situadas en *O* y en *A*:

$$V_O = K \cdot \frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{3} = 9 \text{ V}$$

$$V_A = K \cdot \frac{q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{5} = -7{,}2 \text{ V}$$

$$V_T = V_O + V_A = 9 - 7{,}2 = 1{,}8 \text{ V}$$

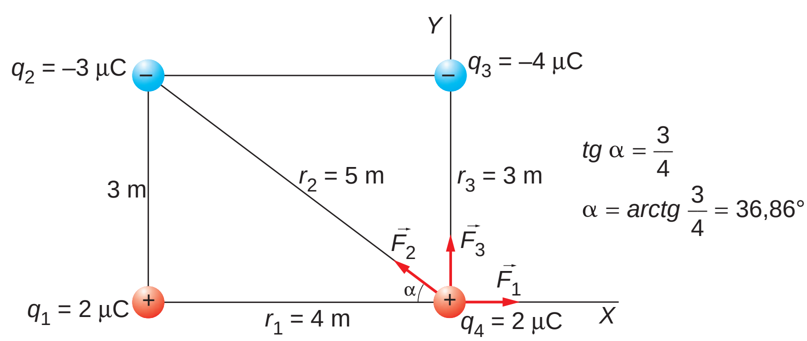
42. Cuatro cargas, $q_1 = 2$ μC, $q_2 = -3$ μC, $q_3 = -4$ μC y $q_4 = 2$ μC, están situadas en los vértices de un rectángulo, como indica la figura adjunta:



Halla la fuerza total que ejercen las cargas q_1, q_2 y q_3 sobre q_4.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ unidades S. I.

La fuerza que cada carga ejerce sobre q_4 es la que se representa en la figura adjunta:



– Fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_4:

$$F_1 = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_4}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{4^2} = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} \text{ N}$$

– Fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_4:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2^2} = (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{5^2} = (cos\ 36{,}86° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 36{,}86° \cdot \vec{j}) =$$

$$= -1{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 1{,}30 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}$$

– Fuerza que ejerce la carga q_3 sobre la carga q_4:

$$F_3 = K \cdot \frac{q_3 \cdot q_4}{r_3^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

La fuerza total que actúa sobre la carga q_4 es la suma vertical de las calculadas:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 1{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 1{,}30 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} + 8 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} =$$

$$= (0{,}52 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 9{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j})\ \text{N}$$

y su módulo:

$$F = \sqrt{(0{,}52 \cdot 10^{-3})^2 + (9{,}3 \cdot 10^{-3})^2} = 9{,}31 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

43 **En los puntos $A(4,0)$, $B(0,-4)$, $C(-2,0)$ y $D(2,0)$ metros, de un sistema de coordenadas, se encuentran, respectivamente, las cargas eléctricas $q_1 = 14 \cdot 10^{-5}$ C, $q_2 = 23 \cdot 10^{-5}$ C, $q_3 = -8 \cdot 10^{-5}$ C y $q_4 = -6 \cdot 10^{-5}$ C. Calcula:**

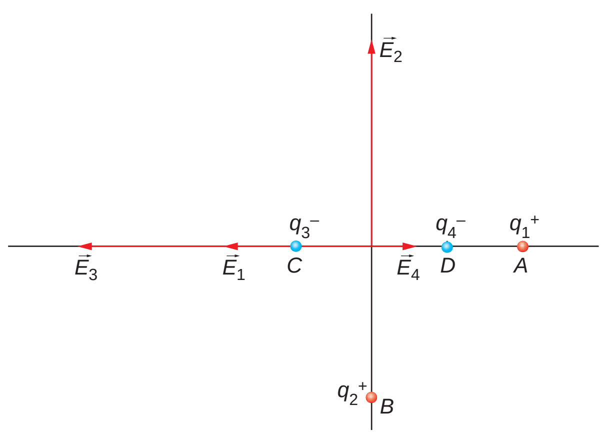
a) La intensidad del campo eléctrico en el punto (0,0).

b) El potencial eléctrico en el punto (0,0).

c) La energía potencial eléctrica que adquiere una carga de $+25 \cdot 10^{-6}$ C al situarse en ese punto.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) Las cargas están situadas en un sistema de coordenadas como se indica en la figura:



El campo eléctrico creado en el punto (0, 0) será la superposición de los campos creados por cada una de las cuatro cargas:

– Campo eléctrico creado por la carga q_1 en el origen:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{14 \cdot 10^{-5}}{4^2} = 7{,}88 \cdot 10^4 \cdot (-\vec{i})\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_2 en el origen:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{23 \cdot 10^{-5}}{4^2} \cdot \vec{j} = 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_3 en el origen:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-5}}{2^2} \cdot \vec{i} = -18 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_4 en el origen:

$$\vec{E}_4 = K \cdot \frac{q_4}{r_4^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-5}}{2^2} \cdot (-\vec{i}) = 13{,}5 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Por tanto, el campo eléctrico resultante en el origen es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -7{,}88 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} - 18 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 13{,}5 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} =$$

$$= -12{,}38 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}$$

y su módulo:

$$E = \sqrt{(-12{,}38 \cdot 10^4)^2 + (12{,}94 \cdot 10^4)^2} = 17{,}91 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el ángulo que forma en el eje Y:

$$tg\ \alpha = \frac{12{,}38 \cdot 10^4}{12{,}94 \cdot 10^4} = 0{,}957 \rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}957 = 43{,}73°$$

b) El potencial es una magnitud escalar cuyo valor se calcula sumando el potencial creado por cada carga:

$$V_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{14 \cdot 10^{-5}}{4} = 31{,}5 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{23 \cdot 10^{-5}}{4} = 51{,}75 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-5}}{2} = -36 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_4 = K \cdot \frac{q_4}{r_4} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-5}}{2} = -27 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Por tanto:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = (31{,}5 + 51{,}75 - 36 - 27) \cdot 10^4 = 20{,}25 \cdot 10^4 \text{ V}$$

c) La energía potencial eléctrica que corresponde a la carga es:

$$E_p = q \cdot V = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 20{,}25 \cdot 10^4 = 5{,}06 \text{ J}$$

44. Se libera desde el reposo un protón en un campo eléctrico uniforme de intensidad $7 \cdot 10^4$ V · m^{-1} dirigido a lo largo del eje *X* en sentido positivo. El protón se desplaza una distancia de 0,2 m en la dirección del campo. Calcula:

a) La diferencia de potencial que ha experimentado el protón en el desplazamiento indicado.

b) La variación de energía potencial.

c) La velocidad del protón al final de los 0,2 m recorridos.

Datos: $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

a) La relación entre la diferencia de potencial y el campo eléctrico es:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso, como el campo eléctrico es uniforme y el protón se desplaza en la dirección del campo:

$$V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx \cdot cos\ 0° = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx = -E \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -E \cdot (x_2 - x_1)$$

Por tanto:

$$V_2 - V_1 = -E \cdot (x_2 - x_1) = -7 \cdot 10^4 \cdot (0{,}2 - 0) = -1{,}4 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b) La expresión que relaciona la variación del potencial con la variación de la energía potencial es:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta E_p = q \cdot (V_2 - V_1) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-1{,}4 \cdot 10^4) = -2{,}24 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

El protón se mueve espontáneamente hacia potenciales decrecientes, disminuyendo el valor de su energía potencial y aumentando el de su energía cinética, de tal modo que su energía mecánica se conserva.

c) Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow E_{c_2} - E_{c_1} = -\Delta E_p$$

Como el protón se libera desde el reposo, $E_{c_1} = 0$. Por tanto:

$$E_{c_2} = -\Delta E_p \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\Delta E_p \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-\Delta E_p)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot [-(-2{,}24 \cdot 10^{-15})]}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} =$$
$$= 1{,}64 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

45. En el interior de una nave espacial existen las siguientes cargas: 5 μC, –9 μC, 27 μC, –84 μC. Suponiendo que la constante dieléctrica del medio es ε_0, calcula el flujo de campo eléctrico que atraviesa las paredes de la nave.

Compara el número de líneas de campo que salen de la nave con el número de líneas que entran en ella.

El teorema de Gauss permite calcular el flujo que atraviesa una superficie cerrada, *S*. Para el campo eléctrico, el teorema de Gauss se enuncia en la forma:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

expresión en la que Q_{int} es la carga total que encierra en su interior la superficie *S*, y ε, la constante dieléctrica del medio en que se encuentra dicha superficie.

El número de líneas que atraviesan la superficie por unidad de superficie es proporcional al flujo que existe. Podemos hablar de un flujo que entra (cuando las cargas eléctricas que encierra la superficie son negativas) y de un flujo que sale (cuando las cargas eléctricas que encierra son positivas).

De acuerdo con lo dicho, el flujo total que atravesará las paredes de la nave será:

$$\phi_{total} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} = \frac{(5-9+27-84)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = -6,89\cdot 10^{6}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$$

El flujo que entra (correspondiente a las cargas negativas) es:

$$\phi_{-} = \frac{Q_{int(-)}}{\varepsilon} = \frac{(-9-84)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = -10,51\cdot 10^{6}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$$

Mientras que el flujo que sale (que corresponde a las cargas positivas) resulta ser el siguiente:

$$\phi_{+} = \frac{Q_{int(+)}}{\varepsilon} = \frac{(5+27)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = 3,62\cdot 10^{6}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$$

En cuanto a la relación que existirá entre las líneas de campo que salen y las que entran, esta será:

$$\frac{\phi_{+}}{\phi_{-}} = \frac{3,62\cdot 10^{6}}{10,51\cdot 10^{6}} = 0,34$$

lo que significa que, por cada 34 líneas de campo que salen, entran 100.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

46. En una posición del espacio *A*, donde existe un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje *Z* positivo, se coloca una partícula cargada de carga $q = 10^{-6}$ C y masa $m = 10^{-6}$ kg con velocidad inicial nula.

Debido a la acción del campo eléctrico, esta partícula se acelera hasta otra posición *B* donde, tras recorrer un metro, llega con una velocidad cuyo módulo es 100 m · s^{-1}:

a) ¿Cuál es la dirección y el sentido de la velocidad?

b) Dibuja las superficies equipotenciales de ese campo eléctrico.

c) ¿Cuánto valdrá la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B*?

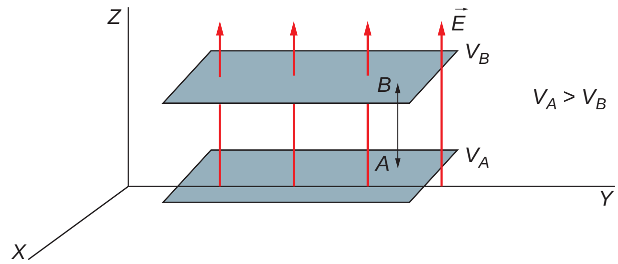
d) ¿Cuánto vale el campo eléctrico (dirección, módulo y sentido)?

a) La dirección y el sentido de la velocidad de la carga coinciden con los del campo eléctrico al tratarse de una carga positiva. En consecuencia:

$$\vec{v} = v\cdot\vec{k}$$

b) El vector campo eléctrico es perpendicular en todo punto a las superficies equipotenciales. Como el campo eléctrico es uniforme y está dirigido según el sentido positivo del eje *Z*, estas serán planos paralelos al plano *XY*, como se muestra en la figura de la página siguiente.

El potencial de las superficies decrecerá según se avanza en el sentido positivo del eje *Z*.



c) La carga positiva se mueve espontáneamente en la dirección y sentido de las líneas del campo eléctrico, disminuyendo el valor de su energía potencial y aumentando el de su energía cinética. Como la partícula parte del reposo y alcanza una velocidad final de 100 m · s^{-1}, la variación de su energía cinética es:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = E_{c_2} - 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_p = -\Delta E_c$$

Y que:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta E_p}{q}$$

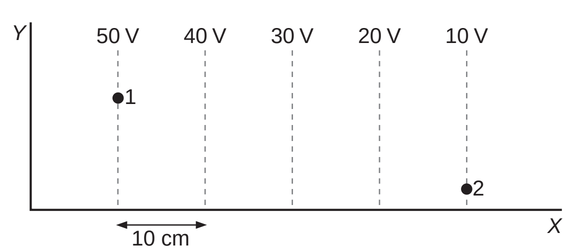
Obtenemos:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = -5\,000\ \text{V}$$

El resultado obtenido es lógico, ya que una carga positiva se mueve espontáneamente hacia potenciales decrecientes: $V_2 < V_1$.

NOTA: en la resolución del problema se ha prescindido de la acción del campo gravitatorio.

47 **La figura adjunta representa las superficies equipotenciales de una zona del espacio donde existe un campo eléctrico. Las superficies están separadas una de otra una distancia de 10 cm:**



a) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en dicha zona del espacio?

b) Dibuja las líneas del campo eléctrico.

c) ¿Qué trabajo hay que realizar para trasladar un electrón desde el punto 1 al punto 2? ¿Lo efectuará el propio campo eléctrico o deberemos aplicar alguna fuerza externa?

Dato: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C.**

a) La relación entre la diferencia de potencial y el campo eléctrico es:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso:

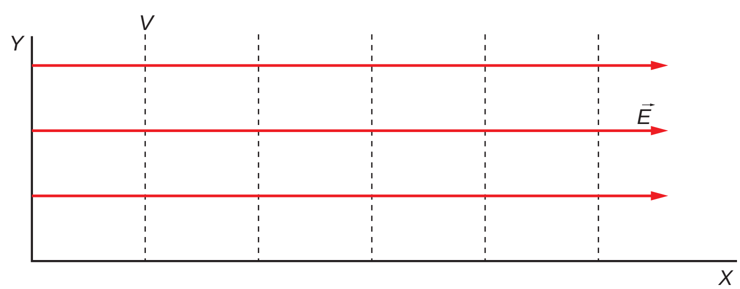
$$V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dr \cdot cos\ 0° = -E \cdot (x_2 - x_1)$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 10}{4 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El sentido del campo eléctrico estará dirigido hacia potenciales decrecientes; por tanto:

$$\vec{E} = 100 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales. De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, estarán dirigidas a lo largo del sentido positivo del eje *X*, como se muestra en la figura:



c) El trabajo necesario lo calculamos como sigue:

$$W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_2 - V_1) = -(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (10 - 50) = -64 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Las cargas negativas, como la del electrón, se mueven espontáneamente hacia potenciales crecientes; como en este caso lo hace hacia potenciales decrecientes, es necesario aplicar sobre él una fuerza externa, de sentido contrario a la del campo.

48 Debido a la fricción, una canica de acero de 0,5 cm de radio adquiere una carga de 30 nC. ¿Qué potencial adquiere la canica?

El potencial que adquiere una esfera de radio *R* al cargarse se calcula mediante la expresión:

$$V = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot R} = K \cdot \frac{Q}{R}$$

Sustituyendo valores, en el caso que nos ocupa resulta:

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{30 \cdot 10^{-9}}{0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 54\,000 \text{ V}$$

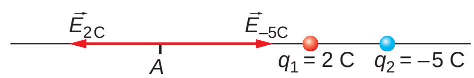
49. Tenemos dos cargas eléctricas puntuales de 2 C y –5 C, separadas una distancia de 10 cm. Calcula el campo en los puntos siguientes:

a) A 20 cm de la carga positiva, tomados en la dirección de la recta que une las cargas y en el sentido de la negativa a la positiva.

b) A 20 cm de la carga negativa, contados en la misma dirección, pero en sentido de la positiva a la negativa.

c) ¿En qué punto de dicha recta es nulo el potencial eléctrico?

a) La situación de las cargas y del punto donde se quiere calcular el campo es la que se muestra en la siguiente figura:



En el punto A una carga de prueba positiva se verá repelida por el campo creado por la carga positiva, y atraída por el creado por la carga negativa. El campo que crea cada una de ellas es:

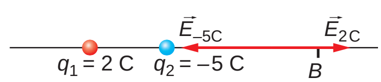
$$\vec{E}_{2\,C} = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{(20 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}) = -45 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{-5\,C} = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{(30 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}) = 50 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante en el punto A es:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{2\,C} + \vec{E}_{-5\,C} = (-45 \cdot 10^{10} + 50 \cdot 10^{10}) \cdot \vec{i} = 5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) En este caso, una carga de prueba positiva colocada en el punto B de la figura será repelida por la carga q_1 y atraída por la carga q_2:



Los campos que crea cada carga son:

$$\vec{E}_{2\,C} = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{(30 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = 20 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{-5\,C} = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{(20 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = -112{,}5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el campo resultante:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{2\,C} + \vec{E}_{-5\,C} = (20 \cdot 10^{10} - 112{,}5 \cdot 10^{10}) \cdot \vec{i} = -92{,}5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

c) El punto en que se anula el potencial eléctrico estará entre ambas cargas.

Si llamamos x a la distancia de la carga positiva al punto donde se anula el potencial, la distancia de la segunda carga a dicho punto será $0{,}1 - x$. Por tanto, imponiendo la condición de que se anula el potencial, se obtiene:

$$V_{2\,C} + V_{-5\,C} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{x} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{0{,}1 - x} = 0 \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{5}{0{,}1 - x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 \cdot x = 0{,}2 \rightarrow x = \frac{0{,}2}{7} = 0{,}0286 \text{ m} = 2{,}86 \text{ cm}$$

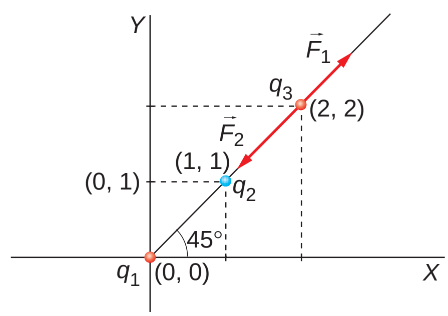
El potencial eléctrico se anula a 2,86 cm, medidos hacia la derecha de la carga positiva.

50. Dos cargas puntuales de 8 μC y –5 μC están situadas, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (1, 1) metros. Calcula:

a) La fuerza que actúa sobre una tercera carga de 1 μC situada en el punto (2, 2) metros.

b) El trabajo necesario para llevar esta última carga desde el punto que ocupa hasta el punto (0, 1) metros.

La situación de las cargas que propone el enunciado es la que se muestra en la siguiente figura:



La distancia de cada carga al punto (2, 2) la obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

a) La fuerza que ejerce la carga $q_1 = 8$ μC sobre la carga $q_3 = 1$ μC, es:

$$\vec{F}_1 = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_1^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Y la que ejerce la carga $q_2 = -5$ μC sobre la carga $q_3 = 1$ μC:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_2^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (-15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

La fuerza eléctrica resultante que actúa sobre q_3 es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} - 15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} =$$
$$= -9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} = -9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot (\vec{i} + \vec{j})\ \text{N}$$

b) El potencial a que se encuentra el punto (2, 2) es:

$$V_{(2,\,2)} = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}\right) = -6\,363{,}96\ \text{V}$$

Y el que corresponde al punto (0, 1):

$$V_{(0,\,1)} = V'_1 + V'_2 = K \cdot \frac{q_1}{r'_1} + K \cdot \frac{q_2}{r'_2} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r'_1} + \frac{q_2}{r'_2}\right) =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{8 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{1}\right) = 27 \cdot 10^3\ \text{V}$$

Se trata, por tanto, de una carga positiva que se mueve hacia potenciales crecientes. Como no lo hace espontáneamente, habrá que realizar trabajo sobre ella:

$$W_{ext} = q \cdot \Delta V = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (27 \cdot 10^3 + 6\,363{,}96) = 20{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

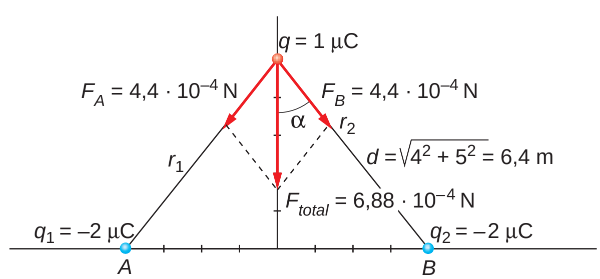
51. Dos cargas eléctricas puntuales de –2 μC, están situadas en los puntos *A*(–4,0) y *B*(4,0) metros:

a) Calcula la fuerza sobre una carga de 1 μC, situada en el punto (0,5) metros.

b) ¿Qué velocidad tendrá al pasar por el punto (0,0) metros?

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; Masa = 1 g

a) Las cargas y las fuerzas eléctricas que actúan con las que se muestran en la siguiente figura:



Observa que, de acuerdo con ella, la fuerza resultante en la dirección del eje *X* es nula, ya que ambas cargas atraen a la tercera con fuerzas del mismo valor y de sentidos opuestos en esa dirección. Por tanto, tan solo hemos de calcular la fuerza eléctrica resultante en la dirección del eje *Y*.

La distancia de las cargas de +2 μC y –2 μC a la tercera se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6{,}4\ \text{m}$$

El ángulo α es:

$$tg\ \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = arctg\ \frac{4}{5} = 38{,}66°$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q,\ Y} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(6,\ 4)^2} \cdot cos\ 38{,}66° \cdot \vec{j} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q,\ Y} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{r^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(6,\ 4)^2} \cdot cos\ 38{,}66° \cdot \vec{j} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

La fuerza resultante es, por tanto:

$$\vec{F} = \vec{F}_{q_1 \rightarrow q,\ Y} + \vec{F}_{q_2 \rightarrow q,\ Y} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} - 3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} = -6{,}86 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

b) Este apartado se puede resolver calculando la variación de energía potencial de la carga entre ambos puntos, y aplicando el principio de conservación de la energía, pero, como el enunciado proporciona como dato la masa de la partícula, se puede resolver de forma más sencilla y rápida utilizando conceptos cinemáticos.

La fuerza calculada en el apartado anterior le proporcionará a la carga la siguiente aceleración:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{6{,}86 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-3}} = 0{,}69\ \text{m/s}^2$$

Teniendo en cuenta que:

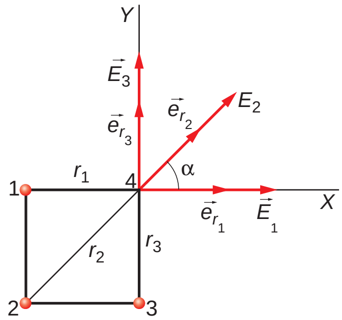
$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

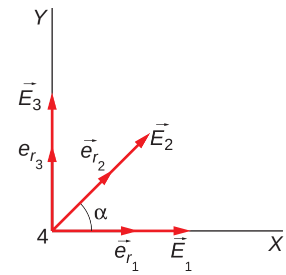
Obtenemos:

$$v^2 = 2 \cdot 0{,}69 \cdot 5 = 6{,}86\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \rightarrow v = \sqrt{6{,}86} = 2{,}62\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

52 En tres vértices de un cuadrado de 2 m de lado se disponen cargas de +10 μC. Calcula el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en el cuarto vértice, y el trabajo necesario para llevar una carga de –5 μC desde el centro del cuadrado hasta el cuarto vértice.

El sistema de referencia escogido para este problema es el siguiente:





$$r_1 = 2 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$

$$r_3 = 2 \text{ m}$$

El campo eléctrico que crea la carga q_1 en el cuarto vértice es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2^2} \cdot \vec{i} = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El que crea que la carga q_2 en el cuarto vértice es:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} \alpha \cdot \vec{j})$$

donde el ángulo vale 45° al tratarse del formado por la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados. Por tanto:

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (\cos 45° \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}$$

Y el creado por la carga q_3:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico resultante en el cuarto vértice será la suma de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} + 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} =$$

$$= 3{,}05 \cdot 10^4 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El potencial eléctrico en el cuarto vértice se obtiene sumando el que corresponde al creado por cada carga:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = 1{,}22 \cdot 10^5 \text{ V}$$

El trabajo necesario para trasladar una carga desde el centro hasta el cuarto vértice lo realizamos del siguiente modo:

– En primer lugar, calculamos el potencial a que se encuentra el centro del cuadrado:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

donde:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ m} \quad ; \quad q_1 = q_2 = q_3 = 9 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Por tanto:

$$V_0 = 3 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 1{,}91 \cdot 10^5 \text{ V}$$

– A continuación calculamos la diferencia de potencial entre ambos puntos:

$$\Delta V = V_f - V_0 = 1{,}22 \cdot 10^5 - 1{,}91 \cdot 10^5 = -0{,}69 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Como se observa, $V_f < V_0$. Como una carga negativa se traslada espontáneamente hacia potenciales crecientes, en este caso será necesario que se realice un trabajo exterior en contra de las fuerzas del campo.

– Calculamos el valor del trabajo realizado por las fuerzas del campo:

$$W = -q \cdot \Delta V = -(-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-0{,}69 \cdot 10^5) = -3{,}45 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

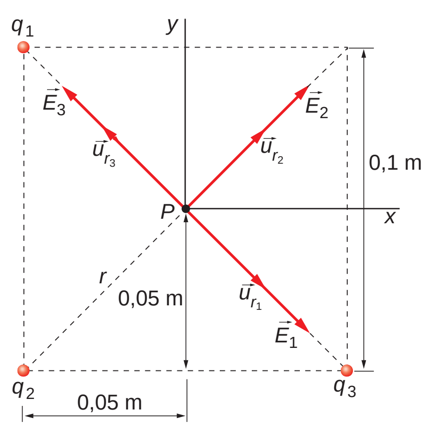
El signo negativo obtenido indica que el trabajo a realizar es externo.

53. Tres cargas positivas e iguales, de 2 μC cada una, se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de 10 cm de lado. Calcula:

a) El campo eléctrico en el centro del cuadrado.

b) Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

a) Para resolver el problema utilizaremos un sistema de referencia con el origen situado en el centro del cuadrado, como se muestra en la figura.



De acuerdo con ella:

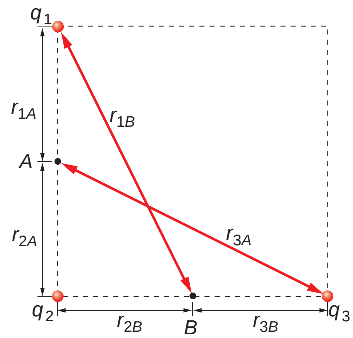
$$r_1 = r_2 = r_3 = r \quad ; \quad r = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2} = 7{,}07 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Además, fíjate en que los campos producidos por q_1 y q_3 son del mismo valor y sentido opuesto, por lo que el campo resultante en el centro del cuadrado coincidirá con el campo creado por la carga q_2:

$$\vec{E} = \vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r^2} \cdot (\cos 45° \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(7{,}07 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 2{,}55 \cdot 10^6 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) Para obtener los potenciales en dichos puntos necesitamos conocer, en primer lugar, la distancia que separa cada carga del punto medio. De acuerdo con la siguiente figura:



Dichas distancias son:

$$r_{1A} = r_{2A} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$r_{2B} = r_{3B} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$r_{3A}^2 = 0{,}05^2 + 0{,}10^2 = 0{,}0125 \text{ m}^2 \rightarrow r_{3A} = 0{,}112 \text{ m} = r_{1B}$$

El potencial en el punto A es:

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_{1A}} + K \cdot \frac{q_2}{r_{2A}} + K \cdot \frac{q_3}{r_{3A}}$$

Como $q_1 = q_2 = q_3 = q = 2 \cdot 10^{-6}$ C, se obtiene:

$$V_A = K \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} + \frac{1}{r_{2A}} + \frac{1}{r_{3A}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}112} \right) = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Por simetría:

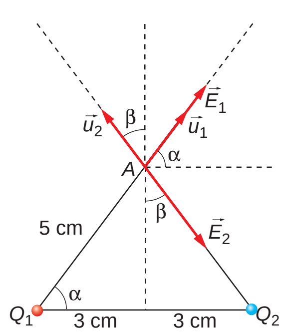
$$V_B = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Como la d.d.p. entre ambos puntos es nula, el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre ellos es nulo.

54 **Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales de 2 μC y −2 μC, distantes entre sí 6 cm. Calcula el campo y el potencial eléctrico en un punto de la mediatriz del segmento que las une, distante 5 cm de cada carga, y en otro situado en la prolongación del segmento que las une y a 2 cm de la carga positiva.**

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ S.I.

El sistema de referencia elegido para calcular el campo y el potencial eléctrico en un punto de la mediatriz es el siguiente:



De acuerdo con él:

$$r = r_1 = r_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

El valor de los ángulos α y β es:

$$cos\ \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \alpha = arccos\ \frac{3}{5} = 53{,}13°$$

El campo creado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot \vec{i} + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot \vec{i} + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} + 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo creado por la carga q_2 es:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} - 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico resultante es la suma de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} + 5{,}76 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} + 4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} - 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j} =$$

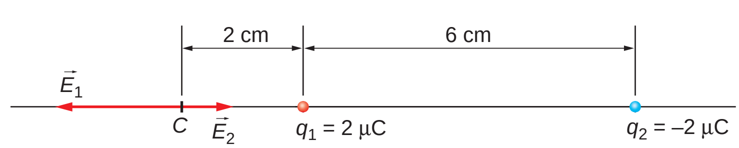
$$= 8{,}64 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Al ser el potencial una magnitud escalar, su valor en el punto considerado es:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = \frac{K}{r} \cdot (q_1 + q_2) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot (2 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6}) = 0 \text{ V}$$

El campo eléctrico en el punto situado en la prolongación del segmento que une las cargas, a 2 cm de la carga positiva, se calcula también aplicando el principio de superposición. De acuerdo con la siguiente figura:



los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = -4{,}5 \cdot 10^7 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{(8 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}) = 2{,}81 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -4{,}5 \cdot 10^7 \cdot \vec{i} + 2{,}81 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} = -4{,}22 \cdot 10^7 \cdot \vec{i} \quad \mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

siendo el potencial eléctrico en ese punto:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-2}}\right) = 6{,}75 \cdot 10^5 \ \mathrm{V}$$

55 **Dos esferas conductoras y aisladas y suficientemente alejadas entre sí, de 6 y 10 cm de radio, están cargadas cada una con una carga de 5 · 10⁻⁸ C. Las esferas se ponen en contacto mediante un hilo conductor y se alcanza una situación de equilibrio.**

Calcula el potencial al que se encuentra cada una de las esferas, antes y después de ponerlas en contacto, y la carga de cada esfera cuando se establece el equilibrio.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

En un conductor, la carga se distribuye por su superficie. Antes de poner en contacto ambas esferas, el potencial a que se encuentra cada una es:

$$V_1 = K \cdot \frac{Q}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 7\,500 \ \mathrm{V}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{Q}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 10^{-2}} = 4\,500 \ \mathrm{V}$$

El valor total de la carga de las esferas es:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5 \cdot 10^{-8} + 5 \cdot 10^{-8} = 10 \cdot 10^{-8} \ \mathrm{C} = 10^{-7} \ \mathrm{C}$$

Cuando las esferas se ponen en contacto, la situación de equilibrio se alcanzará cuando ambas se encuentren al mismo potencial; en ese momento dejarán de pasar cargas de la esfera que se encuentra a mayor potencial a la que está a menor potencial.

Al imponer la condición de igualdad de potenciales, obtenemos el valor de la carga que posee cada esfera después de alcanzar el equilibrio:

$$V'_1 = V'_2 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{R_1} = K \cdot \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{Q - q_1}{R_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{Q \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-2}} = 3{,}75 \cdot 10^{-8} \ \mathrm{C}$$

Por tanto:

$$q_2 = Q - q_1 = 10 \cdot 10^{-8} - 3{,}75 \cdot 10^{-8} = 6{,}25 \cdot 10^{-8} \ \mathrm{C}$$

Después de ponerlas en contacto y alcanzada la situación de equilibrio, el potencial a que se encuentran ambas esferas es:

$$V'_1 = V'_2 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}75 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 5\,625 \ \mathrm{V}$$

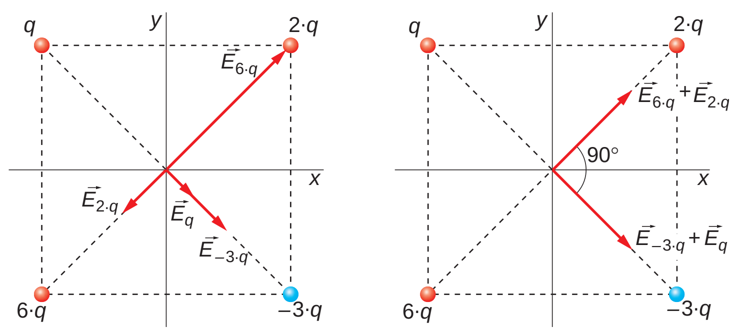
56 **Se disponen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado centrado en el origen como se indica a continuación: *q* en (−*a*, *a*), 2 · *q* en (*a*, *a*), −3 · *q* en (*a*, −*a*), y 6 · *q* en (−*a*, −*a*). Calcula:**

a) El campo eléctrico en el origen.

b) El potencial en el origen.

c) Se sitúa una quinta carga +*q* en el origen y se libera desde el reposo. Calcula su velocidad cuando se encuentre a una gran distancia del origen.

a) La posición de las cargas y el campo eléctrico que crea cada una de ellas son los que se muestran en la siguiente figura:



El campo que la carga situada en (−*a, a*) crea en el origen es:

$$\vec{E}_q = K \cdot \frac{q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} - sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i} - \vec{j}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{4 \cdot a^2} \cdot (-\vec{i} - \vec{j})$$

El que crea la carga situada en (*a, a*):

$$\vec{E}_{2 \cdot q} = K \cdot \frac{2 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (-cos\ 45° \cdot \vec{i} - sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} - \vec{j})$$

El que crea la carga situada en (*a, −a*):

$$\vec{E}_{-3 \cdot q} = K \cdot \frac{-3 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (-cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= \frac{-9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i} + \vec{j}) = \frac{27 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{4 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} - \vec{j})$$

Y el que crea la carga situada en (−*a, −a*):

$$\vec{E}_{6 \cdot q} = K \cdot \frac{6 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{27 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

El campo resultante es la superposición de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{2 \cdot q} + \vec{E}_{-3 \cdot q} + \vec{E}_{6 \cdot q} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \left(\frac{\vec{i}}{2} - \frac{\vec{j}}{2} - \vec{i} - \vec{j} + \frac{3}{2} \cdot \vec{i} - \frac{3}{2} \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot (4 \cdot \vec{i}) = \frac{18 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{a^2} \cdot \vec{i}$$

NOTA: el enunciado del problema no proporciona ninguna información sobre las unidades en que se expresan las cargas y las coordenadas. Recuerda que, en el S. I., q se mide en C, la distancia en metros, F en $N \cdot C^{-1}$ y V en V.

b) El potencial en el origen será la suma del potencial creado en ese punto por cada una de las cargas:

$$V = V_q + V_{2 \cdot q} + V_{-3 \cdot q} + V_{6 \cdot q} = K \cdot \left(\frac{q}{a \cdot \sqrt{2}} + \frac{2 \cdot q}{a \cdot \sqrt{2}} + \frac{-3 \cdot q}{a \cdot \sqrt{2}} + \frac{6 \cdot q}{a \cdot \sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9}{a \cdot \sqrt{2}} \cdot (6 \cdot q) = \frac{54 \cdot 10^9 \cdot q}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{27 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^9 \cdot q}{a}$$

c) Si el origen de potenciales se sitúa en el infinito, $v_\infty = 0$, allí toda la energía de la carga será cinética. Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_c = E_p = q \cdot V \rightarrow E_c = q \cdot \frac{27 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^9 \cdot q}{a} = \frac{27 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^9 \cdot q^2}{a}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 27 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^9 \cdot q^2}{m \cdot a}} = \sqrt{\frac{54 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^9 \cdot q^2}{m \cdot a}}$$

57. Dos esferas metálicas, de 2 y 4 cm de radio, respectivamente, se encuentran en el vacío. Cada una de ellas posee una carga de 50 nC:

a) Calcula el potencial a que se encuentra cada esfera.

En cierto instante, se unen ambas esferas mediante un conductor. Calcula:

b) El potencial a que se encuentra cada esfera tras unirse.

c) La carga que posee cada esfera tras la unión.

a) El potencial de una esfera cargada es:

$$V = K \cdot \frac{Q}{R}$$

Por tanto, para cada una de las esferas del enunciado obtenemos:

$$V_1 = K \cdot \frac{Q}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} = 22\,500 \text{ V}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{Q}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = 11\,250 \text{ V}$$

b) Cuando ambas esferas se unen, se inicia una transferencia de carga eléctrica, que cesa cuando las dos se encuentran al mismo potencial. En ese caso, se cumple la siguiente relación:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q'_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_1} = \frac{Q'_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_2} \rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta, además, que la carga se conserva, resulta:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q + Q = 2 \cdot Q = 100 \text{ nC} \qquad [2]$$

Las ecuaciones [1] y [2] forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, Q'_1 y Q'_2. Para resolver el sistema, despejamos Q'_1 en la expresión [2] y sustituimos en la [1].

De ese modo, obtenemos la carga de la esfera de 4 cm de radio tras la unión:

$$\frac{100 - Q'_1}{2} = \frac{Q'_2}{4} = 2 \cdot Q'_2 = 400 - 4 \cdot Q'_2 \rightarrow Q'_2 = \frac{400}{6} = 66{,}67 \text{ nC}$$

y, por tanto, la carga de la esfera de 2 cm resulta:

$$Q'_1 = 100 - 66{,}67 = 33{,}33 \text{ nC}$$

c) El potencial al que quedan ambas esferas es:

$$V = V_1 = V_2 \rightarrow V = K \cdot \frac{Q'_1}{R_1} = K \cdot \frac{Q'_2}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{33{,}33 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{66{,}67 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = 15\,000 \text{ V}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

58 **Supongamos, por un momento, que la materia no fuera eléctricamente neutra, sino que tuviera una carga neta diferente de cero debido a que la carga de los protones no fuera igual a la de los electrones:**

a) ¿Qué carga eléctrica deberían tener la Tierra y la Luna para que la repulsión electrostática igualara la atracción gravitatoria entre ambas? Considera que estas cargas están en la misma relación que sus masas.

b) Si admitimos que la masa de los electrones es mucho menor que la de los protones y neutrones, ¿cuál debería ser la diferencia entre la carga del protón y la del electrón para producir el valor de las cargas del apartado anterior?

Datos: $M_{Luna} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ **kg;**

$M_{protón} = M_{neutrón} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ **kg.**

a) La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna viene dada por la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}$$

Y la de atracción electrostática por la ley de Coulomb:

$$F_e = K \cdot \frac{Q_T \cdot Q_L}{r_{TL}^2}$$

al igualar ambas, obtenemos:

$$F_g = F_e \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2} = K \cdot \frac{Q_T \cdot Q_L}{r_{TL}^2} \rightarrow G \cdot M_T \cdot M_L = K \cdot Q_T \cdot Q_L \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta que las cargas de la Tierra y la Luna están en la misma relación que sus masas:

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{Q_T}{Q_L} \rightarrow M_T = \frac{Q_T \cdot M_L}{Q_L}$$

La expresión [1] queda como:

$$G \cdot \frac{Q_T \cdot M_L^2}{Q_L} = K \cdot Q_T \cdot Q_L \rightarrow Q_L = \sqrt{\frac{G \cdot M_L^2}{K}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{9 \cdot 10^9}} = 6,33 \cdot 10^{12}\ \text{C}$$

Por tanto, la carga que corresponde a la Tierra es:

$$Q_T = \frac{Q_L \cdot M_T}{M_L} = \frac{6,33 \cdot 10^{12} \cdot 15,98 \cdot 10^{24}}{7,35 \cdot 10^{22}} = 5,15 \cdot 10^{14}\ \text{C}$$

Por supuesto, la carga de la Luna y de la Tierra debe ser del mismo signo para que se repelan.

b) Para resolver este apartado, supondremos que las masas de la Tierra y la Luna se deben solo a los protones y neutrones, y despreciamos la contribución de los electrones, al ser su masa mucho menor.

El número de nucleones que formarán la masa de la Luna (protones más neutrones), será:

$$n = \frac{M_L}{m_{nucleón}} = \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 4,4 \cdot 10^{49}\ \text{nucleones}$$

Considerando que el número de protones es igual al número de neutrones:

$$n_{protones} = \frac{n}{2} = \frac{4,4 \cdot 10^{49}}{2} = 2,2 \cdot 10^{49}\ \text{protones}$$

Para que la Luna tuviera una carga de $6,33 \cdot 10^{12}$ C, la diferencia entre la carga del protón y del electrón debería ser:

$$\Delta q = \frac{6,33 \cdot 10^{12}}{2,2 \cdot 10^{49}} = 2,88 \cdot 10^{-37}$$

Es decir, la carga del protón podría ser:

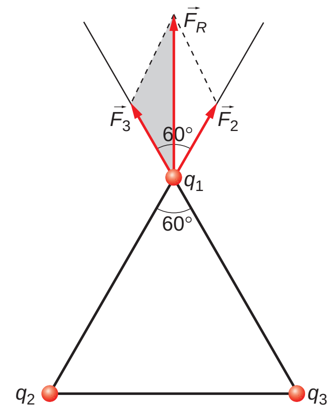
$$q_{p_+} = (1,6 \cdot 10^{-19} \pm 2,88 \cdot 10^{-37})\ \text{C}$$

59. Tres cargas eléctricas puntuales iguales, con $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$ nC, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado. Calcula:

a) La fuerza que actúa sobre Q_1.

b) El campo eléctrico y el potencial eléctrico en el centro (baricentro) del triángulo.

a) De acuerdo con la figura:



La fuerza que ejerce la carga q_2 sobre q_1 es, en módulo:

$$F_{q_2 \to q_1} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{1^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Del mismo modo, la que ejerce q_3 sobre q_1 es:

$$F_{q_3 \to q_1} = K \cdot \frac{q_3 \cdot q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{1^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Observa que, al ser el triángulo equilátero, el ángulo formado por ambas fuerzas es de 60°. Por tanto, el valor de la resultante es:

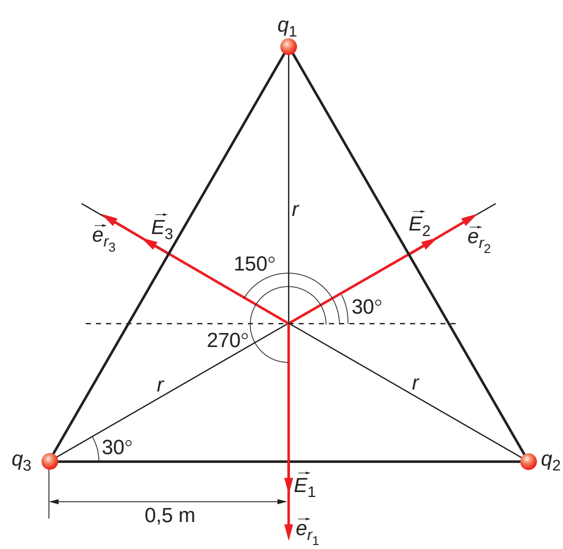
$$F = \sqrt{F^2_{q_2 \to q_1} + F^2_{q_3 \to q_1} + 2 \cdot F_{q_2 \to q_1} \cdot F_{q_3 \to q_1} \cdot \cos 60°} =$$

$$= \sqrt{(3{,}6 \cdot 10^{-8})^2 + (3{,}6 \cdot 10^{-8})^2 + 2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot \cos 60°} = 6{,}24 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Esta fuerza está dirigida en el sentido positivo del eje de ordenadas. Por tanto:

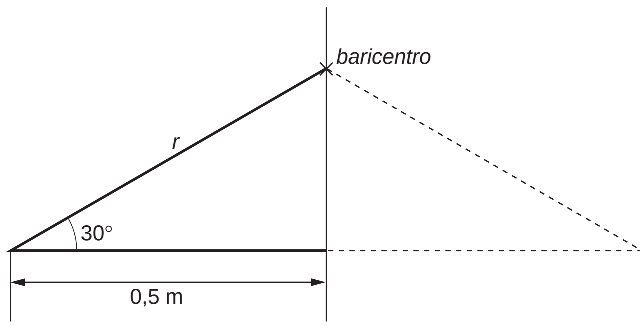
$$\vec{F} = 6{,}24 \cdot 10^{-8} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

b) Por definición, la distancia de cada carga al baricentro del triángulo es la misma. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



Se observa que, por simetría, el campo eléctrico total creado por las tres cargas en el baricentro del triángulo es nulo.

Para calcular el valor del potencial en dicho punto, debemos calcular la distancia que separa las cargas del baricentro, que, de acuerdo con la siguiente figura:



tiene el siguiente valor:

$$cos\ 30° = \frac{0{,}5}{r} \rightarrow r = \frac{0{,}5}{cos\ 30°} = 0{,}577 \text{ m}$$

El potencial en el baricentro se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

teniendo en cuenta que:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r$$

su valor es:

$$V = 3 \cdot K \cdot \frac{q}{r} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0{,}577} = 93{,}53 \text{ V}$$

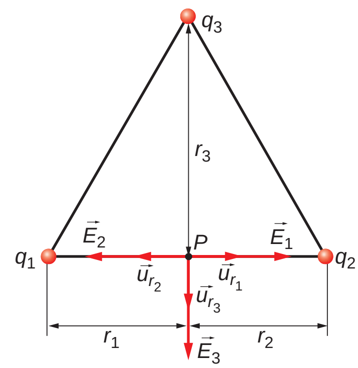
60. Tres cargas positivas, de 5 nC cada una de ellas, se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

a) Halla el campo eléctrico en el punto medio de uno de los lados del triángulo.

b) Halla el potencial eléctrico en el punto medio de uno de los lados del triángulo.

c) Halla el punto en el que el campo eléctrico es cero.

a) Si tomamos un sistema de referencia centrado en el punto medio de uno de los lados del triángulo, el campo eléctrico que crea en él cada carga es el mostrado en la siguiente figura:



De acuerdo con ello, los campos creados por las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo valor y sus sentidos son opuestos, por lo que se anulan entre sí. Por tanto, el campo eléctrico en el punto medio es el debido a la carga q_3.

El valor de r_3 es:

$$12^2 = 6^2 + r_3^2 \rightarrow r_3 = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}39 \text{ cm} = 10{,}39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por tanto:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot (-\vec{j}) = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{(10{,}39 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{j} = -4{,}17 \cdot 10^3 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El valor del potencial en el punto medio de uno de los lados del triángulo es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

siendo:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$r_1 = r_2 = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$r_3 = 10{,}39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por tanto:

$$V = K \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{10{,}39 \cdot 10^{-2}}\right) =$$

$$= 1\,933{,}11 \text{ V}$$

c) El campo eléctrico, por simetría, es nulo en el baricentro del triángulo (consúltese la figura incluida en el apartado b) del problema anterior).

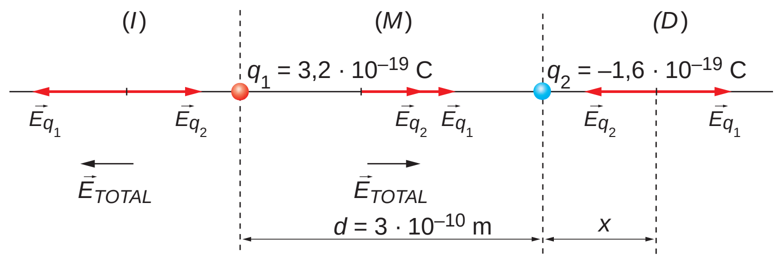
61. Sean dos iones de cargas $2 \cdot |e|$ y $-|e|$ respectivamente, separados una distancia de 3 Å. Calcula:

a) La distancia del ion positivo a la que se anula el campo eléctrico total.

b) La distancia del ion positivo a la que se anula el potencial eléctrico total.

c) La energía potencial eléctrica de los dos iones.

a) El campo eléctrico total se anulará en un punto de la recta que une ambas cargas situado a la derecha de ambas, de acuerdo con la siguiente figura:



Al imponer la condición de que, en módulo, se anule el campo, se obtiene el valor de la distancia x:

$$E_{q_1} = E_{q_2} \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{(d+x)^2} = K \cdot \frac{q_2}{x^2} \rightarrow \frac{q_1}{(d+x)^2} = \frac{q_2}{x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 \cdot (q_2 - q_1) + 2 \cdot d \cdot q_2 \cdot x + q_2 \cdot d^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19} - 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) + 2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot x + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 = 0$$

$$-x^2 + 6 \cdot 10^{-10} \cdot x + 9 \cdot 10^{-20} = 0 \rightarrow x = 7{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La distancia al ion positivo es, por tanto:

$$d = 7{,}24 \cdot 10^{-10} + 3 \cdot 10^{-10} = 10{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 10{,}24 \text{ Å}$$

b) El potencial se anulará en un punto situado entre ambas cargas, a una distancia x de la primera, que calculamos a continuación:

$$V_{q_1} + V_{q_2} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{x} + K \cdot \frac{q_2}{3 \cdot 10^{-10} - x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{3 \cdot 10^{-10} - x} = 0 \rightarrow x = \frac{-q_1 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{q_2 - q_1} =$$

$$= \frac{-3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19} - (3{,}2 \cdot 10^{-19})} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

A la derecha de la carga negativa también existe otro punto en el que se anula el potencial. Si llamamos y a la distancia que separa la carga negativa de ese punto:

$$V_{q_1} + V_{q_2} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{3 \cdot 10^{-10} + y} + K \cdot \frac{q_2}{y} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{3 \cdot 10^{-10} + y} + \frac{q_2}{y} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-q_2 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{q_1 + q_2} = \frac{-(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{3{,}2 \cdot 10^{-19} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La distancia a que se encuentra este punto del ion positivo es:

$$d' = 3 \cdot 10^{-10} + y = 3 \cdot 10^{-10} + 3 \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

c) La energía potencial de un sistema de cargas puntuales se corresponde con el trabajo necesario para traer las cargas desde el infinito hasta las posiciones que ocupan. Si suponemos que se trae en primer lugar la carga q_1, al no haber otra creando campo, el trabajo necesario es nulo. El potencial que crea esa carga a $3 \cdot 10^{-10}$ m de distancia es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^{-10}} = 9{,}6 \text{ V}$$

Por tanto, la energía potencial de la segunda carga es:

$$E_p = q \cdot V = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}6 = -1{,}54 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

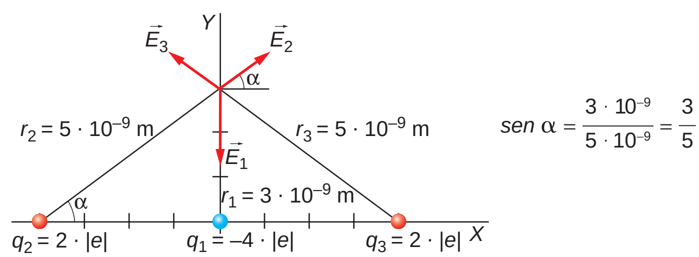
62 Tenemos una carga de $-4 \cdot |e|$ en el origen, una de $2 \cdot |e|$ en el punto $-4 \cdot \vec{i}$ nm y otra de $2 \cdot |e|$ en el punto $4 \cdot \vec{i}$ nm. Calcula:

a) El potencial eléctrico en el punto $3 \cdot \vec{j}$.

b) El campo eléctrico en dicho punto.

c) La energía potencial eléctrica del conjunto de las cargas.

La situación de las cargas es la que se muestra en la siguiente figura:



a) De acuerdo con ella, el potencial eléctrico en el punto $3 \cdot \vec{j}$ es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^{-9}} + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}} + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}}\right) = 0{,}768 \text{ V}$$

b) Observa, en la figura anterior, que las componentes en el eje X de los campos $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ se anulan. El campo resultante que crean es debido a la componente en el eje Y. Por tanto:

$$E_{2,y} = E_{3,y} = K \cdot \frac{2 \cdot |e|}{r_2^2} \cdot sen\ \alpha \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(5 \cdot 10^{-9})^2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \vec{j} =$$

$$= 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo creado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^{-9})^2} \cdot \vec{j} = -6{,}4 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_{2,y} + \vec{E}_{3,y} + \vec{E}_1 = 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} + 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} - 6{,}4 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} =$$

$$= -5{,}02 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} \quad \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

c) La energía potencial eléctrica del conjunto de las cargas es la suma de las energías potenciales de ellas, tomadas de dos en dos:

$$E_p = E_{p_{1,2}} + E_{p_{1,3}} + E_{p_{2,3}} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}} + K \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{1,3}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{2,3}} =$$

$$= K \cdot \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{2,3}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{(-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-9}} + \frac{(-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-9}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{8 \cdot 10^{-9}} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot 10^{-9}} \cdot (-8 - 8 + 2) = -8{,}064 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

63. Se sitúa en el origen de coordenadas del espacio tridimensional vacío un cuerpo puntual de masa 10 kg y con una carga eléctrica –1 nC. En el punto (1, 1, 1) metros se sitúa otro cuerpo puntual de masa 20 kg y carga eléctrica –100 pC:

a) Determina la fuerza total que ejerce el primer cuerpo sobre el segundo.

b) ¿Cuál es el cociente entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria en este caso?

c) Si se separan las cargas una distancia de 10 m, sobre la misma línea que antes, el cociente entre las fuerzas gravitatoria y eléctrica, ¿crece, decrece o se mantiene?

Datos: $\boldsymbol{\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot m^2 \cdot N^{-1}}$

$\boldsymbol{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

a) La distancia que separa ambos cuerpos puntuales es:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

El primer cuerpo ejerce sobre el segundo una fuerza de atracción gravitatoria y otra de repulsión electrostática. El valor de la primera es:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 20}{(\sqrt{3})^2} = 4{,}45 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Y el de la fuerza eléctrica:

$$F_e = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-10}}{(\sqrt{3})^2} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

En ambos casos, la dirección de la fuerza es la de la recta que une ambas cargas.

El valor de la fuerza total que ejerce el primer cuerpo sobre el segundo es:

$$F = F_e - F_g = 3 \cdot 10^{-8} - 4{,}45 \cdot 10^{-9} = 2{,}555 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Su sentido es el de la fuerza eléctrica.

b) El cociente entre el módulo de ambas fuerzas es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{4{,}45 \cdot 10^{-9}} = 6{,}74$$

c) El cociente entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{d^2}}{G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{d^2}} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{G \cdot m_1 \cdot m_2}$$

Observa que no depende de la distancia a que se encuentren las cargas; por tanto, el cociente se mantendrá.

8 ELECTROMAGNETISMO

8.1. LOS IMANES

1. **En la actualidad vivimos rodeados de imanes. Cita tres lugares, al menos, donde existan imanes.**

   El uso de imanes es muy frecuente en aparatos de uso cotidiano. Cualquier electrodoméstico (lavadora, batidora, secador de pelo, etc.) lleva imanes incorporados en su motor.

   Los imanes aparecen, además, en todo tipo de aparatos electrónicos: ordenadores personales, teléfonos o altavoces de equipos musicales, por citar algunas de las aplicaciones más comunes que se les dan.

2. **Consigue un par de imanes y algunas limaduras de hierro. Analiza cómo son las líneas de fuerza cuando los dos imanes se aproximan por el mismo polo y cuando se aproximan por polos diferentes. Utiliza una cartulina, situada sobre los imanes, para espolvorear sobre ella las limaduras de hierro. Debes obtener unos campos magnéticos similares a los que se muestran en esta página.**

   Se trata de una sencilla propuesta de actividad práctica que se recomienda que realicen los alumnos y las alumnas de forma autónoma.

8.2. LA EXPERIENCIA DE OERSTED

1. **Indica cómo podemos fabricar un imán permanente.**

   Para fabricar un imán, tomamos una barra de acero o de hierro dulce y, alrededor de ella, arrollamos un cable conductor. A los terminales del cable conectamos una pila y dejamos que circule corriente. El paso de corriente por el cable conductor crea un campo magnético, que magnetiza al acero o al hierro dulce, obteniendo, de ese modo, un imán temporal o uno permanente.

2. **La mayor parte de los imanes pierden sus propiedades magnéticas al calentarlos. Emite una hipótesis que explique ese fenómeno.**

   Las propiedades magnéticas de los imanes naturales se interpretan suponiendo que el imán puede dividirse en pequeñas regiones, denominadas dominios magnéticos, en las que el movimiento de los electrones (la orientación de sus espines) produce pequeños campos magnéticos.

   Al calentar un imán, comunicamos energía al material con el que está fabricado, provocando la desalineación de los dominios magnéticos, lo que conlleva la pérdida de propiedades magnéticas.

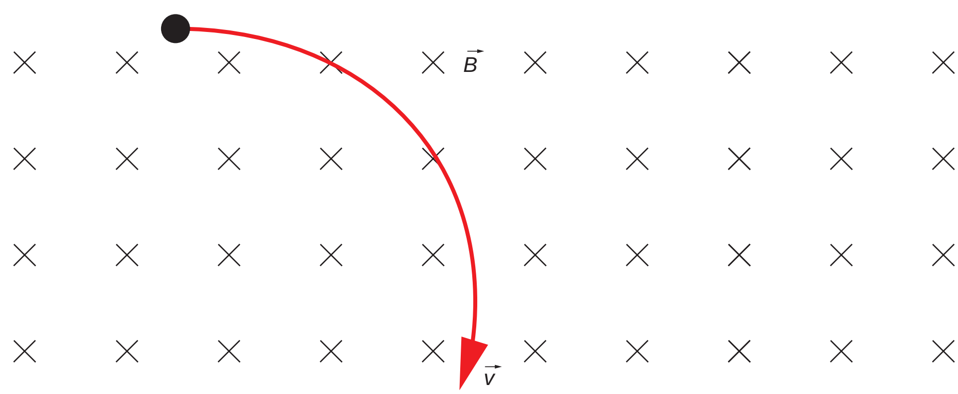
3. Analiza los distintos elementos que forman parte de un ordenador personal e indica en qué dispositivos son necesarios imanes para su funcionamiento. Indica también, si lo sabes, el uso que se da a dichos imanes.

Muchos de los componentes que posee un ordenador utilizan imanes: desde el pequeño motor que mueve el ventilador hasta los altavoces del equipo, pasando por las unidades de disco flexibles o los propios discos duros, en los que la información se almacena magnéticamente.

En informática, la información se almacena en formato binario (unos y ceros). Para conseguirlo, en un disco duro o en un disco flexible se hace corresponder el uno con una orientación magnética, por ejemplo, el norte; y el cero, con la orientación contraria, en este caso el sur. De este modo, cuando el lector de disco, que es básicamente otro imán, pasa por encima de las pistas grabadas, puede reconocer el código de unos y ceros, que posteriormente se descodifica y se traduce en información útil.

8.3. LEY DE LORENTZ

1. Una carga eléctrica penetra en una región del espacio como se indica en la figura.



En dicha región hay un campo magnético uniforme y constante, perpendicular al plano del papel y de sentido entrante. ¿Cuál es el signo de la carga eléctrica si esta se desvía en el campo como indica la figura?

Razona la respuesta.

La fuerza viene determinada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

El sentido del vector fuerza es el que corresponde al producto vectorial de la expresión anterior, $\vec{v} \times \vec{B}$, aunque está condicionado por el tipo de carga, q, que puede ser positiva o negativa.

En este caso, para que se dé la trayectoria que se indica en la figura que propone el enunciado, la carga debe ser negativa. De lo contrario, la fuerza sería un vector paralelo al plano del papel, dirigido hacia arriba, y la trayectoria sería curva, pero en sentido antihorario.

8.4. PRIMERA LEY DE LAPLACE

1. **Calcula la fuerza que actúa sobre un conductor rectilíneo, de 10 cm de longitud, por el que circula una corriente de 5 A en el interior de un campo magnético de 10 T. Las líneas del campo magnético son perpendiculares al conductor. Representa gráficamente la situación.**

   De acuerdo con lo que establece la ley de Laplace:

   $$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$$

   Como las líneas de campo son perpendiculares al conductor, el valor de la fuerza es:

   $$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 90° = I \cdot l \cdot B = 5 \cdot 0,1 \cdot 2 = 1\ \text{N}$$

   También se puede tener en cuenta el caso de que el ángulo formado sea de 270°.

   $$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 270° = -I \cdot l \cdot B = -5 \cdot 0,1 \cdot 2 = -1\ \text{N}$$

   La representación gráfica es como la mostrada en la segunda ilustración de la página 201 del libro del alumno.

2. **Analiza el resultado que obtendríamos en la actividad anterior si las líneas del campo magnético:**

   a) Son paralelas al conductor.

   b) Forman un ángulo de 30° con la dirección que señala el conductor.

   a) Si el conductor se introduce paralelamente a las líneas de campo, la fuerza que actúa sobre el conductor en el supuesto anterior se anula:

   $$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 0° = I \cdot l \cdot B \cdot 0 = 0\ \text{N}$$

   b) Si el ángulo formado entre el campo magnético y el conductor es de 30°, obtenemos:

   $$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta = 5 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot sen\ 30° = 2,5\ \text{N}$$

8.5. ESPIRA INDEFORMABLE EN EL SENO DE UN CAMPO MAGNÉTICO

1. **¿Por qué se utiliza el hierro o el acero en los imanes? ¿No sería mejor utilizar cobre u oro, que conducen mucho mejor la corriente eléctrica?**

   Es mejor utilizar las primeras, ya que se trata de sustancias ferromagnéticas (el campo magnético en un interior es mucho mayor que el que existe en el vacío). La imantación que presentan el cobre y el oro al aplicar un campo magnético a una muestra de ellos es muy débil.

2. **Busca información acerca de cómo está construido un motor eléctrico. ¿Puedes relacionar el motor eléctrico con lo que hemos estudiado hasta ahora en esta unidad?**

   Se trata de una respuesta abierta, en la que debe quedar claramente establecido el principio de funcionamiento de un motor eléctrico como la acción sobre una espira de un campo magnético.

8.6. CAMPOS MAGNÉTICOS CREADOS POR CARGAS MÓVILES

1. Calcula la intensidad del campo magnético que crea a 10 cm de distancia un conductor rectilíneo indefinido por el que circula una corriente de 10 A. Considera que el conductor se encuentra rodeado de aire.

La expresión que permite calcular la inducción magnética que crea un conductor rectilíneo e indefinido por el que circula una corriente I a una distancia a de él, es:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

donde $\mu = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot A^{-2}$

Por tanto:

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

2. Imagina ahora que el conductor de la actividad anterior es una espira de 10 cm de radio que rodea a un núcleo de hierro. Si por dicha espira circula la misma intensidad de corriente que en el caso anterior, ¿cuál será ahora la intensidad del campo magnético?

Sea μ_{Fe} la permeabilidad magnética del hierro. El campo magnético que crea una espira circular, en su centro, es:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot R}$$

donde, en este caso:

$$\mu = \mu_{\text{Fe}} = \mu'_{\text{Fe}} \cdot \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu'_{\text{Fe}}$$

El hierro es una sustancia ferromagnética; por tanto, $\mu'_{\text{Fe}} >> 1$; en consecuencia, el campo magnético creado será:

$$B = \frac{\mu_{\text{Fe}} \cdot I}{2 \cdot R} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu'_{\text{Fe}} \cdot 10}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 6{,}28 \cdot \mu'_{\text{Fe}} \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

3. Si en lugar de una espira, el conductor se arrolla cien veces en torno al núcleo de hierro, formando un solenoide de 10 cm de longitud, ¿cuál será ahora la intensidad del campo magnético? La intensidad de corriente es la misma en los tres casos.

En este caso, la intensidad de campo magnético en sus extremos será:

$$B = \frac{\mu_{\text{Fe}} \cdot I \cdot N}{2 \cdot L} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu'_{\text{Fe}} \cdot 10 \cdot 100}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 6{,}28 \cdot 10^{-1} \cdot \mu'_{\text{Fe}}\ \text{T}$$

8.7. LEY DE AMPÈRE DEL CAMPO MAGNÉTICO

1. ¿Qué nos permite afirmar, de forma contundente, que el campo magnético no es conservativo?

El campo magnético no es conservativo, ya que la circulación de un campo a lo largo de una línea cerrada es no nula. No es posible definir en él un potencial del mismo modo que lo hacemos para el campo eléctrico o el campo gravitatorio.

2. Un cable rectilíneo de longitud $L = 0{,}5$ m transporta una corriente eléctrica $I = 2$ A. Este cable está colocado perpendicularmente a un campo magnético uniforme $B = 0{,}25$ T. Calcula el módulo de la fuerza que sufre dicho cable.

De acuerdo con la primera ley de Laplace:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = I \cdot L \cdot B \cdot sen\ \theta = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot sen\ 90° = 0{,}25 \text{ N}$$

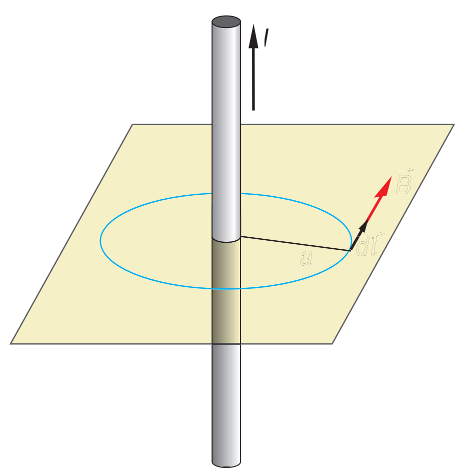
3. Calcula el campo creado por un conductor rectilíneo e infinito por el que circula una corriente de 4 A, en un punto situado a 0,2 m del conductor. Dibuja las líneas de fuerza y el vector campo en ese punto.

Dato: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A^{-1}

La ley de Biot y Savart establece que el campo creado se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}2} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

La línea de fuerza y el vector campo en ese punto son las que se muestran en la siguiente ilustración:

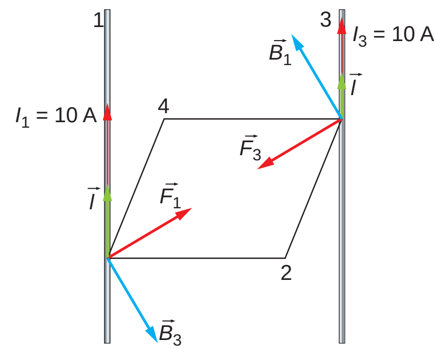


4. Dos hilos metálicos largos y paralelos, por los que circulan corrientes de 10 A, pasan por dos vértices opuestos de un cuadrado de 1 m de lado situado en un plano horizontal. Ambas corrientes discurren perpendicularmente a dicho plano, hacia arriba:

a) Dibuja un esquema en el que figuren las interacciones mutuas y el campo magnético resultante en uno de los dos vértices del cuadrado.

b) Calcula los valores numéricos del campo magnético en dicho vértice y de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre uno de los hilos. Considera $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A^{-1}

a) El esquema que solicita el enunciado de la actividad es el que se muestra a continuación:



La fuerza a que está sometido el conductor 1 es:

$$F_1 = I_1 \cdot l_1 \cdot B_3$$

siendo B_3 el campo magnético creado por el conductor 3 a una distancia *d:*

$$B_3 = \frac{\mu_0 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

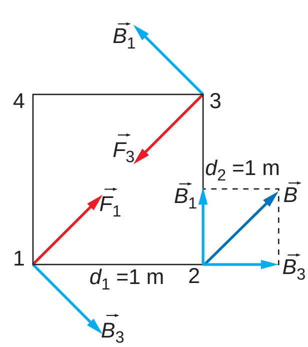
Por tanto:

$$F_1 = \frac{I_1 \cdot l_1 \cdot \mu_0 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Del mismo modo, la fuerza a que está sometido el conductor situado en el vértice 3 es:

$$F_3 = \frac{\mu_0 \cdot l_3 \cdot I_1 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Ambas fuerzas tienen la misma dirección, y sus sentidos son opuestos: recuerda que dos corrientes paralelas de igual dirección y sentido se atraen. El campo magnético resultante en uno de los otros dos vértices del cuadrado es el que se muestra en la siguiente ilustración:



b) El campo magnético que crea el conductor 1 en el vértice 2 es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot d_1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

y el que crea el conductor 3 en el vértice 2:

$$B_3 = \frac{\mu_0 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot d} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

Como los campos creados por el conductor 1 y el conductor 3 forman entre sí un ángulo de 90°, la intensidad del campo magnético resultante es:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_3^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-6})^2 + (2 \cdot 10^{-6})^2} = 2{,}83 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

La fuerza que se ejerce sobre uno de los hilos conductores es:

$$F_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot d} \cdot I_1 \cdot I_3$$

Por tanto, la fuerza por unidad de longitud será:

$$\frac{F_1}{l_1} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi \cdot d} \cdot I_1 \cdot I_3$$

En esta expresión, d es la distancia que separa ambos conductores, que se corresponde con la diagonal del cuadrado:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

El valor de la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F_1}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot 10 \cdot 10 = \sqrt{2} \cdot 10^{-5}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. **Las líneas de fuerza del campo magnético son:**

   a) Abiertas como las del campo eléctrico.

   b) Siempre cerradas.

   c) Abiertas o cerradas dependiendo del imán o la bobina.

   Las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas; el vector inducción es tangente a ellas en cada punto. La respuesta correcta es la **c).**

   Por ejemplo, son las líneas de fuerza de un imán o las que corresponden al campo magnético creado por una corriente eléctrica rectilínea.

2. **Dibuja las líneas del campo magnético que crean:**

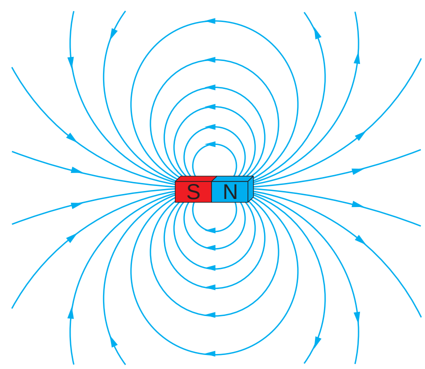
   a) Un imán permanente de forma cilíndrica.

   b) Una espira circular por la que circula una corriente continua.

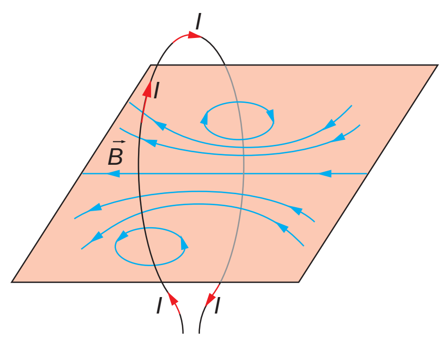
   c) Un hilo rectilíneo muy largo por el que circula una corriente continua.

   Las líneas de fuerza que solicita el enunciado son las siguientes:

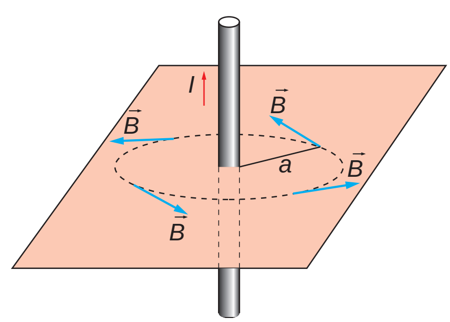
a) Las líneas de fuerza que corresponden a un imán permanente de forma cilíndrica son análogas a las de un imán recto:



b) Espira circular por la que circula una corriente continua:



c) Hilo rectilíneo muy largo por el que circula una corriente continua:



3. Una partícula, con carga *q*, penetra en una región en la que existe un campo. Explica cómo podríamos determinar, al observar la trayectoria de la partícula, si se trata de un campo eléctrico o de un campo magnético. ¿Hay algún caso en que no sería posible determinar el tipo de campo?

Las fuerzas eléctrica y magnética que se ejercen sobre una carga en movimiento son, respectivamente:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza eléctrica actúa en la misma dirección que el campo eléctrico, y la fuerza magnética, en dirección perpendicular al plano formado por la velocidad de la carga y el vector inducción magnética.

Si la partícula penetra en el campo con una velocidad que tiene una componente perpendicular al campo, se desviará de diferente forma, según el campo sea eléctrico o magnético.

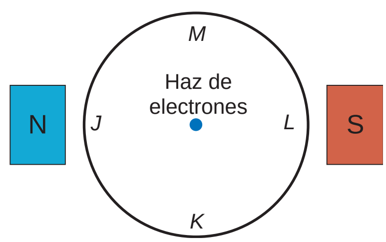
En el primer caso, si la carga es positiva, esta se verá acelerada en la dirección del campo, y la componente de la velocidad perpendicular al campo se mantendrá. Su movimiento será parabólico.

En el segundo caso, la fuera magnética la obligará a describir una circunferencia.

Si la partícula entra con una velocidad paralela a las líneas de fuerza del campo, no se modificará su trayectoria, (si es un campo eléctrico, acelerará y si es magnético, la fuerza que actuará sobre ella será nula, ya que $F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 0° = 0$).

El razonamiento en el caso de que la carga de la partícula sea negativa es similar al expuesto.

4. En la figura se muestra un haz de electrones que se mueven perpendicularmente al plano del papel, en un recinto en que se ha realizado el vacío.



Se aproximan dos imanes a la vasija, de forma que el polo norte se encuentra a la izquierda del haz de electrones y el polo sur a la derecha de dicho haz. Indica hacia dónde se desviará la trayectoria del haz de electrones: *J, K, L, M,* o, si por el contrario, no se modificará.

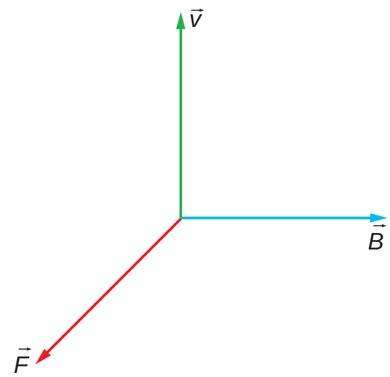
Observa que, en la experiencia:

- El haz de electrones de la figura no es más que una sucesión de cargas que se mueven con velocidad v, perpendicularmente al plano del papel y hacia fuera.
- Los imanes crean un campo magnético. La dirección de este campo es vertical, y se encuentra sobre el plano del papel, siendo su sentido de norte a sur (de izquierda a derecha en el dibujo).

Al penetrar en la región en la que existe el campo magnético, las cargas en movimiento se ven sometidas a la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza de Lorentz actúa como fuerza centrípeta y obliga a la partícula cargada a describir una circunferencia.



Si averiguamos el sentido en que actúa la fuerza, sabremos hacia dónde se desviará el haz. Para ello, hemos de tener en cuenta que la carga es negativa, lo que da a la fuerza un sentido contrario al que le correspondería según el producto vectorial.

En el caso que nos ocupa, la fuerza va dirigida hacia el punto ***K.***

5. Dos partículas cargadas se mueven con la misma velocidad y, al aplicarles un campo magnético perpendicular a dicha velocidad, se desvían en sentidos contrarios y describen trayectorias circulares de distintos radios:

a) ¿Qué puede decirse de las características de estas partículas?

b) Si en vez de aplicarles un campo magnético se les aplica un campo eléctrico paralelo a su trayectoria, indica razonadamente cómo se moverán las partículas.

a) La fuerza magnética a que se ve sometida una partícula de velocidad $\vec{v}$ y carga q cuando entra en el seno de un campo magnético de inducción $\vec{B}$ es:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Si las partículas describen una trayectoria circular, debe existir una fuerza centrípeta que las obligue a describirla. Por tanto:

$$F_e = F_m \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \theta$$

El radio de la trayectoria que describen se calcula a partir de la expresión anterior:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot sen\ 90°}$$

Como la velocidad de las partículas es la misma y penetran en el mismo campo magnético, el radio de la circunferencia que describen depende de v y de q. En consecuencia, como los radios son distintos, la masa, la carga o ambas, de cada partícula deben ser distintas.

Además, como se desvían en sentidos contrarios, el signo de su carga debe ser distinto.

b) La fuerza eléctrica que actúa sobre una partícula cargada es:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

Si la carga es positiva, la fuerza eléctrica y el campo eléctrico tienen la misma dirección y sentido; la carga acelerará siguiendo la dirección y sentido de las líneas de campo eléctrico. Si la carga es negativa, se verá sometida a una deceleración en la misma dirección del campo.

6. ¿Puede ser nula la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético? ¿Y la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo eléctrico?

La fuerza magnética viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \alpha$$

Por tanto, cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando el vector velocidad sea paralelo al vector inducción magnética, $sen\ \alpha = 0 \rightarrow \vec{F}_m = 0$.

La fuerza eléctrica viene dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

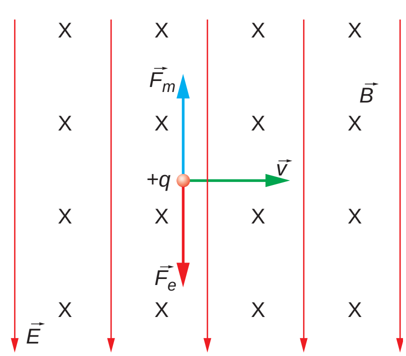
El módulo de esta fuerza es:

$$F_e = q \cdot E$$

Y tendrá la misma dirección y sentido que el campo eléctrico si la carga es positiva y sentido opuesto si la carga es negativa. La fuerza eléctrica no es nula en ningún caso.

7. ¿Cómo se han de aplicar un campo eléctrico y otro magnético, perpendiculares y uniformes, para que sus fuerzas respectivas sobre una carga con velocidad $\vec{v}$ se anulen? ¿Cuál ha de ser la relación entre sus módulos?

En la siguiente figura se muestra cómo se deben aplicar dichos campos:



Al imponer la condición de que los módulos de ambas fuerzas sean iguales, obtenemos la relación entre ellos:

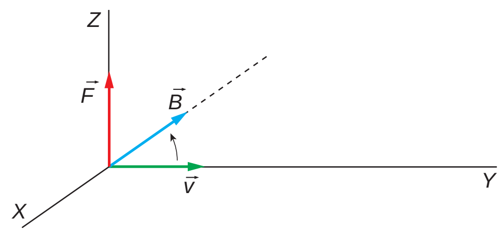
$$F_m = F_e \rightarrow q \cdot v \cdot B = q \cdot E \rightarrow \frac{E}{B} = v$$

8. Un protón que se mueve en un plano horizontal con una velocidad $\vec{v}$ entra en una región en la que hay un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano horizontal. Explica y justifica la trayectoria que describirá el protón.

Cuando el protón entra perpendicularmente al campo magnético, se ve sometido a la fuerza de Lorentz:

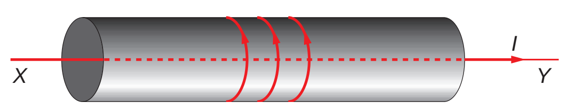
$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90° = q \cdot v \cdot B$$

La dirección y el sentido de esta fuerza magnética son los que se muestran en la ilustración:



Esta fuerza actúa como una fuerza normal que obliga al protón a describir una trayectoria circular.

9. **Por el conductor horizontal *XY* circula cierta intensidad de corriente, de *X* a *Y*. Cuando hacemos que circule corriente por el solenoide, en la dirección que se indica, es posible que el conductor se mueva. En este caso, el conductor:**

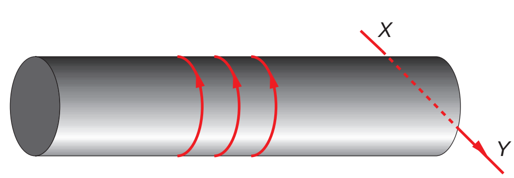


a) Se mueve hacia arriba.

b) Permanece en reposo.

c) Se mueve hacia abajo.

Si el dispositivo experimental es el que se indica ahora en la figura, el conductor:



a) Se mueve hacia arriba.

b) Permanece en reposo.

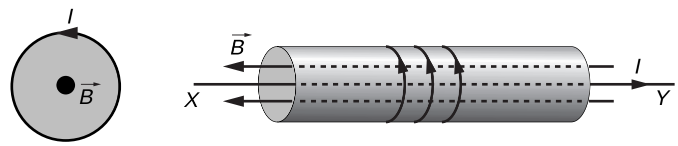
c) Se mueve hacia abajo.

Según la ley de Laplace, la fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor recorrido por cierta intensidad de corriente resulta:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$$

Se trata, por tanto, de averiguar la dirección y el sentido del campo magnético que crea el solenoide.

El campo magnético es perpendicular al plano por el que circula la intensidad de corriente. El sentido que corresponde a las líneas del campo viene establecido por la regla de tornillo.



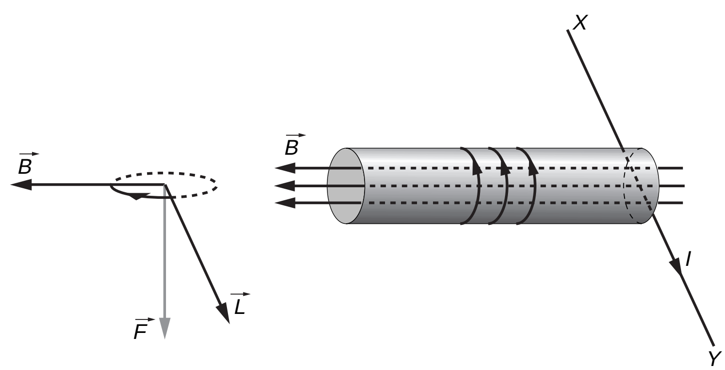
Como vemos, el campo magnético y la dirección de la intensidad son antiparalelos. Por tanto:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = I \cdot L \cdot B \cdot sen\ 180° = 0$$

Como vemos, el conductor permanece en reposo, ya que no actúa ninguna fuerza sobre él.

La respuesta correcta es **b).**

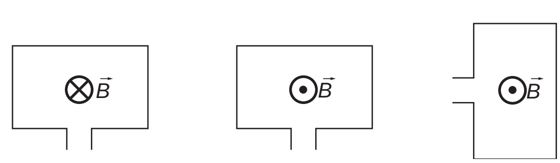
En el segundo caso, el campo magnético no ha variado, dado que la intensidad de corriente que recorre las bobinas lo hace en el mismo sentido que antes.



Aplicando de nuevo la ley de Laplace, vemos que, de acuerdo con la regla del tornillo, se ejerce sobre el conductor una fuerza hacia abajo, como se aprecia en la figura. Por tanto, el conductor se desplazará hacia abajo.

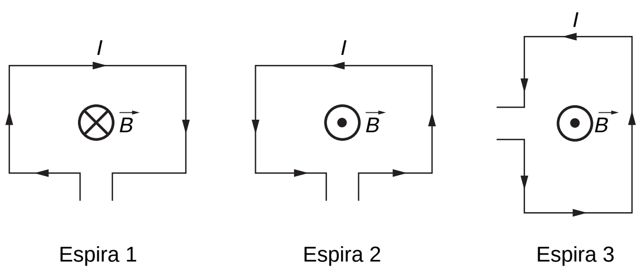
La respuesta correcta es **c).**

10. Las espiras de la figura están atravesadas por un campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por ellas, que es perpendicular al plano de la espira. Indica el sentido en que circula la corriente en cada caso.



El criterio que seguimos para determinar el sentido del campo o de la corriente se corresponde con la regla de la mano derecha:

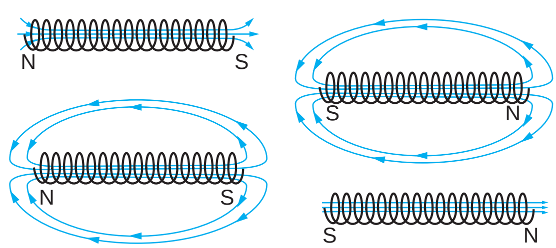
- Si la corriente circula en sentido antihorario, el vector campo magnético que se crea es perpendicular al plano de la espira, siendo su sentido hacia fuera del plano del papel.
- Si la corriente circula en sentido horario, el vector campo magnético que se crea es perpendicular al plano de la espira, siendo su sentido hacia dentro del plano del papel.



Por tanto, podemos afirmar lo siguiente:

1. La corriente de la espira 1 es en sentido horario; de este modo, el sentido del vector campo magnético es tal que entra en la superficie del papel.
2. La corriente de las espiras 2 y 3 es en sentido antihorario; de este modo, el sentido del vector campo magnético es tal que sale de la superficie del papel.

11. Se conecta un solenoide a una diferencia de potencial ε. Indica cuál de las cuatro ilustraciones muestra cómo será el campo magnético en el interior y en el exterior del solenoide.



En las figuras se representan las posibles líneas de fuerza del campo magnético creado por un solenoide.

Se denomina polo norte al extremo por el que "salen" las líneas de campo, y polo sur al extremo por el que estas "entran" en la bobina. Por otra parte, hemos de recordar que el campo en el interior de la bobina es más intenso. Debido a ello, las líneas en el interior están más juntas.

De acuerdo con esto, la ilustración correcta es la de la derecha, arriba.

12. De los fenómenos que se indican, ¿cuáles son característicos de los campos gravitatorio y eléctrico, pero no del magnético?

a) Fuerzas a distancia.

b) Campos cuya acción llega, teóricamente, hasta el infinito.

c) Existencia de monopolos.

d) Fuerzas de atracción.

El fenómeno que aparece en los campos gravitatorio y eléctrico, pero no en el magnético, es la existencia de monopolos.

En el campo gravitatorio podemos considerar una masa puntual, del mismo modo que en el campo eléctrico podemos considerar una carga puntual. Sin embargo, en un imán debemos tener en cuenta que existen dos polos: norte y sur. Si partimos un imán en dos partes, cada una de ellas se comportará de nuevo como un imán, con sus respectivos polos norte y sur.

La respuesta correcta es, por tanto, **c).**

13. **Explica razonadamente la acción de un campo magnético sobre un conductor rectilíneo, perpendicular al campo, por el que circula una corriente eléctrica y dibuja en un esquema la dirección y el sentido de todas las magnitudes vectoriales que intervienen.**

Explica qué modificaciones se producirían en los casos siguientes:

a) Si el conductor forma un ángulo de 45° con el campo.

b) Si el conductor es paralelo al campo.

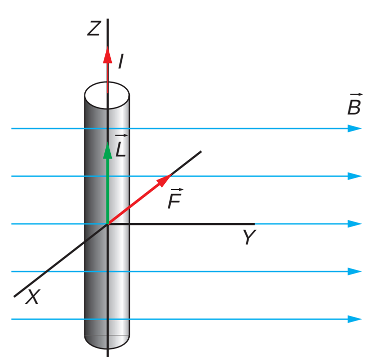
Si el campo magnético, $\vec{B}$, es uniforme, de acuerdo con la primera ley de Laplace:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \rightarrow F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta$$

Como el conductor rectilíneo está situado perpendicularmente al campo magnético,

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 90° = I \cdot l \cdot B$$

La dirección y el sentido de la fuerza magnética son las que se muestran en la siguiente ilustración:



a) Si el conductor forma un ángulo de 45° con el vector inducción magnética, el módulo de la fuerza magnética varía:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot I \cdot l \cdot B$$

Su dirección y sentido son los mismos que en el caso anterior, por las propiedades del producto vertical.

b) Si el conductor es paralelo al campo magnético, la fuerza que se ejerce sobre él es nula:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 0° = 0$$

14. El campo magnético creado por un hilo infinito y recto por el que circula una corriente de 1 A en un punto a distancia *r* m del hilo:

a) Depende de la inversa del cuadrado de la distancia.

b) Tiene la dirección de las líneas circulares en torno al hilo.

c) Depende del cuadrado de la intensidad de corriente.

El campo magnético que describe el enunciado se calcula de acuerdo con la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

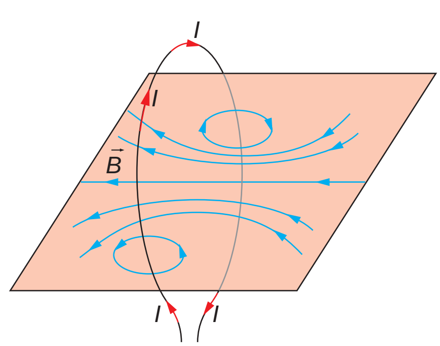
La dirección y el sentido del campo magnético vienen dados por la regla de la mano derecha. Si cogemos el conductor con la mano derecha, de modo que el pulgar se oriente en el sentido de la corriente que circula por él, el sentido de giro de las líneas de campo es el del resto de los dedos de la mano. En este caso, se trata de líneas circulares en planos perpendiculares al hilo rectilíneo.

Por tanto, la respuesta correcta es la **b).**

Observa que el campo magnético creado depende de la inversa de la distancia y es directamente proporcional a la intensidad de corriente, no de sus cuadrados, como se indica en los apartados a) y c) del enunciado.

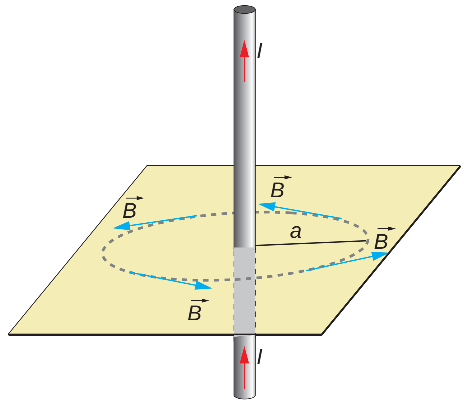
15. Traza razonadamente el diagrama de líneas de campo magnético para el campo creado por una espira circular por la que circula una corriente eléctrica. No olvides incluir en el diagrama el sentido de dicha corriente. Haz lo mismo para el caso de un conductor rectilíneo y muy largo.

Las líneas de fuerza del campo magnético creado por una espira circular por la que circula una corriente eléctrica son las que se muestran en la ilustración.



Para explicar la forma de dichas líneas de fuerza, considera que la corriente circular está formada por elementos de corriente rectilíneos, cada uno de los cuales forma su propio campo, que será perpendicular a la dirección de la corriente y cuyo sentido vendrá determinado por la aplicación de la regla de Maxwell.

En el caso de un conductor rectilíneo y muy largo, aplicando la regla de Maxwell de la mano derecha, se obtiene el campo que se muestra a continuación:



16. ***X, Y* y *Z* son tres conductores perpendiculares al plano del papel que equidistan entre sí. Las corrientes *X* e *Y*, entran hacia el papel, mientras que la corriente *Z* sale del plano del papel.**

La fuerza electromagnética que actúa sobre el conductor *Y* es:

a) Nula.

b) Perpendicular a la línea que une a los tres conductores.

c) En dirección y sentido de *Y* a *Z*.

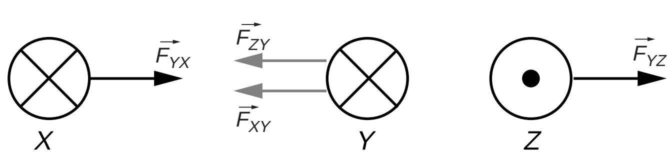
d) En dirección y sentido de *Y* a *X*.

e) La dirección depende de las intensidades de cada una de las tres corrientes.

A lo largo de la unidad, hemos estudiado la interacción entre corrientes paralelas. Allí concluíamos que, cuando las corrientes son de sentidos opuestos, se repelen y, cuando son del mismo sentido, se atraen. Así pues (despreciando la interacción entre las corrientes *X* y *Z*):

- Sobre las corrientes *Y* y *Z* aparece una fuerza de repulsión.
- Sobre las corrientes *X* e *Y* aparece una fuerza de atracción.

Debido a la posición relativa que ocupan los conductores, la fuerza resultante sobre *Y* es perpendicular a su línea de corriente, estando dirigida de *Y* a *X*.



$$\vec{F}_Y = \vec{F}_{XY} + \vec{F}_{ZY}$$

$$F_Y = F_{XY} + F_{ZY}$$

La respuesta correcta es, por tanto, **d).**

17. Supongamos que en una región del espacio tenemos un campo eléctrico y otro magnético de sentidos opuestos y que en el interior de esta región dejamos en reposo una carga positiva. Explica el movimiento que realizará dicha carga.

Al liberar la carga positiva en reposo, esta se verá sometida a la acción del campo eléctrico, moviéndose en la misma dirección y sentido que este:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

Al estar en reposo ($v = 0$), no actúa la fuerza magnética sobre ella:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Una vez la carga se encuentre en movimiento, al ser el campo magnético y el eléctrico de sentidos opuestos, el ángulo que formarán el vector velocidad y el vector campo magnético será de 180°. En consecuencia, tampoco actuará ninguna fuerza magnética sobre ella, ya que:

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 180° = 0$$

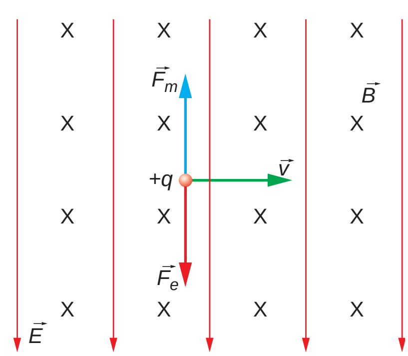
Por tanto, sobre la carga actuará tan solo la fuerza eléctrica. Si el campo eléctrico, $\vec{E}$, es uniforme, la partícula efectuará un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

18. Se tienen dos corrientes eléctricas paralelas y de sentidos contrarios. ¿Se repelen o se atraen?

Dos corrientes paralelas por las que circulan corrientes de sentidos contrarios se repelen (consúltese la página 206 del libro del alumno para una explicación más amplia de este fenómeno).

19. ¿Cómo deben ser las direcciones y sentidos de un campo eléctrico y otro magnético uniformes para que la fuerza resultante sobre una carga con velocidad $\vec{v}$ sea cero? ¿Cuál ha de ser la relación entre sus módulos? Razona la respuesta.

En la siguiente figura se muestra cómo se deben aplicar dichos campos:



Al imponer la condición de que los módulos de ambas fuerzas sean iguales, obtenemos la relación entre ellos:

$$F_m = F_e \rightarrow q \cdot v \cdot B = q \cdot E \rightarrow \frac{E}{B} = v$$

EJERCICIOS

20. Un electrón con una velocidad de 3 000 km · s^{-1} penetra perpendicularmente en una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme B = 0,15 T. Calcula el radio de su órbita.

Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Para que el electrón describa una órbita circular, debe existir una fuerza centrípeta que le obligue a describirla. Esta fuerza centrípeta es, precisamente, la fuerza magnética a que se ve sometido. Por tanto:

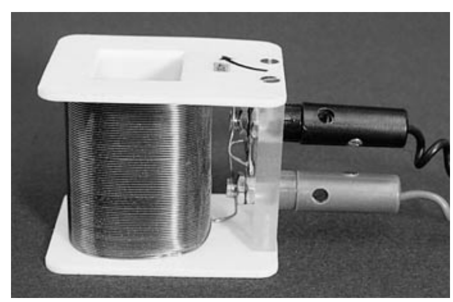
$$F_c = F_m \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \alpha$$

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot sen\ \alpha} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}15 \cdot sen\ 90°} = 1{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

21. Busca información al respecto y explica cómo funciona un amperímetro analógico. Indica, sobre todo, qué dispositivo permite que se desplace la aguja que proporciona las lecturas.

Cuando circula corriente por la bobina, se origina un campo magnético en su interior que magnetiza el núcleo en que está arrollada. Ello hace que el sistema se reoriente respecto al imán permanente que rodea la bobina.

Esta fuerza se ve compensada por una fuerza de reacción que hace que el sistema se oponga al giro, de modo que, a mayor intensidad, mayor sea el ángulo de giro de la bobina. Ello permite medir, de forma indirecta, la intensidad que circula por la bobina: basta con conocer el ángulo de giro de la aguja unida al sistema.



Por lo general, esta aguja se encuentra sobre una carátula, previamente calibrada, en la que podemos leer directamente la intensidad que circula, en vez de medir el ángulo de giro.

22. Un protón con una energía cinética de 1 eV se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 1,5 T. Calcula la fuerza que actúa sobre él, sabiendo que su masa es de 1,67 · 10^{-27} kg y su carga 1,6 · 10^{-19} C.

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada en el seno de un campo magnético viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

La energía cinética del protón es:

$$E_c = 1\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

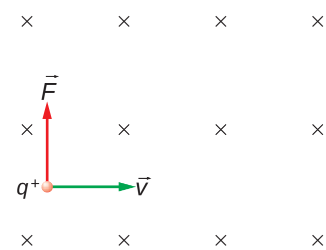
Y la velocidad con que se mueve:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}38 \cdot 10^{4}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El módulo de la fuerza magnética que actúa sobre el protón es:

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}38 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5 \cdot sen\ 90° = 3{,}32 \cdot 10^{-15}\ \text{N}$$

La dirección y el sentido de la fuerza magnética son los que se muestran en el siguiente esquema:



23. Un grupo de excursionistas se encuentran perdidos en el campo. Como son precavidos, llevan consigo una brújula con la que esperan orientarse y, de ese modo, conseguir llegar al pueblo más cercano. Sin embargo, al utilizar la brújula no advierten que a 8 metros por encima de ellos hay una línea de alta tensión por la que circula una corriente de 150 A. ¿Es relevante ese dato? Si lo es, indica el ángulo que se desviará la brújula, suponiendo que la línea de corriente vaya en sentido oeste-este y que la componente horizontal del campo magnético terrestre sea 0,2 gauss en ese punto.

La corriente que transportan las líneas de alta tensión es alterna. La corriente alterna cambia el sentido en que se propaga, siendo su frecuencia 50 hertz. Por tanto, crea un campo magnético variable, que no modifica la dirección del campo magnético terrestre, que es el que detecta la brújula.

Si se tratase de una corriente continua, sí apreciaríamos el fenómeno, ya que aparecería en las proximidades de las torres de alta tensión un campo magnético cuya componente afectaría a la dirección y el sentido del campo magnético terrestre.

24. Un protón tiene una energía cinética de $2 \cdot 10^{-3}$ J y sigue una trayectoria circular en un campo magnético de módulo $B = 0{,}6$ T. Calcula:

a) El radio de la trayectoria.

b) La frecuencia con que gira.

Datos: Carga del protón = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Masa del protón = $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

a) La fuerza centrípeta que hace que el protón describa una trayectoria circular es la fuerza magnética. Al aplicar la segunda ley de Newton y operar, obtenemos la expresión que nos permite calcular el radio de la trayectoria que describe:

$$F_c = F_m \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \alpha$$

En este caso, al ser la trayectoria circular, $sen\ \alpha = \text{sen}\ 90° = 1$. Por tanto:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

A partir de la energía cinética del electrón, podemos calcular su velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-13}}{1,7 \cdot 10^{-27}}} = 1,53 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Fe de erratas del libro del alumnado: el valor de la energía cinética del protón proporcionado por el enunciado debe ser $2 \cdot 10^{-13}$ J. Con el valor que aparece, la velocidad del electrón superaría a la de la luz.

El radio de la trayectoria que describe es:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 1,53 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,6} = 0,27 \text{ m}$$

b) El tiempo que tarda el protón en recorrer la longitud que corresponde a una circunferencia de radio $R = 0,27$ m es el período de su movimiento circular:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,27}{1,53 \cdot 10^7} = 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,11 \cdot 10^{-7}} = 8,99 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

PROBLEMAS

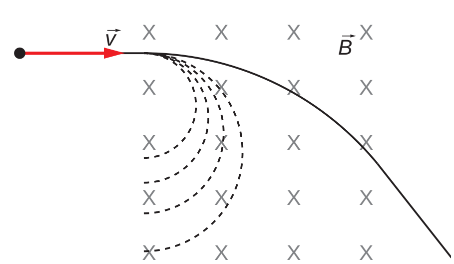
25. Una carga eléctrica, $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, de masa $6,7 \cdot 10^{-27}$ kg, entra en una zona con un campo magnético $\vec{B}$ uniforme, dirigido perpendicularmente a la hoja y hacia dentro del papel. La anchura de la zona es de 2 m:

a) Indica dos o tres trayectorias posibles para la carga dentro de esta zona según el módulo de la velocidad con la que entra ($\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$).

b) Si el módulo de $\vec{B}$ vale 10^{-3} T, ¿cuál es la velocidad mínima que debe tener la carga para que atraviese toda la zona?

c) ¿Qué tipo de partícula podría ser esta carga? Si cambiásemos el signo de la carga, ¿qué cambiaría en los apartados anteriores?

a) La trayectoria que describe una partícula cargada al penetrar en una región en la que existe un campo magnético depende del ángulo que forman los vectores velocidad e inducción. En este caso, ese ángulo es de 90°, por lo que la partícula describirá una trayectoria circular. Al ser su radio proporcional al módulo de la velocidad con que penetra la partícula en el campo, existirán tantas trayectorias circulares como velocidades posibles para la partícula.



b) Para que la partícula pueda atravesar la región del campo magnético, su velocidad debe ser tal que el radio de la trayectoria circular sea mayor que la anchura de dicha región.

A partir de la expresión de la fuerza de Lorentz, deduciremos el valor de la velocidad de la partícula:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90°$$

Esta fuerza es la que obliga a la partícula a describir una trayectoria circular. Se trata, por tanto, de una fuerza centrípeta:

$$F = F_c \rightarrow q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90° = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Despejando y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos la velocidad mínima que debe tener la partícula para atravesar la zona en la que está confinado el campo magnético:

$$v = \frac{R \cdot q \cdot B}{m} \rightarrow v = \frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{6{,}7 \cdot 10^{-27}} = 95{,}5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Para determinar el tipo de partícula con la que estamos trabajando, tendremos en cuenta su carga y su masa. Expresada en unidades de masa atómica, esta masa es:

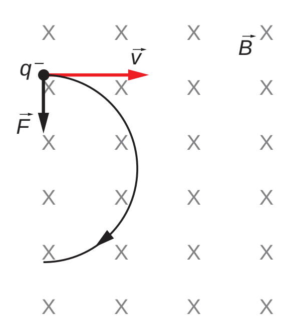
$$m = 6{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ u}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 4 \text{ u}$$

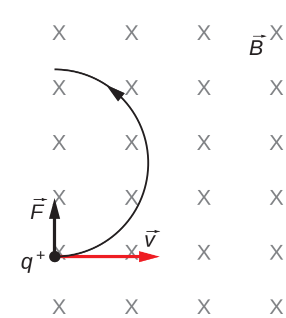
En cuanto a su carga, su valor es el doble del que corresponde a la carga del electrón ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C):

$$q = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 2 \cdot |e|$$

Podría tratarse, por tanto, de un núcleo de helio, que está formado por dos protones (de donde proviene la carga de la partícula) y dos neutrones, que en total suman cuatro unidades de masa atómica. A este núcleo se le denomina también partícula α.

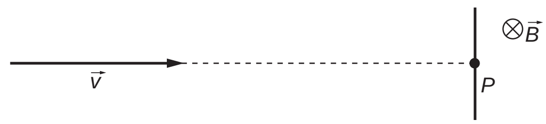
Si se cambiase el signo de la carga, variaría el sentido de la fuerza de Lorentz (fuerza magnética), lo que obligaría a la carga a describir la trayectoria circular en sentido opuesto:





NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

26. Un electrón (masa, $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga eléctrica, $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) se mueve en una región sin ningún campo de fuerzas, con una velocidad de 10^8 m · s^{-1}, en la dirección y en el sentido indicados en la figura, y llega a un punto *P*, en el que entra en una región con un campo magnético $\vec{B}$, perpendicular al papel y hacia dentro:



a) ¿Qué intensidad ha de tener $\vec{B}$ para que el electrón vuelva a la primera región por un punto *Q* situado a 30 cm de *P*?

b) ¿A qué lado de *P* está situado *Q*?

c) Si aumentásemos en un factor 2 la intensidad de $\vec{B}$, ¿a qué distancia de *P* volvería el electrón a la primera región?

a) Cuando el electrón penetra en una región donde existe un campo magnético, el campo ejerce sobre él una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Esta fuerza se denomina fuerza de Lorentz y obliga al electrón a describir una trayectoria circular ($\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{B}$). Se trata, por tanto, de una fuerza centrípeta:

$$F = F_c$$

$$q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90° = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Para que el electrón regrese a la primera región por un punto que dista 30 cm del punto *P*, esta distancia debe ser el diámetro de la circunferencia descrita por el electrón:

$$R = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15 \text{ m}$$

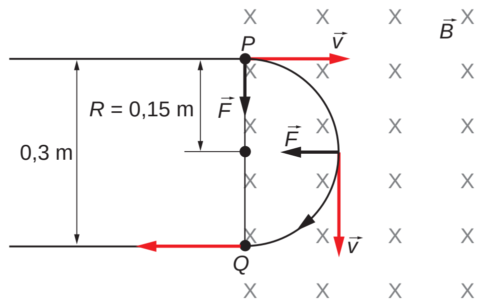
$$q \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90° = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Despejando, obtenemos la intensidad del campo magnético:

$$B = \frac{m \cdot v}{R \cdot q}$$

$$B = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^8}{0{,}15 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3{,}79 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

b) El vector $\vec{F}$ está dirigido según el producto vectorial de $\vec{v}$ por $\vec{B}$, y su sentido está determinado por la carga de la partícula. En este caso, al tratarse de un electrón, el sentido de la fuerza es el contrario al correspondiente a dicho producto vectorial, tal como se aprecia en la figura de la página siguiente.



Por tanto, la carga describe la trayectoria circular en el sentido de las agujas del reloj, y el punto Q se encuentra 30 cm por debajo de P.

c) Si aumenta la intensidad del campo magnético manteniéndose constante la velocidad de la partícula, variará el radio de la circunferencia descrita por ella:

$$\left.\begin{aligned} B' &= \frac{m \cdot v}{R' \cdot q} \\ B &= \frac{m \cdot v}{R \cdot q} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{B'}{B} = \frac{R}{R'} \rightarrow \frac{2 \cdot B}{B} = \frac{R}{R'} \rightarrow R' = \frac{R}{2} = \frac{0{,}15}{2} = 0{,}075 \text{ m}$$

El electrón saldrá a la primera región pasando por un punto situado a una distancia $2 \cdot R' = 0{,}15$ m de P; es decir, la mitad de distancia que en el caso anterior.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

27. Un protón penetra en una zona de un campo magnético uniforme de 10^{-3} T y lleva una velocidad de 500 m · s^{-1}, perpendicular al campo magnético. Determina las siguientes magnitudes del protón en la zona con campo magnético:

a) Módulo de la fuerza que experimenta y de su aceleración.

b) Potencial eléctrico producido por el protón en el centro de la órbita que describe.

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
$1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ en unidades del S.I.

a) La fuerza a que se ve sometido el protón viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Esta fuerza obliga al protón a describir una trayectoria circular. Su módulo es:

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \theta = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 10^{-3} \cdot sen\ 90° = 8 \cdot 10^{-20} \text{ N}$$

La aceleración centrípeta que experimenta es:

$$F_c = F_m \rightarrow m \cdot a_c = F_m \rightarrow a_c = \frac{F_m}{m} = \frac{8 \cdot 10^{-20}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 4{,}79 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) El potencial en el centro de la órbita de radio R que describe el protón es:

$$V = K \cdot \frac{q}{R}$$

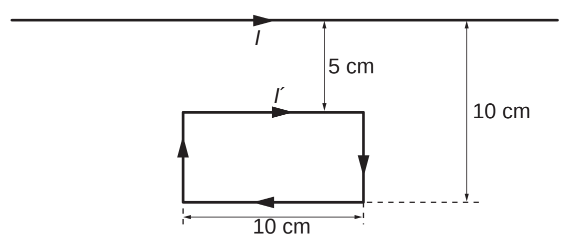
A partir de la aceleración centrípeta, podemos calcular el radio de la órbita que describe el protón:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_c} = \frac{500^2}{4{,}79 \cdot 10^7} = 5{,}22 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Por tanto, el potencial en el centro de la órbita es:

$$V = K \cdot \frac{q}{R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{5{,}22 \cdot 10^{-3}} = 2{,}76 \cdot 10^{-7}\ \text{V}$$

28 Por un conductor rectilíneo de gran longitud circula una corriente $I = 2$ A. Situamos junto a él una espira rectangular rígida por la que circula una corriente de $I' = 2$ A:



a) Calcula la fuerza que actúa sobre cada uno de los dos lados paralelos del conductor.

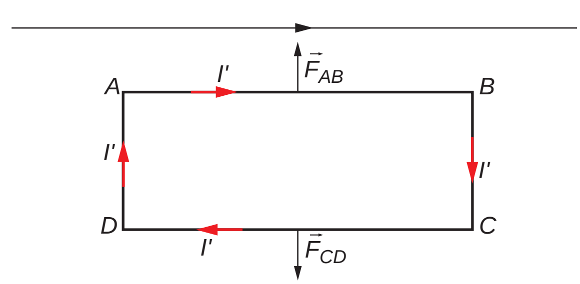
b) ¿Qué fuerza neta actúa sobre toda la espira?

Dato: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A^{-1}

a) De acuerdo con la primera ley de Laplace, la fuerza que actúa sobre cada uno de los lados paralelos al conductor se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

La dirección y el sentido de la fuerza que actúa sobre cada uno de los dos lados de la espira paralelos al conductor son los que se muestran en la siguiente ilustración:



Recuerda que dos corrientes paralelas, de igual dirección y sentido, se atraen y que si sus sentidos son opuestos, se repelen.

El módulo de la fuerza que ejerce el conductor sobre el lado *AB* de la espira es:

$$F_{AB} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I' \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot d_{AB}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{N}$$

El módulo de la fuerza que ejerce el conductor sobre el lado *CD* de la espira es:

$$F_{CD} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I' \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot d_{CD}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: los valores que aparecen como solución en el apéndice del libro del alumno se obtienen considerando $I' = 1$ A.

b) La fuerza neta que actúa sobre la espira está dirigida hacia el conductor rectilíneo:

$$F = F_{AB} - F_{CD} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} - 8 \cdot 10^{-7} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ N} \rightarrow \vec{F} = 8 \cdot 10^{-7} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

29 Un solenoide está construido enrollando uniformemente 600 vueltas de un fino hilo conductor sobre un cilindro hueco de 30 cm de longitud. Por el bobinado se hace circular una corriente $I = 2$ A:

a) Calcula el campo magnético en el interior del solenoide y representa gráficamente, de forma aproximada, las líneas de campo magnético dentro y fuera del solenoide.

b) Una partícula cargada entra en el solenoide moviéndose con velocidad $\vec{v}$ a lo largo de su eje. Debido a la existencia del campo magnético, ¿se curvará en algún sentido su trayectoria? ¿Por qué?

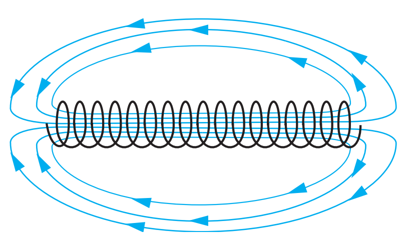
a) En el interior del solenoide, el campo magnético es constante, de valor:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{L} \rightarrow B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 600 \cdot 2}{0{,}3} = 5{,}03 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

En los extremos del solenoide y en las zonas próximas a ellos, las líneas de campo se separan. El campo magnético en esos puntos vale:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot L} \rightarrow B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 600 \cdot 2}{2 \cdot 0{,}3} = 2{,}51 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

La representación gráfica de las líneas de campo en el interior y en el exterior del solenoide es la siguiente:



b) Como se aprecia en la figura anterior, las líneas de campo en el interior del solenoide y, en particular, en su eje, tienen la dirección señalada por la longitud de este. Por tanto, cuando la partícula entra en el solenoide con velocidad coincidente con su eje, los vectores velocidad y campo magnético son paralelos. En consecuencia, la fuerza magnética que actúa sobre la partícula es nula:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\,(\vec{v}, \vec{B}) = q \cdot v \cdot B \cdot sen\, 0° = 0$$

Por tanto, la trayectoria de la partícula no se modifica.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

30. Un hilo conductor, rectilíneo e indefinido, situado en el vacío sobre el eje *OZ* de un sistema de referencia cartesiano (*OXYZ*), transporta una corriente eléctrica de intensidad $I = 2$ A en el sentido positivo de dicho eje. Calcula la fuerza magnética que actuará sobre una partícula cargada, con $q = 5$ C, en el instante en que pasa por el punto de coordenadas (0,4, 0) m con una velocidad $\vec{v} = 20 \cdot \vec{j}$ m · s^{-1}.

Dato: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ **T · m · A^{-1}**

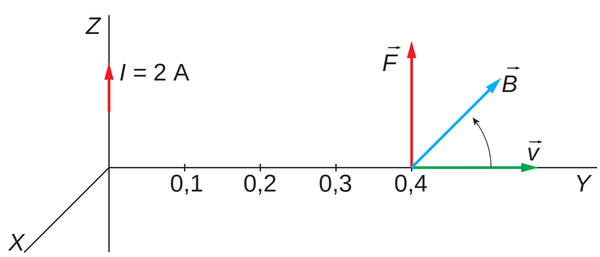
La fuerza que actúa sobre la partícula la calculamos aplicando la expresión de la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Para obtenerla, necesitamos calcular, en primer lugar, el valor de la inducción magnética que crea la corriente en el punto de coordenadas (0,4, 0, 0), cuyo módulo se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}4} = 10^{-6} \text{ T}$$

La dirección y el sentido de $\vec{B}$, $\vec{v}$ y $\vec{F}$ son los que se muestran en la siguiente ilustración:



El valor de la fuerza magnética que actuará sobre la partícula es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \theta = 5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot sen\ 90° = 10^{-4} \text{ N}$$

31 Dos isótopos, cuyas masas son 19,91 · 10^{-27} kg y 21,59 · 10^{-27} kg, respectivamente, y que tienen la misma carga de ionización, son acelerados hasta que adquieren una velocidad constante de 6,7 · 10^{5} m · s^{-1}. Se les hace atravesar una región de campo magnético uniforme de 0,85 T, cuyas líneas de campo son perpendiculares a la velocidad de las partículas:

a) Determina la relación entre los radios de las trayectorias que describe cada isótopo.

b) Si han sido ionizados una sola vez, determina la separación entre los dos isótopos cuando han descrito una semicircunferencia.

Dato: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C**

a) La fuerza centrípeta que obliga a los isótopos a describir la trayectoria circular es la fuerza magnética:

$$F_c = F_m \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \theta$$

En este caso, al ser las líneas de campo perpendiculares a la velocidad de los isótopos, *sen* θ = *sen* 90° = 1.

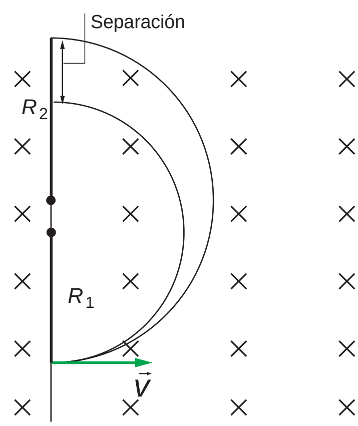
Despejando el radio en la expresión anterior, se obtiene:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

La relación entre los radios de ambos isótopos es:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\dfrac{m_1 \cdot v}{q \cdot B}}{\dfrac{m_2 \cdot v}{q \cdot B}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{19{,}91 \cdot 10^{-27}}{21{,}59 \cdot 10^{-27}} = 0{,}92$$

b) De acuerdo con la siguiente ilustración:



la separación se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$separación = 2 \cdot R_2 - 2 \cdot R_1$$

El enunciado del problema indica que los isótopos han sido ionizados una sola vez; por tanto, la carga que posee cada uno se corresponde con la del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Teniendo esto en cuenta, podemos calcular el radio de la trayectoria que describe cada isótopo:

$$R_1 = \frac{m_1 \cdot v}{q \cdot B} = \frac{19{,}91 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}7 \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}85} = 0{,}098 \text{ m}$$

$$R_2 = \frac{m_2 \cdot v}{q \cdot B} = \frac{21{,}59 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}7 \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}85} = 0{,}106 \text{ m}$$

Por tanto, la separación entre los isópotos tras describir media semicircunferencia es:

$$separación = 2 \cdot R_2 - 2 \cdot R_1 = 2 \cdot (R_2 - R_1) = 2 \cdot (0{,}106 - 0{,}098) =$$

$$= 0{,}0166 \text{ m} = 1{,}66 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

32. Una corriente *I* está distribuida uniformemente en toda la sección transversal de un conductor recto y largo de radio 1,40 mm. En la superficie del conductor, el campo magnético tiene una magnitud $B = 2{,}46 \cdot 10^{-3}$ T:

a) Determina la magnitud del campo magnético a 2,20 mm del eje.

b) Determina la intensidad, *I*, de la corriente.

a) El campo magnético que crea la corriente se puede calcular a partir de la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Por simetría, podemos suponer que toda la corriente pasa por el eje del hilo. Al aplicar la expresión anterior a las distancias 1,40 mm (distancia del eje a la superficie del conductor) y 2,20 mm, se obtiene el valor del campo magnético a 2,20 mm del eje:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d_1} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}40 \cdot 10^{-3}} = 2{,}46 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \\ B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d_2} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2{,}20 \cdot 10^{-3}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{B_2}{B_1} = \frac{d_2}{d_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{B_2}{B_1} = \frac{1{,}40}{2{,}20} \rightarrow B_2 = B_1 \cdot \frac{1{,}40}{2{,}20} = 2{,}46 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1{,}40}{2{,}20} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}\ \text{T}$$

b) El valor de la intensidad lo podemos obtener a partir de la expresión de B_1 o B_2:

$$B_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}40 \cdot 10^{-3}} = 2{,}46 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \rightarrow$$

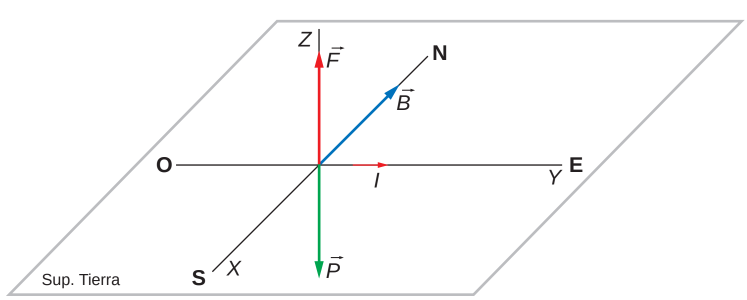
$$\rightarrow I = \frac{2{,}46 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1{,}40 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 17{,}22\ \text{A}$$

33. Un alambre recto horizontal transporta una corriente de 16 A de oeste a este en el campo magnético terrestre en un lugar donde $\vec{B}$ es paralelo a la superficie, apunta hacia el norte y tiene un valor de 0,04 mT:

a) Calcula la fuerza magnética sobre 1 m de ese alambre.

b) Si la masa de ese trozo de alambre es de 50 g, ¿qué corriente debe transportar para quedar suspendido de forma que su peso sea compensado por la fuerza magnética?

a) La situación física que describe el enunciado es la que se muestra en la siguiente ilustración:



La fuerza magnética que actúa sobre 1 m del alambre es:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} = 16 \cdot 1 \cdot \vec{j} \times 4 \cdot 10^{-5} \cdot (-\vec{i}) = 64 \cdot 10^{-5} \cdot \vec{k} \text{ N}$$

b) El peso que corrsponde al alambre es:

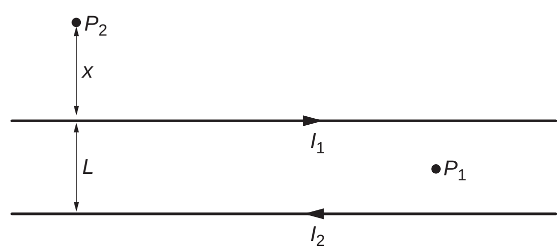
$$\vec{P} = m \cdot g \cdot (-\vec{k}) = -50 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot \vec{k} = -0{,}49 \cdot \vec{k} \text{ N}$$

La intensidad de corriente que debe recorrer el alambre ha de producir una fuerza magnética del mismo valor. Por tanto:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ \theta = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 90° = I \cdot l \cdot B = 0{,}49 \text{ N} \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \frac{0{,}49}{l \cdot B} = \frac{0{,}49}{1 \cdot 4 \cdot 10^{-5}} = 12\,250 \text{ A}$$

34 **Por dos largos conductores rectilíneos y paralelos, separados una distancia $L = 0{,}5$ m, circula una corriente $I_1 = 2$ A e $I_2 = 4$ A en sentidos opuestos:**



a) Calcula el campo magnético (módulo y orientación) en un punto como el P_1, equidistante de ambos conductores y situado en su mismo plano.

b) Considera un punto P_2, donde el campo magnético total es nulo. Razona por qué ha de estar situado a la izquierda de ambas corrientes y en su mismo plano, como se indica en la figura.

c) Calcula la distancia x de P_2 a I_1.

a) El modulo del campo magnético que crea cada corriente rectilínea en el punto P_1 se obtiene mediante la ley de Biot y Savart:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

donde I es la corriente que circula por cada conductor; d es la distancia que separa el conductor del punto en que deseamos calcular el campo, y μ es la permeabilidad magnética del medio, que en este caso es el vacío.

Por tanto, el campo magnético creado por el conductor 1 en P_1 es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot L/2} \rightarrow B_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Y el creado por el conductor 2:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot L/2} \rightarrow B_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5/2} = 3{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

La dirección y el sentido de cada uno de estos campos se determina teniendo en cuenta que las líneas de campo generadas por una corriente rectilínea son circunferencias con centro en la línea de corriente y colocadas en planos perpendiculares a ella. El sentido de estas líneas es el indicado por los dedos de la mano derecha cuando se coge el conductor, de modo que el dedo pulgar señala el sentido de la corriente.

Por tanto, el campo magnético creado por el conductor 1 en P_1 es perpendicular al plano del papel y hacia dentro, al igual que el creado por el conductor 2.

El campo total creado en el punto P_1 es, por el principio de superposición:

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow B_{total} = B_1 + B_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-6} + 3{,}2 \cdot 10^{-6} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

La dirección y el sentido de este campo es el mismo que dedujimos para los campos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$.

b) El campo magnético creado por una corriente rectilínea en un punto es proporcional al valor de la corriente e inversamente proporcional a la distancia que les separa.

En nuestro caso, hemos visto que los campos magnéticos creados por ambas corrientes en los puntos situados entre ellas tienen la misma dirección y sentido, por lo que su suma no se anula nunca. El punto P_2 debe estar, por tanto, por encima o por debajo de ambas. Como la corriente 2 es mayor que la corriente 1, la única posibilidad de que la suma de los dos campos se anule en un punto es que dicho punto esté más cerca de la corriente menor, es decir, la corriente 1.

c) El conductor 1 crea en el punto P_2 un campo magnético:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot x} \rightarrow B_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{x} \text{ T}$$

Este campo es perpendicular al plano del papel y hacia fuera.

Por su parte, el conductor 2 crea un campo:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot (x + L)} \rightarrow B_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot (x + L)} = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{x + L} \text{ T}$$

Este campo es perpendicular al plano del papel y hacia dentro.

El campo magnético total en P_2 es:

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow B_{total} = B_1 - B_2$$

Aplicando la condición de que el campo total se anule en P_2, obtenemos la distancia x:

$$B_1 - B_2 = 0 \rightarrow \frac{4 \cdot 10^{-7}}{x} - \frac{8 \cdot 10^{-7}}{x + L} = 0$$

$$\frac{4 \cdot 10^{-7}}{x} = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{x + L} \rightarrow 4 \cdot 10^{-7} \cdot (x + L) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x$$

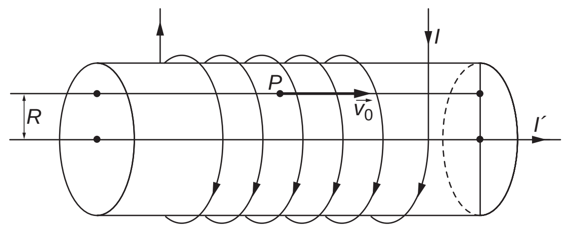
$$4 \cdot 10^{-7} \cdot L = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x \rightarrow x = L = 0{,}5 \text{ m}$$

Por tanto, el punto en el que se anula el campo magnético total creado por las dos corrientes rectilíneas se encuentra 50 cm por encima del conductor 1.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

35 **Por el solenoide de la figura, que tiene 100 espiras por metro, circula una corriente de intensidad $I = 1$ A.**

En el eje del solenoide se dispone un conductor rectilíneo que transporta otra corriente de intensidad $I' = 20 \cdot \pi$ A:



a) Calcula el campo magnético total en el punto P de la figura, que dista $R = 0{,}1$ m del eje del solenoide.

b) Si se abandona un electrón en el punto P con una velocidad inicial $v_0 = 100\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, calcula el radio de curvatura de su trayectoria.

a) El campo magnético que crea un solenoide en un punto interior, alejado de sus extremos, es:

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{L}$$

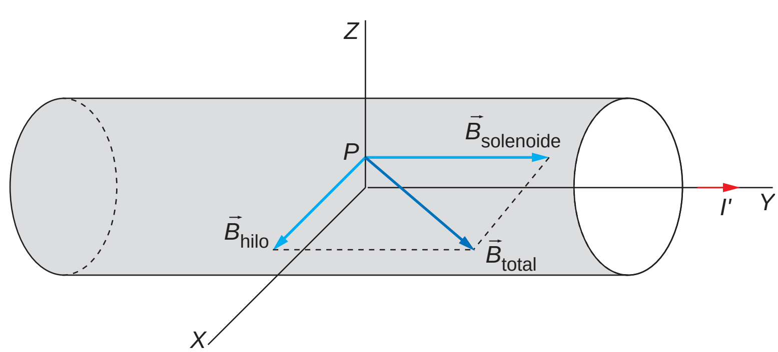
En este caso:

$$n = \frac{N}{L} = 100\ \frac{\text{espiras}}{\text{metro}}$$

Por tanto:

$$B_{solenoide} = \mu \cdot n \cdot I = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

Este campo magnético se compone con el del conductor rectilíneo, como se muestra en la siguiente ilustración:



El módulo del campo magnético que crea el conductor rectilíneo se calcula aplicado la ley de Biot y Savart:

$$B_{hilo} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}1} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

El módulo del campo magnético resultante, teniendo en cuenta que, de acuerdo con la ilustración anterior, el ángulo que forma el campo magnético del solenoide con el del hilo es de 90°, es:

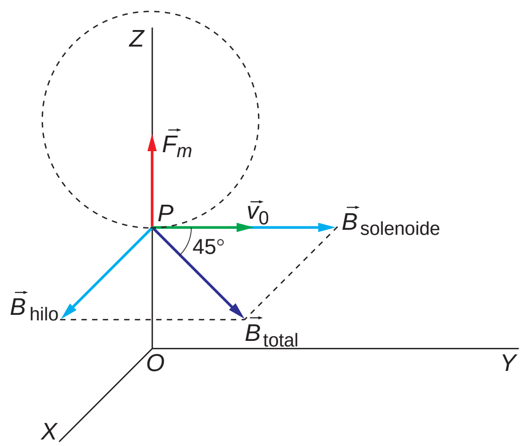
$$B_{total} = \sqrt{(4 \cdot \pi \cdot 10^{-5})^2 + (4 \cdot \pi \cdot 10^{-5})^2} = \sqrt{2 \cdot (4 \cdot \pi \cdot 10^{-5})^2} = 1{,}78 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

b) La fuerza magnética a que se ve sometido el electrón es la fuerza centrípeta que lo hace girar:

$$F_c = F_m \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \theta \rightarrow R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot sen\ \theta}$$

NOTA: se supone que el electrón se desplaza en la dirección paralela al eje de rotación y en el sentido de I'.

Fíjate que, de acuerdo con la siguiente figura, el ángulo θ, formado por la velocidad del electrón y el campo magnético resultante, es de 45°:



El radio de curvatura de la trayectoria resulta:

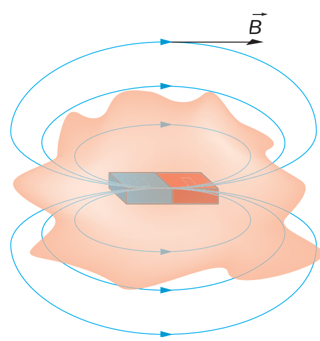
$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot sen\ \theta} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 100}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{2} \cdot sen\ 45°} = 4{,}53 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

9 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

9.1. FLUJO MAGNÉTICO

1. ¿Por qué es nulo el flujo magnético a través de una superficie cerrada que rodea a un imán?

Las líneas de campo magnético son cerradas. En el caso de un imán, estas líneas, por el exterior, salen del polo norte y entran por el polo sur, como se muestra en la siguiente ilustración:

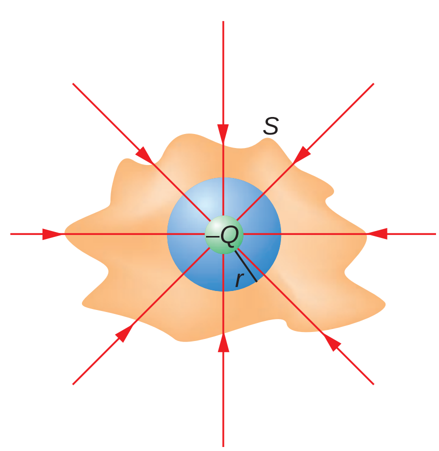


En ella se observa que el número de líneas que salen es igual al de líneas que entran; por tanto, el flujo magnético es cero.

2. ¿Por qué no ocurre lo mismo con cualquier carga eléctrica?

En el caso de una carga eléctrica, el flujo que atraviesa una superficie cerrada no es nulo. Esto es debido a que las líneas del campo eléctrico, a diferencia de las del campo magnético, son abiertas.

En la siguiente figura se aprecia el flujo de campo eléctrico que atraviesa dos superficies cerradas de distinta forma para el caso de una carga negativa:



9.2. EXPERIENCIAS DE FARADAY Y DE HENRY

1. ¿Qué fenómeno observaríamos en el ejemplo que se incluye en esta página a la derecha, si movemos con la misma velocidad, dirección y sentido el imán y la espira?

Si movemos ambos cuerpos con la misma velocidad, dirección y sentido, logramos que la velocidad relativa entre ambos sea nula. Por tanto, el flujo magnético que atraviesa la espira será constante, y no mediremos el paso de corriente inducida.

2. En lo que respecta a la intensidad de corriente que circula por la espira, ¿importa la velocidad con que movemos el imán respecto a la espira?

Cuanto mayor es la velocidad con que desplazamos el imán respecto a la espira, mayor es la variación de flujo que se produce, $d\Phi/dt$. Por tanto, la f.e.m. inducida sobre la espira es mayor, ya que, de acuerdo con la ley de Faraday de la inducción, $\varepsilon = -d\Phi/dt$.

Como la resistencia eléctrica de la espira no varía, si la f.e.m. inducida aumenta, también lo hace la intensidad que recorre la espira, ya que, de acuerdo con la ley de Ohm:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

3. En los ejemplos de la página anterior, relativos a las experiencias de Faraday y Henry, ¿qué sucede si introducimos o extraemos un núcleo de hierro en el interior de la bobina que genera el campo magnético?

El campo magnético en el interior de un solenoide es:

$$B = \frac{\mu \cdot I \cdot N}{L}$$

Por tanto, una bobina con núcleo de hierro tiene en su interior un campo magnético mucho más elevado, ya que el hierro posee una permeabilidad magnética, μ, mucho mayor que el aire.

Al introducir o extraer el núcleo de hierro, modificamos la permeabilidad magnética del sistema, y, como consecuencia, varían el campo magnético y el flujo magnético.

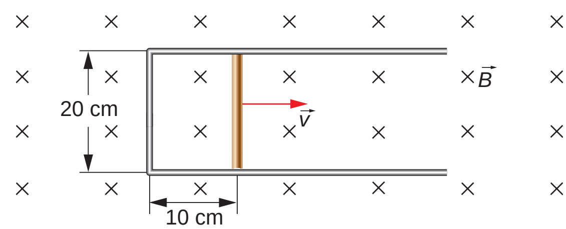
De acuerdo con la ley de Faraday, la f.e.m. inducida es directamente proporcional a la variación de flujo que se produce por unidad de tiempo. Podemos concluir, por tanto, que mientras extraemos o introducimos el núcleo de hierro, se induce una f.e.m. en el circuito.

4. ¿Cómo podemos variar la intensidad de corriente que circula, por ejemplo, por un solenoide?

Un sencillo procedimiento es introducir y extraer consecutivamente un imán dentro del solenoide. De ese modo se generará una corriente inducida que, al menos, cambiará de sentido cada vez que se cambie de sentido el movimiento del imán.

9.3. LEY DE FARADAY-HENRY

1. Una espira rectangular posee un lado móvil que se desplaza en el seno de un campo magnético uniforme de 5 T con una velocidad constante de 5 cm · s^{-1}:



Calcula:

a) La f.e.m. inducida en la espira en función del tiempo.

b) La intensidad que recorre la espira si su resistencia eléctrica es de 0,5 Ω.

c) La fuerza que debemos ejercer sobre el lado móvil de la espira para mantener constante la velocidad con que esta se mueve.

d) Señala el sentido de la corriente inducida.

a) En el circuito se produce una variación del flujo magnético, ya que varía la superficie del circuito. Dicha variación la podemos expresar en la forma:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot L \cdot dx = B \cdot L \cdot v \cdot dt$$

La f.e.m. inducida será, por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot L \cdot v \cdot t)}{dt} = -B \cdot L \cdot v = -5 \cdot 0,2 \cdot 0,05 = -0,05 \text{ V}$$

b) Aplicando la ley de Ohm, podemos calcular la intensidad de corriente inducida que recorre la espira:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 \text{ A}$$

c) Para que la espira se mueva con velocidad constante, debemos ejercer sobre ella una fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el campo sobre el conductor que avanza con velocidad v.

La fuerza electromagnética tiende a frenar la velocidad con que se desplaza el lado móvil, intentando con ello que no varíe el flujo magnético que atraviesa la espira.

De acuerdo con la ley de Laplace:

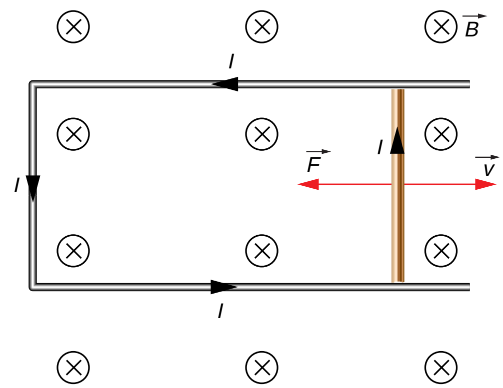
$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F = I \cdot l \cdot B \cdot sen\ 90° = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 5 = 0,1 \text{ N}$$

d) Como hemos visto en el apartado anterior, existe una fuerza, aplicada sobre el conductor que se desplaza, que tiende a disminuir la velocidad con que se mueve y que crea el propio campo magnético. De ahí el sentido que hemos asignado al vector fuerza en la figura de la página siguiente.

De acuerdo con esto, al aplicar las reglas del producto vectorial a la siguiente expresión:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

vemos que la intensidad debe circular por la espira como se indica en la siguiente ilustración:



9.4. AUTOINDUCCIÓN

1. Al desconectar ciertos aparatos de la red eléctrica, como, por ejemplo, una plancha, salta una chispa en el enchufe. Explica el motivo por el que ocurre a partir de los conceptos expuestos en este epígrafe.

La plancha, como todo circuito eléctrico, posee cierta autoinducción, L. Al desconectar el interruptor, varía de forma brusca la intensidad que recorre el circuito, que pasa de un valor, I, a cero, en un intervalo de tiempo Δt.

Dicha variación produce un campo magnético y, por tanto, un flujo magnético variable, que induce una f.e.m., ε, en el circuito, que se opone a la disminución que se produce en la intensidad:

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

El chispazo que observamos es la extracorriente de apertura que se ha generado justo en el momento de desconectar el circuito.

2. ¿Dónde es más fácil detectar el fenómeno que describe la actividad anterior: al desconectar un interruptor general (un magnetotérmico, por ejemplo) o al desconectar una lámpara?

El fenómeno es más fácil de detectar en una lámpara que en un interruptor general. La razón es que, al desconectar un interruptor general, no podemos ver los terminales y no apreciamos visualmente el chispazo, a diferencia de lo que ocurre con el interruptor de la lámpara, ya que, al apagarla, podemos ver el reflejo del chispazo que atraviesa la carcasa de plástico que protege al interruptor.

9.5. LA CORRIENTE ALTERNA

1. **Busca información en la bibliografía acerca del motor eléctrico. Dibuja un esquema de cómo está construido y compara su estructura con la del generador de corriente eléctrica.**

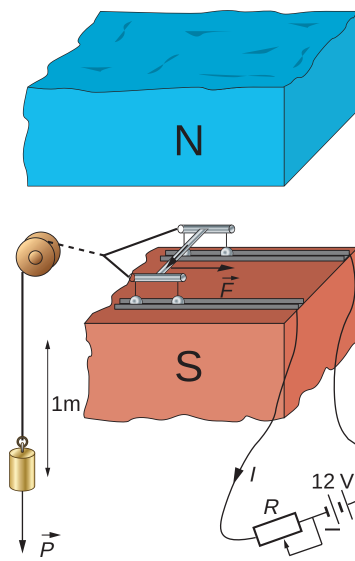
Un generador es un dispositivo que proporciona energía eléctrica. Al contrario, un motor es un dispositivo que consume energía eléctrica.

Ya sabemos cómo calcular la fuerza que actúa sobre un elemento conductor situado en el seno de un campo magnético:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$$

Esta fuerza podemos modificarla simplemente variando el valor de la intensidad de la corriente eléctrica que circula por él, el valor del campo o ambas magnitudes a la vez. Este es el principio de funcionamiento del motor eléctrico.

En la figura se muestra un ejemplo de motor eléctrico elemental. El él se incluye un reostato que permite modificar la intensidad de corriente que circula por el conductor. Al cerrar el circuito, aparece una fuerza electromagnética, $\vec{F}$, dirigida hacia la derecha que permite elevar una pesa.



9.6. TRANSFORMADORES

1. **Alrededor de una barra de hierro se arrollan dos bobinas con distinto número de espiras. Una de ellas se conecta a un generador de corriente alterna de 24 V y la otra se conecta a una bombilla, actuando el dispositivo como si fuese un transformador.**

La bombilla se ilumina correctamente cuando la d.d.p. entre sus bornes es 12 V, consumiendo, en ese caso, 24 W. Suponiendo que el transformador formado por las bobinas y la barra de hierro es 100 % eficiente, calcula la intensidad de corriente que circula.

Suponiendo que no existen pérdidas, en un transformador de corriente la potencia es constante a ambos lados del mismo:

$$P_{primario} = P_{secundario}$$

$$I_1 \cdot V_1 = I_2 \cdot V_2$$

Si la bombilla consume 24 W y la d.d.p. entre sus bornes es de 12 V, la intensidad que circula por el secundario debe ser:

$$I_2 = \frac{P_{secundario}}{V_2} = \frac{24}{12} = 2 \text{ A}$$

Si tenemos en cuenta que la d.d.p. en el primario es de 24 V, la intensidad en el primario debe ser:

$$I_1 = \frac{P_{primario}}{V_1} = \frac{24}{24} = 1 \text{ A}$$

2. En la actividad anterior se mide la intensidad de corriente que circula por el generador y se obtiene un valor de 1,5 A. Calcula la potencia eléctrica que se pierde en el proceso de transformación. Señala algún argumento que explique la forma en que se pierde energía en el transformador.

Conocido el dato de la intensidad, podemos calcular la potencia real que llega a la bombilla:

$$P_{secundario} = I_2 \cdot V_2 = 1{,}5 \cdot 12 = 18 \text{ W}$$

Sin embargo, la potencia que suministra el primario es de 24 W. La potencia perdida es:

$$P_{primario} - P_{secundario} = 24 - 18 = 6 \text{ W}$$

La energía eléctrica que circula por las bobinas calienta los conductores, que transmiten al medio energía en forma de calor (efecto Joule). Este es el modo, básicamente, en que se "degrada" la energía eléctrica en un transformador.

No obstante, un transformador es una máquina donde la conversión de energía tiene rendimientos muy elevados, al tratarse de un máquina sin partes móviles, lo que evita el rozamiento entre superficies.

De hecho, en los transformadores reales, el rendimiento suele alcanzar fácilmente valores en torno al 95%, e incluso superiores.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Una persona mueve un imán de barra, acercándolo o alejándolo de una espira cuadrada que permanece fija.

El eje norte-sur del imán es perpendicular a la espira y su polo norte está encarado hacia esta. En esas condiciones, indica cuál será la dirección y el sentido de la corriente eléctrica que se induce en la espira.

Representa gráficamente la situación que propone el enunciado; te resultará útil para resolverlo.

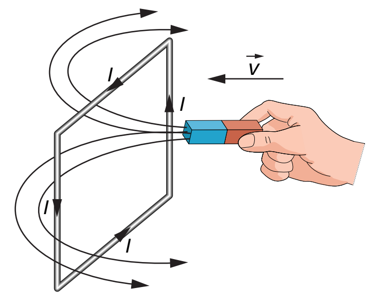
El sentido de las líneas de campo magnético es de norte a sur.

Según la ley de Lenz, el sentido de la intensidad inducida es aquel cuyo flujo magnético induce, a su vez, una f.e.m. que se opone a la f.e.m. inducida externamente.

En la siguiente página analizamos cada caso:

- El imán se acerca:

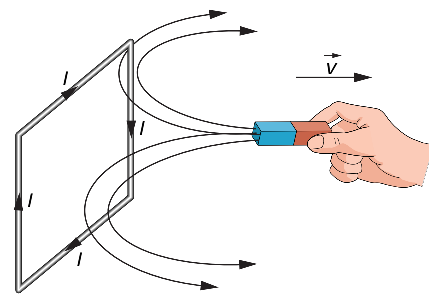
  Cuando el imán se acerca, aumenta el flujo magnético a través de la espira, debido al aumento de líneas de campo que la atraviesan. Por tanto, el sentido de la intensidad será aquel que cree un campo magnético que tienda a disminuir el flujo a través de la espira (ley de Lenz).



  La espira, por tanto, ha de crear un campo magnético hacia la izquierda. Según la regla del tornillo, ello implica que la intensidad, vista desde la posición del imán, se mueva en sentido antihorario.

- El imán se aleja:

  Cuando el imán se aleja, disminuye el flujo magnético a través de la espira, debido a que el número de líneas de campo que la atraviesan es menor. El sentido de la intensidad será aquel que cree un campo magnético que tienda a aumentar el flujo a través de la espira (ley de Lenz).



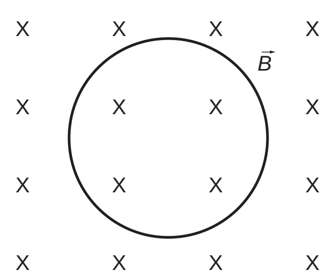
  La espira, por tanto, ha de crear un campo magnético hacia la derecha, lo que, según la regla del tornillo, implica que la intensidad, vista desde la posición del imán, se mueva en sentido horario.

2. Razona qué sentido tendrá la corriente inducida en una espira cuando:

a) Acercamos al plano de la espira el polo norte de un imán.

b) El plano de la espira se aleja del polo norte de un imán.

Para resolver esta cuestión supodremos que la espira está en el plano del papel, y el polo norte del imán, encima de él. De ese modo, el campo magnético, $\vec{B}$, creado por el imán será un campo entrante, como se muestra en la siguiente figura:

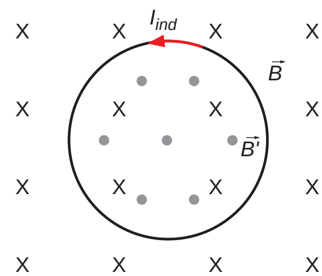


a) Mientras el imán se acerca a la espira, el flujo del campo magnético que la atraviesa aumenta, lo que induce en la espira una corriente cuya fuerza electromotriz viene dada por la ley de Faraday-Lenz:

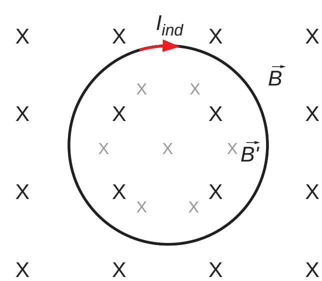
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt}$$

Recuerda que el signo negativo que acompaña a la f.e.m. inducida indica que el sentido de la corriente se opone a la causa que la produce.

En este caso, como el flujo del campo magnético aumenta, la corriente eléctrica inducida tiene un sentido tal que crea un campo magnético en sentido contrario. Por tanto, la corriente inducida tendrá un sentido antihorario, como se muestra en la siguiente ilustración:



b) En este caso, al alejar el imán, el flujo de campo magnético que atraviesa la espira disminuye. Haciendo un razonamiento análogo al del apartado anterior, se llega a la conclusión de que en este caso la corriente tendrá un sentido horario, para generar un campo magnético en el mismo sentido que el inicialmente existente, como se muestra en la figura:



3. Una corriente eléctrica que circula por un hilo crea un campo magnético. Un campo magnético, ¿crea siempre una corriente eléctrica en un hilo que lo atraviesa? Razona la respuesta.

La respuesta a la pregunta que propone el enunciado es negativa. Para que un campo magnético cree una corriente eléctrica, este debe variar con el tiempo. Si es uniforme, no induce corriente.

4. ¿De qué depende la f.e.m. inducida en un circuito?

a) De que varíe en una magnitud grande o pequeña el flujo magnético que lo atraviesa.

b) De la variación del flujo magnético (rapidez con que cambia) a través de él.

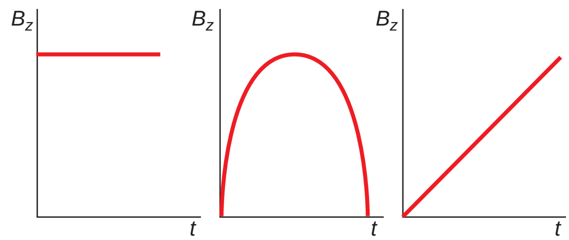
c) Del valor del flujo magnético que lo atraviesa, supuesto constante.

La f.e.m. inducida en un circuito eléctrico se calcula de acuerdo con la ley de Faraday-Henry:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

De ella se deduce que la f.e.m. inducida en un circuito depende de la variación del flujo magnético que lo atraviesa. Por tanto, la respuesta correcta es la **b).**

5. ¿Qué campo magnético, de los tres que se representan en las figuras, deberemos aplicar a una espira cuadrada que descansa en el plano *XY*, para que se induzca en esta una f.e.m. constante? ¿Qué sentido tendrá la corriente inducida en la espira? El campo magnético está dirigido a lo largo del eje *OZ*.



La f.e.m. inducida en la espira se calcula de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \varepsilon = -\frac{d(B \cdot S \cdot cos\ \alpha)}{dt}$$

En ella, el ángulo α es el formado por el vector inducción magnética, $\vec{B}$, y el vector superficie, $\vec{S}$, que es un vector perpendicular al plano de la espira.

En el enunciado se indica que la espira descansa en el plano *XY*; ello significa que la superficie de la espira, *S*, y el ángulo que esta forma con el campo magnético son constantes. Por tanto, su variación respecto al tiempo es nula:

$$\varepsilon = -\frac{d(B \cdot S \cdot cos\ \alpha)}{dt} = -S \cdot cos\ \alpha \cdot \frac{dB}{dt}$$

En consecuencia, la f.e.m. inducida se deberá a la variación del campo magnético. Analicemos a continuación los tres campos magnéticos que proporciona el enunciado de la cuestión:

- El campo magnético de la izquierda es uniforme (constante). Por tanto, su variación respecto al tiempo es nula y no inducirá f.e.m.:

$$\varepsilon = -S \cdot cos\ \alpha \cdot 0 = 0$$

- El campo magnético del centro primero aumenta y después disminuye; varía con el tiempo; eso induciría en la espira una f.e.m. variable, no constante, como se solicita.

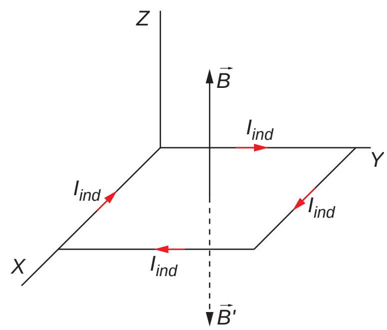
- El último campo representado varía de forma uniforme a lo largo del tiempo. En este caso, la variación del campo magnético respecto al tiempo se corresponde con el valor de la pendiente, *m*, que representa el campo magnético:

$$\frac{dB}{dt} = m$$

En este caso se induce en la espira una f.e.m. constante, cuyo valor viene dado por:

$$\varepsilon = -S \cdot cos\ \alpha \cdot m$$

De acuerdo con la ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida en la espira es tal que se opone a la causa que la produce. En este caso, al estar la espira situada en el plano *XY*, y el campo magnético creciente, en el sentido positivo del eje *Z*, para que se induzca un campo magnético, $\vec{B}'$, en sentido contrario, el sentido de la corriente inducida debe ser el que se muestra en la siguiente ilustración:



EJERCICIOS

6. ¿Qué es un transformador? ¿Por qué son útiles para el transporte de energía eléctrica? Si el primario de un transformador tiene 1 200 espiras y el secundario 100, ¿qué tensión habrá que aplicar al primario para tener en la salida del secundario 6 V?

Un transformador es un dispositivo que permite modificar la tensión de una corriente alterna. Se utiliza en el transporte de energía eléctrica, porque al permitir elevar la tesión de la corriente eléctrica transportada, se reducen las pérdidas de energía por efecto Joule.

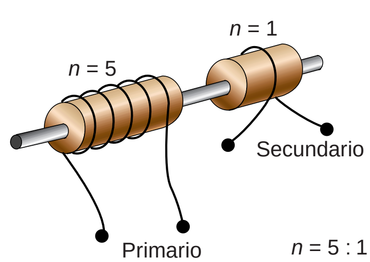
Para ampliar la respuesta, consúltese el epígrafe 9.6 (páginas 228 y 229) y la ampliación de contenidos sobre el transporte y la distribución de electricidad (páginas 232 y 233) incluidos en el libro del alumno.

En un transformador se cumple la siguiente relación entre las f.e.m. inducidas en los arrollamientos primario y secundario, ε_1 y ε_2, y su número de espiras, N_1 y N_2:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} = 6 \cdot \frac{1\,200}{100} = 72 \text{ V}$$

7. Disponemos de una barra de acero y un rollo de hilo de cobre. Indica cómo puedes construir un transformador cuya relación de transformación sea 5.

Sobre la misma barra de acero arrollamos, a cada uno de los lados, formando solenoides separados, el conductor de cobre.



Para lograr que la relación de transmisión sea 5, en uno de los lados, el número de vueltas del cable alrededor de la barra ha de ser 5 veces superior al del otro. Este será el primario del transformador, mientras que el arrollamiento del otro extremo será el secundario.

8. Un solenoide cilíndrico está formado por un arrollamiento de 100 espiras por centímetro y mide 20 cm de longitud y 2 cm de radio. Por el solenoide circula una corriente de 10 A. Calcula el coeficiente de autoinducción del solenoide, si suponemos que en su interior tan solo existe aire.

Dato: $\mu_{aire} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ U.I.

El número total de espiras del solenoide es:

$$N = 100 \cdot 20 = 2\ 000 \text{ espiras}$$

Por tanto, el coeficiente de autoinducción resulta:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\ 000^2 \cdot \pi \cdot 0,02^2}{20 \cdot 10^{-2}} = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

9. Para realizar cierta experiencia se quiere construir un solenoide de 50 cm de largo, con un coeficiente de autoinducción de 2 mH. ¿Cuántos metros de alambre necesitaremos?

Supón que el diámetro del alambre es despreciable frente a la longitud del solenoide.

Con los datos que facilita el enunciado, y suponiendo para el radio un valor de 5 cm, podemos calcular el número de vueltas:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot r^2}{l}$$

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot l}{\mu_0 \cdot \pi \cdot r^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0,05^2}} = 318,3 \simeq 319 \text{ vueltas}$$

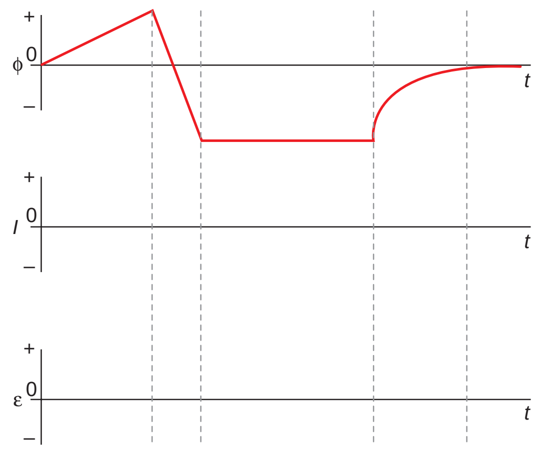
La longitud de cada vuelta es el perímetro de la circunferencia:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0,05 = 0,1 \cdot \pi \text{ m}$$

siendo la longitud total del cable:

$$L = N \cdot P = 319 \cdot 0,1 \cdot \pi = 100,22 \text{ m}$$

10. La intensidad de la corriente que circula por una bobina varía con el tiempo. Por tanto, el flujo magnético, Φ, y la f.e.m. inducida, ε, también varían con el tiempo, siendo la variación de flujo magnético la que se indica en la primera gráfica.



A partir de esta gráfica, dibuja, en cada caso, la forma en que varía la intensidad de corriente, *I*, y la f.e.m. inducida, ε, de acuerdo con los sistemas de coordenadas propuestos.

De acuerdo con la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

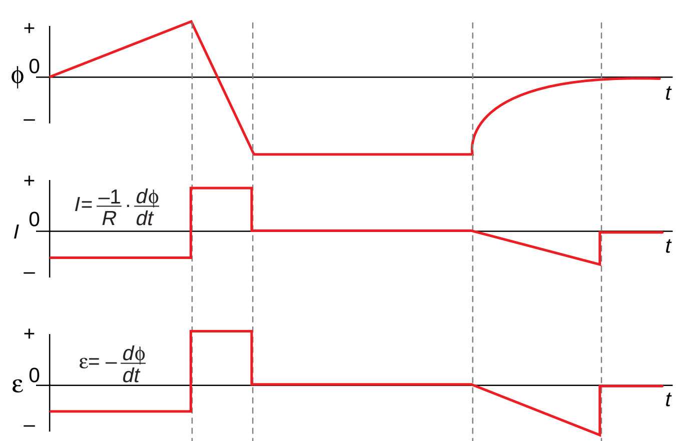
Por otra parte, de acuerdo con la ley de Ohm, la intensidad de corriente resulta:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\frac{d\Phi}{dt}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Para dibujar las derivadas, debemos tener en cuenta que:

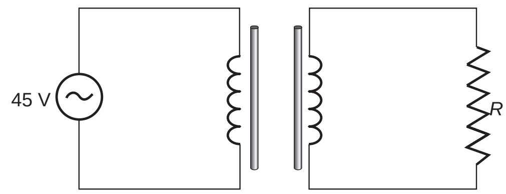
- Las derivadas de rectas de pendiente constante son rectas paralelas al eje *X* (rectas de pendiente nula).
- Las derivadas de rectas paralelas al eje *X* son nulas (derivadas de una constante).
- Las derivadas de las curvas de segundo grado son rectas de pendiente constante.

Las funciones que nos piden tienen, por tanto, la siguiente forma:



PROBLEMAS

11. Un transformador tiene 120 vueltas en el primario y 40 vueltas en el secundario. El secundario está conectado a una resistencia de 10 ohm y la d.d.p. aplicada en el primario es 45 V, siendo la corriente alterna.



Despreciando las pérdidas energéticas que se producen en el transformador, calcula la intensidad de corriente que circulará por el secundario.

En un transformador se cumple la siguiente relación:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Con los datos que facilita el enunciado podemos calcular la d.d.p. en el secundario del transformador:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = 45 \cdot \frac{40}{120} = 15 \text{ V}$$

Aplicando ahora la ley de Ohm al secundario, resulta:

$$V_2 = I_2 \cdot R \rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{15}{10} = 1{,}5 \text{ A}$$

12. Un transformador tiene 11 000 vueltas en el primario y 225 en el secundario. El secundario está conectado a una resistencia de 10 ohm y la d.d.p. aplicada en el primario es 220 V, siendo la corriente alterna.

Despreciando las pérdidas energéticas que se producen en el transformador, calcula la intensidad de corriente que circula por el secundario.

En un transformador se cumple la siguiente relación:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Con este valor podemos calcular la diferencia de potencial en el secundario:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = 220 \cdot \frac{225}{11000} = 4{,}5 \text{ V}$$

Aplicando la ley de Ohm al secundario, obtenemos la intensidad de corriente que circula por él:

$$V_2 = I_2 \cdot R \rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{4{,}5}{10} = 0{,}45 \text{ A}$$

13. **El flujo magnético que atraviesa una espira conductora viene dado por la expresión:**

$$\boldsymbol{\Phi (t) = 0{,}02 \cdot (t^3 - 4 \cdot t)}$$

En dicha expresión, el flujo se mide en T · m² si el tiempo se mide en segundos.

a) Representa gráficamente cómo varían con el tiempo el flujo magnético y la f.e.m. inducida.

b) ¿En qué instantes se anula el flujo magnético?

c) Calcula el valor de la f.e.m. en esos instantes.

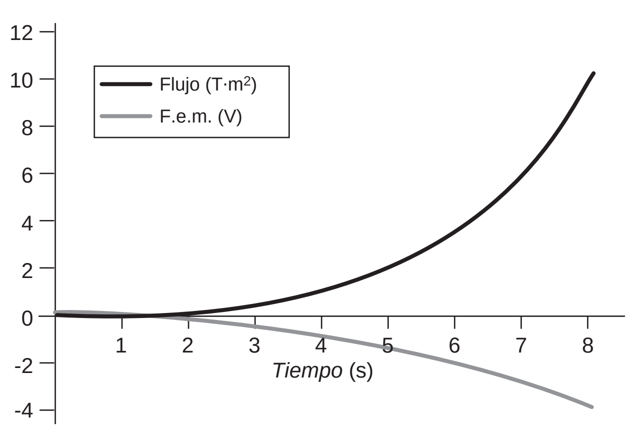
a) Según la ley de Faraday, la f.e.m inducida resulta:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-d[0{,}02 \cdot (t^3 - 4 \cdot t)]}{dt} = -0{,}02 \cdot (3 \cdot t^2 - 4)$$

Si damos valores al tiempo, el flujo y la f.e.m. inducida resultan:

Tiempo (s)	Flujo (T · m²)	F.e.m. (V)
0	0	0,08
1	–0,06	0,02
2	0	–0,16
3	0,3	–0,46
4	0,96	–0,88
5	2,1	–1,42
6	3,84	–2,08
7	6,3	–2,86
8	9,6	–3,76

Al representar gráficamente estos datos, resulta:



b) y c) Como se observa en la tabla anterior, el flujo magnético se anula en los instantes $t = 0$ y $t = 2$ s (cuando $t^3 - 4 \cdot t = 0$). Las f.e.m. en esos instantes son:

$$t = 0 \text{ s} \rightarrow \text{f.e.m.} = +0{,}08 \text{ V}$$
$$t = 2 \text{ s} \rightarrow \text{f.e.m.} = -0{,}16 \text{ V}$$

14. El flujo magnético que atraviesa una espira conductora varía con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$\boldsymbol{\Phi(t) = 0{,}1 \cdot t^2 - 0{,}4 \cdot t}$$

donde Φ viene expresada en T · m², y *t*, en segundos.

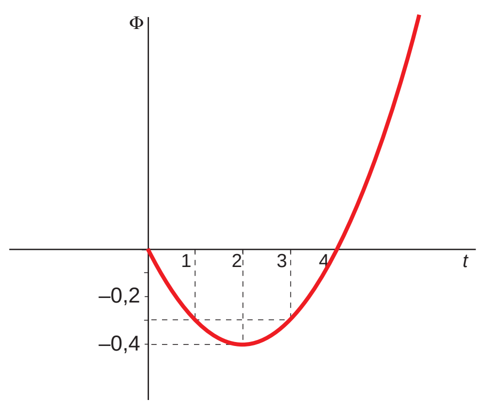
a) Halla una expresión de la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo.

b) Construye sendas gráficas de la variación con el tiempo del flujo y de la fuerza electromotriz inducida.

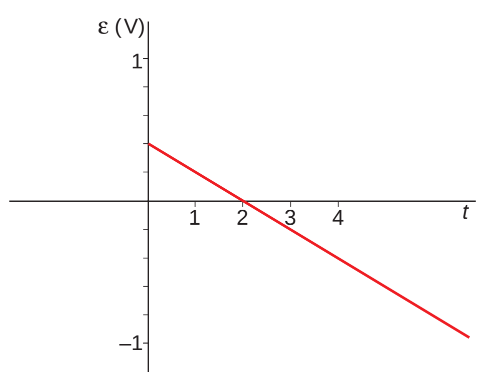
a) La fuerza electromotriz inducida se obtiene aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(0,1 \cdot t^2 - 0,4 \cdot t)}{dt} = -0,2 \cdot t + 0,4$$

b) La representación gráfica de la variación del flujo en función del tiempo es la siguiente:



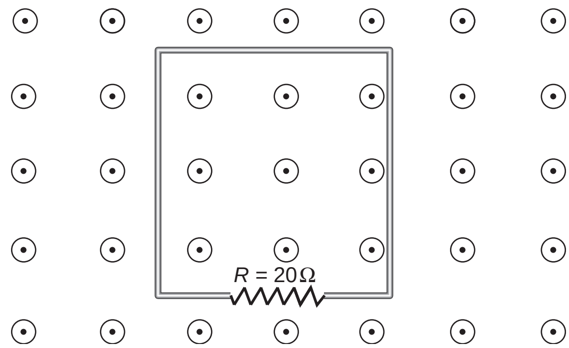
Y la que corresponde a la fuerza electromotriz inducida:



15. **El flujo magnético que atraviesa el circuito eléctrico de la figura varía con el tiempo, de acuerdo con la expresión:**

$$\Phi(t) = 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$$

En esta expresión, Φ se mide en miliweber si *t* se mide en segundos. Las líneas de fuerza del campo magnético son perpendiculares al plano del papel y salen de él.



Si la resistencia del circuito es 20 Ω, calcula la intensidad de corriente inducida en el instante *t* = 3 s. Justifica el sentido de la corriente eléctrica inducida.

En primer lugar calculamos la f.e.m. inducida sobre el circuito. De acuerdo con la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(2 \cdot t + 5 \cdot t^2)}{dt} = -2 - 10 \cdot t \ \text{ mV}$$

En el instante $t = 3$ s, la f.e.m. es:

$$\varepsilon = -2 - 10 \cdot t = -2 - 10 \cdot 3 = -32 \text{ mV}$$

Por tanto, la intensidad inducida en el circuito resulta:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-32}{20} = -1{,}6 \text{ mA}$$

El sentido de la corriente inducida es aquel que hace que se oponga a la causa que la crea. En este caso, esa causa es el aumento del campo magnético, ya que la superficie permanece constante.

Por tanto, la corriente circulará de modo que el sentido del campo que cree sea hacia dentro del papel. De acuerdo con la regla del tornillo, la intensidad ha de girar en sentido horario, en el plano de la espira.

16. **El flujo magnético que atraviesa una espira conductora viene dado por la expresión:**

$$\Phi(t) = (t^2 - 4 \cdot t) \cdot 10^{-1}$$

En dicha expresión, el flujo se mide en $T \cdot m^2$ si el tiempo se mide en segundos.

a) Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira, en función del tiempo.

b) Representa gráficamente cómo varían con el tiempo el flujo magnético y la f.e.m.

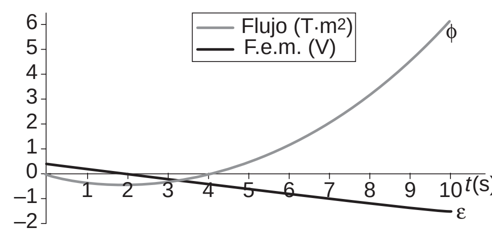
c) ¿En qué instantes se anula el flujo magnético? ¿Cuál es el valor de la f.e.m. en esos instantes?

a) De acuerdo con la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(t^2 - 4 \cdot t) \cdot 10^{-1}}{dt} = (-0{,}2 \cdot t + 0{,}4)\ \text{V}$$

b) Los valores que obtenemos para el flujo y la f.e.m. inducida, y su representación gráfica, son:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Flujo (T · m²)	0	–0,3	–0,4	–0,3	0	0,5	1,2	2,1	3,2	4,5	6
F.e.m. (V)	0,4	0,2	0	–0,2	–0,4	–0,6	–0,8	–1	–1,2	–1,4	–1,6



c) El flujo magnético se anula en los instantes $t = 0$ y $t = 4$ s (cuando $t^2 - 4 \cdot t = 0$). Las f.e.m. en esos instantes son:

$$t = 0 \text{ s} \rightarrow \text{f.e.m.} = 0{,}4 \text{ V} \quad ; \quad t = 4 \text{ s} \rightarrow \text{f.e.m.} = -0{,}4 \text{ V}$$

17. Consideramos una espira conductora, cuadrada y horizontal, de 10 m de lado. Un campo magnético uniforme, de 10^{-7} T, atraviesa la espira de abajo hacia arriba formando un ángulo de 30° con la vertical ascendente. A continuación, invertimos el sentido de este campo, empleando 0,1 s en tal proceso. Calcula:

a) El flujo magnético del campo inicial.

b) La fuerza electromotriz inducida generada por la inversión.

a) El flujo magnético se define como el producto del vector inducción magnética y el vector superficie:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

En la expresión anterior, α es el ángulo formado por dichos vectores, que, de acuerdo con el enunciado, es de 30°. Por tanto:

$$\Phi = 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot \cos 30° = 8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

b) Si se invierte el sentido del campo magnético, el ángulo formado por $\vec{B}'$ y $\vec{S}$ será de 150°; el flujo magnético que atraviesa la espira en ese caso es:

$$\Phi' = \vec{B}' \cdot \vec{S} = B' \cdot S \cdot \cos \alpha' = 10^{-7} \cdot 100 \cdot \cos 150° = -8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

La variacion de flujo en el proceso de inversión es:

$$\Delta\Phi = \Phi' - \Phi = -8{,}7 \cdot 10^{-6} - 8{,}7 \cdot 10^{-6} = -1{,}73 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

En consencuencia, la f.e.m. inducida en el proceso será:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{-1{,}73 \cdot 10^{5}}{0{,}1} = 1{,}73 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

18 **Una bobina cuadrada, plana, con 100 espiras, de lado *L* = 5 cm, está situada en el plano *XY*. Si aplicamos un campo magnético dirigido a lo largo del eje *Z* que varía entre 0,5 T y 0,2 T en el intervalo de 0,1 s:**

a) ¿Qué fuerza electromotriz (f.e.m.) se inducirá en la bobina?

b) Si ahora el campo permanece constante de valor 0,5 T y la bobina gira en 1 segundo hasta colocarse sobre el plano *XZ*, ¿cuál será la f.e.m. inducida en este caso?

c) Si en el caso anterior la bobina se desplaza a lo largo del eje *Z* sin girar, ¿cuál será la f.e.m. inducida?

a) La expresión que permite calcular la f.e.m. inducida en una bobina de N espiras es la siguiente:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

En el supuesto que nos proponen:

$$N = 100 \text{ espiras} \quad ; \quad \Delta t = 0{,}1 \text{ s}$$

Para calcular la variación del flujo debemos calcular el flujo inicial y el final:

$$\Phi_{inicial} = \vec{B}_{inicial} \cdot \vec{S} = B_{inicial} \cdot S \cdot cos\ \alpha = 0{,}5 \cdot (5 \cdot 10^{-2}) \cdot cos\ 0° = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{final} = \vec{B}_{final} \cdot \vec{S} = B_{final} \cdot S \cdot cos\ \alpha = 0{,}2 \cdot (5 \cdot 10^{-2}) \cdot cos\ 0° = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{final} - \Phi_{inicial} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} - 1{,}25 \cdot 10^{-3} = -0{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Por tanto, la f.e.m. inducida en la bobina es:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -100 \cdot \frac{-0{,}75 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}75 \text{ V}$$

b) En este caso, la variación de flujo se calcula del siguiente modo:

$$\Phi_{inicial} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos\ \theta = 0{,}5 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot cos\ 0° = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{final} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos\ \theta' = 0{,}5 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot cos\ 90° = 0 \text{ Wb}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{final} - \Phi_{inicial} = 0 - 1{,}25 \cdot 10^{-3} = -1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Y la f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -100 \cdot \frac{-1{,}25 \cdot 10^{-3}}{1} = 0{,}125 \text{ V}$$

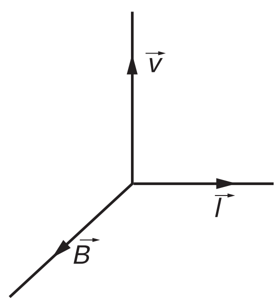
c) El campo magnético es uniforme, de valor 0,5 T, la superficie de la bobina no varía, y el ángulo que forman en este caso $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es de 0°. De acuerdo con ello, el flujo magnético que atraviesa la espira es constante, de valor:

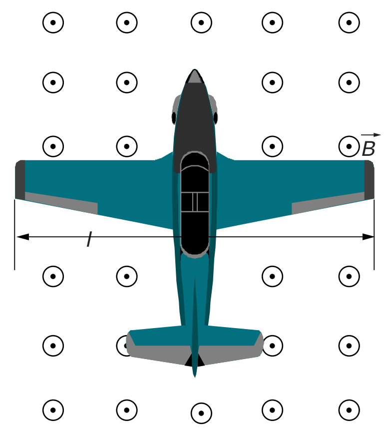
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0{,}5 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot cos\ 0° = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Al no haber variación de flujo, la f.e.m. inducida en la bobina es cero; es decir, no se crea fuerza electromotriz.

19. Un avión vuela horizontalmente a 200 m · s^{-1} en una región donde la componente vertical del campo magnético terrestre tiene una intensidad de 36 μT. En esas condiciones, la f.e.m. inducida entre los extremos de las alas del avión es 0,20 V. Con esos datos, calcula la distancia que separa los extremos de las alas del avión.

El fuselaje del avión está realizado de material conductor. Podemos considerar, por tanto, las dos alas del avión como una barra conductora que se desplaza perpendicularmente al campo magnético.





En este caso, la d.d.p. resulta:

$$\varepsilon = B \cdot (\vec{l} \times \vec{v}) = B \cdot l \cdot v \cdot sen\ 90° = B \cdot l \cdot v$$

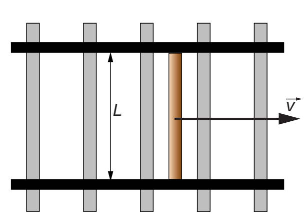
Al despejar y sustituir los datos que facilita el enunciado, obtenemos la distancia que separa ambos extremos:

$$l = \frac{\varepsilon}{B \cdot v} = \frac{0,2}{36 \cdot 10^{-6} \cdot 200} = 27,78 \text{ m}$$

20. Los rieles de una vía férrea están separados un metro y se encuentran aislados eléctricamente uno del otro. Un tren, que pasa sobre los rieles a 100 km/h, establece una conexión eléctrica entre ellos. Si el campo magnético terrestre tiene una componente vertical de 0,20 gauss, calcula la d.d.p. que existe entre las ruedas del tren que conectan los dos rieles.

Se trata de calcular la f.e.m. inducida sobre el eje del tren, que cruza perpendicularmente las vías.

La situación es la representada en la siguiente figura. Como se aprecia en ella, el esquema es equivalente a una espira con un lado móvil.



En este caso, al ser el campo constante, la variación del flujo se produce debido al aumento de la superficie expuesta al campo magnético:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot dS \cdot cos\ 0°$$
$$d\Phi = B \cdot L \cdot dx = B \cdot L \cdot v \cdot dt$$

Al aplicar la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B \cdot L \cdot v \cdot dt}{dt}$$
$$\varepsilon = -B \cdot L \cdot v = -0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 100 \cdot \frac{1\ 000}{3\ 600} = -5,56 \cdot 10^{-4}\ \text{V}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

21 Una bobina de 50 vueltas y 10 cm² de sección está situada con su eje paralelo a las líneas de un campo magnético de 1 T:

a) Si el campo disminuye linealmente con el tiempo hasta anularse en dos segundos, calcula la fuerza electromotriz inducida.

b) Si la bobina gira alrededor de un eje normal al campo magnético inicial a la velocidad constante de 10 rad · s⁻¹, ¿cuál será la expresión de la fuerza electromotriz inducida?

a) La fuerza electromotriz inducida en una bobina de 50 espiras se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

En este caso, $N = 50$ espiras, y $\Delta t = 2$ s. La variación de flujo es:

$$\Phi_{inicial} = \vec{B}_{inicial} \cdot \vec{S} = B_{inicial} \cdot S \cdot cos\ \alpha = 1 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot cos\ 0° = 10^{-3}\ \text{Wb}$$
$$\Phi_{final} = \vec{B}_{final} \cdot \vec{S} = B_{final} \cdot S \cdot cos\ \alpha = 0 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot cos\ 0° = 0\ \text{Wb}$$
$$\Delta\Phi = \Phi_{final} - \Phi_{inicial} = 0 - 10^{-3} = -10^{-3}\ \text{Wb}$$

La f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\ 50 \cdot \frac{-10^{-3}}{2} = 0{,}025\ \text{V}$$

b) El ángulo que forma el vector superficie de la bobina con el campo magnético en este caso es:

$$\alpha = \omega \cdot t$$

Y el flujo magnético que la atraviesa, en función del tiempo:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos\ \alpha = B \cdot S \cdot cos\ (\omega \cdot t)$$

Por tanto, la expresión que corresponde a la f.e.m. inducida en cada instante es:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot \frac{d\,[B \cdot S \cdot cos\ (\omega \cdot t)]}{dt} = -N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot sen\ (\omega \cdot t) =$$
$$= -\ 50 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot sen\ (10 \cdot t) = -\ 0{,}5 \cdot sen\ (10 \cdot t)\ \text{V}$$

22. **Una espira gira con velocidad angular constante en el seno del siguiente campo magnético:**

$$\boldsymbol{B(t) = B_0 \cdot sen(\omega \cdot t)}$$

Calcula la f.e.m. inducida en la espira.

El flujo magnético viene dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot cos\ \theta$$

Si tenemos en cuenta la definición de la velocidad angular:

$$\theta = \omega \cdot t$$

podemos escribir la expresión inicial en la forma:

$$\Phi = \int_S B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t) \cdot cos\ (\omega \cdot t) \cdot dS$$

Por tanto:

$$\Phi = B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t) \cdot cos\ (\omega \cdot t) \cdot \int_S dS = B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t) \cdot cos\ (\omega \cdot t) \cdot S$$

Teniendo en cuenta las propiedades del ángulo doble:

$$\Phi = B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t) \cdot cos\ (\omega \cdot t) \cdot S = \frac{B_0 \cdot S}{2} \cdot sen\ (2 \cdot \omega \cdot t)$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la f.e.m. inducida resulta:

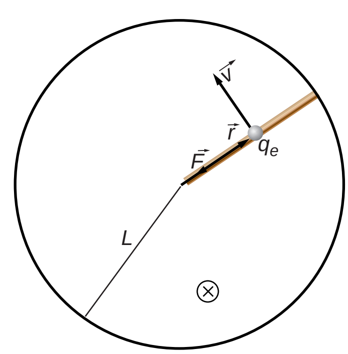
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0 \cdot S}{2} \cdot sen\ (2 \cdot \omega \cdot t)\right) = -B_0 \cdot S \cdot \omega \cdot cos\ (2 \cdot \omega \cdot t)$$

23. **En un campo magnético uniforme cuya inducción es $\vec{B}$, se mueve una barra conductora de longitud *L*, describiendo una circunferencia perpendicular al campo. Si el período de dicho movimiento es *T*, calcula la f.e.m. inducida entre sus extremos.**

La barra no es un circuito cerrado que origine variaciones de flujo. Es una varilla conductora con electrones deslocalizados que se mueven en el interior de un campo magnético.

Por tanto:

$$|\vec{F}| = q_e \cdot |\vec{v} \times \vec{B}|$$



Teniendo en cuenta que:

$$dW = F \cdot dr$$

$$dV = \frac{dW}{q_e} = \frac{F \cdot dr}{q_e}$$

y que:

$$|\vec{F}| = F = q_e \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90° = q_e \cdot v \cdot B$$

resulta:

$$dV = \frac{q_e \cdot v \cdot B \cdot sen\ 90°}{q_e} \cdot dr = v \cdot B \cdot dr$$

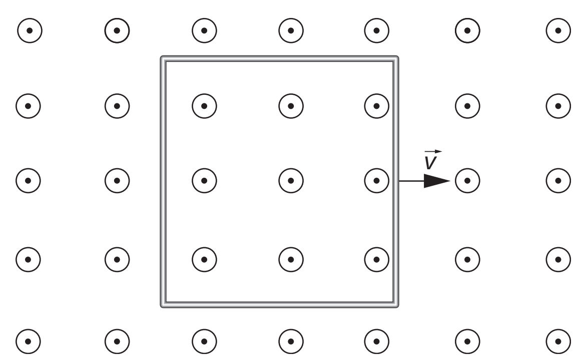
Como $v = \omega \cdot r$:

$$dV = \omega \cdot r \cdot B \cdot dr \rightarrow V = \int_0^V dV = \int_L^0 \omega \cdot B \cdot r \cdot dr \rightarrow V = -\frac{\omega \cdot B \cdot L^2}{2}$$

y, por tanto:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow \varepsilon = -\frac{B \cdot L^2 \cdot \pi}{T}$$

24. El plano de una espira cuadrada, de 20 cm de lado, es perpendicular a un campo magnético de 0,5 T. La espira se mueve en su plano con velocidad constante, a 2 m/s. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira cuando esta tiende a salir del campo magnético.



Cuando la espira comienza a salir del campo magnético, el flujo magnético que la atraviesa disminuye. Debido a ello, se induce sobre la espira una f.e.m.:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

Al ser el campo magnético uniforme, la disminución del flujo se produce a costa de una disminución de la superficie expuesta al campo magnético:

$$d\Phi = -\vec{B} \cdot d\vec{S} = -B \cdot dS \cdot cos\ 0°$$

$$d\Phi = -B \cdot L \cdot dx = -B \cdot L \cdot v \cdot dt$$

Al aplicar la ley de Faraday, obtenemos la fuerza electromotriz inducida en la espira:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{-B \cdot l \cdot v \cdot dt}{dt} = B \cdot l \cdot v = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}2\ \text{V}$$

25. Una espira circular se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme. Cuando el área de la bobina disminuye de forma constante, a razón de 0,05 m²/s, se induce en ella una f.e.m de 10 mV. Calcula el valor de la inducción del campo magnético que atraviesa la espira.

Según la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

En nuestro caso, al tratarse de un campo magnético uniforme perpendicular a la superficie:

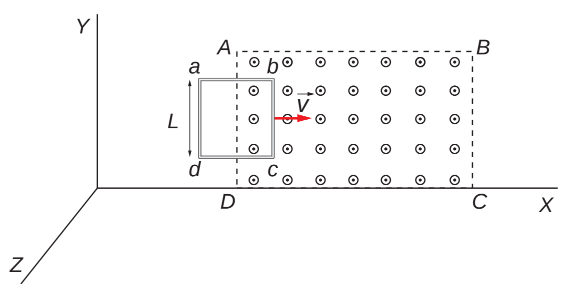
$$\varepsilon = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\left(B \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot S\right) = -B \cdot \frac{dS}{dt}$$

Sustituyendo y despejando, resulta:

$$\varepsilon = -B \cdot \frac{dS}{dt} \rightarrow B = \frac{\varepsilon}{-\frac{dS}{dt}} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{-(-0,05)} = 0,2 \text{ T}$$

Observa que se ha dado signo negativo a la derivada, ya que en el enunciado se indica que el área disminuye con el tiempo.

26 **Una espira cuadrada de lado $L = 10$ cm designada en la figura por los vértices *abcd* se introduce a velocidad constante, $v = 1$ m · s^{-1} en una zona del espacio (*ABCD* en la figura), donde existe un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje *Z* y de valor $\vec{B} = 0,25 \cdot \vec{k}$ T.**



Si en el instante inicial, $t = 0$, el lado *bc* de la espira coincide con *AD*:

Nota: la designación correcta de los lados coincidentes es la que aparece en este enunciado.

a) ¿Cuánto valdrá el flujo magnético que atraviesa la espira en un tiempo *t*, en el que la espira ha penetrado horizontalmente en *ABCD* una distancia $x = 3$ cm?

b) ¿Cuánto valdrá la f.e.m. inducida?

c) ¿Cuál será el sentido de la corriente inducida?

a) El flujo magnético que atraviesa la espira se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

En este caso, $B = 0,25$ T, y $\alpha = 0°$. El valor de S es el que corresponde a la superficie de la espira que se encuentra en el interior del campo magnético después de haber penetrado 3 cm:

$$S = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

El flujo es, por tanto:

$$\Phi = B \cdot S \cdot cos\ \alpha = 0{,}25 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot cos\ 0° = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

b) La expresión que permite calcular la f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Inicialmente, antes de entrar en el campo magnético, $\Phi_{inicial} = 0$. Por tanto:

$$\Delta\Phi = \Phi_{final} - \Phi_{inicial} = 7{,}5 \cdot 10^{-4} - 0 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

El instante, t, en que la espira ha penetrado 3 cm en el campo magnético, se obtiene teniendo en cuenta que esta se mueve con m.r.u. de velocidad 1 m · s^{-1}:

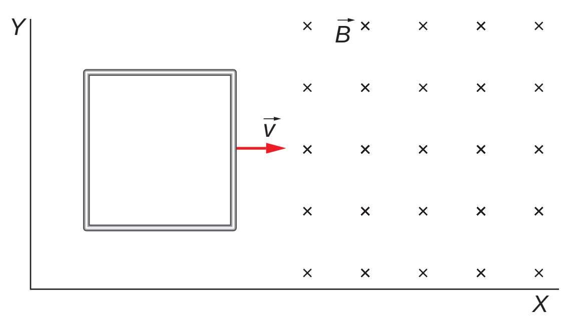
$$v = \frac{x}{t} \rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1} = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{s}$$

De acuerdo con ello:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{7{,}5 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-2}} = -\ 0{,}025\ \text{V}$$

c) Al entrar la espira en el campo magnético, el flujo magnético que la atraviesa aumenta. Como la corriente inducida genera un campo magnético que se opone al inicial, su sentido será horario.

27. Una espira cuadrada de 5 cm de lado, situada sobre el plano *XY*, se desplaza con una velocidad $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i}$ cm · s^{-1}, penetrando en el instante $t = 0$ en una región del espacio donde hay un campo magnético uniforme, $\vec{B} = 200 \cdot \vec{k}$ mT, según se indica en la figura:



a) Determina la fuerza electromotriz inducida y represéntala gráficamente en función del tiempo.

b) Calcula la intensidad de la corriente inducida en la espira si su resistencia es de 10 Ω. Haz un esquema indicando el sentido de la corriente.

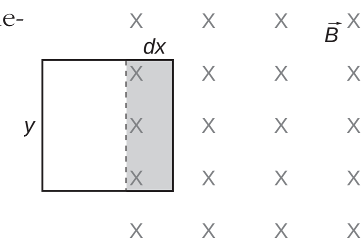
a) Al penetrar la espira en la región del campo magnético, existe un flujo magnético que atraviesa la espira que va aumentando con el tiempo hasta que la espira está completamente dentro de dicha región. Esta variación de flujo magnético induce una fuerza electromotriz en la espira que viene determinada por la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

El signo negativo indica que la fuerza electromotriz se opone a la variación de flujo magnético que la produce. El flujo magnético a través de la superficie de la espira se calcula mediante la expresión:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \rightarrow d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot dS \cdot cos\ \alpha$$

Como se aprecia en la figura de la derecha, el elemento de superficie es:



$$dS = y \cdot dx = y \cdot v \cdot dt$$

La fuerza electromotriz, ε, es, por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B \cdot y \cdot v \cdot dt}{dt} = -B \cdot y \cdot v$$

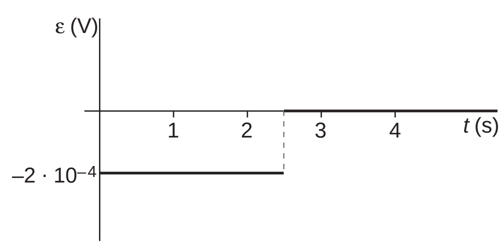
Sustituyendo valores:

$$\varepsilon = -200 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}02 = -2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}$$

Como hemos comentado, esta f.e.m. es inducida durante el tiempo que tarda la espira en entrar completamente en la región en que actúa el campo magnético. Posteriormente, la variación de flujo magnético, y, por tanto, la f.e.m. inducida, es nula. El tiempo que tarda la espira en entrar completamente en el campo es:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}05}{0{,}02} = 2{,}5\ \mathrm{s}$$

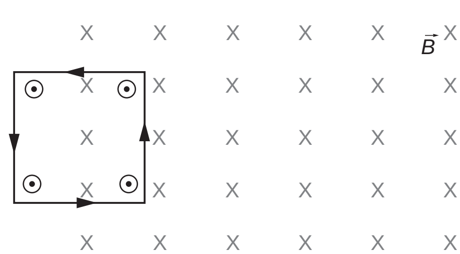
La representación gráfica de la f.e.m. inducida en función del tiempo es la siguiente:



b) La intensidad de la corriente inducida, en valor absoluto, es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \rightarrow I = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}$$

El sentido de esta corriente es tal que el flujo del campo magnético creado por ella se opone al flujo del campo magnético que la induce. Por tanto, su sentido es el contrario al de las agujas del reloj.



NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

28. Un campo magnético uniforme está confinado en una región cilíndrica del espacio, de sección circular y radio $R = 5$ cm, siendo las líneas del campo paralelas al eje del cilindro (esto puede conseguirse mediante un solenoide cilíndrico por el que pasa una corriente y cuya longitud sea mucho mayor que su diámetro, $2 \cdot R$). Si la magnitud del campo varía con el tiempo según la ley $B(t) = 5 + 10 \cdot t$ (dado en unidades del S.I.), calcula la fuerza electromotriz inducida en un anilla conductora de radio r, cuyo plano es perpendicular a las líneas de campo, en los siguientes casos:

a) El radio del anillo es $r = 3$ cm y está situado de forma que el eje de simetría de la región cilíndrica, donde el campo es uniforme, pasa por el centro del anillo.

b) $r = 3$ cm y el centro del anillo dista 1 cm de dicho eje.

c) $r = 8$ cm y el eje pasa por el centro del anillo.

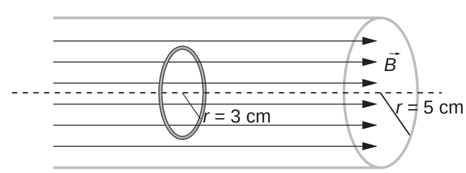
d) $r = 8$ cm y el centro del anillo dista 1 cm de dicho eje.

Puesto que el campo magnético es variable con el tiempo, se producirá una variación del flujo magnético que atraviesa la espira en cada instante, lo que dará lugar a una fuerza electromotriz inducida en el anillo conductor que, según la ley de Faraday, se opone a la causa que lo produce:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

Puesto que el campo magnético está confinado en una región cilíndrica del espacio, siendo el plano de la espira perpendicular al eje del cilindro, debemos considerar, en cada caso, la porción de la superficie de la espira que se encuentra bajo la acción del campo magnético.

a) El anillo conductor está atravesado completamente por las líneas del campo magnético, como se aprecia en la figura:



Los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo de 0°, por lo que la f.e.m. inducida en el anillo es:

$$\varepsilon = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos 0°)}{dt} = -S \cdot \frac{dB}{dt}$$

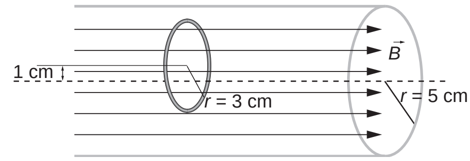
La superficie de la espira atravesada por el campo magnético es:

$$S = \pi \cdot r^2 \rightarrow S = \pi \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 9 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La f.e.m. inducida es, por tanto:

$$\varepsilon = -9 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot \frac{d(5 + 10 \cdot t)}{dt} = -9 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -0{,}028 \text{ V}$$

b) En este caso, aunque no coincide el centro del anillo con el eje del cilindro, la espira sigue estando completamente en el interior de la zona de influencia del campo magnético.

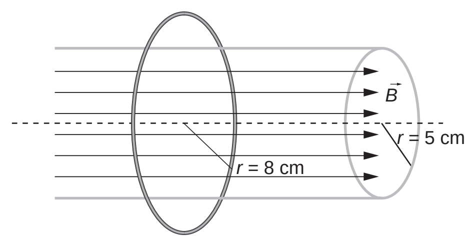


Por tanto, la superficie atravesada por el campo es la misma que en el apartado anterior, por lo que la f.e.m. inducida también lo es:

$$\varepsilon = -9 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot \frac{d\,(5 + 10 \cdot t)}{dt} = -0{,}028\ \text{V}$$

c) Cuando el radio del anillo conductor es mayor que el del cilindro, coincidiendo su centro con el eje del cilindro, la superficie de la espira atravesada por el campo magnético es la sección del cilindro:

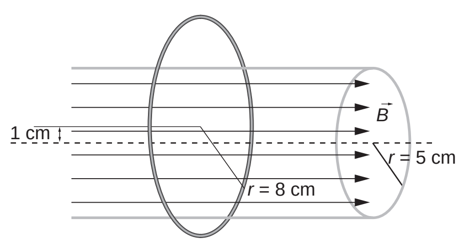
$$S = \pi \cdot R^2 \rightarrow S = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 25 \cdot \pi \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$



La f.e.m. inducida en el anillo conductor es:

$$\varepsilon = -25 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot \frac{d\,(5 + 10 \cdot t)}{dt} = -25 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -0{,}079\ \text{V}$$

d) En esta situación, pese a estar desplazado el centro del anillo respecto al eje del cilindro, la superficie de la espira atravesada por el campo magnético es la misma que en el apartado c). Por tanto, también lo es la f.e.m. inducida:



NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

29. Determina la fuerza electromotriz inducida en una espira circular de radio 10 cm por un campo magnético variable en el tiempo de forma $B(t) = B_0 \cdot sen\,(\omega \cdot t)$, con una amplitud de 80 mT y una frecuencia $f = 50$ Hz, y que forma 30° con la normal a la espira.

La expresión que permite calcular la f.e.m. inducida en la espira es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

El flujo que atraviesa la espira circular es:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos\ \alpha = B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t) \cdot S \cdot cos\ \alpha$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,[B_0 \cdot S \cdot cos\ \alpha \cdot sen\ (\omega \cdot t)]}{dt} =$$

$$= -B_0 \cdot S \cdot cos\ \alpha \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t) = -B_0 \cdot S \cdot cos\ \alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Sustituyendo los datos de que disponemos se obtiene:

$$\varepsilon = -80 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2 \cdot cos\ 30° \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot cos\ (2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t) =$$

$$= -0{,}68 \cdot cos\ (100 \cdot \pi \cdot t)$$

30 **A una espira circular de radio *R* = 5 cm, que descansa en el plano *XY*, se le aplica durante un intervalo de tiempo de 5 segundos un campo magnético variable con el tiempo y cuya dirección es perpendicular a la superficie de dicha espira, de valor:**

$$\vec{B}\,(t) = 0{,}1 \cdot t \cdot \vec{k}\ \text{T}$$

donde *t* es el tiempo, expresado en segundos.

a) ¿Cuánto valdrá el flujo magnético máximo que atraviesa la espira?

b) ¿Cuánto valdrá la fuerza electromotriz inducida?

c) Responde a las cuestiones anteriores en el caso de que la espira estuviera situada en el plano *XZ*.

a) El flujo magnético se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

donde, en este caso:

$$\vec{B} = 0{,}1 \cdot t \cdot \vec{k}\ \text{T}$$

$$\vec{S} = S \cdot \vec{k} = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \vec{k} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \vec{k}\ \text{m}^2$$

Por tanto:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0{,}1 \cdot t \cdot \vec{k} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \vec{k} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot t\ \text{Wb}$$

El valor máximo del flujo se da para $t = 5$ s:

$$\Phi_{máx} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot 5 = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

b) La fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,(2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot t)}{dt} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi = 7{,}85 \cdot 10^{-4}\ \text{V}$$

c) Si la espira estuviera situada en el plano *XZ*, su vector superficie sería perpendicular al vector campo magnético, por lo que tanto el flujo como la f.e.m. inducida serían cero:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} = 0{,}1 \cdot t \cdot \vec{k} \\ \vec{S} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \rightarrow \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0{,}1 \cdot t \cdot \vec{k} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \vec{j} = 0\ \text{Wb} \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0\ \text{V}$$

31. Una bobina circular de 30 vueltas y radio 4 cm se coloca en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. El módulo del campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$B(t) = 0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2$$

donde t está expresado en segundos y B en teslas. Calcula:

a) El flujo magnético que atraviesa la bobina en función del tiempo.

b) La fuerza electromotriz inducida en la bobina para $t = 5$ s.

a) El flujo magnético que atraviesa la bobina viene dado por la expresión:

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot cos\ \alpha$$

donde N es el número de espiras que componen la bobina; S es la superficie atravesada por el campo magnético (la sección de la bobina), y α es el ángulo que forman los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$.

En este caso, $\alpha = 0°$, puesto que el campo magnético está dirigido perpendicularmente al plano de la bobina.

Por tanto, el flujo magnético que atraviesa la bobina, en función del tiempo, es:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot cos\ \alpha = 30 \cdot (0{,}01 \cdot t + 0{,}04 \cdot t^2) \cdot \pi \cdot 0{,}04^2$$

$$\Phi = 4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot (t + 4 \cdot t^2)\ \text{Wb}$$

b) La fuerza electromotriz inducida en la bobina la obtenemos aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\,[4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot (t + 4 \cdot t^2)]}{dt}$$

$$\Phi = -4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot (1 + 8 \cdot t)\ \text{V}$$

En el instante $t = 5$ s, esta f.e.m. vale:

$$\varepsilon\ (t = 5\ \text{s}) = -4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot (1 + 8 \cdot 5) = -0{,}062\ \text{V}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

10 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

10.1. LA SÍNTESIS ELECTROMAGNÉTICA

1. Realiza un cuadro comparativo con las principales características del campo eléctrico y del campo magnético.

Las principales analogías y diferencias entre los campos eléctrico y magnético son las que se resumen en la siguiente tabla:

Característica	Campo eléctrico	Campo magnético
Dependencia de $\frac{1}{r^2}$	Sí	Sí
Campo central	Sí	No
Una carga en reposo crea	Sí	No
Una carga en movimiento crea	Sí	Sí
Conservativo	Sí	No
Sentido de la interacción	Atractiva o repulsiva	Atractiva o repulsiva
Líneas de campo	Abiertas	Cerradas
Existencia de monopolos	Sí	No
¿Qué sustancias pueden crear campo en reposo?	Todas	Solo algunas
Dependencia del medio	Sí; depende de K	Sí; depende de μ

2. Razona cuáles fueron los principales descubrimientos que llevaron a Maxwell a buscar una teoría que unificase los campos eléctrico y magnético.

James Clark Maxwell analizó detenidamente los resultados obtenidos por Oersted, quien descubrió que las cargas eléctricas en movimiento producen un campo magnético, los trabajos realizados por Ampère destinados a dar una formulación matemática a este hecho, y la ley deducida por Faraday relativa a la aparición de corrientes eléctricas inducidas en circuitos sometidos a campos magnéticos variables, e intuyó que los campos eléctrico y magnético estaban íntimamente relacionados, de modo que la existencia, en una región del espacio, de uno de estos campos que varíe con el tiempo implicaría la existencia del otro, también variable en el tiempo. Maxwell realizó una bella formulación matemática para describir este hecho de la que se deduce la existencia de las ondas electromagnéticas, detectadas experimentalmente por primera vez por Hertz, ocho años después de la muerte de Maxwell.

10.2. DESCARGA OSCILANTE DE UN CONDENSADOR

1. Calcula la frecuencia de oscilación que se puede obtener conectando un condensador con una carga de $6 \cdot 10^{-10}$ C y 1 mm de separación entre sus placas, entre las que se crea una d.d.p. de 12 V, a un solenoide de 7,5 cm de longitud y 0,3 cm^2 de sección formado por 100 espiras.

La frecuencia de oscilación se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

La capacidad del condensador es:

$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{6 \cdot 10^{-10}}{12} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

Y el coeficiente de autoinducción del solenoide:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-4}}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 5,03 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

Por tanto:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5,03 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-11}}} \simeq 10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}$$

2. Sabiendo que la intensidad máxima que recorre el circuito de la actividad anterior es 2,4 A, obtén las expresiones matemáticas correspondientes a los campos eléctrico y magnético que se crean, en función del tiempo, en el condensador y en la bobina, respectivamente.

La expresión general de los campos eléctrico y magnético que se forman es:

$$E = E_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t)$$

$$B = B_0 \cdot sen\ (\omega \cdot t - \varphi)$$

donde:

$$E_0 = \frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{12}{1 \cdot 10^{-3}} = 12\,000 \text{ V/m}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 2,4}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 4,02 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 10^7 = 6,28 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$E = 12 \cdot 10^3 \cdot sen\ (6,28 \cdot 10^7 \cdot t)$$

$$B = 4,02 \cdot 10^{-3} \cdot sen \left(6,28 \cdot 10^7 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

10.3. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO Y DESCARGA OSCILANTE

1. Busca información acerca de las propiedades de las ondas electromagnéticas y comenta las semejanzas y las diferencias que encuentres entre estas y las ondas mecánicas.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las propiedades de ambos tipos de ondas, en el que se puede apreciar las semejanzas y las diferencias existentes entre ellas:

Ondas electromagnéticas	Ondas mecánicas
Son ondas transversales.	Pueden ser ondas longitudinales y ondas transversales.
Se propagan a través de medios materiales y en el vacío.	No se propagan en el vacío; tan solo a través de medios materiales.
Se producen por la variación de un campo eléctrico y un campo magnético.	Se producen por la variación de una magnitud característica del medio.
En un mismo medio, se propagan siempre a la misma velocidad.	En un mismo medio, su velocidad de propagación depende del tipo de onda.
Transportan energía, no materia.	Transportan energía, no materia.

2. Explica cualitativamente el funcionamiento de una antena receptora de ondas electromagnéticas. ¿Qué orientación debe tener esta antena respecto a la antena emisora?

Hay dos tipos de antenas receptoras. El primero consiste en una o más varillas conductoras en las que, al incidir la onda electromagnética sobre ellas, se produce una fuerza neta variable sobre los electrones del conductor, dando lugar a una tensión alterna de la misma frecuencia que la onda. En este caso, el responsable de la fuerza que actúa sobre los electrones es el campo eléctrico de la onda, por lo que para obtener una recepción óptima, la antena receptora deberá colocarse paralela a la emisora (paralela a las líneas de campo eléctrico de la onda).

El otro tipo consiste en una bobina de alambre que detecta el campo magnético de la onda electromagnética. Al incidir la onda sobre la antena, el flujo magnético variable induce una f.e.m. en la bobina también variable, dando lugar, al igual que en el caso anterior, a una corriente alterna de la misma frecuencia que la onda electromagnética. Esta antena debe colocarse, por tanto, en un plano perpendicular al definido por las líneas de campo magnético en ese punto, o, dicho de otro modo, en un plano que contenga la dirección de la antena emisora.

La señal recibida por las antenas receptoras contiene frecuencias de múltiples antenas emisoras. Para seleccionar una de estas frecuencias, los receptores disponen de un circuito oscilante *LC* similar al que se utiliza para producir la onda electromagnética.

Cuando la frecuencia propia del circuito receptor coincide con la frecuencia de la emisora que deseamos captar, decimos que hemos "sintonizado" una señal. Esto se consigue variando la capacidad, *C*, del condensador variable que compone el circuito oscilante *LC*.

10.4. NATURALEZA DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1. Explica por qué, de acuerdo con lo estudiado, la presión de radiación que se ejerce sobre una superficie que refleja por completo la radiación que, en forma de ondas electromagnéticas, incide perpendicularmente sobre ella, es el doble de la que recibe esa misma superficie si la radiación se absorbe por completo.

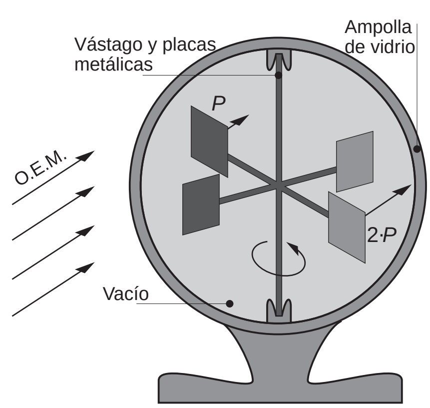
Si la onda electromagnética que incide perpendicularmente a una superficie es absorbida por completo, la presión de radiación que ejerce es:

$$P = \frac{S}{c}$$

Dicha onda, al incidir sobre la superficie, pasa de un medio al otro. Sin embargo, si al incidir sobre dicha superficie es completamente reflejada, la onda ejerce una presión doble, ya que, al igual que en el supuesto anterior, golpea la superficie; pero, al ser completamente reflejada, se "apoya" en ella de nuevo para salir despedida hacia atrás. Ese cambio en el sentido del vector cantidad de movimiento asociado a la onda explica que la presión se duplique respecto al caso en que la onda es absorbida.

2. Diseña un dispositivo que pueda girar libremente aprovechando la presión de radiación de las ondas electromagnéticas. Explica su funcionamiento.

El dispositivo al que hacemos referencia puede ser similar al que se muestra en la ilustración.

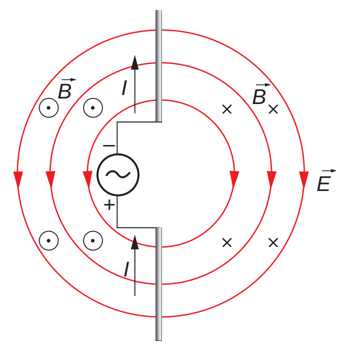


En dicho dispositivo existe un "molinete" metálico encerrado en el interior de una ampolla de vidrio a la que se ha hecho el vacío. En las cuatro aspas del molinete, una parte está pintada de negro mate, y la otra es una superficie metálica reflectante.

Cuando incide una onda electromagnética sobre el dispositivo –por ejemplo, un rayo de luz– la parte oscura de las aspas recibe una presión de radiación que es menor de la que recibe la parte metálica de estas. Ello hace que exista una fuerza neta que impulsa al molinete, como se indica en la ilustración anterior.

3. Justifica, basándote en lo estudiado, que los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética sean perpendiculares.

En las proximidades de una antena emisora, formada por dos varillas conductoras conectadas a un generador de corriente alterna, se produce un campo eléctrico cuyas líneas de campo parten de la varilla con carga positiva y entran en la varilla con carga negativa. Estas líneas de campo se disponen en planos que contienen las varillas conductoras. A su vez, la corriente que circula por las varillas produce un campo magnético cuyas líneas de campo son circunferencias concéntricas con las varillas y situadas en planos perpendiculares al eje de estas. Por tanto, los campos eléctrico y magnético producidos por la antena son perpendiculares.



Al variar con el tiempo la corriente que circula por las varillas, las líneas de campo eléctrico se cierran, dando lugar a circuitos cerrados, al igual que las líneas de campo magnético, propagándose conjuntamente como una onda electromagnética.

10.5. EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

1. Explica la naturaleza de las ondas electromagnéticas. ¿Cómo caracterizarías mejor una onda electromagnética, por su frecuencia o por su longitud de onda?

Las ondas electromagnéticas son ondas transversales. En ellas el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

Se caracterizan mejor por su frecuencia: sus aplicaciones y los efectos que producen en los cuerpos que las absorben son función de ella.

2. Ordena, según longitudes de onda crecientes, las siguientes regiones del espectro electromagnético: microondas, rayos X, luz verde, luz roja, ondas de radio, radiación ultravioleta.

La ordenación en función de longitudes de onda crecientes es:

rayos X < radiación ultravioleta < luz verde < luz roja < microondas < ondas de radio

3. Señala cuál o cuáles de los tipos de onda que se indican pueden propagarse en el vacío y explica el motivo de que así sea: luz, rayos X, ultrasonidos, microondas.

La luz, los rayos X y las microondas son radiaciones electromagnéticas. Como tales, pueden propagarse en el vacío, a la velocidad de la luz: $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

Los ultrasonidos son ondas mecánicas, que necesitan un medio material para propagarse; no pueden hacerlo, por tanto, en el vacío.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Señala la respuesta o las respuestas correctas acerca de las ondas electromagnéticas:

a) Son transversales.

b) Son longitudinales.

c) Su longitud de onda es fija.

d) Su frecuencia es fija.

e) En un mismo medio, se desplazan a la misma velocidad.

f) Todas ellas forman el espectro visible.

g) No se propagan en el vacío.

a) y b) Las ondas electromagnéticas son transversales. Su dirección de vibración es perpendicular a su dirección de propagación. Una prueba de ello es que la luz, que es una pequeña parte del espectro electromagnético, se puede polarizar, y solo son polarizables las ondas transversales. La respuesta **a)** es correcta.

c) y d) Ni su frecuencia ni su longitud de onda son fijas. Las ondas electromagnéticas cubren un amplio espectro de frecuencias y, por tanto, de longitudes de onda, desde las ondas de radio hasta los rayos gamma.

e) Es cierto. Dado un medio cualquiera, todas las ondas electromagnéticas se desplazan a la misma velocidad. Dicha velocidad es, precisamente, la velocidad de la luz en ese medio.

f) Es falso. El espectro visible comprende solo un pequeño rango de frecuencias dentro del espectro electromagnético.

g) Es falso. Las ondas electromagnéticas sí se propagan en el vacío.

2. Para que exista una onda electromagnética, son necesarios un campo eléctrico y un campo magnético. ¿Cómo es la posición relativa entre ambos?

a) Son paralelos.

b) Forman un ángulo entre ambos comprendido entre 0º y 90º.

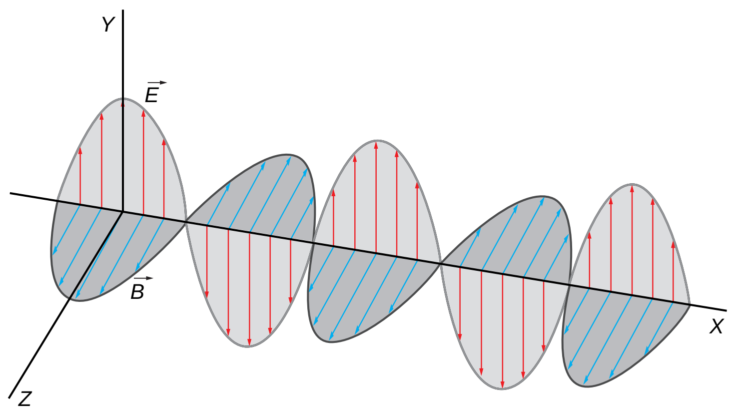
c) Son perpendiculares.

d) Forman un ángulo entre ambos comprendido entre 90º y 180º.

e) Forman un ángulo de 180º.

La respuesta correcta es **c).**

Los campos magnético y eléctrico vibran en planos perpendiculares en todo instante. Su posición relativa es la que se muestra en la figura.



3. De los siguientes tipos de ondas que se indican a continuación, señala cuál o cuáles no pertenecen al espectro electromagnético:

a) Rayos gamma.

b) Rayos X.

c) Ondas sonoras.

d) Ondas de radio.

e) Rayos infrarrojos.

De los tipos de onda que se citan en el enunciado, las únicas que no pertenecen al espectro electromagnético son las ondas sonoras. La respuesta correcta es **c).**

Por citar algunas diferencias, podemos decir que las ondas sonoras se transmiten a la velocidad de propagación del sonido en el medio y son longitudinales; mientras que las ondas electromagnéticas son transversales y se transmiten a la velocidad de propagación de la luz en dicho medio.

4. La velocidad con que se propagan las ondas electromagnéticas en un medio dado:

a) Coincide con la velocidad de propagación del sonido en dicho medio.

b) Coincide con la velocidad de propagación de la luz en dicho medio.

c) Depende de su frecuencia; no podemos dar una respuesta sin ese dato.

d) Depende de su longitud de onda; no podemos dar una respuesta sin ese dato.

e) No podemos conocerla a priori; es necesario medirla experimentalmente, ya que depende de la temperatura.

Justifica la respuesta.

La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio es constante y no depende de la frecuencia. Dicha velocidad coincide con la velocidad de propagación de la luz en ese medio, ya que la luz comprende el especto visible de las o.e.m. La respuesta correcta es, por tanto, **b).**

5. **Los rayos X son ondas electromagnéticas y se utilizan ampliamente en medicina para obtener imágenes (radiografías) del interior de nuestro cuerpo, sobre todo de sus partes duras. ¿Por qué, en vez de utilizar rayos X, lo que supone un coste elevadísimo en equipos, no utilizamos otro tipo de ondas electromagnéticas, como los rayos UVA o los rayos infrarrojos, que recibimos directamente del Sol?**

Los rayos X son ondas que, debido a su frecuencia, muy elevada, son capaces de transmitir gran cantidad de energía. De hecho, son capaces de atravesar nuestro cuerpo e impresionar posteriormente una placa fotográfica. Los rayos UVA (ultravioleta-A) o cualquier otra radiación de menor frecuencia no poseen suficiente energía para conseguir ese propósito.

Se trata, por tanto, de utilizar ondas electromagnéticas de muy alta frecuencia, que no recibimos directamente del Sol. Es necesario hacerlo, además, de modo controlado, tanto en tiempo de exposición como en localización del lugar concreto que se expone a la radiación. No debemos olvidar que una radiación muy energética entraña riesgos que pueden ser muy elevados, ya que puede dañar al organismo que se irradia con ella.

6. **Contesta a las preguntas que siguen, referidas a los siguientes tipos de onda:**

a) Rayos X.

b) Radiación infrarroja.

c) Luz de color verde.

d) Onda de TV.

e) Luz de color violeta.

¿A cuál de ellos le corresponde mayor frecuencia?

¿Para cuál de ellos es menor la frecuencia?

¿A cuál le corresponde mayor longitud de onda?

¿A cuál le corresponde menor longitud de onda?

De las citadas, las ondas de mayor frecuencia son los rayos X. Su frecuencia es superior a la de la radiación comprendida en el espectro visible.

Las ondas de menor frecuencia son las de TV. Su frecuencia es menor que la del espectro infrarrojo.

Para cualquier onda electromagnética, se cumple la siguiente relación:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

siendo *c* la velocidad de propagación de la luz en el medio, que es constante y característica de cada medio, independientemente del tipo de onda electromagnética que se propague. Por tanto, la longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales.

Podemos afirmar, por tanto, que las ondas de mayor longitud de onda son las de TV, y las de menor longitud de onda, los rayos X.

7. **Si tenemos en cuenta tan solo aspectos relacionados con la frecuencia, ¿a cuál de los siguientes tipos de onda le corresponde mayor energía?**

   a) Ondas de radio de baja frecuencia.

   b) Radiación infrarroja.

   c) Rayos X.

   d) Rayos ultravioleta.

   e) Ondas de radio de alta frecuencia.

   Cuanto mayor es la frecuencia de una onda, mayor es la cantidad de energía que transmite.

   De las ondas propuestas, las de mayor frecuencia son los rayos X, que será, por tanto, la radiación que más energía transmite. La respuesta correcta es **c).**

8. **Una carga produce un campo magnético si:**

   a) Se mueve con velocidad constante.

   b) Permanece en reposo.

   c) Acelera.

   Una carga, por el hecho de moverse con velocidad uniforme, crea a su alrededor un campo magnético. La respuesta correcta es **a).**

9. **Una carga produce una onda electromagnética si:**

   a) Se mueve con velocidad constante.

   b) Permanece en reposo.

   c) Acelera.

   Para que una carga genere una onda electromagnética es necesario que acelere. De este modo, el campo magnético decrece por detrás de la carga en menor medida de lo que aumenta por delante de ella. En este caso, se transmite al espacio cierta cantidad de energía para establecer el campo. La transmisión de dicha energía es, precisamente, la onda electromagnética. La respuesta correcta es **c).**

10. **¿Qué diferencia existe entre un campo magnético y una onda electromagnética?**

    El campo magnético es una propiedad que adquiere cierta zona del espacio y que se manifiesta en la capacidad de ejercer fuerza a distancia sobre ciertas sustancias. Para que se produzca un campo magnético, es necesario que una carga eléctrica se mueva con velocidad uniforme.

    A diferencia de ello, una onda electromagnética es la forma en que irradia energía una carga acelerada para establecer el campo. Como ya hemos indicado en la pregunta anterior, para producir una o.e.m. es preciso que la carga acelere.

11. El cuerpo humano es un potente emisor de cierto tipo de ondas electromagnéticas. ¿A qué tipo de ondas nos estamos refiriendo?

La transmisión de dicha onda es fundamental para nuestra supervivencia. ¿Por qué?

El cuerpo humano emite ondas infrarrojas. Este tipo de ondas está asociado a la transferencia de energía en forma de calor por radiación. Esta forma de transferir energía (como calor) es crucial para nuestra supervivencia, dado que regula la temperatura corporal, manteniéndola en el nivel que requiere el desarrollo de los mecanismos y de las actividades vitales.

12. En los aceleradores circulares de partículas, estas se aceleran mientras dan vueltas. Existen también aceleradores lineales, en los que las partículas se aceleran mientras recorren un largo tramo recto.

Supón que una misma carga eléctrica, por ejemplo, un electrón, se mueve con velocidad constante por un acelerador circular y por un acelerador lineal. ¿En cuál de los dos aceleradores se generará una onda electromagnética asociada al movimiento de la partícula? ¿Por qué?

La carga producirá una o.e.m. siempre que sea acelerada. En un acelerador circular, aunque la carga se mueva con velocidad uniforme, al describir una trayectoria circular estará sometida a una fuerza centrípeta, y, en consecuencia, a una aceleración centrípeta.

Esto no ocurre en un acelerador lineal. Sin embargo, en este también es acelerada, ya que se pretende comunicarle energía, aumentando la velocidad con que se mueve. Por tanto, en ambos tipos de acelerador se producirán ondas electromagnéticas.

13. Las gafas de visión nocturna permiten distinguir, en ausencia de luz, las siluetas y los contornos de los objetos, sobre todo de aquellos que son seres vivos o en los que viven estos.

a) ¿Qué tipo de ondas detectan estas gafas?

b) Formula una hipótesis que pueda explicar el funcionamiento de esas gafas.

a) La radiación que detectan estas gafas son los rayos infrarrojos.

b) Las gafas de visión nocturna poseen cristales que son sensibles a la radiación infrarroja. De este modo, la energía que desprenden los cuerpos en forma de calor, que se emite como radiación infrarroja, es captada por los cristales de estas gafas, haciendo posible la visión de los objetos.

Estos dispositivos limitan su utilidad a la detección de sistemas que emitan radiación infrarroja; es decir, a la detección de sistemas que actúen como foco caliente o como foco frío respecto al entorno en el que se encuentran.

Los rayos infrarrojos, cuya frecuencia es inferior a la de la radiación visible, transmiten la energía en forma de calor. Las cámaras de visión nocturna detectan esta radiación y nos ofrecen una "silueta térmica" de los objetos.

Lógicamente, los cuerpos que se encuentran a mayor temperatura emiten mayor cantidad de radiación infrarroja, y su imagen aparece más nítida.

14. En una onda electromagnética, el campo eléctrico y el campo magnético:

a) Vibran en fase.

b) Vibran en cuadratura.

c) Vibran en oposición de fase.

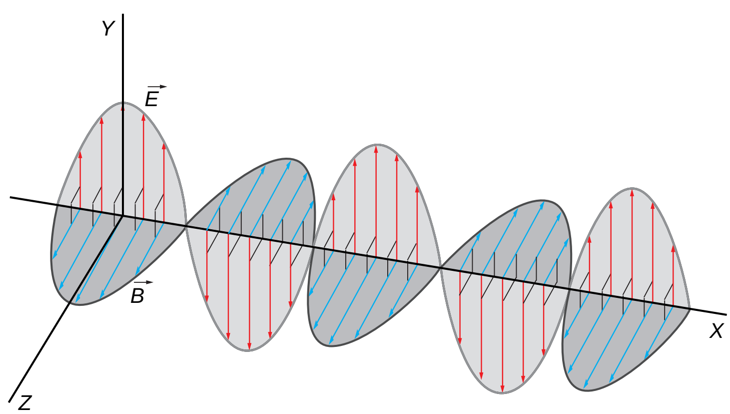
d) Vibran desfasados un ángulo cualquiera, comprendido entre 0° y 90°.

Ten en cuenta que:

- **Dos movimientos ondulatorios vibran en cuadratura si uno está desfasado 90° respecto al otro.**
- **Dos movimientos ondulatorios vibran en oposición de fase si uno está desfasado 180º respecto al otro.**

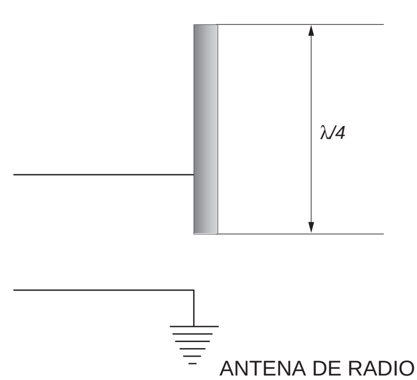
La respuesta correcta es **a).**

Los campos magnético y eléctrico vibran en fase. Su estado de vibración es el que se muestra en la figura.



15. Explica por qué es más larga la varilla de una antena de radio que las varillas de una antena para la recepción de una señal de televisión.

En el caso de las antenas de los receptores de radio, la varilla mide un cuarto de la longitud de onda máxima que se puede recibir con el aparato. El otro cuarto de longitud de onda del dipolo se forma por reflexión en el suelo o sobre el propio vehículo, si se trata de un autorradio.



Recuerda que, en el espectro electromagnético, las ondas de radio tienen menor frecuencia que las de TV, y, por tanto, su longitud de onda es mayor.

Ello explica que la varilla de la antena de radio sea de mayor longitud que las varillas de la antena de TV.

16. En un horno común, el tiempo de cocción es prácticamente independiente de la cantidad de comida que se cocina. Sin embargo, no ocurre lo mismo en un horno de microondas, en el que el tiempo de cocción está directamente relacionado con la cantidad de comida que queremos preparar. Explica el motivo, teniendo en cuenta la forma en que se calienta la comida en cada uno de estos dos hornos.

En un horno común, la comida se cocina a partir del calor emitido por la radiación infrarroja. La radiación infrarroja calienta el recinto del horno, de forma que su temperatura global sube progresivamente hasta que es apta para la cocción de los alimentos. El alimento recibe la radiación desde fuera y, por conducción, el calor se transmite hacia las zonas interiores. Por eso, en ocasiones, un horno común deja la comida "sin hacer" por dentro.

En cambio, en un horno microondas la frecuencia de las ondas que se emiten es, precisamente, la que hace resonar las moléculas de agua que todos los alimentos contienen en su interior. De este modo, toda la masa del alimento se calienta a la vez, debido al aumento que experimenta la temperatura del agua que contiene. Por ello, cuanto mayor es la masa de alimento que pretendemos cocinar, más tiempo debemos esperar, ya que se necesita mayor cantidad de energía y, por tanto, mayor cantidad de microondas emitidas para cocer o asar el alimento.

17. Las antenas son dispositivos imprescindibles para una transmisión y una recepción eficiente de ondas de radio o de televisión.

Busca información acerca de cómo se propaga una señal de televisión. Si no te resulta fácil conseguir esa información, pregunta a tu profesor o a tu profesora. Con esos datos, contesta a las siguientes preguntas:

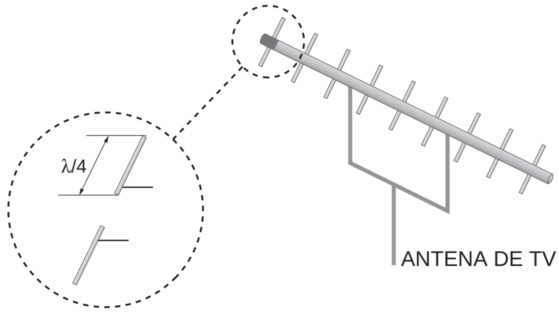
a) ¿Por qué son de metal las barras de la antena?

b) ¿Cómo funciona una antena receptora de señales de televisión?

c) ¿Importa el tamaño, especialmente la longitud, de las barras metálicas dispuestas transversalmente sobre el eje de la antena? Justifica tu respuesta.

a) Las barras de la antena son metálicas porque deben ser capaces de emitir o de recibir una onda electromagnética, para lo cual se necesita que se produzcan corrientes eléctricas en las varillas que forman dicha antena.

b) Una antena de televisión consiste en un eje sobre el que se sitúan parejas de varillas conductoras. En cada pareja, las dos varillas alineadas, separadas por el eje de la antena, forman un dipolo. El montaje equivale a un condensador cuyas placas son las barras metálicas y cuyo dieléctrico es el aire.



Los campos eléctricos oscilantes, generados por la recepción de la onda electromagnética, inducen corrientes a lo largo de las varillas de la antena que se traducen en una señal eléctrica que transporta, codificados, los datos de la imagen y el sonido.

c) Una antena es un dipolo de media longitud de onda. Ello significa que la longitud total de las dos varillas es la mitad de la longitud de onda máxima de las ondas electromagnéticas que puede recibir la antena. Por tanto, cada varilla mide un cuarto de dicha longitud de onda máxima.

EJERCICIOS

18. Las longitudes de onda del espectro visible que nuestro ojo reconoce como color rojo comprenden el intervalo [600, 750] nm. Calcula el intervalo de frecuencias que corresponde a estas longitudes de onda.

La frecuencia y la longitud de onda están relacionadas mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Por tanto, las frecuencias asociadas a las longitudes de onda que delimitan el intervalo correspondiente al color rojo son:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \; ; \; f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{750 \cdot 10^{-9}} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

El intervalo de frecuencias que corresponden al color rojo está comprendido entre $4 \cdot 10^{14}$ y $5 \cdot 10^{14}$ Hz.

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

19. Una emisora de radio funciona en frecuencia modulada. Si la sintonizamos en 100,4 MHz, calcula la longitud de onda con que emite. La velocidad de la luz en el aire es $3 \cdot 10^8$ m/s.

Las ondas de radio son ondas electromagnéticas. Como tales, se desplazan a la misma velocidad que la luz. Por tanto:

$$\lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{100,4 \cdot 10^6} = 2,99 \text{ m}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

11 LA LUZ Y SUS PROPIEDADES

11.1. NATURALEZA DE LA LUZ

1. Busca en la bibliografía información acerca de la controversia que mantuvieron Huygens y Newton acerca de la naturaleza de la luz.

Con esta actividad se pretende que los alumnos y las alumnas redacten un breve informe en el que se profundice en el perfil científico de Newton y Huygens. No deben faltar en él referencias a otros científicos que mantuvieran opiniones enfrentadas con la descripción de Newton acerca de la naturaleza de la luz, como es el caso, principalmente, de Hooke.

2. ¿Por qué se resistió tanto la mayoría de la comunidad científica a aceptar que la luz es una onda, de tipo electromagnético?

Newton era partidario del carácter corpuscular de la luz. Dado su gran prestigio en la época, muchos otros científicos se mostraron reticentes a aceptar el modelo ondulatorio, por contradecir la hipótesis de Newton.

11.2. PROPAGACIÓN RECTILÍNEA DE LA LUZ

1. Compara las velocidades de propagación, en el aire, de la luz y del sonido. ¿Son comparables estas dos velocidades?

El índice de refracción de un medio es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, y la velocidad de la luz en el medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

Dado que el índice de refracción del aire es la unidad, la velocidad de propagación de la luz en el aire es:

$$v_{luz}\,(\text{aire}) = \frac{c}{n_{aire}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La velocidad del sonido en el aire es:

$$v_{sonido}\,(\text{aire}) = 340 \text{ m/s}$$

La relación entre ambas velocidades es:

$$\frac{v_{luz}\,(\text{aire})}{v_{sonido}\,(\text{aire})} = \frac{3 \cdot 10^8}{340} = 882\,352{,}9$$

Es decir, la luz se propaga en el aire a una velocidad que es 882 352,9 veces la que le corresponde al sonido.

2. Si vas a ver un castillo de fuegos artificiales podrás comprobar que se ve antes la luz de las carcasas cuando estallan y, un tiempo después se oye el sonido de la carcasa que ha estallado. Diseña un experimento que permita medir la distancia a la que te encuentras del punto en que estalla una carcasa.

Teniendo en cuenta el valor de la velocidad de propagación de la luz en el aire, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, podemos considerar que el intervalo de tiempo que transcurre entre la explosión y la llegada de su imagen a nuestros ojos es descreciable, prácticamente cero.

Sin embargo, el intervalo de tiempo que transcurre entre la explosión y el instante en que el ruido de esta llega a nuestros oídos sí es apreciable. Si disponemos de un cronómetro, podemos obtener el tiempo que transcurre desde que se ve la luz hasta que el sonido de la explosión alcanza nuestros oídos.

Si t es el tiempo obtenido, y teniendo en cuenta que v_{sonido} (aire) = 340 m/s, podemos obtener la distancia a que nos encontramos del punto en que estalla una carcasa aplicando la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme:

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow x = v \cdot t \rightarrow x = 340 \cdot t \text{ m}$$

En ella, el tiempo debe expresarse en segundos.

3. Calcula el tiempo que tarda un rayo de luz en viajar desde el Sol a la Tierra. Busca información respecto al diámetro de la órbita terrestre.

El diámetro de la órbita terrestre (distancia Sol-Tierra) es, aproximadamente, 150 millones de kilómetros. Por tanto, el tiempo que necesita la luz para llegar hasta la Tierra es:

$$v = c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{150 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 500 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$$

4. ¿Es significativa la influencia de la distancia que separa Io de Júpiter en las experiencias de Röemer?

Sí que influye, ya que la luz habrá de recorrer una distancia distinta dependiendo de la posición del satélite Io. Sin embargo, la influencia es totalmente despreciable, ya que la distancia Tierra-Júpiter es varios órdenes de magnitud superior a la distancia Júpiter-Io. Por tanto, la medida no se alterará.

11.3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LA LUZ

1. El índice de refracción del agua respecto al aire es 4/3. ¿Qué se puede decir sobre la velocidad de la luz en el agua? Razona la respuesta.

El índice de refracción, n, de un medio es la relación entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}, y la que le corresponde en dicho medio, v:

$$n = \frac{c}{v}$$

Por tanto:

$$\frac{n_{agua}}{n_{aire}} = \frac{\dfrac{c}{v_{agua}}}{\dfrac{c}{v_{aire}}} = \frac{n_{agua}}{n_{aire}} = \frac{v_{aire}}{v_{agua}} \rightarrow v_{agua} = v_{aire} \cdot \frac{n_{aire}}{n_{agua}}$$

Teniendo en cuenta que, al ser el índice de refracción del aire la unidad, la velocidad de propagación de la luz en él es: $v_{aire} = c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, obtenemos, para la velocidad de la luz en el agua:

$$v_{agua} = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{4/3} = 2{,}25 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. El índice de refracción del diamante es 2,5, y el de un vidrio, 1,4. ¿Cuál es el ángulo límite entre el diamante y el vidrio?

El ángulo límite lo alcanzarán los rayos que pasen del diamante al vidrio (del material más refringente al menos refringente). De ese modo, el rayo refractado se alejará de la normal.

Al aplicar la ley de Snell de la refracción, sustituir los datos de que disponemos y operar, obtenemos el valor del ángulo límite:

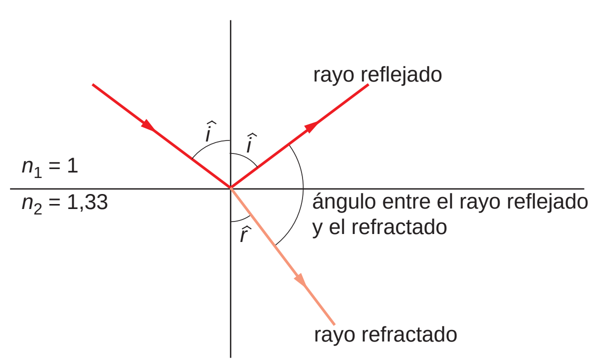
$$n_i \cdot sen\ \hat{i}_L = n_r \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{n_r \cdot sen\ \hat{r}}{n_i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{i}_L = arcsen\left(\frac{n_r \cdot sen\ \hat{r}}{n_i}\right) = arcsen\left(\frac{1{,}4 \cdot sen\ 90°}{2{,}5}\right) = 34{,}06°$$

3. Un rayo de luz monocromática que se propaga en el aire incide sobre la superficie del agua, cuyo índice de refracción respecto al aire es 1,33.

Calcula el ángulo de incidencia sobre el agua para que el rayo reflejado sea perpendicular al rayo refractado.

La situación que propone el enunciado de la actividad es la que se muestra en la siguiente ilustración:



De acuerdo con ella, la relación entre los rayos reflejado y refractado debe ser:

$$180° - \hat{i} - \hat{r} = 90° \rightarrow \hat{r} = 90° - \hat{i}$$

Al aplicar la ley de Snell imponiendo la condición anterior, sustituir los datos y operar, obtenemos el valor del ángulo de incidencia solicitado:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{i} = \frac{n_2 \cdot sen\ \hat{r}}{n_1} = \frac{n_2 \cdot sen\ (90° - \hat{i})}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \cdot cos\ \hat{i}$$

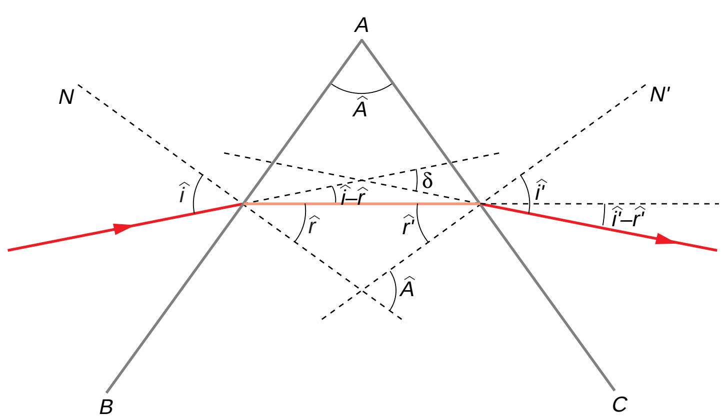
$$\frac{sen\ \hat{i}}{cos\ \hat{i}} = tg\ \hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{i} = arctg\ \frac{n_2}{n_1} = arctg\ \frac{1,33}{1} = 53,06°$$

11.4. LA DISPERSIÓN DE LA LUZ

1. Calcula el ángulo de desviación mínima de un prisma equilátero cuyo índice de refracción es 1,8. Analiza todas las situaciones posibles.

Sea $\hat{i}$ el ángulo de incidencia. Aplicando la ley de Snell a la primera refracción, resulta:

$$1 \cdot sen\ \hat{i} = 1,8 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{r} = 0,556 \cdot sen\ \hat{i}$$



Al aplicarla a la segunda refracción, y teniendo en cuenta que $\hat{A} = 60°$ por tratarse de un prisma equilatero, resulta:

$$1,8 \cdot sen\ \hat{r}' = 1 \cdot sen\ \hat{i}' \rightarrow sen\ \hat{i}' = 1,8 \cdot sen\ \hat{r}' = 1,8 \cdot sen\ [arcsen\ (60 - \hat{r})]$$

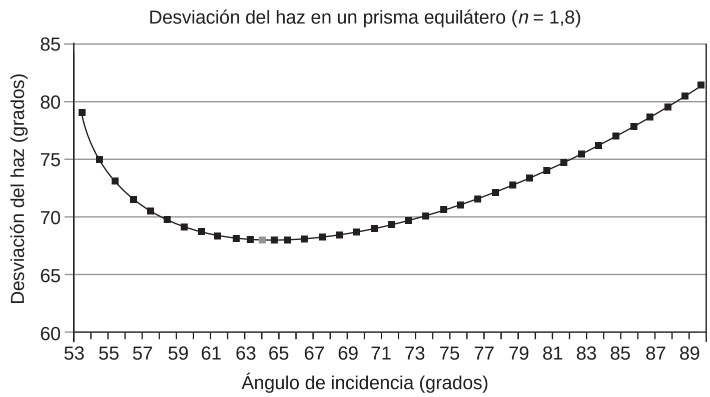
El ángulo que mide la desviación del rayo será, por tanto:

$$\delta = (\hat{i} - \hat{r}) + (\hat{i}' - \hat{r}') = (\hat{i} + \hat{i}') - (\hat{r} + \hat{r}') = (\hat{i} + \hat{i}') - \hat{A}$$

Si ponemos el ángulo de desviación en función de $\hat{i}$, resulta:

$$\delta = \hat{i} + arcsen\{1,8 \cdot sen[arcsen\ [60 - arcsen(0,556 \cdot sen\ \hat{i})]]\} - \hat{A}$$

Al dar valores a $\hat{i}$, obtenemos el resultado de la gráfica:



Como se aprecia en la gráfica, en el prisma que nos facilitan la desviación es mínima para un ángulo de incidencia de 64°, y resulta ser de 68,32°.

2. Indica las diferencias que, a tu juicio, existen entre los fenómenos de refracción y dispersión de la luz.

¿Puede un rayo de luz monocromática sufrir ambos fenómenos?

El fenómeno de dispersión de la luz es un caso particular de refracción que se da cuando se cumplen estas dos condiciones:

a) La luz se propaga en su medio material.

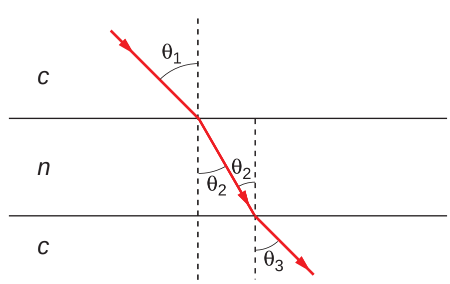
b) La luz no es monocromática.

Para explicar este fenómeno, debemos tener en cuenta que la velocidad de la luz en el vacío es igual para todas las longitudes de onda, mientras que en una sustancia material esa velocidad varía con la longitud de onda. Por tanto, el índice de refracción de una sustancia también será función de la longitud de onda.

Dado que la luz monocromática está contituida por ondas electromagnéticas de una sola longitud de onda, puede sufrir refracción, pero no dispersión.

3. ¿Por qué no se observa la dispersión de la luz blanca cuando atraviesa una lámina de vidrio de caras plano-paralelas?

Al aplicar la ley de Snell a este fenómeno, el ángulo de refracción que se obtiene (tras la segunda refracción; es decir, cuando el rayo sale de nuevo al aire) es igual al de incidencia, como se observa en la gráfica:



De acuerdo con ella:

$$\left.\begin{array}{l} c \cdot sen\ \theta_1 = n \cdot sen\ \theta_2 \\ n \cdot sen\ \theta_2 = c \cdot sen\ \theta_3 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \theta_1 = sen\ \theta_3 \rightarrow \theta_1 = \theta_3$$

11.5. NATURALEZA TRANSVERSAL DE LAS ONDAS LUMINOSAS

1. ¿Qué tipo de ondas pueden ser polarizadas? ¿Se puede polarizar una onda sonora? Justifica la respuesta.

Para polarizar una onda, es preciso que la dirección de vibración sea perpendicular a la dirección de propagación; es decir, que se trate de una onda transversal. El sonido es una onda longitudinal y resulta imposible polarizarla.

2. Durante el día, y con el cielo despejado, recibimos directamente la luz del Sol. Explica por qué recibimos también luz de color azul de todo el cielo.

El hecho de que veamos el cielo de color azul se debe a la dispersión que experimenta la luz blanca proveniente del sol cuando atraviesa la atmósfera.

Las moléculas del aire dispersan los tonos azules y violetas en todas las direcciones, y permiten que pasen los naranjas y rojos sin apenas dispersión, debido al tamaño de las moléculas de aire, pequeñas comparadas con la longitud de onda de los colores. Como ya sabes, cuanto más pequeña sea la longitud de onda, más se dispersará la luz. Por tanto, el color que más se dispersa es el violeta, seguido por el azul, pero como nuestro ojo es más sensible a este último, aparece como dominante.

Sin embargo, los atardeceres tienen un tono rojo-anaranjado. Esto es debido a que en ellos la luz que proviene del Sol recorre una distancia mayor dentro de nuestra atmósfera, con lo que los tonos violetas y azules sufren una dispersión tan grande que no llegan a nuestros ojos. Este fenómeno se denomina “efecto Rayleigh”.

11.6. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA DIFRACCIÓN

1. Sobre una superficie de cristal ennegrecida se graban dos líneas paralelas muy próximas, formando una doble rendija. Al iluminar esta doble rendija con una lámpara que proporciona luz amarilla se ve la correspondiente figura de difracción.

Al sustituir la lámpara amarilla por otra que emite luz de otro color, la nueva figura de difracción que se forma presenta una separación entre máximos mayor que en el supuesto anterior.

a) ¿Qué conclusión, acerca de la naturaleza de la luz, puede comprobarse a partir de las dos experiencias anteriores?

b) ¿Por qué están más separados los máximos de difracción en la segunda experiencia que en la primera?

c) Indica un color que pueda corresponder a la luz que emite la segunda lámpara.

a) Cada rayo luminoso tiene asociada una longitud de onda (y, en consecuencia, una frecuencia).

La distancia a la que se producen las interferencias, ya sean constructivas (puntos iluminados) o destructivas (puntos oscuros), depende de la longitud de onda.

Por eso, la separación entre máximos es distinta en la figura de difracción que se produce en cada caso, ya que depende de la longitud de onda de la luz que incide sobre las rendijas.

b) De acuerdo con la experiencia de Young, en los puntos en que la iluminación es máxima se cumple la siguiente relación:

$$d_1 - d_2 = n \cdot \lambda$$

$$a \cdot \frac{y}{D} = n \cdot \lambda$$

siendo y la distancia entre el máximo central y el máximo que ocupa la posición n a derecha o izquierda. Por tanto, la separación entre dos franjas brillantes será:

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1) \cdot \lambda \cdot D}{a} - \frac{n \cdot \lambda \cdot D}{a} = \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

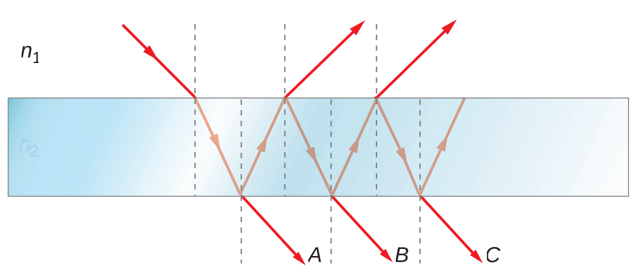
Al utilizar la segunda fuente luminosa, la distancia entre máximos, $d_1 - d_2$, es mayor. Por tanto, la longitud de onda de la radiación incidente es también mayor que la de la luz amarilla que incide en el primer caso.

c) Puede haberse iluminado con luz anaranjada o roja, a las que corresponde una longitud de onda mayor que a la luz amarilla.

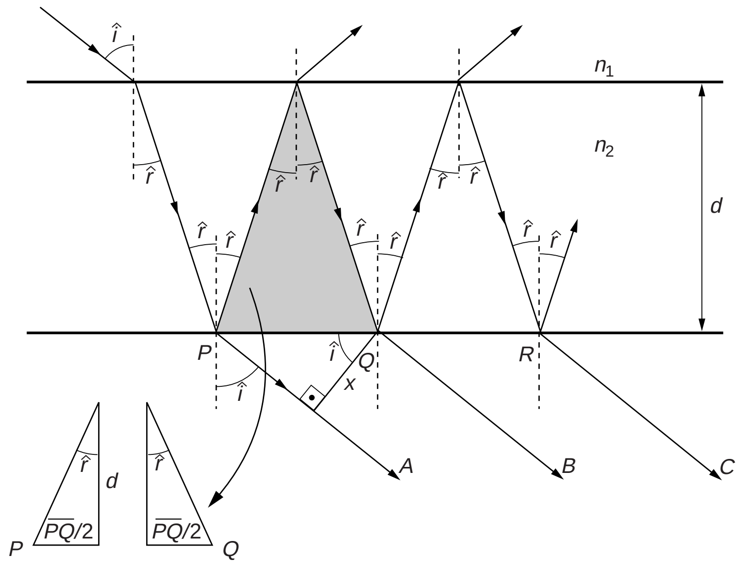
11.7. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS INTERFERENCIAS

1. Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras plano-paralelas como se indica en la figura. El índice de refracción del material que forma la lámina es n_2 y se encuentra inmersa en un medio cuyo índice de refracción es n_1.

Determina la distancia que separa los rayos *A* y *B* y los rayos *B* y *C*.



Las distancias que separan el rayo *A* del rayo *B* y este último del rayo *C* deben ser iguales, ya que los ángulos de reflexión que se producen en el interior de la lámina de caras plano-paralelas son todos iguales, al tratarse de reflexiones que se producen en un único medio.



Este ángulo de reflexión interna es, a la vez, el ángulo de refracción del rayo que procede del medio 1, y podemos calcularlo aplicando la ley de Snell:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r} = arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}\right)$$

Si ahora prestamos atención al triángulo sombreado, vemos que podemos dividirlo en dos triángulos rectángulos. De este modo, podemos calcular la distancia $\overline{PQ}$:

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = 2 \cdot d \cdot tg\ \hat{r} = 2 \cdot d \cdot tg\left[arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}\right)\right]$$

La distancia, x, que separa los rayos A y B, igual a la que separa los rayos B y C, será, por tanto:

$$x = \overline{PQ} \cdot cos\ \hat{i} = 2 \cdot d \cdot tg\left[arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}\right)\right] \cdot cos\ \hat{i}$$

11.8. COLORIMETRÍA

1. Cita algún objeto o alguna sustancia que refleje de modo uniforme la práctica totalidad del espectro luminoso.

Cuando la luz incide sobre un objeto, parte de esta luz es absorbida y parte es reflejada. Las longitudes de onda que son reflejadas “dan color” al objeto. Si, por ejemplo, iluminamos con luz blanca (luz solar) un tomate, este absorbe todas las longitudes de ondas excepto la correspondiente al rojo, que es reflejada. Si el cuerpo refleja todas las longitudes de onda, aparecerá en nuestros ojos de color blanco, como ocurre con el fondo de estas páginas.

2. Averigua cómo se consigue el blanco de las pinturas o del papel. Dato: en la composición de ambos productos se utilizan cantidades ingentes de óxido de titanio.

Las pinturas se fabrican disolviendo determinados compuestos químicos, a los que llamamos pigmentos, en un disolvente líquido incoloro. El pigmento suele ser un polvo fino que o bien refleja toda la luz incidente, produciendo el color blanco, o bien absorbe determinadas longitudes de onda, produciendo el color correspondiente a las longitudes de onda que no son absorbidas. Para obtener el color blanco se utilizan pigmentos formados por óxidos de titanio, de cinc, de plomo o de antimonio.

11.9. MEZCLAS DE COLORES

1. **Si queremos obtener una pintura de color azul, ¿de qué color deberán ser los pigmentos que incorporemos a ella?**

Para obtener una pintura de color azul utilizaremos un pigmento que refleje las longitudes de onda correspondientes al azul y que absorba el resto. El pigmento será, por tanto, del mismo color que la pintura; es decir, azul, y actuará como un filtro de este color.

2. **¿Cómo es la mezcla de colores que se obtiene al superponer varios haces de luz de distinto color? ¿Y la que se obtiene al mezclar tintas de distintos colores?**

Cuando superponemos haces de luz de distinto color realizamos una mezcla aditiva de colores. La luz reflejada por una superficie contendrá fracciones de todas las longitudes de ondas incidentes.

Si lo que hacemos es mezclar tintas de distintos colores, realizamos una mezcla sustractiva, puesto que las tintas actúan como filtros absorbiendo ciertas longitudes de onda y reflejando otras.

3. **Al pintar con acuarelas, se suele tener un vaso con agua en el que se limpian los pinceles.**

¿Por qué acaba siendo de color gris el agua, a medida que se van limpiando pinceles con distintos colores de pintura?

Cuando limpiamos sucesivamente el pincel en el vaso con agua, vamos añadiendo al agua los distintos pigmentos de las pinturas utilizadas. Estos pigmentos actúan como filtros de color, que absorben unas longitudes de onda y reflejan otras. Cuando el número de filtros es muy grande, casi todas las longitudes de onda de la luz visible son absorbidas, de modo que las reflejadas son casi inexistentes. Al no reflejar la luz, el agua se vuelve gris, y puede llegar a ser negra si la cantidad de pintura es muy grande.

4. **Mientras anochece existe un período de tiempo en el que la visión de los colores es peor que durante el día o durante la noche. ¿A qué podemos atribuir ese fenómeno? ¿Qué colores vemos mejor de día? ¿Cuáles vemos mejor de noche?**

Este fenómeno lo produce el denominado “efecto Purkinje”. Se denomina así un fenómeno que hace que la máxima sensibilidad del ojo humano esté en 550 nm (amarillo-verdoso) en visión diurna y en 505 nm (verde-azulado) en visión nocturna. De ahí que el amarillo parezca el color más luminoso de día, mientras que es el azul el que lo parece de noche.

El crepúsculo es el intervalo de tiempo en el que no predomina ninguna de estas dos situaciones que se han descrito, y, por tanto, en el que más incómoda resulta la visión, ya que el ojo humano no está adaptado a esa situación intermedia con la misma eficacia con que lo está a la situación de pleno día o de noche cerrada.

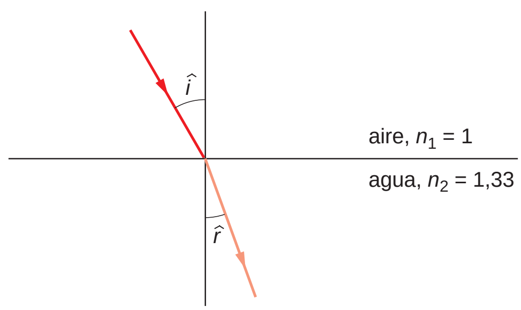
De día, los colores que mejor percibimos son los amarilloverdosos, y de noche, los azulverdosos.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. **Cuando la luz pasa del aire al agua, ¿el ángulo de refracción es mayor, menor o igual que el ángulo de incidencia? Explica razonadamente la respuesta y dibuja el diagrama de rayos.**

Cuando la luz pasa del aire al agua, el rayo refractado se acerca a la normal (perpendicular a la superficie de separación de ambos medios), como se muestra en la figura:



El índice de refracción del aire y del agua es:

$$n_{aire} = 1 \quad ; \quad n_{agua} = 1,33$$

Al aplicar la ley de Snell de la refracción:

$$n_{aire} \cdot sen\ \hat{i} = n_{agua} \cdot sen\ \hat{r}$$

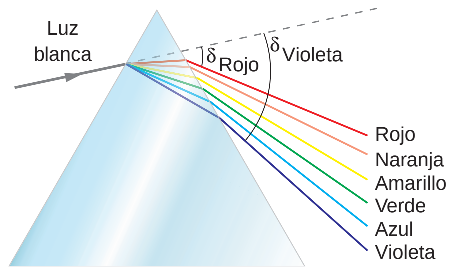
Como $n_{agua} > n_{aire}$, entonces:

$$sen\ \hat{i} > sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{i} > \hat{r}$$

2. **Dispones de un prisma de cuarzo. Indica qué le ocurre a un rayo de luz blanca que incide con cualquier ángulo en una de sus caras, justificando físicamente los fenómenos que ocurren.**

La velocidad de la luz en el vacío es igual para todas las longitudes de onda, mientras que en una sustancia material, como un prisma de cuarzo, varía con la longitud de onda. Por tanto, el índice de refracción en una sustancia será también función de la longitud de onda. Debido a ello, en cualquier sustancia en la que varíe la velocidad de propagación con la longitud de onda y, por tanto, su índice de refracción sea distinto para cada una de ellas, la luz blanca se dispersará. Esto es lo que ocurre en el supuesto que plantea el enunciado.

La dispersión de la luz blanca mediante un prisma se muestra en la siguiente ilustración:



3. ¿Qué se entiende por refracción de la luz? Explica qué es el ángulo límite y, utilizando un diagrama de rayos, indica cómo se determina.

La refracción es el cambio de dirección de propagación que experimenta un rayo de luz cuando pasa de un medio a otro (siempre que el ángulo de incidencia sea distinto de 90°).

Supongamos ahora que tenemos un objeto en un medio y emite rayos de luz hacia otro medio cuyo índice de refracción es menor ($n_1 > n_2$). En ese caso, de acuerdo con la ley de Snell:

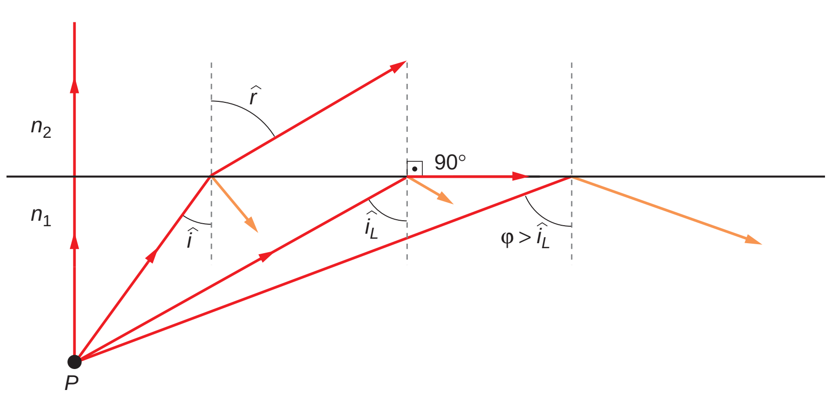
$$sen\ \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{\imath} \rightarrow sen\ \hat{r} > sen\ \hat{\imath}$$

A medida que aumenta $\hat{\imath}$, $\hat{r}$ aumenta, siendo el ángulo de refracción siempre mayor que el ángulo de incidencia.

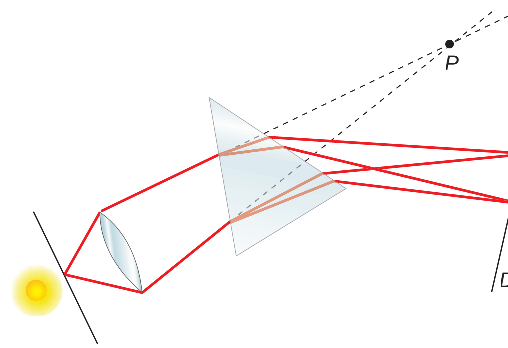
De acuerdo con las condiciones del problema, existe un ángulo de incidencia, $\hat{\imath}_L$, al que denominamos **ángulo límite,** para el cual $sen\ \hat{r} = 90°$. Tras la reflexión, un rayo de luz emitido con ese ángulo sería tangente a la superficie que separa los dos medios.

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el seno del ángulo de refracción (calculado de acuerdo con la ley de Snell) es mayor que la unidad, lo cual es matemáticamente imposible.

En ese caso, un rayo que incide con un ángulo superior al ángulo límite no se refracta; se refleja y sigue desplazándose por el interior del primer medio. Por eso decimos que la **reflexión** es **total.**



4. Un haz de luz blanca pasa a través de una rendija y, con ayuda de una lente, se enfoca en un punto *P*. Si colocamos un prisma en la trayectoria del rayo, vemos sobre la pantalla el espectro visible en la zona comprendida entre los puntos *B* y *C*.



a) ¿Qué color vemos en *B*? ¿Y en *C*?

b) ¿Qué fuente luminosa es adecuada para realizar este experimento?

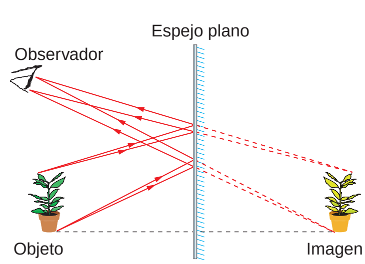
a) Como se aprecia en la figura, los rayos de luz que llegan a *C* sufren mayor refracción que los que llegan a *B*.

En el espectro luminoso, no todas las frecuencias sufren la misma refracción. Cuanto menor es una frecuencia, menor refracción sufre. Por tanto, los colores cercanos al rojo, a los que corresponde mayor longitud de onda y menor frecuencia, se desvían menos y van a parar al punto *B*; mientras que los colores próximos al violeta, cuya longitud de onda es menor y, por tanto, su frecuencia mayor, se desviarán más y alcanzarán el punto *C*.

b) Hemos de realizarlo con una luz blanca, que contiene todo el espectro de frecuencias, para poder apreciar el fenómeno.

5. De acuerdo con las leyes de la refracción, al introducir un palo en el agua lo vemos deformado. Teniendo esto en cuenta, ¿por qué no nos vemos deformados al mirarnos en un espejo plano, si nuestra imagen se forma al otro lado del medio (en el vidrio)?

La razón es que, en un espejo, la imagen se forma por reflexión, no por refracción. Los rayos de luz que inciden sobre la superficie del espejo salen reflejados con un ángulo igual al de incidencia. Son estos rayos reflejados los que, al ser proyectados hacia atrás, forman una imagen virtual. Ello explica que, al tratarse de una reflexión en una superficie plana, veamos la imagen del mismo tamaño que el objeto que la proyecta, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Más adelante, en la unidad 12, estudiaremos las leyes que rigen la formación de imágenes en los espejos.

6. Completa las frases siguientes:

a) Los colores primarios son ______________, ________ y ________.

b) Cuando proyectamos una luz roja y una luz amarilla sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color __________.

c) Cuando proyectamos los tres colores primarios sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color _________.

d) En el supuesto anterior, si proyectamos el haz sobre una pantalla de color amarillo veremos un círculo de color __________.

e) Si proyectamos un haz de luz verde sobre una pantalla de color verde, veremos un círculo de color __________.

a) Los colores primarios son **azul, verde** y **rojo.**

b) Cuando proyectamos una luz roja y una luz amarilla sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color **anaranjado.**

c) Cuando proyectamos los tres colores primarios sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color **blanco.**

Nota: Veremos color blanco solo si las tres luces son de la misma intensidad. Si alguna de ellas predomina sobre las demás, no sucede así, ya que estamos ante una mezcla aditiva de colores.

d) En el supuesto anterior, si proyectamos el haz sobre una pantalla de color amarillo, veremos un círculo de color **amarillo.**

e) Si proyectamos un haz de luz verde sobre una pantalla de color verde, veremos un círculo de color **verde.**

7. Completa las frases siguientes:

a) Los colores secundarios son _____________, ________ y ________.

b) Cuando proyectamos luz roja y luz verde sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, vemos un círculo de color __________.

c) Cuando proyectamos los tres colores secundarios sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color __________.

d) En el supuesto anterior, si proyectamos el haz sobre una pantalla de color amarillo veremos un círculo de color __________.

e) Si proyectamos un haz de luz roja sobre una pantalla de color rojo, veremos un círculo de color __________ y si proyectamos ese mismo haz sobre una pantalla de color azul veremos un círculo de color __________.

a) Los colores secundarios son **cian, magenta** y **amarillo.**

b) Cuando proyectamos luz roja y luz verde sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, vemos un círculo de color **amarillo.**

c) Cuando proyectamos los tres colores secundarios sobre una pantalla blanca, haciendo que coincidan sus haces, veremos un círculo de color **blanco.**

d) En el supuesto anterior, si proyectamos el haz sobre una pantalla de color amarillo, veremos un círculo de color **amarillo.**

e) Si proyectamos un haz de luz roja sobre una pantalla de color rojo, veremos un círculo de color **rojo,** y si proyectamos ese mismo haz sobre una pantalla de color azul, veremos un círculo de color **negro.**

8. La luz visible es un tipo de onda electromagnética. ¿Cuál de las características de la onda es la que permite al sentido de la vista diferenciar los colores?

Explica cómo es que la luz, al pasar de un medio a otro con diferente índice de refracción, la percibimos del mismo color.

La característica de la onda que nos permite diferenciar los colores es la frecuencia que, como estudiamos en la unidad 3, es propia de cada onda, independiente de las características del medio, a diferencia de la velocidad de propagación o la longitud de onda. Por esta razón percibimos la luz del mismo color, aunque cambie de medio de propagación.

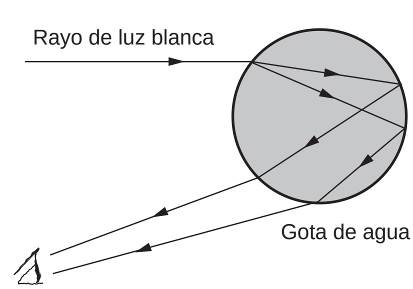
9. El arco iris se produce cuando las gotas de lluvia que quedan en suspensión en el aire son iluminadas por luz blanca.

a) ¿Qué propiedades de la luz explican la formación del arco iris?

b) Explica, con ayuda de un esquema y con lápices de colores, qué ocurre cuando se ilumina una gota de agua con un haz de luz blanca.

a) Las propiedades de la luz que explican la formación del arco iris son la reflexión y la refracción.

b) Cuando un haz de luz blanca que proviene del Sol ilumina una gota de lluvia, esta actúa como si se tratase de un prisma. Los rayos son refractados cuando entran por la parte superior de la gota; luego, son reflejados por la parte posterior y refractados de nuevo al salir. De esta forma, la luz blanca se "descompone" en los distintos colores del espectro visible, dando lugar al arco iris, como se muestra en la ilustración:



10. Cuando intentamos ver en una zona de penumbra o en condiciones de luz poco intensa, no distinguimos los colores. Sin embargo, distinguimos las formas de los objetos. ¿Puedes explicarlo?

Dentro del ojo humano, la retina posee dos tipos de células receptoras que son sensibles a la luz, que reciben el nombre de conos y bastones.

Los bastones son sensibles a la intensidad luminosa y los conos son sensibles a las diferentes longitudes de onda, por lo que son estos últimos los que distinguen los colores; mientras que los bastones son capaces de discriminar objetos en situaciones en las que la iluminación es escasa, distinguiendo sus formas.

11. Un conductor ve mejor durante el día que durante la noche. Sin embargo, también ve mejor durante la noche que mientras dura el crepúsculo. Teniendo en cuenta que la intensidad de luz es menor durante la noche que mientras oscurece, ¿cómo explicas este fenómeno?

Este fenómeno se debe al "efecto Purkinje", explicado en la página 283 del libro del alumno y en la respuesta de la actividad 4 del epígrafe 11.9, en este mismo solucionario.

12. El Sol se ve más grande cuando amanece o anochece que a mediodía, siendo su color más amarillo a lo largo del día que durante la salida o la puesta de Sol. Sin embargo, el Sol siempre emite la misma radiación luminosa. ¿Puedes explicar por qué ocurre ese fenómeno?

Cuando el Sol se pone, los rayos de luz que llegan hasta nuestros ojos recorren una distancia mayor por el interior de la atmósfera que cuando el Sol se encuentra en el cenit.

Ello hace que la radiación luminosa de color violeta, azul, verde o amarillo se disperse antes de llegar a nuestros ojos (estas longitudes de onda se curvan más al refractarse), de forma que tan solo llega radiación de colores naranja y rojo.

13. ¿Qué son los cables de fibra óptica? Explica por qué "no escapa" la luz a través de las paredes de la fibra. Señala alguna aplicación práctica que haya sido desarrollada con este tipo de materiales. Indica sus ventajas e inconvenientes.

Los cables de fibra óptica están formados por finos haces de fibras de vidrio fundido. El vidrio es un material frágil, pero cuando se funde y se trabaja en fibras, se convierte en un material flexible y resistente.

La principal finalidad de la fibra óptica es la transmisión de información por medio de pulsos de luz. Los pulsos de luz son una forma de codificar la información, al igual que los pulsos eléctricos que se transmiten a través del cable del teléfono son una forma de codificar la voz.

La luz que penetra dentro de la fibra de vidrio se transmite a través de ella. Cuando el cable se curva, la luz se refleja en la pared interior del cable de forma total, quedando asegurada la transmisión de la información sin que importe el trazado del cable. Este fenómeno se conoce como reflexión total interna.

Este sistema de transmisión de información tiene muchas aplicaciones: transmisión de señales telefónicas, de televisión, de datos entre redes de computadores, etc.

Ventajas que presenta el uso de la fibra óptica:

1. La cantidad de información que se puede enviar por cualquier cable es limitada. Sin embargo, el cable de fibra óptica proporciona, en un espacio reducido, una ele-

vada capacidad de transmisión de información (miles de veces superior a la de un cable de cobre tradicional), a la vez que posibilita la utilización de dicho soporte por parte de un gran número de usuarios. Decimos, por tanto, que los cables de fibra óptica tienen mayor "ancho de banda" que los cables de cobre convencionales utilizados en telefonía.

2. Las pérdidas en un cable de fibra óptica son mínimas. La luz puede desplazarse por el cable más de un kilómetro sin perder apenas potencia.

Inconvenientes que presenta esta tecnología en la actualidad:

1. El coste de producción de los cables es elevado.
2. Es una tecnología en expansión, que solo está instalada en las grandes ciudades y que no se utiliza de forma masiva (2001).
3. A escala nacional, los tendidos generales no se encuentran totalmente desarrollados. Será preciso esperar algunos años hasta que su uso se normalice.

EJERCICIOS

14. Calcula el rango de frecuencias que corresponde a la radiación visible.

Considera como espectro visible al comprendido en el intervalo [400, 700] nm.

Para un medio concreto, la velocidad de propagación de una onda electromagnética es siempre la misma, sin que esta dependa de la frecuencia de la onda. En el aire y en el vacío la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas (o.e.m.) es: $3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.

Si conocemos la longitud de onda y la velocidad con que se propaga una o.e.m., el valor que corresponde a la frecuencia es:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

Por tanto, el rango de frecuencias que corresponde al espectro visible es:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{700 \cdot 10^{-9}} = 4{,}286 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} = 7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

15. El arco iris se produce cuando las gotas de lluvia que quedan suspendidas en el aire son iluminadas con luz blanca. Si la cantidad de gotas de lluvia en suspensión es considerable, podemos llegar a ver un doble arco iris, estando invertidos los colores del arco iris externo respecto a los que se ven en el arco iris interno.

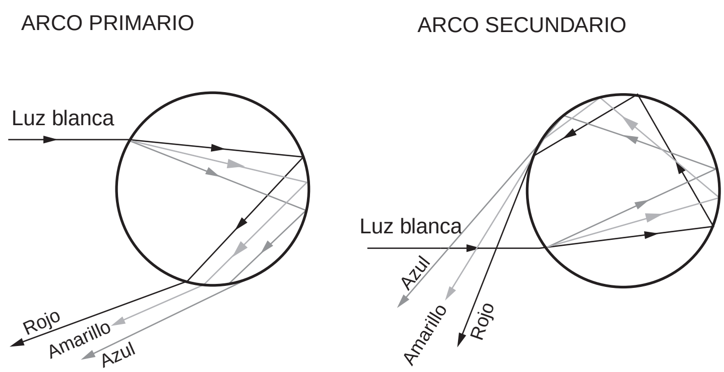
Explica, con ayuda de un esquema y con lápices de colores, qué ocurre cuando se ilumina una gota de agua con un haz de luz blanca, justificando que se forme un doble arco iris.

Cuando un haz de luz blanca procedente del Sol ilumina una gota de lluvia, esta actúa como si se tratase de un prisma. Los rayos son refractados cuando entran por la parte superior de la gota; posteriormente, son reflejados en su interior, y, por último, son refractados de nuevo al salir. De esa forma, la luz blanca se "descompone" en los distintos colores del espectro visible, dando lugar al arco iris. Este arco iris se denomina "arco iris primario".

En ocasiones se producen dos o más reflexiones dentro de la gota, formándose dos o más arcos. El arco iris secundario es el resultado de dos reflexiones y se forma en el cielo por encima del arco iris primario.

En el arco iris secundario, el orden en que se disponen los colores está invertido respecto al orden en que se disponen en el arco iris primario, con el interior rojo y el exterior violeta. Los colores de este arco no son tan brillantes como los del primario, pues en cada reflexión la luz pierde intensidad.

Los esquemas de formación del arco iris primario y secundario son los que se muestras en la siguiente ilustración:



16. Determina el ángulo a partir del cual se produce la reflexión total entre el aire y un medio en el que la luz viaja a 120 000 km · s^{-1}.

El ángulo límite es el ángulo de incidencia al que corresponde un índice de refracción de 90°. Aplicando la ley de Snell de la refracción obtenemos la expresión que nos permite calcularlo:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_L = n_2 \cdot sen\ 90° \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{i}_L = arcsen\ \frac{n_2}{n_1}$$

Para calcular su valor necesitamos conocer el índice de refracción del aire, n_2, que es la unidad, y el que corresponde al medio en el que la luz viaja a 120 000 km · s^{-1}, n_1. Este último lo obtenemos teniendo en cuenta la definición de índice de refracción, que es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la que corresponde al medio en cuestión. Por tanto:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^7} = 2{,}5$$

En consecuencia, el valor del ángulo límite es:

$$i_L = arcsen\ \frac{n_2}{n_1} = arcsen\ \frac{1}{2,5} = 23,58°$$

17. Un rayo de luz se propaga en el aire e incide en una cubeta llena de agua, formando un ángulo de 45° con la superficie de separación del agua. Calcula:

a) La dirección que tendrá el rayo luminoso al propagarse dentro del agua.

b) La velocidad de propagación de la luz en el agua.

Datos: $\boldsymbol{c = 300\,000\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$

$\boldsymbol{n_{agua} = 1,33}$

$\boldsymbol{n_{aire} = 1}$

a) La dirección del rayo tras refractarse la obtenemos aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$n_{aire} \cdot sen\ \hat{i} = n_{agua} \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_{aire} \cdot sen\ \hat{i}}{n_{agua}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{r} = arcsen\ \frac{n_{aire} \cdot sen\ \hat{i}}{n_{agua}} = arcsen\ 1 \cdot \frac{sen\ 45°}{1,33} = 32,12°$$

Por tanto, el rayo se desvía, acercándose a la normal.

b) De acuerdo con la definición de índice de refracción:

$$n_{agua} = \frac{c}{v_{agua}} \rightarrow v_{agua} = \frac{c}{n_{agua}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,26 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

18. Calcula el ángulo límite para la refracción y el valor de $\boldsymbol{n_{agua}}$ para un rayo de luz que pasa del aire al agua, de acuerdo con la tabla de datos:

Ángulo en aire	Ángulo en agua
10°	8°
20°	15,5°
30°	22,5°
40°	28°
50°	35°
60°	40,5°
70°	45°
80°	50°

La segunda ley de Snell para la refracción establece la relación:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} = n = cte$$

en la que n_1 y n_2 son los índices de refracción de los dos medios. Comprobemos si se cumple la ley de Snell de la refracción:

Ángulo en el aire ($\hat{i}$)	Ángulo en el agua ($\hat{r}$)	Índice de refracción (n)
10°	8°	1,248
20°	15,5°	1,280
30°	22,5°	1,307
40°	28°	1,369
50°	35°	1,336
60°	40,5°	1,333
70°	45°	1,329
80°	50°	1,286

Como se aprecia, los valores son prácticamente constantes. Las pequeñas diferencias que obtenemos pueden ser atribuidas al proceso de medida o a aproximaciones realizadas en la medida de los respectivos ángulos de incidencia y de refracción.

Adoptaremos como valor de n, índice de refracción del agua, la media de los resultados obtenidos:

$$n = \frac{\sum n_i}{8} = 1{,}311$$

El ángulo límite es el ángulo de incidencia a partir del cual el rayo no se refracta para pasar al segundo medio, en este caso el agua, y sale paralelo a la superficie de separación de ambos medios.

Por tanto, respecto a la normal, el ángulo con que sale el rayo refractado es 90°.

Si aplicamos la segunda ley de Snell, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}_L}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 90° = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{i}_L = arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Para que exista ángulo límite, el índice de refracción del segundo medio ha de ser menor que el del primer medio. De este modo, el cociente entre ambos índices será menor que la unidad y existirá un ángulo de incidencia que haga que se cumpla la expresión anterior. Por tanto, en el caso de un rayo de luz que pasa del aire al agua no existe el ángulo límite de refracción, al ser mayor el índice de refracción del segundo medio.

19. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30°. ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul?

Datos: $n_{rojo} = 1{,}62$; $n_{azul} = 1{,}671$; $n_{aire} = 1$

Para resolver este ejercicio aplicaremos la ley de Snell de la refracción. Recuerda que el índice de refracción de un medio depende ligeramente de la longitud de onda de la luz que se refracta. En el caso del enunciado tenemos, para el vidrio, los valores del índice de refracción que presenta para el rojo y el azul.

En la dispersión que se produce dentro de la lámina de vidrio, se desviarán más los rayos de longitud de onda más corta (es decir, se desviará más el azul que el rojo), como se demuestra a continuación:

$$n_{aire} \cdot sen\ \hat{i} = n_{azul} \cdot sen\ \hat{r}_{azul} \rightarrow \hat{r}_{azul} = arcsen\ \frac{n_{aire} \cdot sen\ \hat{i}}{n_{azul}} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 30°}{1{,}671} = 17{,}41°$$

$$n_{aire} \cdot sen\ \hat{i} = n_{rojo} \cdot sen\ \hat{r}_{rojo} \rightarrow \hat{r}_{rojo} = arcsen\ \frac{n_{aire} \cdot sen\ \hat{i}}{n_{rojo}} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 30°}{1{,}62} = 17{,}98°$$

Por tanto, el ángulo que formarán entre sí ambos rayos será:

$$\alpha = \hat{r}_{rojo} - \hat{r}_{azul} = 17{,}97° - 17{,}41° = 0{,}57°$$

20. Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque con un ángulo de 30°. Calcula el ángulo que formarán entre sí los rayos reflejado y refractado. Si el rayo luminoso se propagase desde el agua hacia el aire, ¿a partir de qué valor del ángulo de incidencia se presentará el fenómeno de reflexión total?

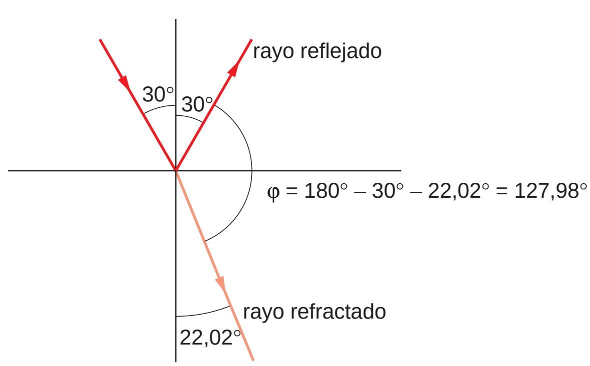
Dato: Índice de refracción del agua = 4/3

Calculemos en primer lugar, de acuerdo con la ley de Snell de la refracción, el ángulo refractado, $\hat{r}$:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{r} = arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 30°}{4/3} = 22{,}02°$$

De acuerdo con la ley de Snell de la reflexión, el ángulo de reflexión es igual al de incidencia; valdrá, por tanto, 30°.

La gráfica que representa los rayos incidentes, reflejado y refractado es la siguiente:



Por tanto, el ángulo que formarán entre sí los rayos reflejado y refractado es:

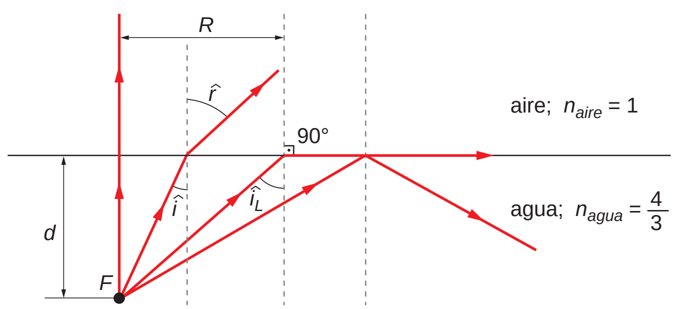
$$\varphi = 180° - 30° - 22{,}02° = 127{,}98°$$

Cuando un rayo de luz monocromática pasa de un medio (agua) a otro (aire) menos refringente, se refracta alejándose de la normal. El ángulo límite, $\hat{i}_L$, es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de infracción, $\hat{r}$, es de 90°. Al imponer esta condición en la aplicación de la segunda ley de Snell, obtenemos el valor del primero:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_L = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow i_L = arcsen\ \frac{n_2 \cdot sen\ \hat{r}}{n_1} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 90°}{4/3} = 48{,}59°$$

21. Un foco luminoso puntual se encuentra situado a un metro de profundidad, en el fondo de un estanque lleno de agua, cuyo índice de refracción es *n* = 4/3. El foco emite luz en todas direcciones; debido a ello, en la superficie del agua se forma un círculo luminoso de radio *R*. Explica brevemente este fenómeno y calcula el radio *R* del círculo luminoso.

Los rayos de luz que proceden del foco luminoso situado en el fondo del estanque se refractan al llegar a la superficie de separación entre el agua y el aire, alejándose de la normal a dicha superficie de separación:



Según se aprecia en la ilustración, existe un ángulo límite de incidencia para el cual el ángulo que forma el rayo refractado con la normal es 90°. A partir de este ángulo límite, los rayos de luz son reflejados completamente.

El círculo luminoso lo forman los rayos que inciden con un ángulo menor que este ángulo límite y, por tanto, son transmitidos al otro medio; en este caso, el aire.

Aplicando la ley de Snell, obtenemos el valor del ángulo límite, $\hat{i}_L$:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r}$$

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_L = n_2 \cdot sen\ 90° \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{n_2}{n_1}$$

$$sen\ \hat{i}_L = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \rightarrow \hat{i}_L = arcsen\ \frac{3}{4} = 48{,}6°$$

Conocido este ángulo, y teniendo en cuenta los datos de la figura, el radio del círculo luminoso resulta:

$$tg\ \hat{i}_L = \frac{R}{d} \rightarrow R = d \cdot tg\ \hat{i}_L = 1 \cdot tg\ 48{,}6° = 1{,}13\ \text{m}$$

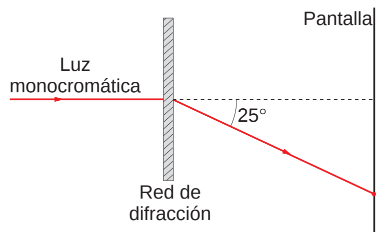
NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

PROBLEMAS

22. Un haz de luz monocromática incide perpendicularmente a una red de difracción de $8 \cdot 10^5$ líneas por metro. Sobre la pantalla, el primer máximo lateral se forma en un punto situado de tal modo que el rayo emergente forma un ángulo de 25° respecto a la dirección del haz incidente.

Con estos datos, calcula la longitud de onda de la radiación incidente.

La situación que plantea el enunciado del problema es la que se muestra en el siguiente esquema:



La distancia entre rendijas es:

$$a = \frac{1}{8 \cdot 10^5} = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

De acuerdo con la experiencia de Young, en los puntos en que la iluminación es máxima se cumple la siguiente relación:

$$d_1 - d_2 = n \cdot \lambda \quad ; \quad a \cdot \frac{y}{D} = n \cdot \lambda$$

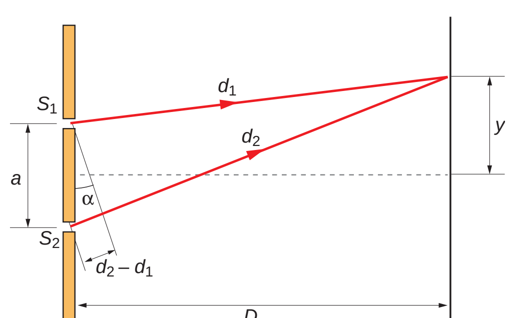
siendo y la distancia entre el máximo central y el máximo que ocupa la posición n a la derecha o a la izquierda de él. Por tanto, la separación entre dos franjas brillantes, será:

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1) \cdot \lambda \cdot D}{a} - \frac{n \cdot \lambda \cdot D}{a} = \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

Como se nos proporciona la relación $\Delta y / D = sen\ 25°$, la longitud de onda que nos piden que calculemos es:

$$\lambda = a \cdot \frac{\Delta y}{D} = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot sen\ 25° = 5{,}28 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

23. Se desea calcular la longitud de onda de un rayo de luz monocromática. Para ello, se disponen unas rendijas separadas entre sí 1 mm y situadas a 0,5 metros de una pantalla.



Si entre el máximo central y la siguiente franja brillante la separación es $2,5 \cdot 10^{-4}$ metros, calcula la correspondiente longitud de onda para la luz monocromática.

De acuerdo con la experiencia de Young, en los puntos en que la iluminación es máxima se cumple la relación:

$$d_1 - d_2 = n \cdot \lambda \quad ; \quad a \cdot \frac{y}{D} = n \cdot \lambda$$

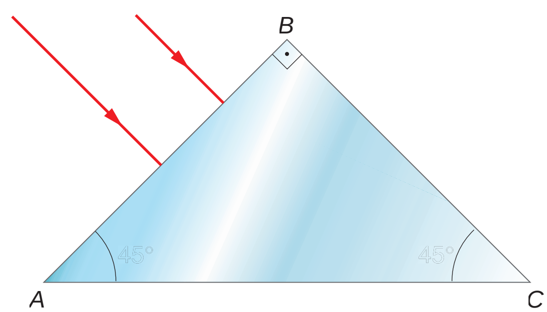
siendo y la distancia entre el máximo central y el máximo que ocupa la posición n a derecha o izquierda de él. Por tanto, la separación entre dos franjas brillantes será:

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1) \cdot \lambda \cdot D}{a} - \frac{n \cdot \lambda \cdot D}{a} = \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

La distancia del máximo central al primer máximo lateral corresponde a $n = 1$. Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos la longitud de onda que nos piden:

$$\lambda = a \cdot \frac{\Delta y}{D} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-4}}{0,5} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$$

24. El prisma *ABC* de la figura está hecho con un vidrio cuyo índice de refracción es 1,5. Se desea que el rayo de luz que incide sobre él gire 90°.

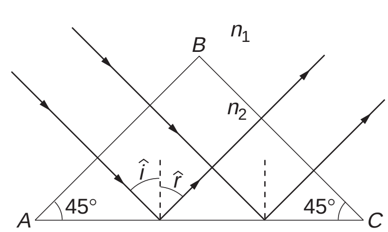


a) Dibuja sobre el diagrama la trayectoria que seguirán los dos rayos de luz que se indican hasta que salgan de nuevo al aire.

b) ¿Se produce refracción en la cara *AC*? Si es así, calcula el ángulo con que sale el rayo refractado. En caso contrario, indica el motivo.

c) La intensidad de los rayos que salen por la cara *BC* es menor que la de los rayos que inciden en la cara *AB*. ¿Cómo lo explicas?

a) La trayectoria que seguirán los rayos es la que se indica en la figura.



b) Los rayos que alcanzan la cara *AC* del prisma forman un ángulo de incidencia respecto a la normal cuyo valor es:

$$\hat{i} = 90° - 45° = 45°$$

El ángulo límite con que debe incidir un rayo sobre esta superficie para que se refracte y salga de nuevo al medio externo es:

$$\frac{sen\ \hat{i}_L}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_1}{n_2} \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{r} = \frac{1}{1,5} \cdot sen\ 90° = \frac{2}{3} \rightarrow$$

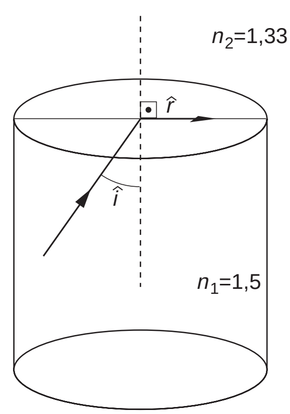
$$\rightarrow \hat{i}_L = arcsen\ \frac{2}{3} = 41,8°$$

Como el ángulo de incidencia (45°) es superior al ángulo límite, no hay refracción; el rayo se refleja sobre la cara *AC* y acaba saliendo por la cara *BC*.

c) En este supuesto, que es ideal, la intensidad con que sale el rayo es igual a la intensidad con que incide, siempre que el material del prisma no absorba parte de la radiación. Ello se explica por la ausencia de refracción, ya que solo se produce una reflexión en la cara *AC*.

25 Calcula el ángulo límite para la refracción de un rayo de luz que viaja por el interior de un tubo de vidrio cuyo índice de refracción es 1,5 si dicho tubo está sumergido en agua.

El ángulo límite es el ángulo mínimo de incidencia a partir del cual el rayo de luz no se transmite de un medio a otro.



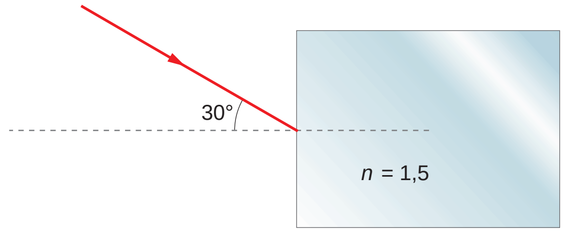
En ese caso, el ángulo que forma el rayo refractado con la normal es 90°.

El índice de refracción del agua es $n = 1,33$. Por tanto, si el tubo está sumergido en agua, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ \hat{r} = \frac{1,33}{1,5} \cdot sen\ 90° = 0,887 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{i} = arcsen\ 0,887 = 62,46°$$

26. Un rayo de luz incide sobre un bloque de vidrio formando un ángulo de 30°, como se indica en la figura.



Si el índice de refracción del vidrio es 1,5 y se encuentra en el aire:

a) Dibuja la trayectoria que sigue el rayo a través del bloque. Indica el ángulo que forma el rayo refractado con la normal.

b) ¿Con qué velocidad se propaga el rayo de luz por el interior del bloque?

a) Al incidir sobre la superficie del bloque, el rayo formará un ángulo con la normal que obtenemos a partir de la segunda ley de Snell:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$sen\ \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ 30° = \frac{1}{1,5} \cdot sen\ 30° = \frac{1}{3}$$

$$\hat{r} = arcsen\ \frac{1}{3} = 19,47°$$

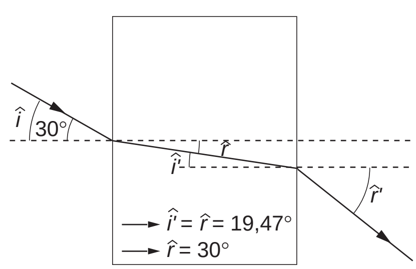
Cuando sale del bloque al aire, $(\hat{i}' = \hat{r})$ el ángulo resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}'}{sen\ \hat{r}'} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$sen\ \hat{r}' = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 19,47° = \frac{1,5}{1} \cdot sen\ 19,47° = 0,5$$

$$\hat{r}' = arcsen\ 0,5 = 30°$$

La situación física que estamos analizando es la que se representa en el siguiente esquema:



b) El índice de refracción del medio es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio considerado. Por tanto:

$$c_{medio} = \frac{c_{aire}}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

27. Resuelve de nuevo el problema anterior suponiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,8 y que se encuentra sumergido en agua, cuyo índice de refracción es 1,33.

a) Si aplicamos la segunda ley de Snell al rayo, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r} = arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}\right) =$$

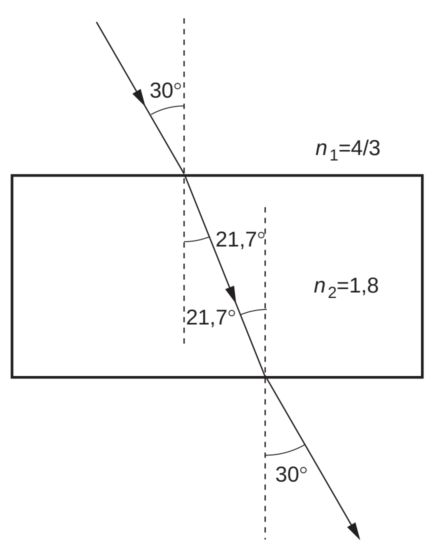
$$= arcsen\left(\frac{1,33}{1,8} \cdot sen\ 30°\right) = 21,7°$$

El ángulo refractado es el ángulo con el que incide en la otra superficie. Por tanto:

$$\frac{sen\ \hat{i}'}{sen\ \hat{r}'} = \frac{n_1}{n_2} \rightarrow \hat{r}' = arcsen\left(\frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ \hat{i}'\right) =$$

$$= arcsen\left(\frac{1,8}{1,33} \cdot sen\ 21,7°\right) = 30°$$

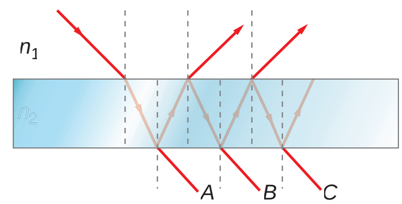
El ángulo de salida del bloque coincide con el de entrada. La trayectoria del rayo es la que se muestra en la figura:



b) El índice de refracción de un material es la relación entre la velocidad de la luz en el aire y la velocidad de la luz en dicho material. Por tanto:

$$n = \frac{v_{aire}}{v_{material}} \rightarrow v_{material} = \frac{v_{aire}}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,8} = 1,67 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

28. En la figura se muestra un rayo de luz que incide sobre una lámina de caras plano-paralelas.



El índice de refracción del material que forma la lámina es n_2 y se encuentra inmersa en un medio cuyo índice de refracción es n_1. Determina, en función de los datos que facilita el enunciado, la desviación que sufre el rayo al atravesar la lámina.

El rayo, después de atravesar la lámina, se ha refractado en dos ocasiones. En la primera, el ángulo de refracción es, de acuerdo con la ley de Snell:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{r} = arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2}$$

Este ángulo es el ángulo de incidencia de la segunda refracción, tras la cual el rayo sale del prisma. Por tanto:

$$n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow n_1 \cdot sen\ \hat{r}\,'$$

$$n_2 \cdot sen\left(arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2}\right) = n_1 \cdot sen\ \hat{r}\,'$$

$$\hat{r}\,' = arcsen\left[\frac{n_2 \cdot sen\left(arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2}\right)}{n_1}\right] = arcsen\ \frac{n_2 \cdot \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2}}{n_1} = sen\ \hat{i}$$

Por tanto:

$$\hat{r}\,' = \hat{i}$$

Es decir, el ángulo que forma el rayo refractado con la normal es igual al ángulo que forma el rayo incidente a la lámina con la normal.

29. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º. ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca, si los valores de los índices de refracción del vidrio para estos colores son, respectivamente, $n_{rojo} = 1{,}612$ y $n_{azul} = 1{,}671$?

Los ángulos de refracción que corresponden a los rayos rojo y azul son:

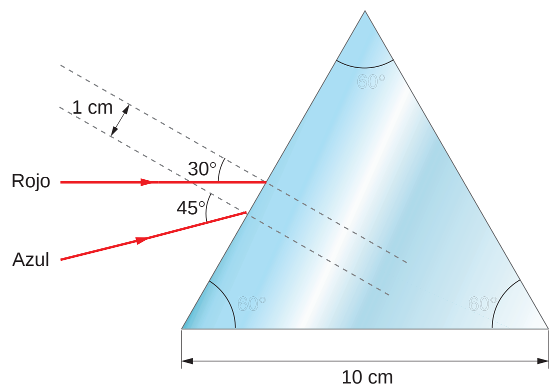
$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_{rojo} \cdot sen\ \hat{r}_{rojo} \rightarrow \hat{r}_{rojo} = arcsen\left(\frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_{rojo}}\right) = arcsen\left(\frac{1 \cdot sen\ 30°}{1{,}612}\right) = 18{,}07°$$

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_{azul} \cdot sen\ \hat{r}_{azul} \rightarrow \hat{r}_{azul} = arcsen\left(\frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_{azul}}\right) = arcsen\left(\frac{1 \cdot sen\ 30°}{1{,}671}\right) = 17{,}41°$$

El ángulo que forman entre sí ambos rayos es:

$$\alpha = \hat{r}_{rojo} - \hat{r}_{azul} = 18{,}07° - 17{,}41° = 0{,}66°$$

30. El prisma de la figura está hecho con un vidrio cuyo índice de refracción es 1,8. Dibuja sobre el diagrama la trayectoria que seguirán los dos rayos de luz que se indican hasta que salgan de nuevo al aire y calcula el ángulo que formarán entre ellos.



Si aplicamos la segunda ley de Snell al rayo de arriba, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}_1}{sen\ \hat{r}_1} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r}_1 = arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}_1\right)$$

$$\hat{r}_1 = arcsen\left(\frac{1}{1{,}8} \cdot sen\ 30°\right) = 16{,}13°$$

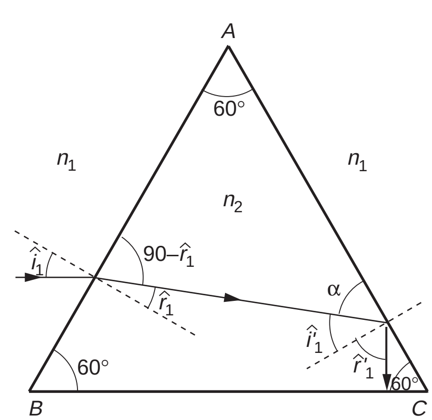
El rayo refractado sigue su camino en línea recta a través del cristal. Como se trata de un prisma triangular, para calcular el ángulo de incidencia en la cara opuesta del prisma, $\hat{i}'_1$, hacemos lo siguiente:

1. Calculamos el ángulo complementario, α:

$$\alpha = 180° - 60° - (90° - \hat{r}_1) = 180° - 60° - 90° + 16{,}3° = 46{,}3°$$

2. Calculamos $\hat{i}'_1$. En nuestro caso:

$$\hat{i}'_1 = 90° - 46{,}13° = 43{,}87°$$



Aplicando ahora la ley de Snell a la segunda refracción, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}'_1}{sen\ \hat{r}'_1} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r}'_1 = arcsen\left(\frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ \hat{i}'_1\right)$$

$$\hat{r}'_1 = arcsen\left(\frac{1{,}8}{1} \cdot sen\ 43{,}87°\right) = arcsen\ 1{,}25$$

Matemáticamente, el problema no tiene solución. Ello se debe a que el ángulo incidente es superior al ángulo límite, y, por tanto, el rayo no se refracta, sino que se refleja en el interior del prisma.

Con el segundo rayo haremos lo mismo. Al aplicar la ley de Snell:

$$\frac{sen\ \hat{i}_2}{sen\ \hat{r}_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r}_2 = arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}_2\right)$$

$$\hat{r}_2 = arcsen\left(\frac{1}{1,8} \cdot sen\ 45°\right) = 23,13°$$

El rayo refractado sigue su camino en línea recta a través del cristal. En este caso:

$$\alpha = 180° - 60° - (90° - \hat{r}_2) = 180° - 60° - 90° + 23,13° = 53,13°$$

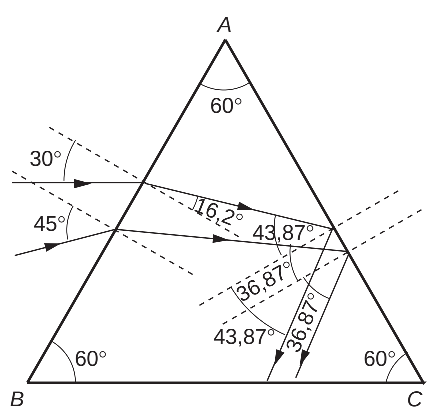
Por tanto, $\hat{i}'_2$ resulta:

$$\hat{i}'_2 = 90° - 53,13° = 36,87°$$

Aplicando ahora la ley de Snell:

$$\frac{sen\ \hat{i}'_2}{sen\ \hat{r}'_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \hat{r}'_2 = arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}'_2\right)$$

$$\hat{r}'_2 = arcsen\left(\frac{1,8}{1} \cdot sen\ 36,87°\right) = arcsen\ 1,08$$



En este caso, el rayo también se refleja en la superficie y sigue viajando por el interior del prisma, como se indica en la figura.

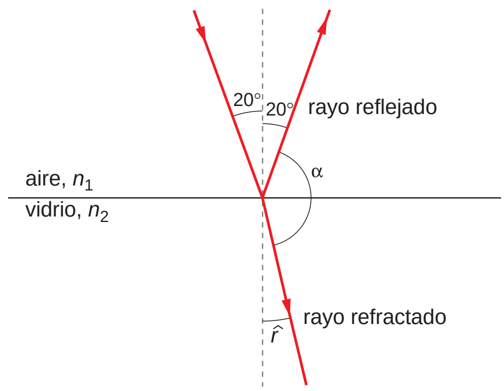
Tras este primer giro, el rayo incide sobre la cara *BC* del prisma, donde estudiaríamos de nuevo si se produce una reflexión o una refracción. De este modo, iríamos obteniendo la trayectoria completa del rayo en cada caso y calcularíamos el ángulo formado por los rayos cuando salgan de nuevo al aire.

31. Un rayo de luz incide oblicuamente sobre un vidrio plano de índice de refracción 1,52, produciéndose un rayo reflejado y otro refractado.

a) Si el ángulo de incidencia es de 20°, determina el ángulo α que forman entre sí los rayos reflejado y refractado.

b) Si el ángulo de incidencia es un poco mayor que 20°, ¿crecerá o decrecerá el ángulo α del apartado anterior?

a) Cuando el rayo de luz incide sobre la superficie de separación entre el aire y el vidrio, una fracción del haz es reflejada con el mismo ángulo, pero otra es refractada, de forma que este rayo se acerca a la normal a la superficie de separación.



El ángulo que forma el rayo refractado con la normal lo obtenemos aplicando la ley de Snell:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i}$$

$$sen\ \hat{r} = \frac{1}{1{,}52} \cdot sen\ 20° = 0{,}22$$

$$\hat{r} = arcsen\ 0{,}22 = 13°$$

En cuanto al rayo reflejado, el ángulo que forma con la normal coincide con el ángulo de incidencia, lo cual se puede comprobar aplicando de nuevo la ley de Snell y teniendo en cuenta que ambos rayos se propagan por el mismo medio:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_1 \cdot sen\ \hat{r}$$

$$sen\ \hat{i} = sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{i} = \hat{r}$$

El ángulo que forman entre sí el rayo refractado y el rayo reflejado es:

$$\alpha = 180° - 20° - 13° = 147°$$

b) Si aumenta el ángulo de incidencia, tanto el ángulo de refracción como el de reflexión aumentan, como puede deducirse de la ley de Snell, por lo que el ángulo α que forman los rayos reflejado y refractado disminuirá, tal como se desprende del razonamiento seguido en el apartado a) para calcular dicho ángulo.

$$\alpha = 180° - \hat{i} - \hat{r}$$

$$\text{Si } \hat{i} \text{ aumenta} \rightarrow \hat{r} \text{ aumenta} \rightarrow \alpha \text{ disminuye}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

32 **Un rayo de luz monocromático, que se propaga en un medio de índice de refracción 1,58, penetra en otro medio, de índice de refracción 1,23, formando un ángulo de incidencia de 15° respecto a la normal a la superficie de separación entre ambos medios.**

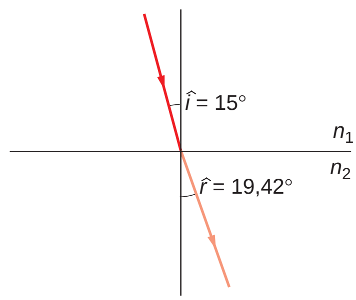
a) Determina el valor del ángulo de refracción correspondiente al ángulo de incidencia anterior. Haz un dibujo esquemático.

b) Calcula el ángulo límite.

a) El ángulo de refracción se calcula a partir de la segunda ley de Snell:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{r} = arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2} = arcsen\ \frac{1,58 \cdot sen\ 15°}{1,23} = 19,42°$$

El dibujo esquemático que se solicita es el siguiente:



b) El ángulo límite es aquel al que le corresponde un ángulo de refracción de 90°:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_L = n_2 \cdot sen\ 90° \rightarrow i_L = arcsen\ \frac{n_2 \cdot sen\ 90°}{n_1} = arcsen\ \frac{1,23 \cdot 1}{1,58} = 51,12°$$

33. Un rayo luminoso incide desde el agua sobre la superficie de separación con el aire con un ángulo de incidencia de 25°. Calcula el ángulo de refracción y el ángulo límite.

Datos: $n_{agua} = 1,33$; $n_{aire} = 1$

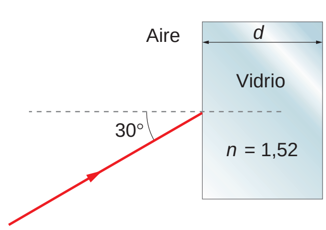
El ángulo de refracción que le corresponde es:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{r} = arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2} = arcsen\ \frac{1,33 \cdot sen\ 25°}{1} = 34,2°$$

Por su parte, el ángulo límite (aquel al que le corresponde un ángulo de refracción de 90°) es:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_L = n_2 \cdot sen\ 90° \rightarrow \hat{i}_L = arcsen\ \frac{n_2 \cdot sen\ 90°}{n_1} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 90°}{1,33} = 48,75°$$

34. Un haz de luz de frecuencia $f = 5 \cdot 10^{14}$ Hz incide sobre un cristal de índice de refracción $n = 1,52$ y anchura d.



El haz incide desde el aire formando un ángulo de 30°. Calcula:

a) La longitud de onda de la luz incidente en el aire y en el cristal.

b) El ángulo que forma el haz de luz cuando atraviesa el cristal y entra de nuevo en el aire.

a) La expresión que relaciona la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación de una onda es la siguiente:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia es una magnitud propia de la onda, cuyo valor no varía cuando la onda pasa de un medio a otro y que, en el caso del aire, $v = c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, la longitud de onda que se obtiene en el aire es:

$$\lambda_{aire} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^4} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

En el caso del vidrio:

$$\lambda_{vidrio} = \frac{v_{vidrio}}{f}$$

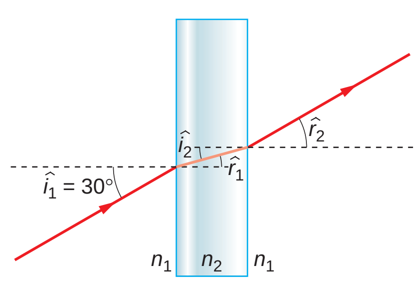
donde, teniendo en cuenta la definición de índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \to n_{vidrio} = \frac{c}{v_{vidrio}} \to v_{vidrio} = \frac{c}{n_{vidrio}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}52} = 1{,}97 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$\lambda_{vidrio} = \frac{v_{vidrio}}{f} = \frac{1{,}97 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 3{,}99 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) El ángulo se calcula aplicando la ley de Snell de la refracción dos veces, de acuerdo con la siguiente figura:



Por tanto, en la primera refracción:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_1 = n_2 \cdot sen\ \hat{r}_1 \qquad [1]$$

Y en la segunda:

$$n_2 \cdot sen\ \hat{i}_2 = n_1 \cdot sen\ \hat{r}_2$$

Como el ángulo de incidencia de la segunda refracción, $\hat{i}_2$, coincide con el ángulo de refracción de la primera, $\hat{r}_1$:

$$n_2 \cdot sen\ \hat{r}_1 = n_1 \cdot sen\ \hat{r}_2 \qquad [2]$$

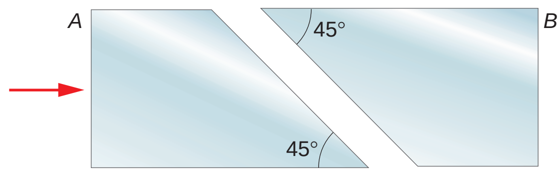
Al comparar las expresiones [1] y [2] se obtiene:

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i}_1 = n_1 \cdot sen\ \hat{r}_2 \rightarrow \hat{i}_1 = \hat{r}_2 = 30°$$

Por tanto, el ángulo emerge del cristal con un ángulo igual al ángulo de incidencia.

NOTA: es interesante comparar la resolución de esta actividad con la que corresponde a la actividad 28.

35. Un dispositivo óptico está formado por dos prismas idénticos de índice de refracción 1,65, con bases biseladas a 45° y ligeramente separados.

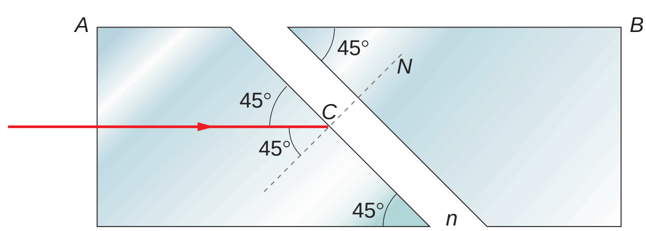


Si se hace incidir un rayo láser perpendicularmente a la cara *A* del dispositivo, discute físicamente si es de esperar que exista luz emergente por la cara *B* en los casos:

a) El espacio separador entre los prismas es aire, cuyo índice de refracción es 1.

b) El espacio separador entre los prismas es agua, cuyo índice de refracción es 1,33.

Puesto que el rayo de luz incide en la cara *A* del prisma perpendicularmente a su superficie, no se producirá ninguna desviación del haz al atravesar dicha superficie y el rayo llegará a la cara biselada incidiendo con un ángulo de 45°:



En este punto se producirá la refracción; el rayo continuará hacia el segundo prisma solo si el ángulo de incidencia es menor que el ángulo límite de refracción, lo que dependerá del valor del índice de refracción del medio que separa ambos prismas.

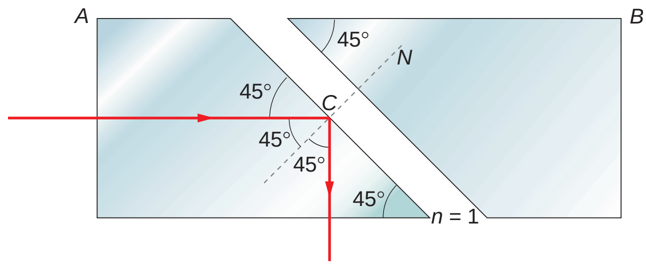
a) En el caso de que los prismas se encuentren rodeados de aire, tenemos:

$$n_{prisma} \cdot sen\ \hat{i}_L = n_{aire} \cdot sen\ 90°$$

$$sen\ \hat{i}_L = \frac{n_{aire}}{n_{prisma}} \cdot sen\ 90° \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{1}{1{,}65} = 0{,}61$$

$$\hat{i}_L = arcsen\ 0{,}61 = 37{,}6° < 45°$$

Como el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el rayo se refleja completamente con un ángulo de reflexión de 45°, por lo que el rayo sale por la cara inferior del primer prisma sin llegar a la cara *B* del segundo prisma.



b) Si el espacio separador es agua, el ángulo límite en la cara biselada es:

$$sen\ \hat{i}_L = \frac{n_{agua}}{n_{prisma}} \cdot sen\ 90° \rightarrow sen\ \hat{i}_L = \frac{1,33}{1,65} = 0,81$$

$$\hat{i}_L = arcsen\ 0,81 = 54,1° > 45°$$

En este caso, el ángulo de incidencia es menor que el ángulo límite. Por tanto, el rayo será refractado con un ángulo:

$$1,65 \cdot sen\ 45° = 1,33 \cdot sen\ \hat{r}$$

$$sen\ \hat{r} = \frac{1,65}{1,33} \cdot sen\ 45° = 0,877 \rightarrow \hat{r} = 61,3°$$

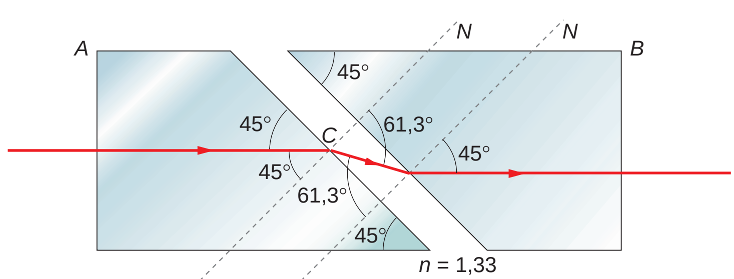
Como se aprecia en la siguiente figura, este ángulo coincide con el ángulo de incidencia en el segundo prisma, en el que se produce una segunda refracción (en este caso, el rayo se propaga de un medio menos refringente a otro más refringente).

El ángulo con que sale el rayo refractado es 45°, lo que podemos deducir de la simetría del problema o aplicando de nuevo la ley de Snell:

$$1,33 \cdot sen\ 61,3° = 1,65 \cdot sen\ \hat{r}_2$$

$$sen\ \hat{r}_2 = \frac{1,33}{1,65} \cdot sen\ 61,3° = 0,71 \rightarrow \hat{r}_2 = 45°$$

Por tanto, el rayo llega a la cara *B* perpendicularmente a esta, por lo que emerge del segundo prisma sin desviarse; es decir, con la misma dirección con que incidió en la cara *A* del primer prisma.



NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

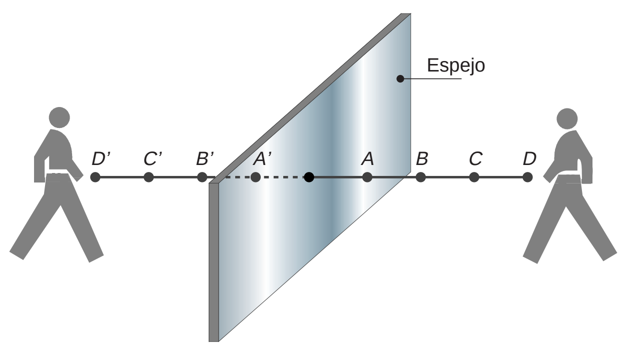
12 ÓPTICA GEOMÉTRICA

12.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN UN ESPEJO PLANO

1. En la imagen que se forma de un objeto en un espejo plano se invierten la izquierda y la derecha, pero no la parte de arriba y la parte de abajo de la imagen. ¿Puedes explicar este fenómeno?

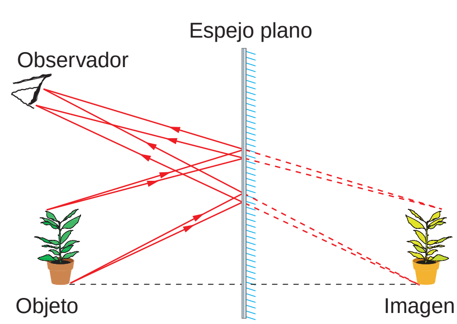
2. Analiza de nuevo la cuestión anterior y contéstala con perspectiva espacial. Si tenemos en cuenta las tres direcciones del espacio, ¿qué es, en realidad, lo que invierte un espejo?

En un espejo no se invierten la izquierda y la derecha. Lo que se invierte es el sentido en cualquier dirección perpendicular al espejo que proceda de un objeto. Ello hace que, para nuestra percepción, parezcan invertidas derecha e izquierda, ya que tendemos a posicionarnos en el lugar de la imagen (dando un giro mental de 180°). Por eso nos parece que se produce esa inversión, pero la que en realidad se produce es perpendicular al plano del espejo. Fíjate en la siguiente ilustración.



3. Deseas hacerte una foto a ti mismo y, para ello, te colocas con la cámara de fotografiar delante de un espejo a 5 m de él. ¿A qué distancia debes enfocar la cámara para que la fotografía salga nítida?

En un espejo plano, la distancia entre la imagen y el espejo es igual a la que hay entre el objeto y el espejo, como se observa en la siguiente figura:



Los rayos que llegan a la cámara son los rayos reflejados por el espejo; por tanto, la cámara debe enfocarse a una distancia que sea el doble de la existente entre ella y el espejo; de ese modo se impresionará correctamente la película.

12.2. EL DIOPTRIO PLANO

1. Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º.

La lámina de vidrio, situada en el aire, tiene un espesor de 5 cm y un índice de refracción de 1,5.

a) Dibuja el camino seguido por el rayo.

b) Calcula la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

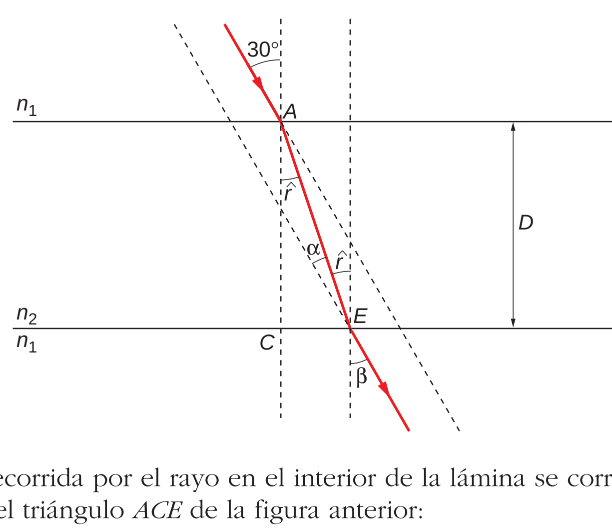
c) Calcula el ángulo que forma con la normal el rayo emergente de la lámina.

a) Cuando un haz de luz monocromática incide en una lámina de caras plano-paralelas, se refracta en ambas caras, y vuelve a salir al exterior con un ángulo igual al de incidencia.

El valor del ángulo que forma el rayo con la normal después de la primera refracción se calcula de acuerdo con la ley de Snell de la refracción.

$$n_1 \cdot sen\ \hat{i} = n_2 \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow \hat{r} = arcsen\ \frac{n_1 \cdot sen\ \hat{i}}{n_2} = arcsen\ \frac{1 \cdot sen\ 30°}{1,5} = 19,47°$$

El camino seguido por el rayo desde que incide en la lámina hasta que la atraviesa es el que se muestra en la siguiente ilustración:



b) La longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina se corresponde con la hipotenusa del triángulo *ACE* de la figura anterior:

$$d = \overline{AE} = \frac{\overline{AC}}{cos\ \hat{r}} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{cos\ 19,47°} = 0,053 \text{ m} = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

c) Como se ha indicado en el apartado a), el ángulo con que emerge es igual al ángulo con que incide en la lámina, en este caso, 30°. Lo anterior se puede demostrar aplicando la ley de Snell a la segunda refracción:

$$n_2 \cdot sen\, \hat{r} = n_1 \cdot sen\, \beta \to \beta = arcsen\, \frac{n_2 \cdot sen\, \hat{r}}{n_1} = arcsen\, \frac{1{,}5 \cdot sen\, 19{,}47°}{1} = 30°$$

12.3. EL DIOPTRIO ESFÉRICO

1. Un dioptrio esférico convexo, de 25 cm de radio, separa dos medios cuyos índices de refracción son 1,25 y 2, respectivamente. Calcula la posición de la imagen de un punto situado 50 cm a la izquierda del vértice del dioptrio.

Como hemos visto en la unidad, la ecuación del dioptrio esférico para rayos paraxiales es:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}$$

Para un dioptrio esférico convexo, el radio es positivo, ya que el centro está situado a la derecha del vértice del sistema óptico. Teniendo en cuenta el criterio de signos establecido para medir las otras magnitudes, resulta:

$$s' = \frac{n'}{\dfrac{n' - n}{R} + \dfrac{n}{s}} = \frac{2}{\dfrac{2 - 1{,}25}{0{,}25} + \dfrac{1{,}25}{-0{,}5}} = 4 \text{ m}$$

2. En la actividad anterior, ¿qué ocurriría si el dioptrio fuese cóncavo?

La ecuación del dioptrio esférico para rayos paraxiales es:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}$$

Para un dioptrio esférico cóncavo, el radio es negativo, ya que el centro está situado a la izquierda del vértice del sistema óptico. Teniendo en cuenta el criterio de signos establecido para medir las otras magnitudes, resulta:

$$s' = \frac{n'}{\dfrac{n' - n}{R} + \dfrac{n}{s}} = \frac{2}{\dfrac{2 - 1{,}25}{-0{,}25} + \dfrac{1{,}25}{-0{,}5}} = -0{,}364 \text{ m}$$

3. Calcula las distancias focales de un dioptrio esférico de 20 cm de radio que separa el aire, de índice de refracción la unidad, del vidrio, de índice de refracción 1,4. Calcula el aumento angular, γ, para un objeto situado en el aire a 10 cm del dioptrio.

Obtenemos la distancia focal imagen aplicando la ecuación del dioptrio esférico:

$$f = -R \cdot \frac{n}{n' - n} = -20 \cdot \frac{1}{1{,}4 - 1} = -50 \text{ cm}$$

La distancia focal objeto es:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \rightarrow f' = -\frac{f \cdot n'}{n} = -\frac{-50 \cdot 1{,}4}{1} = 70 \text{ cm}$$

Para calcular el aumento angular obtenemos, en primer lugar, el aumento lateral:

$$\beta = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$s = f + x \rightarrow x = s - f = -10 - (-50) = 40 \text{ cm}$$

Se obtiene:

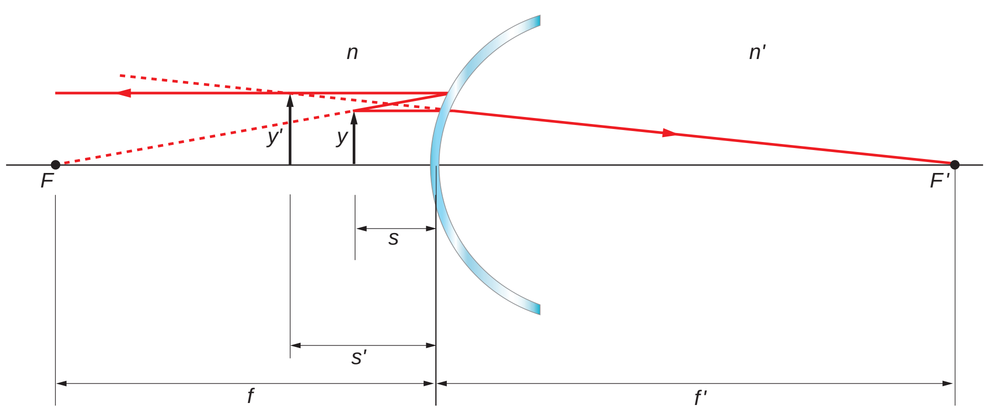
$$\beta = -\frac{f}{x} = -\frac{-50}{40} = 1{,}25$$

A partir de la relación entre el aumento lateral, β, y el angular, γ, obtenemos este último:

$$\gamma \cdot \beta = \frac{n}{n'} \rightarrow \gamma = \frac{n}{n' \cdot \beta} = \frac{1}{1{,}4 \cdot 1{,}25} = 0{,}57$$

4. Dibuja la marcha de los rayos para un objeto situado a una distancia *s* < *f* en un dioptrio esférico.

La marcha de los rayos para un objeto situado a una distancia $s < f$ en un dioptrio esférico es la que se muestra en la figura:



12.4. ESPEJOS ESFÉRICOS

1. Delante de un espejo cóncavo de 50 cm de radio se coloca un objeto de 2 cm, a 30 cm del espejo. Calcula:

a) La distancia focal.

b) La posición y el tipo de imagen que se forma.

c) El tamaño aparente de la imagen.

a) En un espejo esférico, la distancia focal es la mitad del radio de curvatura:

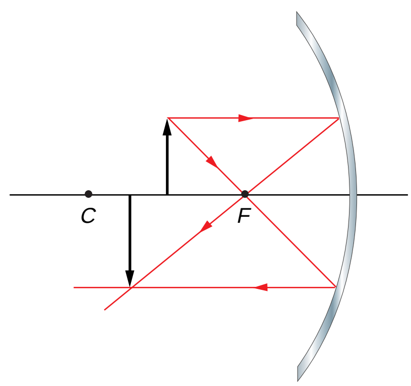
$$f = \frac{R}{2}$$

En un espejo cóncavo, el radio es negativo; la distancia focal resulta ser, por tanto:

$$f = \frac{-0,5}{2} = -0,25 \text{ m}$$

b) De la expresión que relaciona las posiciones del objeto y la imagen en un espejo esférico, podemos despejar la distancia imagen:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{2}{R} - \dfrac{1}{s}}$$



Al sustituir los datos, teniendo en cuenta el criterio de signos, la distancia imagen resulta:

$$s' = \frac{1}{\dfrac{2}{-0,5} - \dfrac{1}{-0,3}} = -1,5 \text{ m}$$

Como el espejo es cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el centro de curvatura, la imagen que se forma es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

c) El tamaño aparente de la imagen se calcula sustituyendo en la expresión:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \beta = -\frac{-1,5}{-0,3} = -5$$

Por tanto:

$$y' = \beta \cdot y = -5 \cdot 2 = -10 \text{ cm}$$

La imagen que se forma es cinco veces mayor que el objeto. El signo negativo indica que la imagen que vemos está invertida.

2. Resuelve la actividad anterior suponiendo que el espejo es convexo.

a) En un espejo esférico, la distancia focal es la mitad del radio de curvatura:

$$f = \frac{R}{2}$$

En un espejo convexo, el radio es positivo; la distancia focal resulta ser, por tanto:

$$f = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ m}$$

b) De la expresión que relaciona las posiciones del objeto y de la imagen en un espejo esférico, podemos despejar la distancia imagen:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{2}{R} - \dfrac{1}{s}}$$

Al sustituir los datos, teniendo en cuenta el criterio de signos, la distancia imagen resulta:

$$s' = \frac{1}{\dfrac{2}{0,5} - \dfrac{1}{-0,3}} = 0,136 \text{ m}$$

Como el espejo es convexo, la imagen que se forma es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

c) El tamaño aparente de la imagen se calcula sustituyendo en la expresión:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \beta = -\frac{0,136}{-0,3} = 0,454$$

Por tanto:

$$y' = \beta \cdot y = 0,454 \cdot 2 = 0,91 \text{ cm}$$

La imagen que se forma es de menor tamaño ($\beta < 1$) que el objeto, y es derecha ($\beta > 0$).

3. Dado un espejo que forma una imagen real, invertida y de medida doble de un objeto situado a 20 cm del espejo:

a) Calcula el radio de curvatura del espejo.

b) Calcula la posición de la imagen.

c) Dibuja un esquema que muestre la marcha de los rayos.

a) Los espejos convexos dan imágenes virtuales; por tanto, el espejo ha de ser cóncavo (en él, la distancia del objeto al espejo y la distancia focal son negativas).

A partir de la expresión que proporciona el aumento lateral, podemos obtener la distancia de la imagen al espejo, s':

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow -s' = -\frac{y' \cdot s}{y} = -\frac{(-2 \cdot y) \cdot (-20)}{y} = -40 \text{ cm}$$

Y, a partir de ella, y utilizando la expresión de los espejos esféricos, el valor de f:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\rightarrow\frac{s'+s}{s'\cdot s}=\frac{1}{f}\rightarrow f=\frac{s'\cdot s}{s'+s}=\frac{(-40)\cdot(-20)}{-40-20}=-13,3\text{ cm}$$

El radio de curvatura es:

$$R = 2 \cdot f = 2 \cdot (-13{,}3) = -16{,}6 \text{ cm}$$

12.5. SISTEMAS ÓPTICOS CENTRADOS

1. ¿A qué llamamos focos de un sistema óptico? ¿Qué son los planos principales?

Los focos de un sistema óptico son dos: el foco objeto y el foco imagen. El primero es el punto, *F,* por el que pasan los rayos incidentes que salen del sistema paralelos al eje óptico, y el segundo, *F',* el punto en que se cortan aquellos rayos que llegan al sistema paralelos al eje óptico.

Los planos principales son dos planos paralelos al eje óptico que pasan por los puntos principales (aquellos para los que el aumento lateral es igual a la unidad).

2. ¿Por qué restringimos el estudio de los sistemas ópticos a sistemas ópticos centrados?

Ello es debido a que, en una primera aproximación al estudio de la óptica geométrica, como la que estamos haciendo en este curso, resulta mucho más sencillo estudiar este tipo de sistemas.

12.6. LENTES ESFÉRICAS DELGADAS

1. ¿Podemos encender una hoguera con materiales de la tundra siberiana utilizando, para ello, un trozo de hielo opaco? ¿Y si es un trozo de hielo transparente? ¿Cómo lo harías?

Para prender la hoguera, se han de dar varias condiciones:

- El pedazo de hielo que utilicemos como lente ha de tener forma de lente convergente. De este modo, los rayos del Sol que inciden paralelamente a la lente son conducidos a un punto, el foco.
- El pedazo de hielo ha de ser transparente. De lo contrario, absorberá los rayos solares y no los refractará. Con un pedazo de hielo opaco no podremos encender la hoguera.
- El tiempo que debe transcurrir mientras concentramos los rayos solares debe ser inferior al tiempo que necesite el hielo para derretirse. Interesa, por tanto, que la vegetación que elijamos sea oscura, ya que los colores oscuros absorben la luz.

Para encender la hoguera, debemos colocar la lente orientada al Sol, de modo que su foco imagen, *F'*, esté situado en el punto en que hemos apilado los materiales de la tundra. De este modo, toda la luz que incide sobre la lente se concentrará sobre el foco, prendiendo dichos materiales.

2. Calcula la distancia focal de una lente cuya potencia es de −2 dioptrías. ¿De qué tipo es la lente?

La potencia de una lente está relacionada con la distancia focal imagen:

$$\frac{1}{f'} = D$$

Por tanto, la distancia focal es:

$$\frac{1}{f'} = D \rightarrow f' = \frac{1}{D} = \frac{1}{-2} = -0{,}5 \text{ m}$$

El signo negativo que obtenemos al calcular la distancia focal imagen indica que la lente es divergente.

3. Un objeto de 1 cm de altura se sitúa sobre el eje óptico de una lente convergente, a 50 cm del centro óptico de esta. Si la potencia de la lente es de 4 dioptrías, calcula la posición de la imagen y la distancia focal de la lente. Supón que la lente se encuentra en el aire.

Calculamos la distancia focal imagen mediante la expresión:

$$\frac{1}{f'} = D \rightarrow f' = \frac{1}{D} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ m}$$

Si sustituimos ahora en la ecuación fundamental de las lentes delgadas, resulta:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{-0{,}5}} = 0{,}5 \text{ m}$$

4. Una lente bicóncava simétrica posee unos radios de curvatura de 20 cm y está formada por un plástico con un índice de refracción de 1,7. Calcula:

a) La velocidad de la luz en el interior de la lente.

b) La potencia óptica de la lente.

a) El índice de refracción de un medio es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la que tiene cuando se propaga por su interior. Por tanto:

$$n = \frac{c}{v_{plástico}} \rightarrow v_{plástico} = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}7} = 1{,}76 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) La potencia óptica de una lente es la inversa de su distancia focal imagen, f', que podemos obtener a partir de la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \rightarrow P = (1{,}7-1) \cdot \left(\frac{1}{-0{,}2} - \frac{1}{0{,}2}\right) = -7 \text{ dioptrías}$$

12.7. CONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES EN LENTES DELGADAS

1. ¿Podemos distinguir, con relativa facilidad, una lente convergente de una divergente? ¿Cómo puede hacerse?

Vistas desde el lado por el que recibe la luz, las lentes convergentes son convexas, mientras que las divergentes son cóncavas. Por tanto, resulta sencillo diferenciarlas; basta con pasar el dedo por encima de una para percibir cómo es la curvatura.

2. Un objeto de 0,04 m de altura está situado a 0,40 m de una lente convergente de 0,25 m de distancia focal. Calcula la posición y el tamaño de la imagen.

Los datos que proporciona el enunciado de la actividad son los siguientes:

$$y = 0{,}04 \text{ m} \quad ; \quad s = -0{,}4 \text{ m} \quad ; \quad f' = 0{,}25 \text{ m}$$

La posición de la imagen la obtenemos aplicando la expresión general de las lentes esféricas delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{1}{f'} + \dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{1}{0{,}25} + \dfrac{1}{-0{,}4}} = 0{,}67 \text{ m}$$

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la expresión que proporciona el aumento lateral de la lente:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{0{,}67 \cdot 0{,}04}{-0{,}4} = -0{,}067 \text{ m}$$

De acuerdo con el resultado obtenido, el tamaño de la imagen es mayor que el del objeto, y, además, está invertida.

12.8. EL OJO HUMANO Y SUS DEFECTOS

1. Explica el mecanismo óptico de la visión de imágenes en el ojo humano.

El ojo humano es el encargado de "traducir" las ondas electromagnéticas que forman parte del espectro visible en impulsos nerviosos que se transmiten a través del nervio óptico hasta nuestro cerebro, que es el que los interpreta y el que realiza, en último término, el proceso de la visión.

El aparato receptor de las ondas luminosas es la retina, que contiene una serie de células sensoriales (conos y bastones), que pueden ser excitadas independientemente por un punto luminoso. Antes de llegar a ella, los rayos luminosos deben atravesar lo que podemos considerar un sistema dióptrico, formado por un conjunto de medios refringentes que conforman una especie de sistema de lentes que proyectan en la retina una imagen reducida e invertida de los objetos.

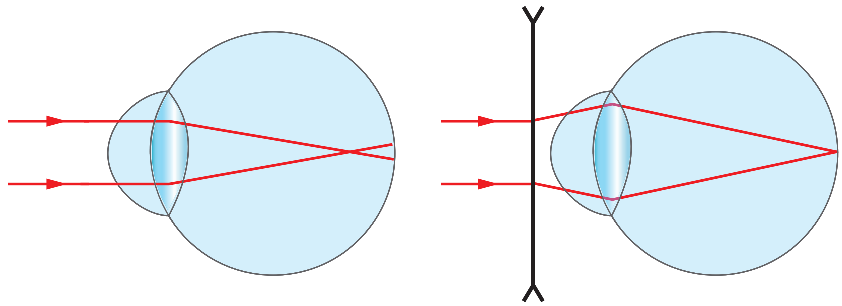
Las excitaciones nerviosas que se producen en la retina son transmitidas, en forma de impulsos nerviosos, hasta nuestro cerebro, que se encarga de interpretar estas señales y "producir" la visión.

2. A una persona con el mismo defecto óptico en ambos ojos se le colocan unas gafas de −2 dioptrías en cada lente (cristal). ¿Qué defecto tiene y cómo se corrige?

La potencia de una lente está relacionada con la distancia focal imagen:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2} = -0{,}5 \text{ m}$$

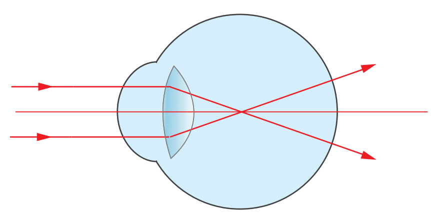
Al ser negativa la distancia focal imagen de la lente, debe tratarse de una lente divergente, que es el tipo de lente utilizada para corregir la miopía, como se muestra en la siguiente ilustración:



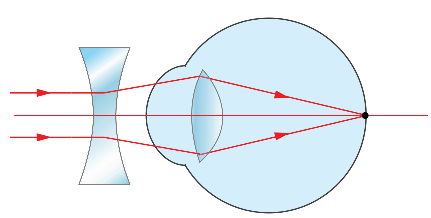
3. Un ojo miope tiene dificultades para ver objetos lejanos porque los rayos luminosos se focalizan en un punto anterior a la retina.

¿Qué tipo de lente utilizarías para corregir un ojo miope? ¿Por qué?

La figura inferior muestra un ojo miope. Los rayos de luz que se refractan en el cristalino no convergen sobre el punto en que el eje óptico corta la retina, sino que lo hacen antes.



Si colocamos una lente divergente (figura siguiente) delante de un ojo miope, los rayos de luz que llegan al ojo divergen antes de llegar al cristalino. Debido a ello, necesitarán recorrer una distancia mayor, que podemos ajustar, antes de converger en la retina, subsanando el defecto.



AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS. ABERRACIONES EN LOS SISTEMAS ÓPTICOS

1. Busca información acerca de la aberración esférica que afectaba al telescopio espacial *Hubble* cuando fue lanzado al espacio. ¿Cómo detectaron los científicos de la NASA este defecto?

El telescopio espacial Hubble fue lanzado al espacio en abril de 1990. Los científicos de la NASA, al estudiar las primeras imágenes enviadas por el telescopio, observaron que su nitidez no era la adecuada. Después de realizar algunas simulaciones con las imágenes obtenidas, se llegó a la conclusión de que había un defecto en el espejo principal, de elevadísimo coste; tenía aberración esférica.

Este problema ponía en tela de juicio el prestigio de la NASA, máxime cuando todavía estaba reciente el desastre del *Challenger*. Por ello se puso en marcha una de las reparaciones más caras de la historia, cuyo coste fue, en su momento, de 75 000 millones de pesetas (unos 450 millones de euros).

La ESA (Agencia Espacial Europea) fabrica unos pequeños espejos, del tamaño de una moneda, que la tripulación del transbordador espacial *Endeavour* adosó, en una delicada operación, a la superficie reflectante del espejo, lo que permitió corregir los defectos ópticos del telescopio.

De ahí en adelante el funcionamiento del telescopio ha rozado la perfección; tras sucesivas mejoras, como la instalación de nuevas cámaras, nos permitirá remontarnos a remotas edades del universo, de las que todavía poco o nada conocemos.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. La imagen de un objeto que se refleja en un espejo plano será:

a) Real, invertida y más pequeña.

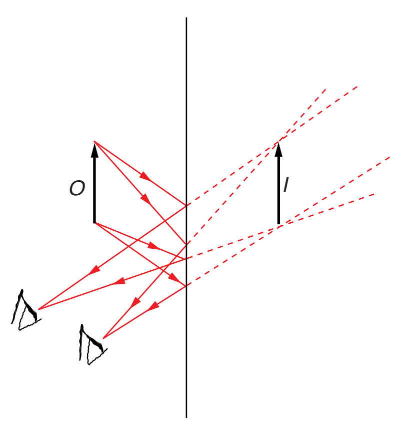
b) Virtual, invertida y del mismo tamaño.

c) Real, derecha y del mismo tamaño.

d) Virtual, derecha y del mismo tamaño.

e) Virtual, derecha y más pequeña.

La imagen de un objeto que se forma tras reflejarse dicho objeto en un espejo plano es:



- Del mismo tamaño: la altura objeto y la altura imagen son iguales.
- Derecha: el objeto no se ve boca abajo; la imagen no está invertida.

- Virtual: La imagen se forma al hacer concurrir en un punto al otro lado del espejo rayos que divergen tras reflejarse en el espejo.

La respuesta correcta es **d).**

NOTA: No debemos confundir imagen “invertida” con imagen “girada”. Una imagen invertida está boca abajo, mientras que una imagen girada es la que tiene la izquierda y la derecha cambiadas.

2. ¿Qué se entiende por foco y distancia focal en un espejo cóncavo y en uno convexo?

La distancia focal en el espejo es única, y coincide, en valor y signo, con la mitad del radio de curvatura:

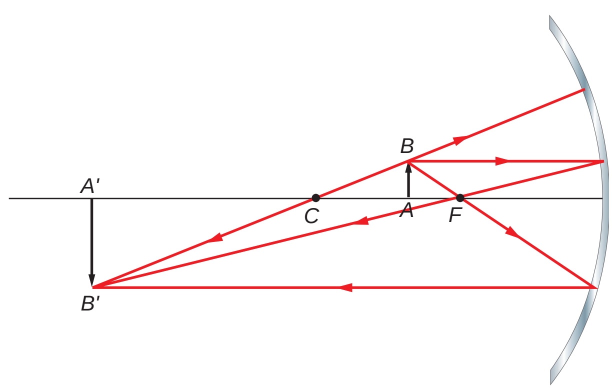
$$f = f' = \frac{R}{2}$$

El foco es el punto donde se forma la imagen de los rayos que inciden paralelos al eje, y la distancia focal es la existente entre este y el espejo.

Si el espejo es cóncavo, la distancia focal y el radio de curvatura son negativos, y si es convexo, son positivos.

3. Explica gráficamente la formación de la imagen en un espejo cóncavo cuando el objeto se encuentra entre el foco y el centro de curvatura.

En el caso que propone el enunciado, la imagen que se obtiene es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto, como se muestra en la ilustración:

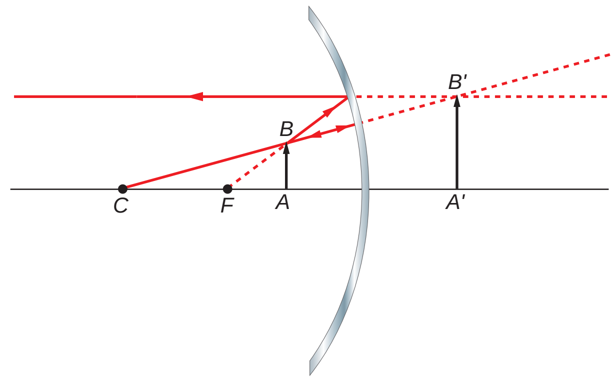


4. Realizando las construcciones gráficas oportunas, deduce qué características tiene la imagen que se forma en un espejo cóncavo esférico cuando el objeto se halla:

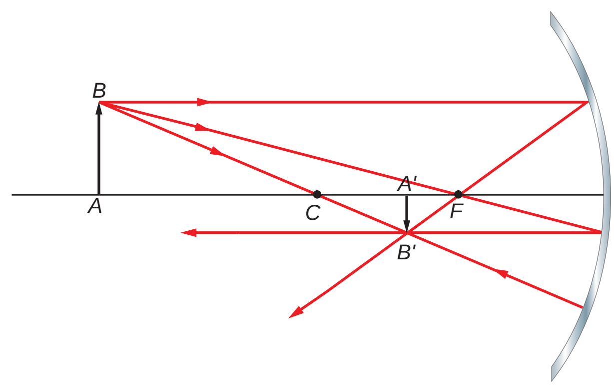
a) Entre el foco y el vértice del espejo.

b) A una distancia mayor que el radio de curvatura del espejo.

a) La imagen que se forma es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto, como se muestra a continuación:



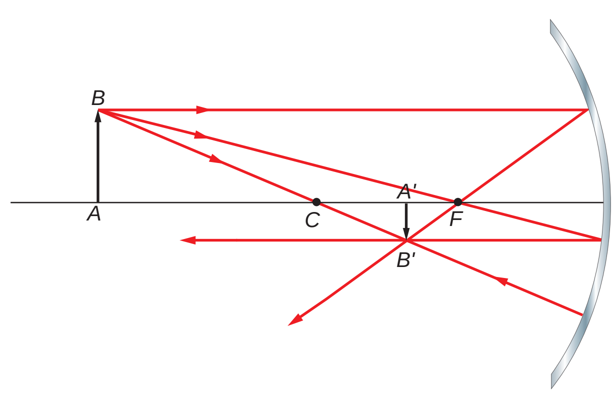
b) Cuando el objeto se halla a una distancia mayor que el radio de curvatura del espejo, la imagen que se forma es real, invertida y de menor tamaño que el objeto:



5. ¿En qué condiciones producirá un espejo cóncavo una imagen derecha? ¿Una imagen virtual? ¿Una imagen menor que el objeto? ¿Mayor que el objeto? Incluye en la resolución los diagramas o esquemas oportunos.

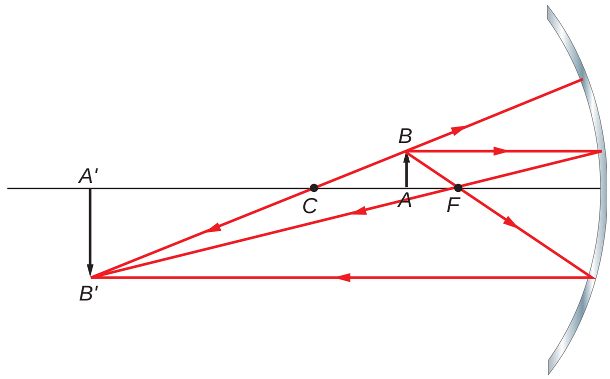
Dependiendo de dónde coloquemos el objeto, las imágenes que puede formar un espejo cóncavo pueden ser como las que se muestran a continuación:

a) Objeto situado a una distancia superior al radio de curvatura:



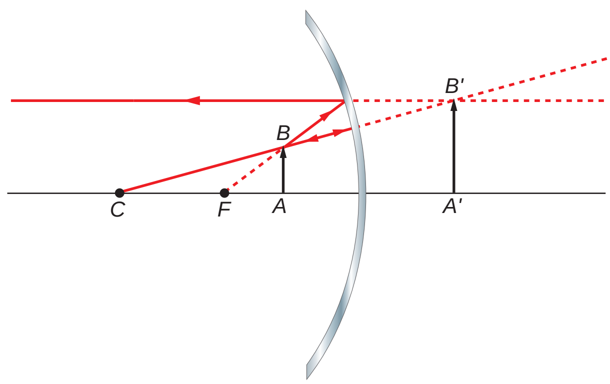
La imagen que se forma es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) Objeto situado entre el foco y el centro de curvatura:



La imagen que se forma es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

c) Objeto situado entre el foco y el espejo:



La imagen que se forma es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

Por tanto:

- Se formará una imagen virtual y derecha en el caso **c).**
- La imagen será menor que el objeto en el caso **a).**
- La imagen será mayor que el objeto en los casos **b)** y **c).**

6. Di si es cierto o falso y razona la respuesta: "La imagen que se obtiene con un espejo convexo es siempre real y mayor que el objeto".

Falso. Las imágenes que producen los espejos convexos son siempre virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto, independientemente de la posición donde este se encuentre. Por ello, los espejos convexos tienen un campo de visión muy amplio.

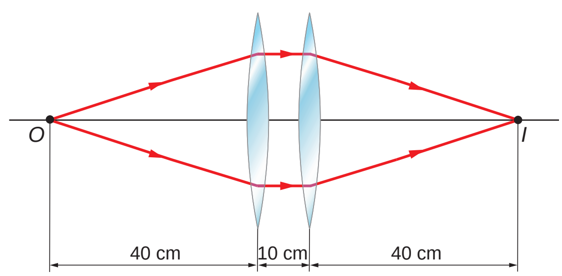
7. ¿Cuál es la distancia focal de un espejo esférico de radio *r*? Busca en la bibliografía cuáles son las ventajas de un espejo parabólico sobre uno esférico (recuerda cómo se define la parábola, desde un punto de vista geométrico).

En un espejo esférico el valor de la distancia focal es la mitad del valor del radio de curvatura del espejo:

$$f = f' = \frac{R}{2}$$

La ventaja de los espejos parabólicos sobre los esféricos radica en que, en ellos, cualquier rayo que pase por el foco y se refleje en el espejo sale paralelo al eje óptico, a diferencia de los esféricos, en que esa condición solo se cumple para rayos paraxiales (aquellos que tienen pequeña inclicación). Por ello se utilizan, por ejemplo, en antenas parabólicas y en los focos de alumbrado de los automóviles.

8. Un objeto puntual, *O*, está situado a 40 cm de la primera lente, separada de la segunda 10 cm. La luz que sale de *O* forma una imagen, *I*, 40 cm por detrás de la segunda lente.



Si las dos lentes son iguales, la distancia focal de ambas debe ser:

a) 10 cm.

b) 20 cm.

c) 40 cm.

d) 45 cm.

e) 80 cm.

Al estudiar la construcción de imágenes en lentes delgadas, vimos que:

- Un rayo que pasa por el foco objeto y se refracta en la lente emerge paralelo al eje óptico.
- Un rayo que llega paralelo al eje óptico pasa, tras refractarse, por el foco imagen.

Como se aprecia en la figura, eso es lo que ocurre, precisamente, en este caso. El rayo que procede del punto *O* se refracta en la primera lente y sale paralelo al eje. Esto nos indica que el punto *O* se encuentra sobre el foco de la primera lente.

En la segunda lente, el rayo que incide paralelo pasa por el foco imagen tras refractarse. Por tanto, el punto *I* es el foco imagen de la segunda lente.

La distancia focal de ambas lentes es 40 cm. La respuesta correcta es, por tanto, **c).**

9. La ecuación de dimensiones de la potencia de una lente es:

a) **M**

b) **L**

c) $\mathbf{L^{-1}}$

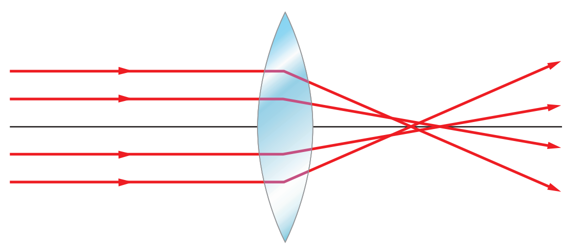
d) $\mathbf{M^{-1}}$

La potencia de una lente, *D*, es la inversa de la distancia focal. Por tanto, su ecuación de dimensiones es:

$$D = \frac{1}{f'} \rightarrow [D] = \frac{1}{[f']} = \frac{1}{\mathrm{L}} = \mathrm{L}^{-1}$$

La respuesta correcta es **d).**

10. **La figura muestra un defecto común a todas las lentes esféricas. Como puedes observar, los rayos paralelos que inciden sobre ella, que deberían converger en el foco, convergen en diferentes puntos a lo largo del eje.**



¿Qué nombre recibe este defecto?

a) **Refracción.**

b) **Hipermetropía.**

c) **Miopía.**

d) **Aberración esférica.**

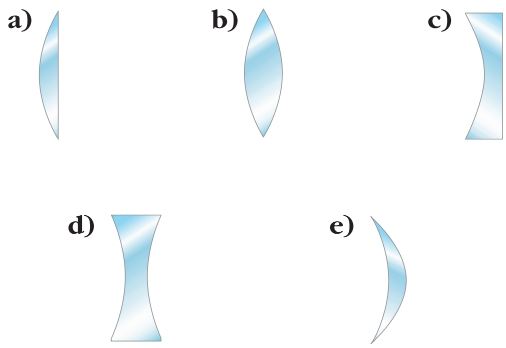
e) **Difracción.**

Este defecto se debe a que los rayos que llegan paralelos al eje cerca de los extremos de la lente convergen en un punto situado más cerca de esta que aquellos que llegan paralelos al eje a menor distancia del centro de la lente, que convergen más lejos. El defecto se denomina aberración esférica.

Para eliminarlo por completo, es necesario que la lente sea de tipo parabólico. De este modo, los rayos que inciden sobre la lente convergen en el foco de la parábola. No obstante, la aberración puede corregirse parcialmente utilizando diafragmas que limiten la abertura del haz de luz incidente o empleando una combinación de varias lentes.

La respuesta correcta es **d).**

11. **De las lentes que se indican, señala las que son convergentes y las que son divergentes. La luz incide desde la izquierda.**

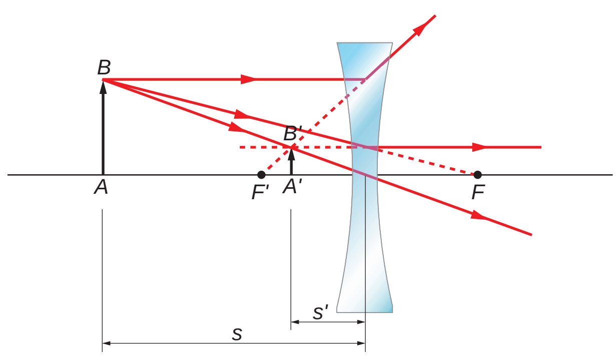


De acuerdo con la clasificación que hemos establecido en esta unidad en el libro del alumno para los seis posibles tipos de lentes, resulta:

Convergentes	Divergentes
a	c
b	d
e	

12. Demuestra que una lente divergente nunca puede formar una imagen real de un objeto real.

En la siguiente ilustración se muestra que la imagen que forma una lente divergente de un objeto es siempre virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto, independientemente del valor de la distancia objeto:



NOTA: se sugiere que los alumnos realicen el trazado de rayos con un objeto situado en $|s| < |f'|$.

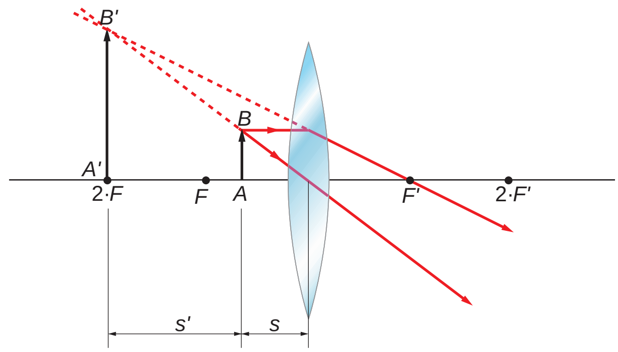
13. Para poder observar con detalle pequeños objetos, puede emplearse una lupa.

a) Explica el funcionamiento de este sistema óptico. ¿Qué tipo de lente es: convergente o divergente? ¿Dónde debe situarse el objeto a observar? La imagen que produce, ¿es real o virtual?, ¿derecha o invertida?

b) Ilustra tus explicaciones con un trazado de rayos.

a) Una lupa está formada por una lente convergente que se utiliza para aumentar el tamaño aparente de un objeto. El objeto debe situarse a una distancia menor que la distancia focal objeto, $|s| < |f|$.

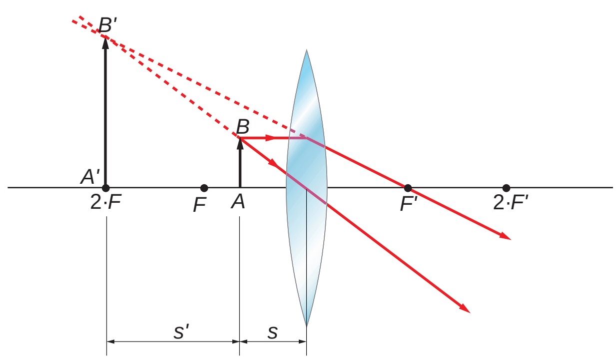
b) El trazado de rayos que corresponde a la imagen formada por una lupa es el siguiente:



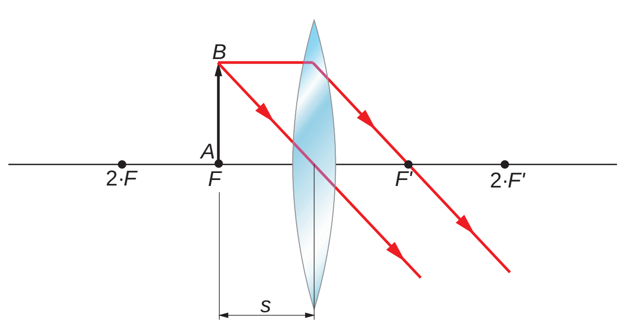
14. **¿Qué clase de imágenes se forman en una lente convergente si el objeto se encuentra a una distancia inferior a la focal? ¿Y si está en la focal?**

Dibuja la marcha de los rayos.

Si el objeto se encuentra a una distancia inferior a la focal, la imagen que se forma es virtual, derecha y mayor que el objeto, como se muestra en la ilustración:



Y si está en la focal, no se forma imagen, ya que los rayos emergen paralelos y se cortan en el infinito:



15. **Completa la frase:**

Los rayos de luz que inciden sobre una lente convergente, __________ a su eje principal, convergen en el foco. La distancia focal se mide desde ___________

hasta __________. Si un objeto se coloca, respecto de una lente convergente, a una distancia menor que la distancia focal, la imagen de dicho objeto será __________ y __________.

Los rayos de luz que inciden sobre una lente convergente, **paralelos** a su eje principal, convergen en el foco. La distancia focal se mide desde **el centro óptico** hasta **el foco de la lente.** Si un objeto se coloca, respecto a una lente convergente, a una distancia menor que la distancia focal, la imagen de dicho objeto será **derecha** y **de mayor tamaño.**

16. Para observar las patas de un insecto, se utiliza una lupa, formada por una lente convergente.

Si se quiere obtener una imagen derecha y mayor que el objeto que se observa, la lente debe colocarse a una distancia del insecto:

a) Mayor que dos veces la distancia focal.

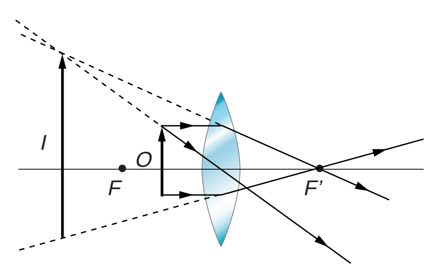
b) Igual a dos veces la distancia focal.

c) Entre una y dos veces la distancia focal.

d) Igual a la distancia focal.

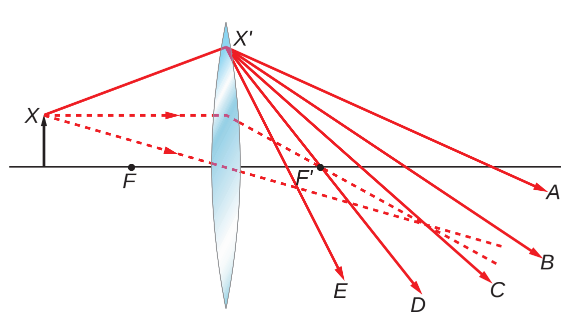
e) Menor que la distancia focal.

Cuando situamos el objeto (en este caso, el insecto) a una distancia inferior a la distancia focal, medida respecto al centro óptico, la imagen que obtenemos es de mayor tamaño, derecha y virtual.



En la figura se muestra cómo se forma ese tipo de imagen. La respuesta correcta es, por tanto, **e).**

17. Las líneas de puntos muestran los distintos caminos de dos rayos de luz a través de una lente convergente.



La línea continua que muestra el recorrido de un rayo de luz emitido por el punto *X* y que alcanza el punto *X'* de la lente es:

a) ***A***

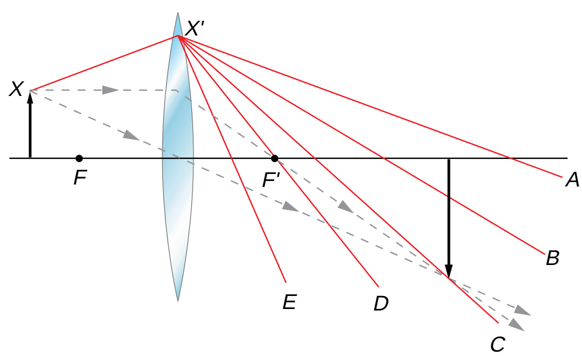
b) ***B***

c) ***C***

d) ***D***

e) ***E***

Como se aprecia en la ilustración, la respuesta correcta es **c),** ya que dicho rayo pasa por el punto imagen que corresponde al extremo de la flecha y que hemos calculado trazando el rayo que, tras salir paralelo, pasa por el foco, y el rayo que pasa por el centro óptico del sistema y que, por tanto, no se desvía.



18. Las personas con miopía acusada pueden resolver su defecto visual con una operación que consiste en rebajar la curvatura de la córnea. ¿Cómo lo explicas?

La miopía se produce porque la córnea y el cristalino hacen que converjan excesivamente los rayos luminosos que inciden en el ojo, que no focalizan sobre la retina.

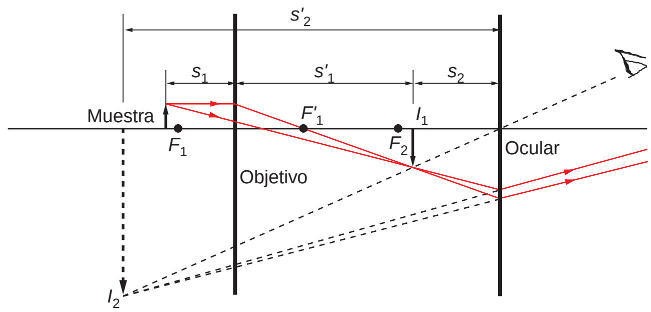
Si se disminuye la curvatura de la córnea, eliminando parte de esa capa, el conjunto córnea-cristalino no será tan convergente, y la imagen se formará en la retina. Es lo que se hace en la actualidad para corregir defectos de la visión asociados a la miopía e, incluso, al astigmatismo.

19. Dibuja un esquema con la formación de las imágenes en un microscopio. Describe su funcionamiento. Analiza las características de las imágenes formadas por sus lentes. ¿De qué factores depende el aumento?

El funcionamiento del microscopio es relativamente sencillo. La lente o las lentes del condensador enfocan la luz que emite la lámpara sobre la muestra, mientras que el diafragma, que puede abrirse o cerrarse a voluntad, es el encargado de controlar la intensidad luminosa.

En este microscopio, el aumento lateral de una imagen depende de las distancias focales del objetivo y del ocular, que son dos dispositivos formados por varias lentes.

El esquema muestra cómo se forma la imagen en un microscopio. El objeto a estudiar se sitúa un poco más allá del foco del objetivo; la distancia objeto, S_1, es aproximadamente igual a la distancia focal, f_1. La imagen que forma el objetivo es, por tanto, real e invertida y mucho más grande que el objeto.



El aumento lateral de un objetivo oscila en torno a 50. Esta imagen sirve de objeto para el ocular, que actúa como una lupa y proporciona una imagen virtual aumentada a una distancia confortable para la visión.

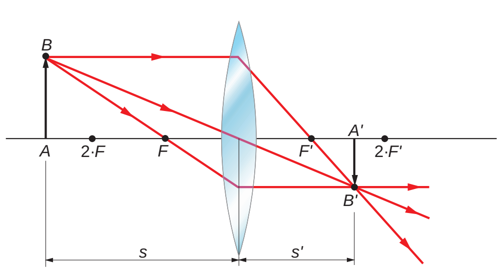
El aumento lateral total del microscopio es el producto de estos dos aumentos. Oscila entre 50 y 2000, aunque los aumentos mayores precisan un tratamiento muy cuidadoso de las preparaciones para evitar las distorsiones y las aberraciones ópticas que perjudican la imagen. De ahí que un buen microscopio sea caro, si bien es posible encontrar otros, de juguete, por muy poco dinero.

El aumento del microscopio depende de la distancia entre los focos y de las distancias focales del objeto y el ocular.

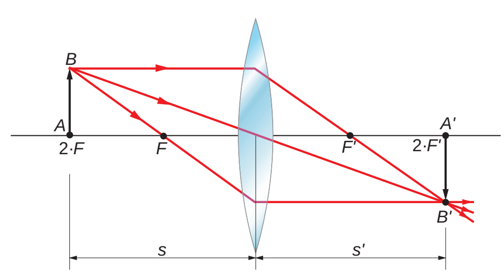
20. Describe, utilizando diagramas, distintos casos de formación de imágenes por medio de lentes convergentes.

Explica la miopía ayudándote de uno de esos diagramas.

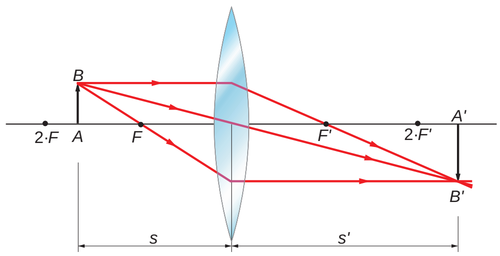
Las imágenes formadas por lentes convergentes son las que se muestran a continuación:



La imagen formada por una lente convergente de un objeto situado a una distancia de la lente superior a dos veces la distancia focal objeto, $s > 2 \cdot F$, *es real, invertida y menor que el objeto, cumpliendo la siguiente relación:* $F' < s' < 2 \cdot F'$.



La imagen formada por una lente convergente de un objeto cuya distancia objeto es el doble de la distancia focal objeto, $s = 2 \cdot F$, *es real, invertida y de igual tamaño que el objeto, cumpliendo la siguiente relación:* $s' = 2 \cdot F'$.



La imagen formada por una lente convergente de un objeto cuya distancia objeto cumple la relación F < s < *2 ·* F *es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto, siendo la distancia imagen:* s' > *2 ·* F'.

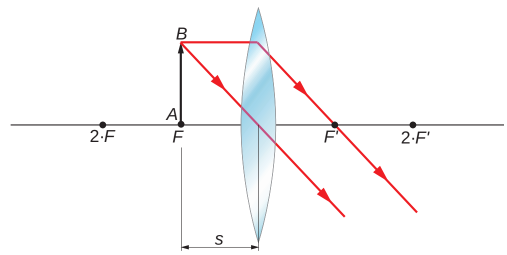
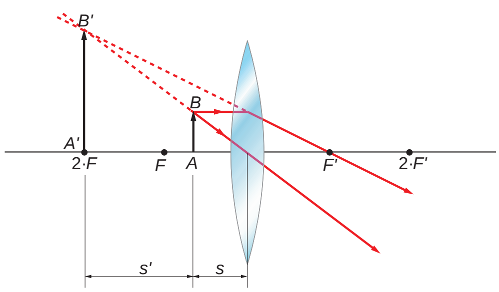
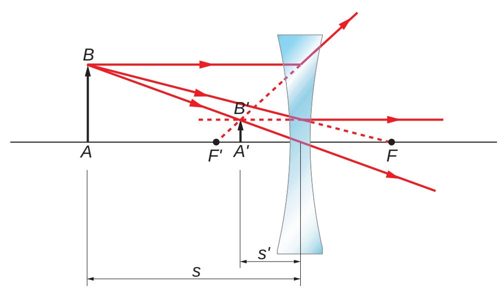


Imagen formada por una lente convergente de un objeto cuya distancia objeto es igual a la distancia focal objeto, s = F. *Como vemos, no se forma imagen, ya que los rayos se cortan en el infinito.*



*La imagen formada por una lente convergente de un objeto cuya distancia objeto es menor que la distancia focal objeto (*s < F*) es virtual, derecha y mayor que el objeto.*

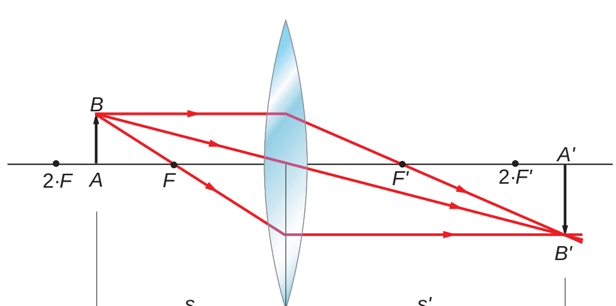


La miopía hace que la imagen de un objeto distante se enfoque delante de la retina. Para componer este defecto se utiliza una lente convergente.

21. Describe el funcionamiento de un proyector de diapositivas, e incluye un esquema gráfico de la formación de la imagen.

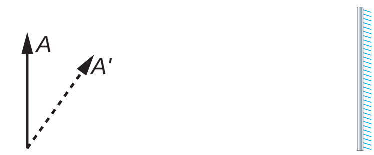
Un proyector de diapositivas consiste, básicamente, en una lente convergente. La diapositiva se coloca entre el foco y el doble de la distancia focal, formándose una imagen real (puede recogerse en una pantalla), de mayor tamaño (es lo que se pretende en el proyector), e invertida (por ello, las diapositivas se colocan invertidas, para poder ver la imagen derecha).

El esquema de formación de la imagen es el siguiente:



EJERCICIOS

22. Un objeto, representado por la flecha *A*, se encuentra frente a un espejo, como se aprecia en la figura.



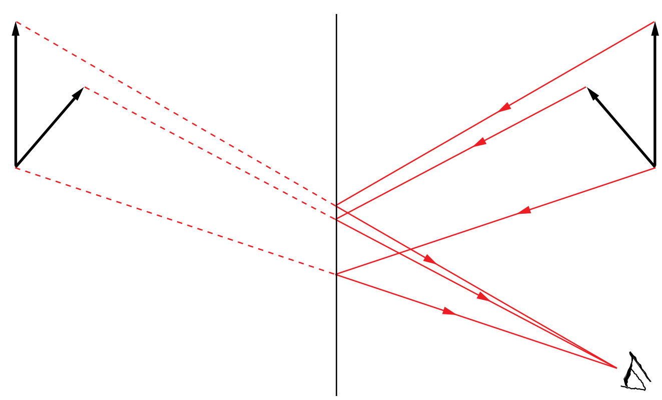
Dibuja la imagen, *I*, del objeto que se vería reflejada en el espejo.

a) Señala las tres características que describen esta imagen.

b) Observa ahora la posición del objeto, que viene dada por la línea de puntos. Como se aprecia en la figura, el objeto ha girado sobre su base. Dibuja la imagen que se obtiene en este caso.

a) Para la construcción de imágenes en un espejo plano debemos tener en cuenta las leyes de la reflexión:

El rayo incidente, la normal en el punto de incidencia y el rayo reflejado se encuentran en un plano normal a la superficie de reflexión, mientras que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.



b) La imagen que se obtiene presenta las siguientes características:

- Es del mismo tamaño.
- No está invertida: cuando nos miramos a un espejo no nos vemos boca abajo.
- Es virtual: como se aprecia en la ilustración, la imagen se forma al hacer concurrir en un punto al otro lado del espejo rayos que divergen.

c) La imagen que se obtiene ahora se ha superpuesto a la otra en la figura anterior. Al comparar las dos imágenes, vemos que, en este caso, la imagen está inclinada hacia el otro lado. Ello se debe, como ya hemos señalado en un ejercicio anterior, a que el espejo invierte el sentido de los vectores perpendiculares a él, dejando invariables los vectores paralelos al espejo.

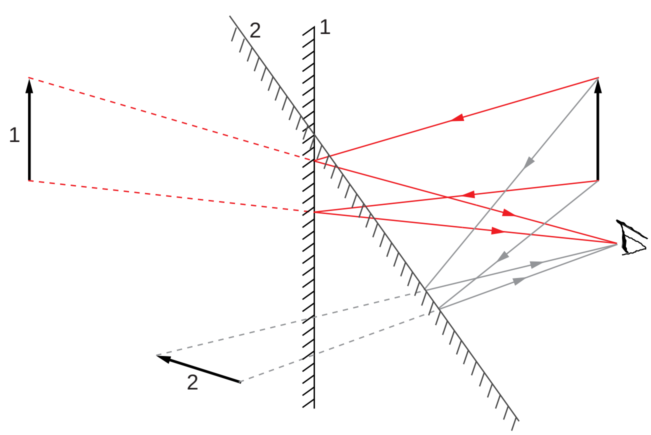
23. El espejo de la figura, que ocupaba inicialmente la posición *A*, gira y pasa a ocupar la posición *A'*.

Dibuja la imagen que formará el objeto *O*, tras reflejarse en el espejo.

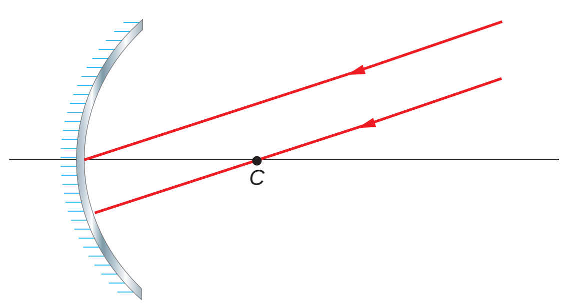
Para la construcción de imágenes en un espejo plano hemos de tener en cuenta las leyes de la reflexión:

El rayo incidente, la normal en el punto de incidencia y el rayo reflejado se encuentran en un plano normal a la superficie de reflexión, mientras que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

La imagen que veremos en cada caso es la que se muestra en la ilustración.



24. En un espejo esférico cóncavo (centro de curvatura *C*) se refleja la imagen de un objeto lejano. La figura muestra los rayos incidentes.



a) Sitúa el foco del espejo.

b) Dibuja la imagen que se forma.

c) Describe, con tres adjetivos, las características de la imagen que se forma.

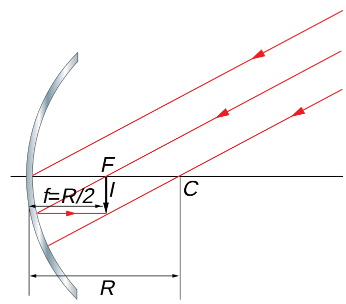
a) El punto C es el centro de curvatura; por tanto, está situado a una distancia R del vértice del espejo. Por su parte, al ser esférico el espejo, el foco del espejo se encuentra situado a una distancia $R/2$ del vértice del espejo.

b) Los rayos inciden paralelos, cosa que nos indica que la figura está situada en un punto muy alejado del espejo, lo que expresamos matemáticamente diciendo que el objeto se encuentra "en el infinito".

Teniendo esto en cuenta, al sustituir en la expresión que relaciona las posiciones objeto e imagen, obtenemos el siguiente resultado:

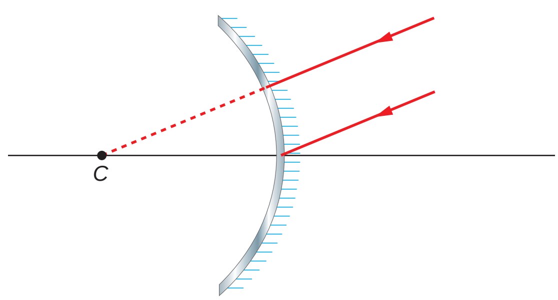
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow \frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow s' = \frac{R}{2}$$

La imagen se forma a una distancia $R/2$, sobre el foco.



c) La imagen que se obtiene es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

25. Resuelve de nuevo el ejercicio anterior para el caso del espejo esférico convexo que se muestra en la figura:



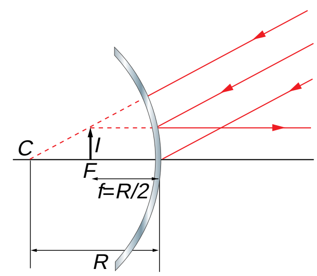
a) El punto C es el centro de curvatura; por tanto, está situado a una distancia R del vértice del espejo. Por su parte, al ser esférico el espejo, el foco del espejo se encuentra situado a una distancia $R/2$ del vértice del espejo.

b) Los rayos inciden paralelos, cosa que nos indica que la figura está situada en un punto muy alejado del espejo, lo que expresamos matemáticamente diciendo que el objeto se encuentra "en el infinito".

Teniendo esto en cuenta, al sustituir en la expresión que relaciona las posiciones objeto e imagen, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow \frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \rightarrow s' = \frac{R}{2}$$

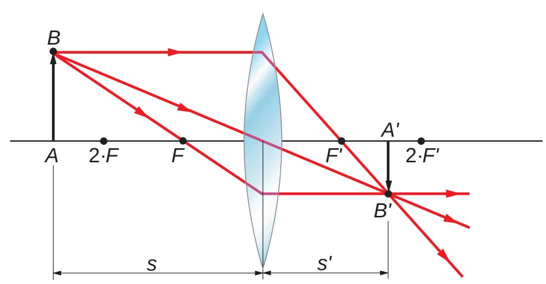
La imagen se forma a una distancia $R/2$, sobre el foco.



c) La imagen que se obtiene es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

26. En una lente convergente, un objeto se encuentra a una distancia *s* mayor que el doble de la distancia focal ($2 \cdot f$). Haz un esquema de la marcha de los rayos y explica qué clase de imagen se forma (real, virtual, derecha o invertida) y qué sucede con el aumento.

La imagen que se forma es real, invertida y menor que el objeto, como se muestra en la figura:



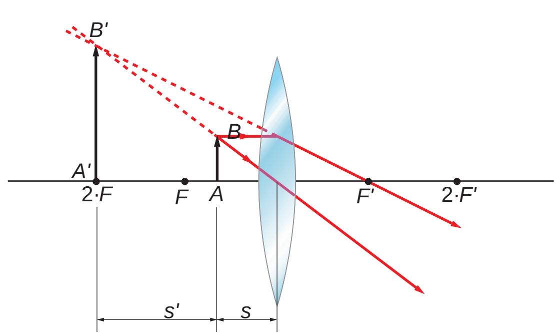
El aumento lateral es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Su valor, en el caso, será siempre menor que la unidad.

27. Para una lente convergente de distancia focal *f*, dibuja el diagrama de rayos para formar la imagen de un objeto de altura *y* situado a una distancia *s* del foco, en los casos en que $s < f$ y $s > f$.

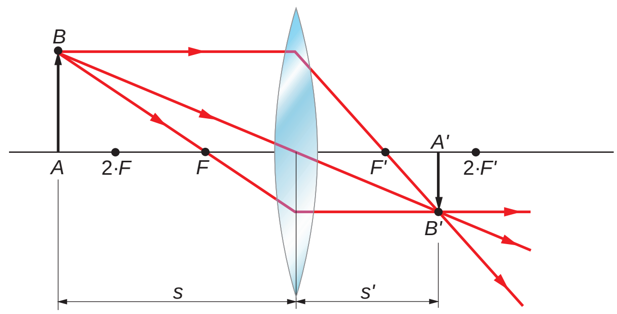
En el caso de que $s < f$, el diagrama de rayos es el siguiente:



La imagen que se obtiene es virtual, derecha y mayor que el objeto.

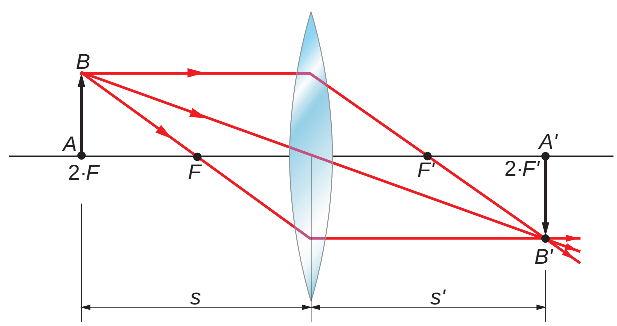
Si $s > f$, podemos distinguir tres casos:

- $s > 2 \cdot f$:



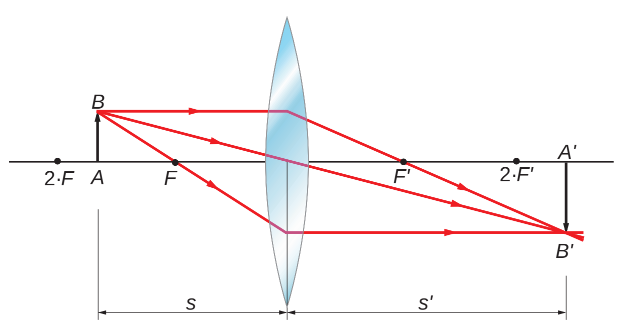
La imagen es real, invertida y menor que el objeto.

- $s = 2 \cdot f$:



La imagen es real, invertida y de igual tamaño que el objeto.

- $s < 2 \cdot f$:



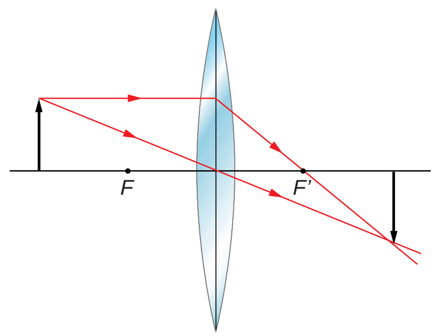
La imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

PROBLEMAS

28. Una lente convergente delgada tiene una potencia de 8 dioptrías. Si situamos un objeto a 25 cm de la lente, ¿a qué distancia se forma la imagen?

La expresión que relaciona la distancia objeto y la distancia imagen en una lente delgada es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = D$$



Sustituyendo en la expresión anterior, y teniendo presente el criterio de signos que adoptamos, la distancia imagen, s', resulta:

$$s' = \frac{1}{D + \frac{1}{s}} = \frac{1}{8 + \frac{1}{-0,25}} = 0,25 \text{ m}$$

29. Una lente convergente forma la imagen de un objeto lejano (haces de luz incidentes paralelos) a 20 cm de ella:

a) Calcula la distancia focal de la lente.

b) Si se coloca un objeto a 100 cm de la lente, ¿donde se formará la imagen?

c) Si se coloca un objeto a una distancia de la lente superior a la distancia focal, ¿cuáles serán las características de la imagen?

a) De acuerdo con las leyes de formación de las imágenes en lentes delgadas, cuando los rayos inciden paralelos al eje óptico de la lente, la imagen se forma en el foco de la lente. Por tanto, el enunciado nos proporciona indirectamente la distancia focal de la lente, $f' = 20$ cm.

b) La expresión que relaciona la distancia objeto y la distancia imagen en una lente delgada es:

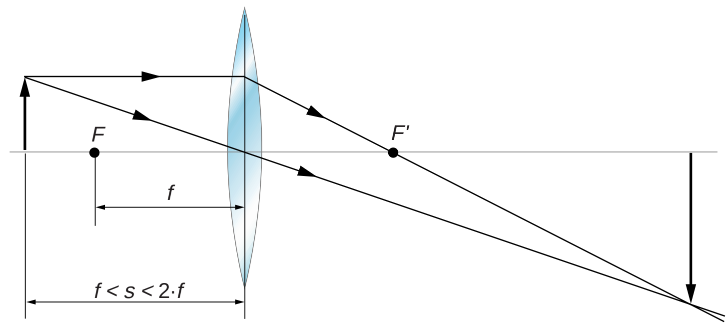
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Al despejar y sustituir, obtenemos la distancia imagen:

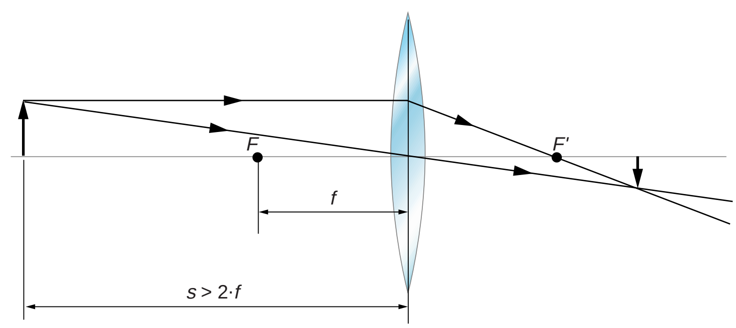
$$s' = \frac{f' \cdot s}{f' + s} = \frac{0,2 \cdot (-1)}{0,2 - 1} = 0,25 \text{ m}$$

c) Para comprobar, cualitativamente, cuáles son las características de la imagen, basta con dibujar la marcha de los rayos luminosos, situando un objeto delante del foco objeto. No obstante, distinguiremos dos casos:

- En el primero de ellos situaremos el objeto a una distancia tal que $f < s < 2 \cdot f$. La imagen que se obtiene es real, invertida y de mayor tamaño.



- En el segundo supondremos que el objeto está a una distancia $s > 2 \cdot f$. La imagen que se obtiene es real, invertida y de menor tamaño.



30. El radio de curvatura de un espejo cóncavo es 50 cm. Un cuerpo está situado a 1 m del espejo. ¿A qué distancia, en valor absoluto, se formará la imagen?

Para un espejo esférico se cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Al tratarse de un espejo cóncavo, el radio es negativo, $R = -0{,}5$ m, al igual que la distancia objeto, que también es negativa, $s = -1$ m. Por tanto:

$$s' = \frac{1}{\dfrac{2}{R} - \dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{2}{-0{,}5} - \dfrac{1}{-1}} = -\frac{1}{3}\ \text{m}$$

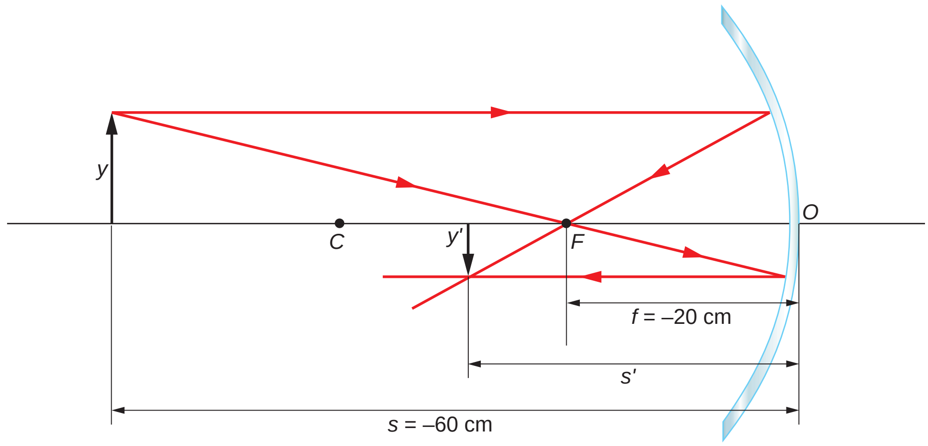
La imagen se forma a 0,33 metros del centro óptico.

31 Un objeto de 4 cm de altura se coloca delante de un espejo cóncavo de 40 cm de radio de curvatura. Determina la posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen en los dos casos siguientes:

a) Cuando el objeto se encuentra a 60 cm del espejo.

b) Cuando se encuentra a 10 cm.

a) La construcción geométrica que corresponde a este caso es la siguiente:



La imagen que se forma es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

La distancia imagen, s', es:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{1}{-20} - \dfrac{1}{-60}} = -30 \text{ cm}$$

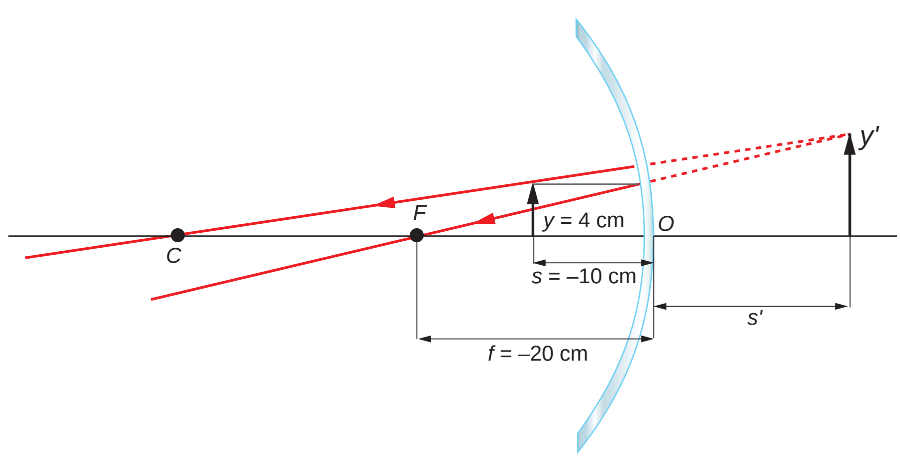
En el cálculo se ha tenido en cuenta que, en un espejo esférico, la distancia focal es la mitad del radio de cobertura: $f = R/2 = 40/2 = 20$ cm.

El tamaño de la imagen es:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{y \cdot s'}{s} = -\frac{4 \cdot (-30)}{-60} = -2 \text{ cm}$$

El signo negativo obedece a que la imagen está invertida.

b) En el caso de que el objeto esté a 10 cm del espejo:



La imagen que se forma es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

La posición en que se encuentra, s', es:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f} \rightarrow s'=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}}=\frac{1}{\frac{1}{-20}-\frac{1}{-10}}=20 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen es:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow y'=-\frac{y \cdot s'}{s}=-\frac{4 \cdot 20}{-10}=8 \text{ cm}$$

32. Delante de un espejo cóncavo con un radio de curvatura de 0,4 m se sitúa un objeto de 0,05 m de altura a una distancia de 0,6 m del vértice óptico. Calcula:

a) La distancia focal del espejo.

b) La posición y el tamaño de la imagen.

c) Representa gráficamente el problema.

a) La distancia focal del espejo es la mitad de su radio de curvatura:

$$f=\frac{R}{2}=\frac{-0,4}{2}=-0,2 \text{ m}$$

b) La posición de la imagen se obtiene del siguiente modo:

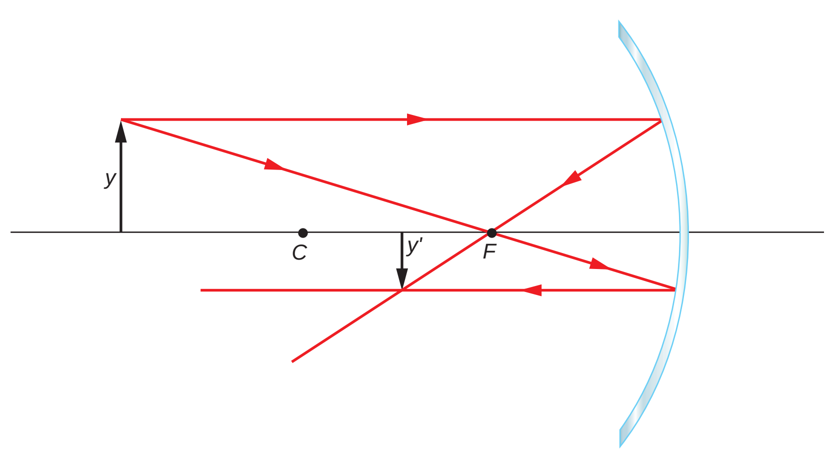
$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f} \rightarrow s'=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}}=\frac{1}{\frac{1}{-0,2}-\frac{1}{-0,6}}=-0,3 \text{ m}$$

Y su tamaño, a partir de la expresión que proporciona el aumento lateral:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow y'=-\frac{s' \cdot y}{s}=-\frac{-0,3 \cdot 0,05}{-0,6}=-0,025 \text{ m}$$

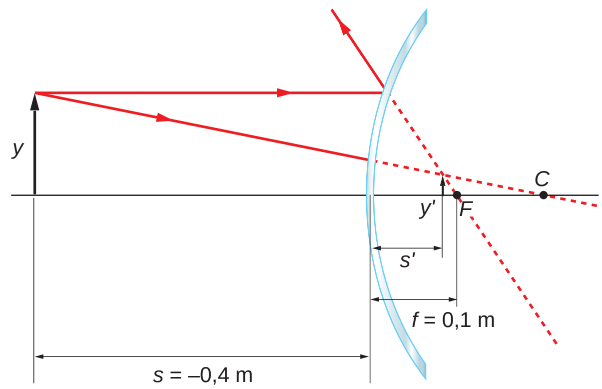
La imagen que se forma es real ($s' < 0$), invertida ($y' < 0$) y de menor tamaño que el objeto ($|y'| < |y|$).

c) La representación gráfica del problema es la siguiente:



33 **Determina gráfica y analíticamente la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 0,03 m de altura, situado sobre el eje óptico a 0,4 m del centro óptico de un espejo convexo de distancia focal 0,1 m.**

La representación gráfica de la situación que plantea el enunciado del problema es la siguiente:



La imagen que se forma es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

La determinación analítica de la posición es:

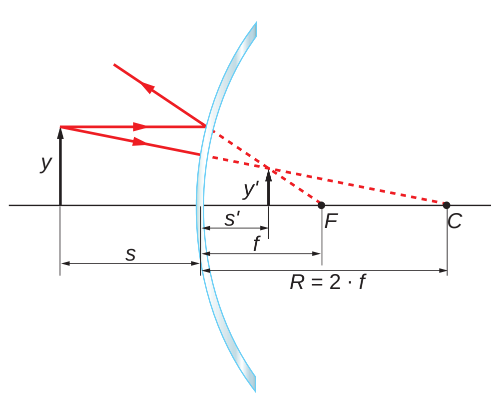
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0,1} - \frac{1}{-0,4}} = 0,08 \text{ m}$$

Y su tamaño:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s' \cdot y}{s} = -\frac{0,08 \cdot 0,03}{-0,4} = 0,006 \text{ m}$$

34. **Enfrente de un espejo convexo de 40 cm de radio de curvatura y a 25 cm de él, se encuentra un objeto perpendicular al eje óptico, de 0,5 cm de altura. Determina la posición y el tamaño de la imagen.**

El trazado geométrico de los rayos que representa la situación física propuesta por el problema es la siguiente:



La imagen que se forma es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto. La distancia imagen es:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{R/2} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{40/2} - \frac{1}{-25}} = 11,\widehat{1} \text{ cm}$$

Y su tamaño:

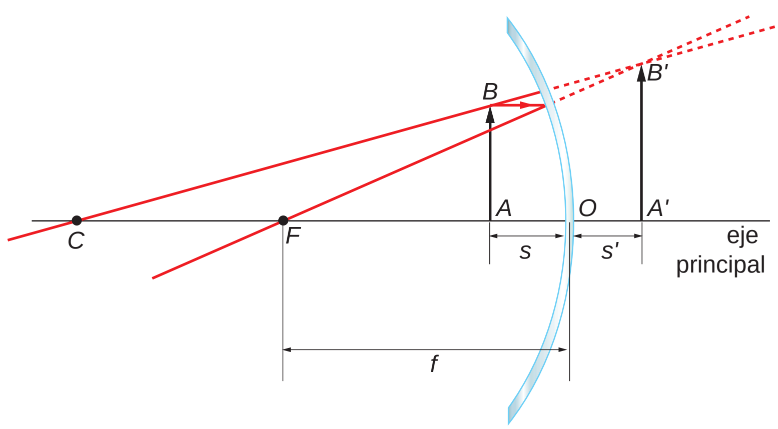
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s' \cdot y}{s} = -\frac{11,1 \cdot 0,5}{-25} = 0,22 \text{ cm}$$

35. Un objeto situado a 8 cm de un espejo esférico cóncavo produce una imagen virtual 10 cm detrás del espejo.

a) Si el objeto se aleja hasta 25 cm del espejo, ¿dónde estará la imagen?

b) ¿Qué puedes decir de ella?

Si el espejo esférico es cóncavo y la imagen que se forma es virtual, el objeto deberá estar situado entre el foco y el espejo. La imagen será, además, derecha y de mayor tamaño que el objeto.



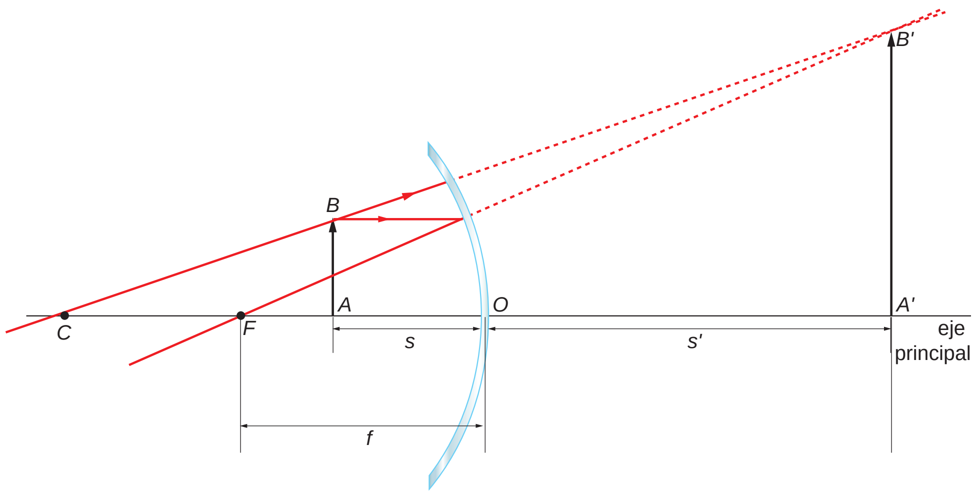
Con los datos de que disponemos, podemos obtener el valor de la distancial focal, *f*:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{s \cdot s'}{s' + s} = \frac{-8 \cdot 10}{10 - 8} = -40 \text{ cm}$$

Si el objeto se aleja hasta 25 cm del espejo, seguirá estando entre el foco y el espejo. La posición de la imagen será:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-40} - \frac{1}{-25}} = 66,67 \text{ cm}$$

La imagen será, por tanto, virtual, derecha y mayor que el objeto, como se aprecia en la figura:



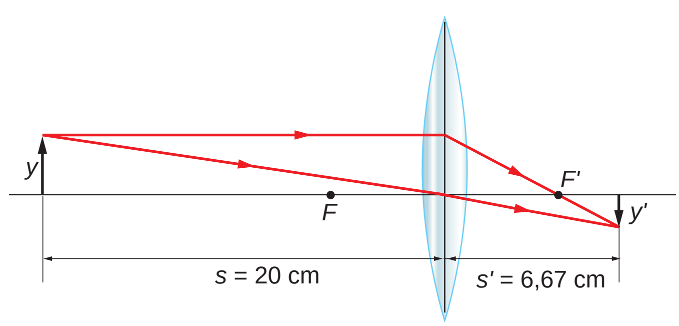
36 Situamos un objeto de 2 cm de altura a 20 cm de una lente de 20 dioptrías.

a) Dibuja un esquema con la posición del objeto, la lente y la imagen.

b) Calcula la posición de la imagen.

c) ¿Cuál es el aumento lateral?

a) Como la potencia es positiva, la lente ha de ser convergente. Por tanto, el trazado de rayos que corresponde a la situación que describe el enunciado es el siguiente:



b) El valor de f' es:

$$f' = \frac{1}{p} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

La posición de la imagen se calcula del siguiente modo:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

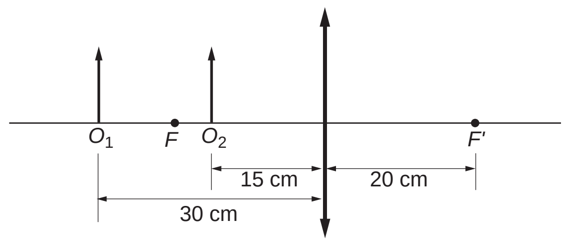
$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{-20}} = 6,67 \text{ cm}$$

La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

c) El aumento lateral es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{6,67}{-20} = -0,33$$

37. Calcula las posiciones y tamaños de las imágenes dadas por la lente de la figura de los objetos O_1 y O_2, ambos de altura $y = 1$ cm.



Comprueba gráficamente tus resultados mediante trazados de rayos.

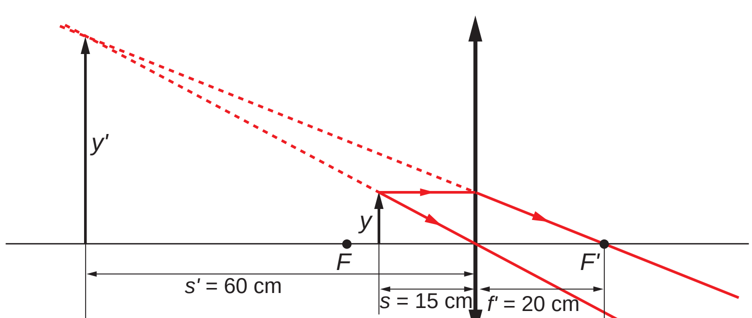
Si el objeto está situado a 15 cm de la lente, la posición de la imagen es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{1}{f'} + \dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{-15}} = -60 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{-60 \cdot 1}{-15} = 4 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto, como se muestra en la siguiente figura:



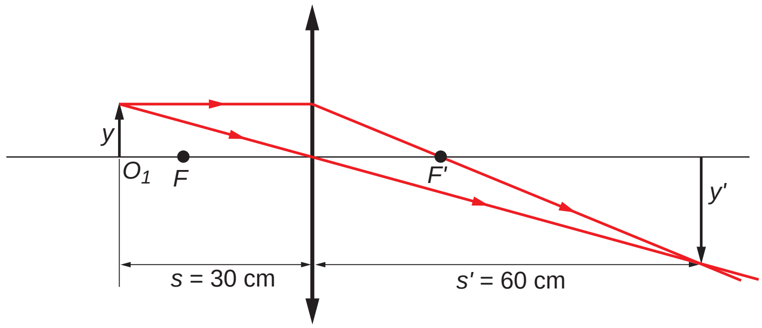
Si el objeto está a 30 cm de la lente, la posición de su imagen será:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{1}{f'} + \dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{-30}} = 60 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{60 \cdot 1}{-30} = -2 \text{ cm}$$

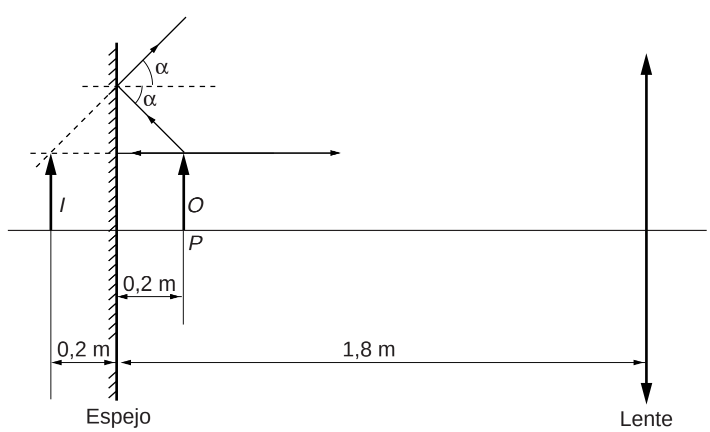
La imagen es real, invertida y mayor, de acuerdo con la siguiente gráfica:



38. **Una lente convergente, *L,* de una dioptría, está situada enfrente de un espejo plano, *E,* colocado perpendicularmente al eje de la lente.**

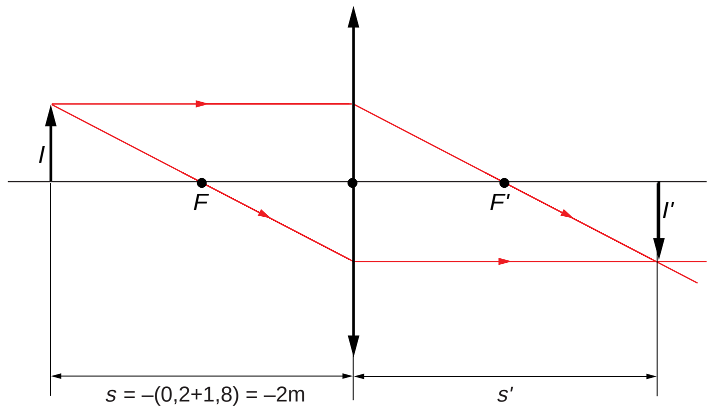
La distancia entre el espejo y la lente es 1,8 m. A 20 cm del espejo, sobre el eje, hay un punto luminoso, *P,* que se refleja en el espejo plano y su imagen se utiliza como objeto respecto a la lente. Dibuja la trayectoria que sigue un rayo de luz que parte de *P*. Calcula la posición de la imagen y el aumento lateral que se produce.

a) En la figura se muestra la trayectoria que siguen los rayos emitidos por el objeto hacia el espejo para formar la imagen.



De acuerdo con las reglas de la reflexión, la imagen es virtual, del mismo tamaño y está situada a 20 cm del plano del espejo.

b) En la figura siguiente hemos representado la situación de esa imagen respecto a la lente.



Para calcular la distancia imagen, aplicamos la expresión que relaciona distancia objeto y distancia imagen en una lente delgada:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = D$$

Al despejar y sustituir en esta expresión, resulta:

$$s' = \frac{f' \cdot s}{f' + s} = \frac{1 \cdot (-2)}{1 + (-2)} = 2 \text{ m}$$

Sustituyendo en la expresión correspondiente, calculamos ahora el aumento lateral:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{2}{-2} = -1$$

La imagen que se forma es del tamaño del objeto y está invertida.

39. Obtén gráficamente la imagen de un objeto, y comenta sus características, cuando se encuentra situado:

a) 20 cm antes de la lente.

b) 5 cm antes de la lente.

El enunciado de esta actividad no aporta los datos suficientes para resolverla. Para poder hacerlo, es necesario conocer el valor de la distancia focal objeto o imagen.

40. Se tiene una lente cóncava con radios de curvatura de 20 y 40 cm. Su índice de refracción es de 1,8. Un objeto de 3 mm se coloca a 50 cm de la lente. Calcula la potencia óptica de la lente y la posición y el tamaño de la imagen.

A partir de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$P = \frac{1}{f'}$$

podemos calcular la potencia óptica de la lente:

$$P = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = (1{,}8-1)\cdot\left(\frac{1}{-0{,}2}-\frac{1}{0{,}4}\right) = -6 \text{ dioptrías}$$

La distancia focal es:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-6} = -0{,}1\widehat{6} \text{ m}$$

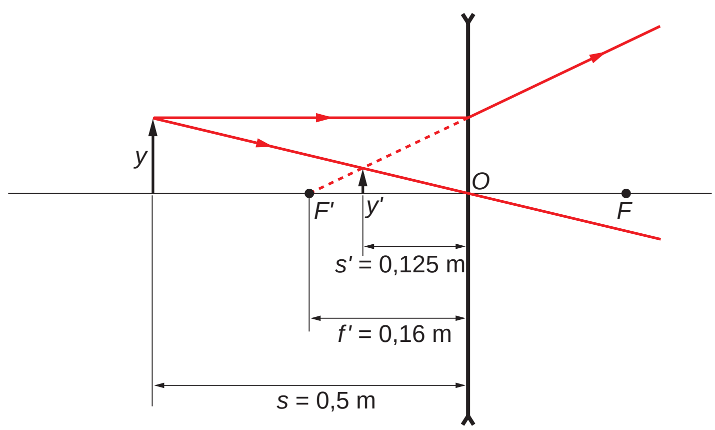
La posición de la imagen es:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\dfrac{1}{f'}+\dfrac{1}{s}} = \frac{1}{\dfrac{1}{-0{,}1\widehat{6}}+\dfrac{1}{-0{,}5}} = -0{,}125 \text{ cm}$$

Y su tamaño:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s'\cdot y}{s} = \frac{-0{,}125\cdot 3\cdot 10^{-3}}{-0{,}5} = 7{,}5\cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}75 \text{ mm}$$

La imagen es virtual, derecha y menor que el objeto, como corresponde a una lente divergente. En la imagen se muestra el diagrama de rayos.



41. Una lente bicóncava simétrica posee una potencia de –2 dioptrías y está formada por un plástico con un índice de refracción de 1,8. Calcula:

a) La velocidad de la luz en el interior de la lente.

b) Los radios de curvatura de la lente.

c) ¿Dónde hemos de colocar un objeto para que el tamaño de su imagen sea la mitad que el del objeto?

a) La velocidad de la luz en el interior de la lente la obtenemos teniendo en cuenta la definición de índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n}$$

$$v = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}8} = 1{,}67\cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) Los radios de curvatura de una lente están relacionados con la potencia, mediante la expresión:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Teniendo en cuenta que se trata de una lenta bicóncava simétrica, deducimos que los dos radios de curvatura tienen el mismo valor, pero signos opuestos, según el convenio de signos que hemos utilizado al estudiar la unidad. Por tanto:

$$R_2 = -R_1 \rightarrow P = \frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$P = (n-1) \cdot \frac{2}{R_1} \rightarrow R_1 = (n-1) \cdot \frac{2}{P}$$

$$R_1 = (1{,}8 - 1) \cdot \frac{2}{-2} = -0{,}8 \text{ m}$$

$$R_2 = -R_1 = 0{,}8 \text{ m}$$

c) La posición del objeto la obtenemos aplicando la ecuación de las lentes delgadas y teniendo en cuenta la expresión del aumento lateral:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$y' = \frac{y}{2} \rightarrow \beta = \frac{y/2}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = \frac{s}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s/2} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{2}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s = f' = \frac{1}{P} \rightarrow s = \frac{1}{-2} = -0{,}5 \text{ m}$$

Por tanto, el objeto se debe colocar medio metro a la izquierda de la lente.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42 Un objeto luminoso, de 3 cm de altura, está situado a 20 cm de una lente divergente de potencia –10 dioptrías. Determina:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición de la imagen.

c) La naturaleza y el tamaño de la imagen.

d) La construcción geométrica de la imagen.

a) La distancia focal es la inversa de la potencia de la lente. Por tanto:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-10} = -0{,}1 \text{ m}$$

b) La posición de la imagen se calcula a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

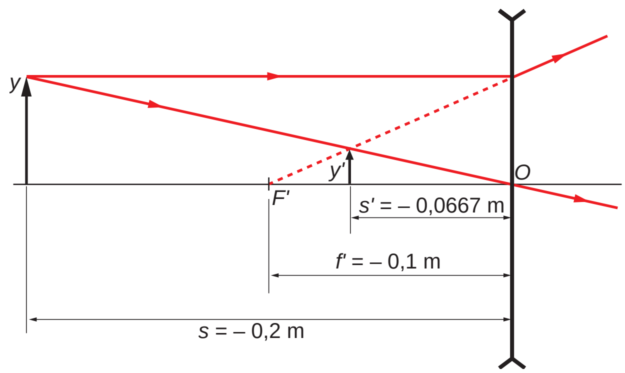
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,1} + \frac{1}{-0,2}} = -0,0667 \text{ m}$$

La imagen es, por tanto, derecha y de menor tamaño que el objeto.

c) El tamaño de la imagen es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{-0,0667 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{-0,2} = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

d) La imagen es, además, virtual, como se muestra en la siguiente figura:



43. Tenemos una lente de –4,5 dioptrías de potencia. Ponemos un objeto delante de la lente a 50 cm de distancia.

a) ¿Dónde se forma la imagen y de qué tipo es? Haz un diagrama de rayos y los cálculos pertinentes.

b) ¿Cuál es el aumento obtenido?

c) Si se puede, ¿dónde deberíamos poner el objeto para obtener una imagen real? Justifica la respuesta.

a) A partir de la definición de la potencia de una lente se obtiene su distancia focal:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-4,5} = -0,22 \text{ m}$$

El valor negativo obtenido nos indica que se trata de una lente divergente. Las imágenes que forman este tipo de lentes son siempre virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.

La posición de la imagen la obtenemos aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P$$

Sustituyendo los datos que proporciona el enunciado:

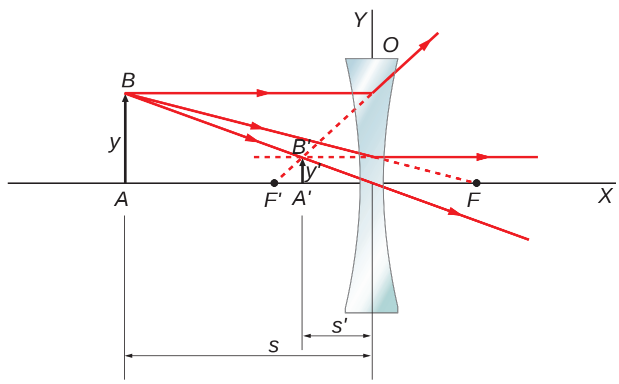
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,5} = -4,5 \rightarrow \frac{1}{s'} = -4,5 - \frac{1}{0,5} \rightarrow s' = -\frac{1}{6,5} = -0,154 \text{ m}$$

Como vemos, la imagen se forma a la izquierda de la lente.

Para realizar el trazado de rayos correspondiente, utilizaremos dos rayos cuya trayectoria sea conocida:

1. Un rayo que incide en la lente paralelo al eje óptico se refracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen.
2. Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente no modifica su dirección de propagación.

El diagrama de rayos es el siguiente:



b) El aumento lateral de la lente se obtiene mediante la expresión:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \beta = \frac{s'}{s} = \frac{-0{,}154}{-0{,}5} = 0{,}31$$

c) Como vimos al contestar el apartado a), una lente divergente siempre forma imágenes virtuales, puesto que se forman con las prolongaciones de los rayos que divergen tras refractarse en la lente. Es imposible obtener una imagen real con una lente divergente.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

44. Un objeto está situado 12 cm a la izquierda de una lente de 10 cm de distancia focal. A la derecha de esta y a 20 cm, se coloca una segunda lente de 12,5 cm de distancia focal.

a) Halla la posición de la imagen final del objeto.

b) ¿Cuál es el aumento de la lente?

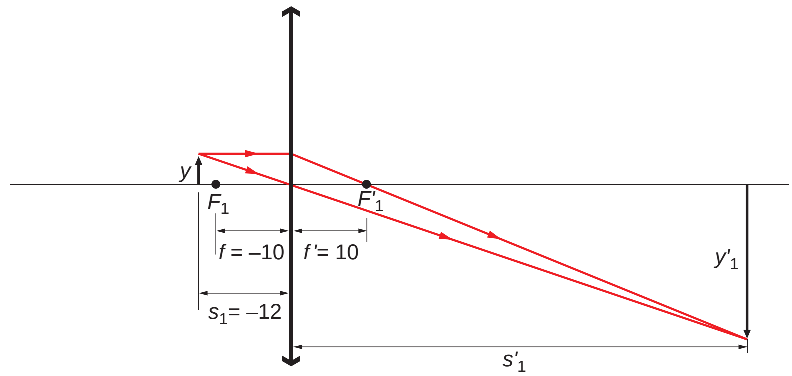
c) Dibuja un diagrama de rayos mostrando la imagen final.

a) En un sistema de lentes, la imagen del objeto que proporciona la primera lente sirve de objeto para la segunda, y así sucesivamente. En este caso, con dos lentes convergentes, la imagen formada en la primera lente, y'_1, es el objeto de la segunda lente: $y_2 = y'_1$. Para obtener la posición, s'_1, de la imagen dada por la primera lente, aplicamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1} \rightarrow \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-0{,}12} = \frac{1}{0{,}1}$$

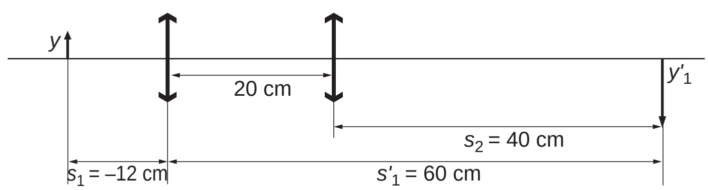
$$\frac{1}{s'_1} = \frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}12} \rightarrow \frac{1}{s'_1} = \frac{0{,}12 - 0{,}1}{0{,}012} = \frac{0{,}02}{0{,}012}$$

$$s'_1 = \frac{0{,}012}{0{,}02} = 0{,}6 \text{ m}$$



La primera lente forma la imagen del objeto 60 cm a su derecha. Puesto que la segunda lente se encuentra 20 cm a la derecha de la primera, el objeto, para la segunda lente, está situado 40 cm a su derecha:

$$s_2 = s'_1 - 0{,}2 = 0{,}4 \text{ m}$$



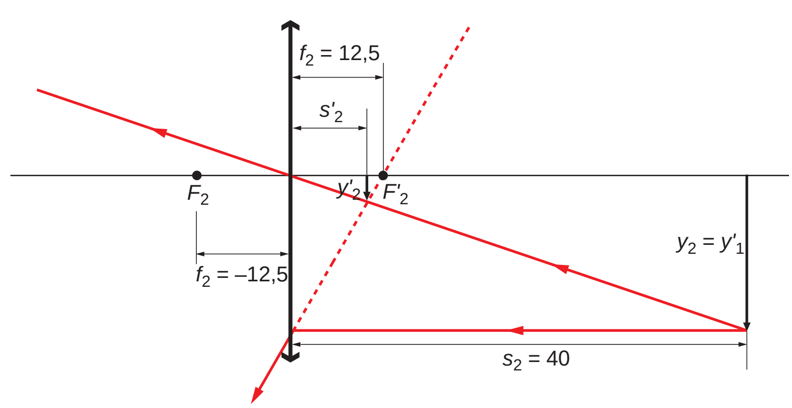
Aplicando a la segunda lente la ecuación fundamental de las lentes, obtenemos la posición final del objeto:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2} \rightarrow \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{0{,}4} = \frac{1}{0{,}125}$$

$$\frac{1}{s'_2} = \frac{1}{0{,}125} + \frac{1}{0{,}4} \rightarrow \frac{1}{s'_2} = \frac{0{,}4 + 0{,}125}{0{,}05} = 10{,}5$$

$$s'_2 = \frac{1}{10{,}5} = 0{,}095 \text{ m}$$

La imagen final se encuentra situada 9,5 cm a la derecha de la segunda lente, como se aprecia en la figura de la página siguiente.



b) El aumento lateral de una lente se obtiene mediante la expresión:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

En este caso, para cada una de las lentes, resulta:

$$\beta_1 = \frac{s'_1}{s_1} \rightarrow \beta_1 = \frac{0{,}6}{-0{,}12} = -5 \rightarrow y'_1 = -5 \cdot y_1$$

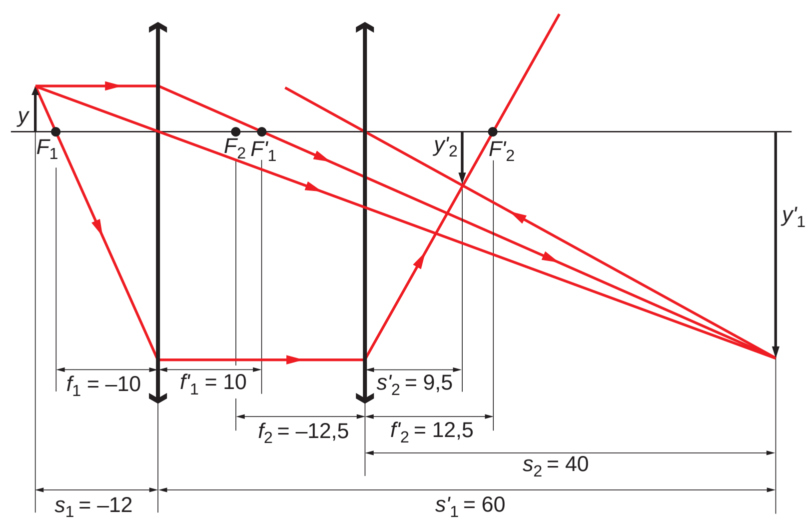
$$\beta_2 = \frac{s'_2}{s_2} \rightarrow \beta_2 = \frac{0{,}095}{0{,}4} = 0{,}24 \rightarrow y'_2 = 0{,}24 \cdot y_2$$

El aumento lateral del sistema de lentes es:

$$y'_2 = 0{,}24 \cdot y_2 = 0{,}24 \cdot (-5 \cdot y_1) = -1{,}2 \cdot y_1$$

$$\beta = \frac{y'_2}{y_1} = -1{,}2$$

c) El diagrama de rayos completo es el siguiente:



NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

45. Un objeto luminoso está situado a 6 m de una pantalla. Una lente, cuya distancia focal es desconocida, forma sobre la pantalla una imagen real, invertida y cuatro veces mayor que el objeto.

a) ¿Cuáles son la naturaleza (convergente o divergente) y posición de la lente? ¿Cuál es el valor de la distancia focal?

b) Se desplaza la lente de manera que se obtenga sobre la misma pantalla una imagen nítida, pero de tamaño diferente a la obtenida anteriormente. ¿Cuál es la nueva posición de la lente y el nuevo valor del aumento?

a) Teniendo en cuenta que la imagen es real, debe de tratarse de una lente convergente, puesto que las lentes divergentes dan siempre imágenes virtuales.

La imagen es invertida y de mayor tamaño que el objeto. Esto implica que el objeto estará situado entre F y $2 \cdot F$, es decir, debe cumplirse que $F < s < 2 \cdot F$, tal como vimos al estudiar la unidad.

A partir de los datos que proporciona el enunciado del problema, podemos calcular el aumento lateral de la lente y la relación entre s y s'.

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} = -4 \cdot \frac{y}{y} = -4$$

Por tanto:

$$\frac{s'}{s} = -4 \rightarrow s' = -4 \cdot s \qquad [1]$$

Como el objeto luminoso está situado a 6 m de la pantalla, ha de cumplirse que:

$$|s| + |s'| = 6 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta el convenio de signos:

$$s' - s = 6 \text{ m} \qquad [2]$$

A partir de las expresiones [1] y [2] obtenemos el valor de s y s':

$$\left.\begin{array}{l} s' = -4 \cdot s \\ s' - s = 6 \end{array}\right\} \rightarrow -4 \cdot s - s = 6 \rightarrow \begin{array}{l} s = -1{,}2 \text{ m} \\ s' = -4 \cdot s = -4 \cdot (-1,\ 2) = 4{,}8 \text{ m} \end{array}$$

El valor de la distancia focal de la lente, f', se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{s' \cdot s}{s' - s} = \frac{-1{,}2 \cdot 4{,}8}{-1{,}2 - 4{,}8} = 0{,}96 \text{ m}$$

b) En este caso, se sigue cumpliendo la siguiente relación:

$$s' - s = 6 \text{ m} \rightarrow s' = 6 + s$$

Por tanto, aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{6+s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}96} \rightarrow \frac{-6}{s^2 + 6 \cdot s} = \frac{1}{0{,}96} \rightarrow s^2 + 6\ s + 5{,}76 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$s = -1{,}2 \text{ m} \ ; \ s = -4{,}8 \text{ m}$$

El primer valor es el obtenido en el apartado anterior; por tanto, en este caso:

$$s = -\,4{,}8 \text{ m} \rightarrow s' = 6 + s = 6 - 4{,}8 = 1{,}2 \text{ m}$$

Por tanto, el nuevo valor del aumento lateral es:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{1{,}2}{-4{,}8} = -0{,}25$$

NOTA: la resolución que de este problema se ofrece en el CD-ROM para el alumnado no es correcta, ya que en ella se ha considerado la distancia del objeto a la lente, en vez de a la pantalla.

15 FÍSICA NUCLEAR

15.1. EL DESCUBRIMIENTO DE LA RADIACTIVIDAD

1. Hace algunas décadas, a las emisiones radiactivas se las denominaba rayos α, rayos β y rayos γ. ¿Es correcta esta denominación? ¿Por qué?

La denominación no es adecuada. Normalmente, se denominan "rayos" las emisiones electromagnéticas, en especial, la emisión en las frecuencias del espectro visible.

En este caso, las emisiones α y β son emisiones de partículas o conjuntos de partículas atómicas conocidas: núcleos del isótopo 4 del helio (una partícula), en el caso de la partícula α, y un electrón, en el caso de la emisión β^-, o un positrón, si se trata de una emisión β^+.

Por el contrario, los rayos gamma sí hacen referencia a una emisión que tiene esas características, ya que la radiación gamma forma parte del espectro electromagnético, estando situada en la zona más energética (de mayor frecuencia) de este.

2. ¿Qué conclusión podemos obtener con respecto a la relación que existe entre la masa y la carga de las partículas alfa y de las partículas beta?

Las partículas α y β se curvan debido a la acción del campo eléctrico que se aplica. Como se aprecia en la figura del libro del alumno, el vector intensidad de campo eléctrico es perpendicular a la dirección en que se desplazan las partículas.

Las partículas β se curvan más que las partículas α, porque la relación m/q es menor en las partículas β que en las α.

3. Busca información acerca de los primeros detectores utilizados para "visualizar" la trayectoria de la radiación emitida por una muestra radiactiva.

Se pretende con esta actividad que el alumno amplíe sus conocimientos, si el profesor lo estima procedente, buscando información en internet, enciclopedias, etc., sobre la cámara de niebla, la cámara de burbujas, los primeros detectives geiger, etc.

4. Indica la composición nuclear de los siguientes núcleos de elementos químicos:

$$^{12}_{6}C \quad ^{14}_{6}C \quad ^{14}_{7}N \quad ^{16}_{8}O \quad ^{40}_{20}Ca$$

La composición nuclear es la que se incluye en la siguiente tabla:

Núcleo	Protones	Neutrones	Electrones
$^{12}_{6}C$	6	6	6
$^{14}_{6}C$	6	8	6
$^{14}_{7}N$	7	7	7
$^{16}_{8}O$	8	8	8
$^{40}_{20}Ca$	20	20	20

15.2. EL NÚCLEO ATÓMICO

1. Calcula la equivalencia que existe entre la unidad de masa atómica (u) y la unidad internacional de masa (kg).

La uma (u) se define como la doceava parte de la masa de un átomo del isótopo 12 del carbono:

$$1\ \text{u} = \frac{m_{^{12}_{6}\text{C}}}{12}$$

Como la masa de un mol de átomos de carbono-12 es de 12 g, y en él hay N_A átomos de isótopo, la masa de un átomo de isótopo es:

$$m_{^{12}_{6}\text{C}} = \frac{12\ \text{g}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}} = 1{,}99 \cdot 10^{-23}\ \text{g/átomo} = 1{,}99 \cdot 10^{-26}\ \text{kg/átomo}$$

Por tanto, la equivalencia entre la unidad de masa atómica y el kilogramo es:

$$1\ \text{u} = \frac{\text{m}^{12}_{6}\text{C}}{12} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{-26}}{12} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

2. Calcula la masa atómica promedio del cadmio (*Z* = 48), del que se conocen ocho isótopos estables, de números másicos 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114 y 116, si sus abundancias isotópicas respectivas son: 1,215%, 0,875%, 12,39%, 12,75%, 24,07%, 12,26%, 28,86% y 7,58%.

Compara el resultado obtenido con el valor que figura en la tabla periódica.

Para hallar la masa atómica promedio, calculamos la media ponderada para el conjunto de isótopos:

$$A_{media} = \sum_{i=1}^{8} A_i \cdot X_i$$

$$\begin{aligned} A_{media} &= 106 \cdot 0{,}01215 + 108 \cdot 0{,}00875 + 110 \cdot 0{,}1239 + \\ &+ 111 \cdot 0{,}1275 + 112 \cdot 0{,}2407 + 113 \cdot 0{,}1226 + \\ &+ 114 \cdot 0{,}2886 + 116 \cdot 0{,}0758 = 112{,}5198\ \text{u} \end{aligned}$$

3. Busca información acerca de los dos isótopos conocidos del hidrógeno, denominados deuterio y tritio, respectivamente.

En estado natural, los elementos químicos que podemos encontrar en la naturaleza son una mezcla de varios isótopos, que se encuentran en determinadas proporciones. En una muestra de hidrógeno están presentes tres isótopos. El protio (formado por un protón) es el más abundante. En una proporción mucho menor está el deuterio (formado por un protón y un neutrón) y, con una mínima presencia, se encuentra el tritio (compuesto por un protón y dos neutrones).

4. El boro, cuya masa atómica es 10,811 u, es una mezcla de dos isótopos cuyos números másicos son 10 y 11 u, respectivamente. Calcula la abundancia isotópica de cada uno de ellos en la naturaleza.

La masa atómica promedio del boro es:

$$A_{media} = \sum_{i=1}^{2} A_i \cdot X_i = 10,811 \text{ u}$$

Es decir:

$$A_{media} = 10 \cdot x + 11 \cdot y = 10,811 \text{ u}$$

En la expresión anterior, x es la abundancia isotópica del isótopo de número másico 10, e y la que corresponde al isótopo de número másico 11. La relación entre ambos es:

$$x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

Por tanto:

$$10{,}811 = 10 \cdot x + 11 \cdot (1 - x) \rightarrow x = 0{,}189 \rightarrow 18{,}9\% \,;\, y = 1 - x = 1 - 0{,}189 = 0{,}811 \rightarrow 81{,}1\%$$

En consecuencia, la abundancia isotópica que corresponde a los isótopos del boro de número másico 10 y 11 es de 18,9% y 81,1%, respectivamente.

15.3. PROCESOS RADIACTIVOS. LEYES DE SODDY Y FAJANS

1. Aplica las leyes de Soddy-Fajans a las siguientes transformaciones radiactivas e identifica, con la tabla periódica, el elemento producido:

a) $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + \ldots$ **b)** $^{234}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{0}_{-1}e + \ldots$

a) La reacción nuclear se corresponde con una desintegración α:

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{234}_{90}\text{Th}$$

b) En este caso tenemos una desintegración β^-:

$$^{234}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{234}_{90}\text{Pa} + \bar{\nu}$$

2. Completa las siguientes ecuaciones de transmutación:

a) $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + \ldots$ **c)** $^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow \ldots + {}^{0}_{-1}e$

b) $^{212}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{212}_{8}\text{Bi} + \ldots$ **d)** $\ldots \rightarrow {}^{208}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$

a) La reacción nuclear se corresponde con una desintegración α:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

b) En este caso tenemos una desintegración β^-:

$$^{212}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{212}_{89}\text{Bi} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

c) Tenemos, de nuevo, una desintegración β^-:

$$^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{212}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

d) La reacción nuclear se corresponde con una desintegración α:

$$^{212}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{208}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

15.4. ESTABILIDAD NUCLEAR

1. **Idea un modelo para representar la interacción de neutrones y protones en un núcleo atómico, mediante el intercambio de mesones.**

   Esta actividad puede ser planteada por el profesor o profesora, si lo estima procedente, para analizar, con carácter previo al estudio de este epígrafe, la idea que tienen los alumnos y alumnas sobre la estabilidad del núcleo.

2. **El modelo de Yukawa, según el cual la fuerza nuclear fuerte se explica como un intercambio de mesones entre las partículas que forman el núcleo atómico, no supone inestabilidad de este. ¿Puedes explicarlo?**

   La mediación de un mesón entre, por ejemplo, un protón y un neutrón, supone una transformación de protón en neutrón, o viceversa: cuando un protón emite un mesón positivo, pierde su carga y se convierte en un neutrón; del mismo modo, si un neutrón capta un mesón positivo, se convierte en protón. Por su parte, cuando un neutrón emite un mesón negativo, se transforma en protón, y si un protón capta dicho mesón, se convierte en neutrón. Estas transformaciones no producen inestabilidad, ya que el número total de protones y neutrones en el núcleo no se modifica. Precisamente, este intercambio es la causa de la elevada estabilidad nuclear.

3. **Compara las características de las cuatro interacciones que existen en la naturaleza: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil.**

Gravitatoria	Macrocosmos	Atractiva	La más débil	Entre partículas con masa
Nuclear débil	Microcosmos (10^{-15} m)	Atractiva o repulsiva	Débil	Responsable de la radiactividad natural
Electromagnética	Macrocosmos	Atractiva o repulsiva	Fuerte	Entre partículas con masa
Nuclear fuerte	Microcosmos (10^{-15} m)	Atractiva o repulsiva	La más fuerte	Entre quarks

15.5. DEFECTO DE MASA Y ENERGÍA DE ENLACE

1. **Teniendo en cuenta las masas que corresponden a protón, neutrón y electrón, que se recogen en la tabla de la página anterior, calcula:**

   a) El defecto de masa que se produce al formarse un átomo de helio a partir de las partículas que lo constituyen. (Masa atómica del helio = 4,003 u).

   b) La energía que se libera al formarse un átomo de helio.

a) Un átomo de helio está formado por dos protones y dos neutrones. Por tanto:

$$\Delta m = m_{nucleones} - m_{\text{helio}} = 2 \cdot 1{,}007276 + 2 \cdot 1{,}008665 - 4{,}003 = 0{,}028882 \text{ u}$$

b) La energía equivalente al defecto de masa calculado coincide con la energía que se desprende al formarse un núcleo a partir de protones y neutrones en estado libre o, lo que es lo mismo, coincide con la energía que hay que suministrar para desintegrar el núcleo en sus componentes. De acuerdo con la relación de Einstein, y teniendo en cuenta que $1 \text{ u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, la energía que se libera al formarse un átomo de helio es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}028882 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 4{,}31 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 26{,}97 \text{ MeV}$$

NOTA: en el cálculo no se ha tenido en cuenta la contribución de los electrones.

2. El oxígeno-16 tiene una masa atómica de 15,995 u. Calcula la energía que se desprende cuando se forma un átomo de oxígeno a partir de las partículas que lo constituyen.

Un átomo de oxígeno-16 está formado por 8 protones y 8 neutrones. El defecto de masa que corresponde a la formación de un átomo de oxígeno-16 es:

$$\Delta m = m_{nucleones} - m_{\text{oxígeno-16}} = 8 \cdot 1{,}007276 + 8 \cdot 1{,}008665 - 15{,}995 = 0{,}132528 \text{ u}$$

$$\Delta m = 0{,}132528 \text{ u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} = 2{,}1999 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

La energía que se desprende, de acuerdo con la relación de Einstein es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 2{,}1999 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}98 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 123{,}75 \text{ MeV}$$

3. Las masas que corresponden a los isótopos ^{12}C y ^{13}C son, respectivamente, 12,000 y 13,003 u. Determina cuál de los dos es más estable; es decir, a cuál de los dos le corresponde mayor energía de enlace por nucleón.

El defecto de masa que corresponde a la formación de un núcleo de isótopo ^{12}C, formado por 6 protones y 6 neutrones, es:

$$\Delta m_{^{12}C} = m_{nucleones_{^{12}C}} - m_{^{12}C} = 6 \cdot 1{,}007276 + 6 \cdot 1{,}008665 - 12{,}000 =$$
$$= 0{,}095646 \text{ u} = 1{,}5877 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Y la energía de enlace por nucleón que le corresponde:

$$E_{n_{^{12}C}} = \frac{\Delta m_{^{12}C} \cdot c^2}{A} = \frac{1{,}5877 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{12} = 1{,}191 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 7{,}44 \cdot 10^6 \text{ MeV}$$

El defecto de masa que corresponde a la formación de un núcleo de ^{13}C, formado por 6 protones y 7 neutrones, es:

$$\Delta_{m_{^{13}C}} = m_{nucleones_{^{13}C}} - m_{m_{^{13}C}} = 6 \cdot 1{,}007276 + 7 \cdot 1{,}008665 - 13{,}003 = 0{,}101311 \text{ u} =$$
$$= 1{,}6818 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Y la energía de enlace por nucleón que le corresponde:

$$E_{n_{^{13}C}} = \frac{\Delta m_{^{13}C} \cdot c^2}{A} = \frac{1{,}6818 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{13} = 1{,}1643 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 7{,}28 \cdot 10^6 \text{ MeV}$$

Como $E_{n_{^{12}C}} > E_{n_{^{13}C}}$, el isótopo ^{12}C es más estable que el isótopo ^{13}C.

4. Justifica el hecho de que los elementos de número másico elevado tengan menor estabilidad que los de número másico medio (próximo a 56 u).

La disminución progresiva de la estabilidad nuclear al aumentar el número másico se puede interpretar teniendo en cuenta el pequeño radio de acción de las fuerzas nucleares, lo que supone que, en los núcleos pesados, cada nucleón solo puede estar unido a los más próximos, de manera que no es posible tener una "unión global" de todos los nucleones, sino una especie de "unión en cadena".

Hay que tener en cuenta, además, que al aumentar el número atómico aumentan las fuerzas de repulsión entre protones, por lo que los núcleos también resultan menos estables y son necesarios muchos más neutrones para contrarrestar estas fuerzas. Ello explica que los núcleos más pesados, como el ^{238}U, tiendan a dividirse, dada su menor estabilidad, liberando energía en el proceso. Dicho proceso se denomina **fisión nuclear.**

Del mismo modo, los núcleos más ligeros, que también son menos estables, liberarán energía al unirse entre ellos, en un proceso que se denomina **fusión nuclear.**

15.6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. Completa los procesos nucleares que se indican. Añade el correspondiente neutrino o antineutrino en los casos en que sea necesario para que se cumplan las leyes de conservación de la energía, momento lineal y momento angular:

a) $^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + \ldots$

b) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + \ldots \rightarrow {}^{25}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

c) $^{31}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{31}_{14}\mathrm{Si} + \ldots$

d) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + \ldots$

a) Al aplicar las leyes de conservación de la masa y de la carga al siguiente proceso:

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + {}^{A}_{Z}X$$

resulta para el número másico:

$$210 + A = 210 \rightarrow A = 0$$

y para el número atómico:

$$83 = 84 + Z \rightarrow Z = -1$$

El par $(Z, A) = (-1, 0)$ corresponde a un electrón. Se trata, por tanto, de una desintegración tipo β^-:

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

b) Al aplicar las leyes de conservación de la masa y de la carga, obtenemos para el número másico:

$$27 + A = 25 + 4 \rightarrow A = 2$$

y para el número atómico:

$$13 + Z = 12 + 2 \rightarrow Z = 1$$

El par (Z, A) = (1, 2) corresponde a un átomo de deuterio, que es un isótopo del hidrógeno (^{2}H). Por tanto:

$$^{27}_{13}\text{Al} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{25}_{12}\text{Mg} + ^{4}_{2}\text{He}$$

c) Al aplicar las leyes de conservación de la masa y de la carga, obtenemos ahora para el número másico:

$$31 + A = 31 \rightarrow A = 0$$

y para el número atómico:

$$15 = 14 + Z \rightarrow Z = +1$$

El par (Z, A) = (+1, 0) corresponde a un positrón. Se trata, por tanto, de una desintegración tipo β^+, de forma que:

$$^{31}_{15}\text{P} \rightarrow ^{31}_{14}\text{Si} + ^{0}_{1}e + \nu$$

d) Al aplicar las leyes de conservación de la masa y de la carga, resulta para el número másico:

$$27 + 4 = 30 + A \rightarrow A = 1$$

y para el número atómico:

$$13 + 2 = 15 + Z \rightarrow Z = 0$$

El par (Z, A) = (0, 1) corresponde a un neutrón. Por tanto:

$$^{27}_{13}\text{Al} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{30}_{15}\text{P} + ^{1}_{0}n$$

2. ¿Por qué se tardó tanto tiempo en descubrir el neutrino?

Los neutrinos son partículas elementales sin carga eléctrica y con una masa, según los últimos indicios, muy pequeña, que interactúan con el resto de partículas mediante la fuerza nuclear débil y la todavía más débil fuerza gravitatoria. Debido a ello, son capaces de atravesar la materia con más facilidad de la que un fotón que atraviesa el aire. Estas características hacen del neutrino la partícula más difícil de detectar.

De hecho, desde que Pauli predijo su existencia, en 1930, hasta que Clyde Cowan y Fred Reines consiguieron detectar, en 1956, los neutrinos emitidos desde un reactor nuclear, pasaron más de 25 años. Fred Reines recibió por ello el Nobel de física.

15.7. CARACTERÍSTICAS DE LOS PROCESOS RADIACTIVOS

1. El período de semidesintegración del uranio-234 es $2{,}48 \cdot 10^5$ años. Calcula:

a) Su vida media.

b) La proporción en que se ha reducido la actividad de una muestra de ^{234}U al cabo de ese tiempo.

a) La vida media que corresponde al uranio-234 es:

$$\tau = \frac{T}{ln\ 2} = \frac{2{,}48 \cdot 10^5}{0{,}693} = 3{,}58 \cdot 10^5 \text{ años}$$

b) De acuerdo con la ley de la desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = 2{,}79 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}$$

Se obtiene:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow N = N \cdot \frac{x}{100} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow x = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 100 \cdot e^{-2{,}79 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}48 \cdot 10^{5}} = 50\%$$

2. El período de semidesintegración de un elemento radiactivo, que se desintegra emitiendo partículas alfa, es de 28 años.

a) Calcula el tiempo que tiene que transcurrir para que la cantidad de dicho elemento se reduzca al 75% de la que había inicialmente en una muestra.

b) En cierto instante tenemos una muestra de 0,1 mg de átomos radiactivos. ¿Qué cantidad de átomos de helio se formará por unidad de tiempo en ese instante?

Datos: Constante de Avogadro = $6{,}022 \cdot 10^{23}$
Masa atómica del elemento = 238 u

a) De acuerdo con la ley de la desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Donde:

$N = 0{,}75 \cdot N_0$

$t = 28$ años

$$\lambda = \frac{ln\ 2}{T_{1/2}} = \frac{ln\ 2}{28} = 0{,}02476 \text{ años}^{-1}$$

Se obtiene el tiempo, t:

$$t = \frac{ln \dfrac{N}{N_0}}{\lambda} = \frac{ln \dfrac{075 \cdot N_0}{N_0}}{-0{,}02476} = 11{,}62 \text{ años}$$

b) El enunciado del problema pregunta el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo, esto es, la actividad de la muestra:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

La cantidad de sustancia de muestra que tenemos es:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{238} = 4{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ mol de uranio-238}$$

El número de átomos de uranio-238, N, es:

$$N = 4{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomos/mol} = 253 \cdot 10^{17} \text{ átomos de uranio}$$

Por tanto, la actividad de la muestra es:

$$A = \lambda \cdot N = 0{,}02476 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{17} = 6{,}26 \cdot 10^{15} \text{ átomos de uranio por año}$$

3. Se ha medido la actividad de una muestra de madera recogida en una cueva con restos prehistóricos, observándose que se desintegran 320 átomos de ^{14}C por hora, cuando en una muestra de madera actual que tiene la misma masa y la misma naturaleza, la actividad es de 1145 desintegraciones por hora. Admitiendo que el número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional al número de átomos de ^{14}C presentes en la muestra, ¿en qué fecha se cortó la madera que se está analizando?

Si admitimos que el número de desintegraciones por unidad de tiempo (actividad de la muestra) es proporcional al número de átomos de ^{14}C presentes en la muestra, podemos escribir la ecuación de desintegración en función de la actividad de la muestra; es decir:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo:

A = actividad (desintegraciones/segundo) de la muestra en la actualidad.

A_0 = actividad inicial (desintegraciones/segundo) de la muestra.

λ = constante de desintegración.

t = tiempo.

En primer lugar hemos de hallar la constante radiactiva, λ. Para ello hemos de tener en cuenta que la vida media del carbono-14 es de 5 736 años. Por tanto:

$$\lambda = \frac{1}{5\,736} = 1{,}743 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Una vez conocida la constante radiactiva, podemos hallar el tiempo, t, que ha transcurrido desde que se inició la desintegración. Al sustituir y despejar de la expresión que permite calcular la actividad, resulta:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow t = \frac{ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{-\lambda}$$

$$t = \frac{ln\left(\frac{320}{1145}\right)}{-1{,}743 \cdot 10^{-4}} = 7\,314 \text{ años}$$

De acuerdo con el resultado que obtenemos, podemos afirmar que la madera se cortó hace 7 314 años.

15.8. FAMILIAS RADIACTIVAS

1. El ^{14}C es un isótopo del carbono que se desintegra emitiendo una partícula beta. Su vida media es de 5 736 años, y se forma, como hemos indicado, en las capas altas de la atmósfera debido al choque de los neutrones que forman parte de los rayos cósmicos con átomos de ^{14}N.

a) Escribe la ecuación que corresponde al proceso que tiene lugar.

b) Explica por qué se puede utilizar el ^{14}C como secuenciador temporal.

a) La desintegración β^- del isótopo ^{14}C resulta:

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

b) El carbono-14 permite establecer la antigüedad de restos orgánicos que se han depositado en forma de sedimentos. Ello es posible porque los seres vivos renuevan periódicamente el carbono que forma parte de sus estructuras y, por tanto, mantienen siempre constante la cantidad de carbono-14 que hay en sus tejidos. Sin embargo, al morir, sus restos permanecen inalterados y la cantidad de carbono-14 disminuye, de acuerdo con la ley de desintegración radiactiva. Por tanto, estudiando la actividad de una muestra antigua y comparándola con la actividad de una muestra similar de tejido orgánico actual, podemos averiguar cuánto tiempo ha transcurrido desde que la muestra que estudiamos dejó de ser materia viva.

Como la vida media del ^{14}C es de 5 736 años, esta forma de datación sirve para averiguar la antigüedad de restos orgánicos que vivieron hace miles e, incluso, decenas de miles de años.

2. Escribe las reacciones nucleares que corresponden a los procesos de desintegración con ramificación de los isótopos siguientes:

a) De la serie del uranio-radio:

$^{214}_{84}Po$, $^{214}_{83}Bi$ y $^{210}_{83}Bi$.

b) De la serie del uranio-actinio:

$^{227}_{89}Ac$, $^{215}_{84}Po$ y $^{211}_{83}Bi$.

c) De la serie del torio:

$^{216}_{84}Po$ y $^{212}_{83}Bi$.

a) **Serie del uranio-radio:**

Al ser desintegraciones ramificadas, los isótopos pueden desintegrarse emitiendo una partícula α o una partícula β. De este modo, para el $^{214}_{84}Po$ resulta:

$$^{214}_{84}Po \xrightarrow{\alpha} {}^{210}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$$

$$^{214}_{84}Po \xrightarrow{\beta} {}^{214}_{85}At + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

Como a la desintegración α sigue una desintegración β, y viceversa, ambos procesos van a parar, finalmente, a un mismo isótopo:

$$^{210}_{82}Pb \xrightarrow{\beta} {}^{210}_{83}Bi + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$^{214}_{85}At \xrightarrow{\alpha} {}^{210}_{83}Bi + {}^{4}_{2}He$$

Para el ${}^{214}_{83}$Bi:

$$^{214}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\alpha} {}^{214}_{81}\text{Tl} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{214}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{214}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

Y para el ${}^{210}_{83}$Bi:

$$^{210}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\alpha} {}^{206}_{81}\text{Tl} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{210}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{210}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

b) **Serie del uranio-actinio:**

Para el radionúclido ${}^{227}_{89}$Ac tenemos:

$$^{227}_{89}\text{Ac} \xrightarrow{\alpha} {}^{223}_{87}\text{Fr} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{227}_{89}\text{Ac} \xrightarrow{\beta} {}^{227}_{90}\text{Th} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

Del mismo modo, para el ${}^{215}_{84}$Po:

$$^{215}_{84}\text{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{211}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{215}_{84}\text{Po} \xrightarrow{\beta} {}^{215}_{85}\text{At} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

Y para el ${}^{211}_{83}$Bi resulta:

$$^{211}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\alpha} {}^{207}_{81}\text{Tl} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{211}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{211}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

c) **Serie del torio:**

En la serie del torio, los dos isótopos que admiten desintegración α o β son el Polonio-216:

$$^{216}_{84}\text{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{212}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{216}_{84}\text{Po} \xrightarrow{\beta} {}^{216}_{85}\text{At} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

y el Bismuto-212:

$$^{212}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\alpha} {}^{208}_{81}\text{Tl} + {}^{4}_{2}\text{He}$$
$$^{212}_{83}\text{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{212}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

15.9. REACCIONES NUCLEARES

1. Bombardeamos núcleos de ^{14}N con partículas alfa, esperando que se produzca la reacción nuclear:

$$^{14}_{7}\text{N}\ (\alpha, p)\,{}^{17}_{8}\text{O}$$

Calcula la energía que, como mínimo, deben tener las partículas alfa.

La reacción nuclear que tiene lugar es:

$$^{14}_{7}\text{N} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{17}_{8}\text{O} + ^{1}_{1}p$$

El equivalente energético del defecto de masa que corresponde al proceso es la energía que hemos de aportar a las partículas cuando inciden sobre el blanco de ^{14}N.

La masa de los productos es:

$$m_p = m(^{17}_{8}\text{O}) + m(^{1}_{1}\text{p}) = 16{,}99913 + 1{,}0073 = 18{,}00643 \text{ u}$$

siendo la masa de los reactivos:

$$m_r = m(^{14}_{7}\text{N}) + m(^{4}_{2}\text{He}) = 14{,}00307 + 4{,}032 = 18{,}03507 \text{ u}$$

El defecto de masa resulta, por tanto:

$$\Delta m = m_p - m_r = 18{,}03507 - 18{,}00643 = 0{,}02864 \text{ u}$$

y, teniendo en cuenta que 1 u equivale a 931 MeV, la energía que debemos suministrar es:

$$E = 0{,}02864 \cdot 931 = 26{,}7 \text{ MeV}$$

2. Los neutrones son más eficaces, en general, que las partículas cargadas para producir reacciones nucleares. ¿Puedes explicar el motivo?

Los neutrones lentos son las partículas más eficaces, en general, para producir transmutaciones nucleares. Ello es debido a que no tienen carga positiva y, por tanto, pueden aproximarse al núcleo sin ser repelidos por este. Una partícula con carga, como un protón o un electrón, necesita tener una energía muy alta para poder provocar reacciones nucleares.

3. Identifica los productos obtenidos al bombardear $^{198}_{80}$Hg con neutrones, si uno de ellos es un protón.

En una ecuación nuclear la suma de los números atómicos (subíndices) y de los números másicos (superíndices) debe ser la misma a ambos lados de la ecuación. De acuerdo con ello, la reacción nuclear que describe el enunciado de la actividad se representa de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$^{198}_{80}\text{Hg} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{1}_{1}\text{H} + ^{198}_{79}\text{Au}$$

En forma condensada, la ecuación anterior puede representarse como sigue:

$$^{198}_{80}\text{Hg}\ (n,\ p)\ ^{198}_{79}\text{Au}$$

15.10. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS

1. Elabora un cuadro resumen con todas las partículas fundamentales que, de acuerdo con el modelo estándar, conforman el mundo microscópico.

Las partículas materiales que conforman el mundo microscópico son:

	Nombre	Símbolo	Carga eléctrica
Leptones	Electrón	e^-	–1
	Muón	μ^-	–1
	Tauón	τ^-	–1
	Neutrino del electrón	ν_{e^-}	0
	Neutrino del muón	ν_{μ^-}	0
	Neutrino del tauón	ν_{τ^-}	0
Quarks	up	u	+2/3
	down	d	–1/3
	charm	c	+2/3
	strange	s	–1/3
	top	t	+2/3
	bottom	b	–1/3

Y las partículas mediadoras en las interacciones:

Interacción	Partícula portadora
Gravitatoria	Gravitón (no detectado experimentalmente hasta la fecha)
Electromagnética	Fotón
Interacción débil	Bosones W^+, W^-, Z
Interacción fuerte	Gluones (son ocho)

2. Los estados ligados de quarks se denominan hadrones. Los hadrones se dividen en mesones, formados por pares quark-antiquark, y bariones, formados por tres quarks.

¿Qué tipo de hadrones son el protón y el neutrón? Busca información acerca de otros tipos de hadrones.

El protón y el neutrón sun bariones (nombre que procede de la palabra griega que significa “pesado”).

Otro barión es el antiprotón (p^-) formado por la unión de las antiquarks $u^-u^-d^-$. Su carga eléctrica es –1 y su espín 1/2.

Otros bariones son:

– L (lambda) → uds (carga 0 y espín 1/2).

– O (omega) → sss (carga −1 y espín 3/2).

– S (sigma) → uuc (carga +2 y espín 1/2).

3. Además de las partículas fundamentales indicadas, existen las correspondientes antipartículas. Haz un cuadro resumen con las antipartículas de las partículas materiales. ¿Qué antipartículas dan lugar a un antiprotón y un antineutrón, respectivamente?

A modo de ejemplo, las antipartículas más comunes son:

– e^+: positrón, de carga eléctrica +1.

– u^-: antipartícula del quark up, de carga eléctrica −2/3.

– d^-: antipartícula del quark down, de carga eléctrica +1/3.

Un antiprotón está formado por el trío de quarks: $u^-u^-d^-$.

Un antineutrón está formado por el trío de quarks: $u^-d^-d^-$.

La masa de la anterior relación de antipartículas es igual a la de las partículas respectivas (e^- ,u ,d ,p^+ y n^0).

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Un núcleo radiactivo, ¿qué clase de partículas emite? Indica su naturaleza.

Un núcleo radiactivo emite partículas radiactivas α y β, y radiación γ. Las partículas α son núcleos de helio (formado por dos protones y dos neutrones), de carga positiva (doble que la del electrón) y de número másico 4.

Las partículas β^- son electrones, y las β^+, positrones.

Los rayos γ son ondas electromagnéticas de muy alta frecuencia, mayor que la de los rayos X, que cuando interaccionan con la materia lo hacen como fotones de muy alta energía.

2. ¿Es equivalente la electrización por frotamiento de un cuerpo a la emisión de partículas β? ¿Por qué? Justifica la respuesta.

No son equivalentes. En la electrización por frotamiento, los átomos intercambian electrones que se encuentran en la corteza. Un cuerpo con carga negativa es aquel que tiene electrones en exceso, mientras que un cuerpo con carga positiva tiene un déficit de electrones en la corteza.

Sin embargo, el electrón que se emite en la desintegración β no es un electrón de la corteza, sino que es emitido por el mismo núcleo. El proceso que tiene lugar es como si un neutrón se transformase en un protón, expulsando en el proceso un electrón:

$$^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e$$

En la electrización por frotamiento, el número atómico del elemento no varía, porque el núcleo no participa en el proceso; mientras que en la desintegración β, el número atómico varía:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

3. **La radiación que emite una fuente radiactiva se reduce a la tercera parte cuando se coloca una hoja de papel frente a la fuente y se reduce prácticamente a cero cuando se coloca una lámina de aluminio de 1 cm de espesor entre la fuente y el detector. Justifica de qué tipo de emisión se trata.**

Seguramente se trata de partículas β.

La masa de una partícula α es elevada y, al ser una partícula cargada, interacciona electrostáticamente con el medio, siendo su poder de penetración muy pequeño.

Una partícula α solo es capaz de atravesar algunos centímetros de aire y no es capaz de atravesar una simple hoja de papel.

Por el contrario, la radiación gamma es altamente penetrante y no es detenida por una lámina de aluminio de un centímetro de espesor.

Teniendo esto en cuenta, parece lógico que la fuente radiactiva emita partículas β, más penetrantes que las partículas α y mucho menos que la radiación gamma.

4. **¿Cuál de los tipos de radiación que se indican es incapaz de ionizar el aire?**

a) Radiación infrarroja.

b) Partículas beta.

c) Radiación gamma.

d) Radiación X.

El aire se ioniza si la radiación o las partículas cargadas que pasan a través de él tienen energía suficiente para arrancar algún electrón a las moléculas que forman el aire.

Por tanto, cuanto menos energética sea una radiación o una partícula cargada, más difícil es que pueda ionizar el aire. De acuerdo con ello, la radiación de menor frecuencia, y, en consecuencia, la menos energética entre las que figuran, es la radiación infrarroja, que es incapaz de ionizar el aire. La respuesta correcta es **a).**

5. **¿Por qué la masa de un núcleo estable es menor que la suma de las masas de los nucleones que lo forman? ¿Tiene algún nombre esta diferencia?**

Experimentalmente se ha comprobado que la masa total de los nucleones en estado libre es mayor que la masa del núcleo al que dan lugar. A esa diferencia se la denomina defecto de masa.

La energía equivalente a este defecto de masa coincide con la energía que se desprende al formarse un núcleo a partir de protones y neutrones en estado libre o, lo que es lo mismo, coincide con la energía que hay que suministrar para desintegrar el núcleo en sus componentes.

6. Explica brevemente qué es la energía de enlace en un núcleo atómico. Relaciona este concepto con la producción de energía mediante procesos de fisión o fusión nuclear.

En un núcleo atómico cualquiera, la energía de enlace por nucleón es la relación que existe entre la energía que, de acuerdo con la expresión $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$, corresponde a la pérdida de masa, Δm, que se produce al formarse dicho núcleo y el número de nucleones, A, que lo forman:

$$E_n = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}$$

Cuanto mayor es la energía de enlace por nucleón, mayor es la estabilidad nuclear, ya que esa energía es la que hay que suministrar a cada nucleón para separarlo del núcleo. También es la energía que se desprende por cada nucleón que se agrupa para formar el núcleo.

Las reacciones de fusión nuclear consisten en la unión de núcleos pequeños para dar otros más pesados que ellos (como la fusión del hidrógeno para dar helio). La energía desprendida en la fusión es la diferencia entre la energía de enlace de los núcleos que se forman y la energía de enlace de los núcleos iniciales que se funden.

Por su parte, las reacciones de fisión nuclear consisten en la ruptura de núcleos grandes para dar otros núcleos más pequeños. La energía desprendida en la fisión es la diferencia entre la energía de enlace de los núcleos que se forman y la energía del núcleo que se fisiona.

7. Las expresiones:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \quad ; \quad N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

permiten calcular el número de átomos que quedan en una muestra radiactiva que inicialmente contenía *N* átomos. ¿Cuál de las respuestas que siguen describe el significado de la constante λ?

a) $\lambda \cdot dt$ proporciona la fracción de átomos que pueden desintegrarse en un intervalo de tiempo *dt*.

b) λ es la vida media de la muestra.

c) λ es la probabilidad de que un átomo pueda desintegrarse transcurrido un segundo.

d) λ es el tiempo que debe transcurrir para que *N* sea igual a N_0/e.

La primera de las ecuaciones:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

podemos escribirla en la forma:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

siendo dN/N una fracción diferencial de átomos. Por tanto, el término $-\lambda \cdot dt$ representa la fracción de átomos que se desintegran en un diferencial de tiempo. La respuesta correcta es **a).**

8. **El $^{226}_{88}$Ra es radiactivo y se encuentra en cantidades importantes en un mineral formado por otro elemento químico radiactivo cuya vida media es mucho mayor que la del isótopo del radio que estamos considerando. Explica a qué es debida esta presencia.**

Si el $^{226}_{88}$Ra, que tiene una vida media relativamente corta, se hubiese formado con la Tierra en sus orígenes, debería haberse desintegrado por completo en los miles de millones de años que han transcurrido desde entonces, lo que haría imposible el que detectásemos cantidades apreciables de este isótopo radiactivo.

La única explicación razonable que existe de que esto sea posible es que el $^{226}_{88}$Ra se esté formando continuamente, a partir de la desintegración de otro elemento químico.

9. **¿Qué es un antiprotón? ¿Qué propiedades físicas tiene en relación con el protón? ¿Conoces alguna otra antipartícula?**

Los neutrones y los protones están compuestos por unas partículas denominadas quarks. Cada partícula tiene su propia antipartícula. La que corresponde al protón es el antiprotón, cuya carga es igual a la del protón, pero de signo negativo, y cuya masa es igual a la de este.

Otras antipartículas son el positrón (antipartícula del electrón); su masa es la misma, pero sus cargas, del mismo valor, son de distinto signo; y el antineutrón, cuyo momento magnético es opuesto al del neutrón.

EJERCICIOS

10. **Un núcleo de masa atómica $A = 238$ y número atómico $Z = 92$ emite sucesivamente dos partículas α y tres partículas β. Determina el número atómico y el número másico de cada uno de los isótopos que resultará tras cada emisión radiactiva. ¿Cuál es el núcleo resultante?**

El número atómico del núcleo X es $Z = 92$, siendo su número másico, $A = 238$. Si emite dos partículas α consecutivas, resulta:

$$^{238}_{92}X \rightarrow {}^{234}_{90}Y + {}^{4}_{2}\text{He}$$

$$^{234}_{90}Y \rightarrow {}^{230}_{88}Z + {}^{4}_{2}\text{He}$$

y, al emitir el núcleo Z tres partículas β, obtenemos como núcleo final del proceso:

$$^{230}_{88}Z \rightarrow {}^{230}_{89}V + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$^{230}_{89}V \rightarrow {}^{230}_{90}W + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$^{230}_{90}W \rightarrow {}^{230}_{91}M + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

El número atómico del núcleo resultante, al que hemos llamado M, es $Z = 91$, siendo su número másico, $A = 230$.

11. Una muestra de plutonio desprende cierta cantidad de energía, *E*, al desintegrarse mediante un proceso de fisión nuclear. Si *c* es la velocidad de la luz en el vacío, el decremento neto de masa que se produce durante el proceso es:

a) E/c

b) $E/(2 \cdot c)$

c) $E/(c^{1/2})$

d) E/c^2

La energía desprendida puede ser interpretada en términos de defecto de masa, de acuerdo con la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow \Delta m = \frac{E}{c^2}$$

La respuesta correcta es **d).**

12. El radón, $^{219}_{86}Rn$, emite una partícula alfa acompañada, simultáneamente, de un rayo gamma.

¿Cuál es el número atómico y el número másico del núcleo resultante?

El rayo gamma se produce por la desexcitación del átomo que se forma y no conlleva variaciones en su número másico ni en su número atómico.

En cambio, cuando el $^{219}_{86}Rn$ emite una partícula α, se obtiene $^{215}_{84}Po$.

$$^{219}_{86}Rn \rightarrow {}^{215}_{84}Po + {}^{4}_{2}He + \gamma$$

El número másico del núcleo resultante es $A = 215$, siendo el número atómico, $Z = 84$.

13. El talio decae, por emisión de partículas β, para dar un isótopo estable del plomo. Si la vida media del talio es 5 minutos, transcurridos quince minutos la fracción de plomo en una muestra, que inicialmente es de talio puro, es:

a) 1/8

b) 1/6

c) 1/3

d) 5/6

e) 7/8

f) 3/4

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: Entre las opciones de respuesta del enunciado no aparece la que corresponde a la respuesta correcta, que es 19/20.

La vida media del talio es de 5 minutos. Por tanto, su constante radiactiva, λ, resulta:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ minutos}^{-1}$$

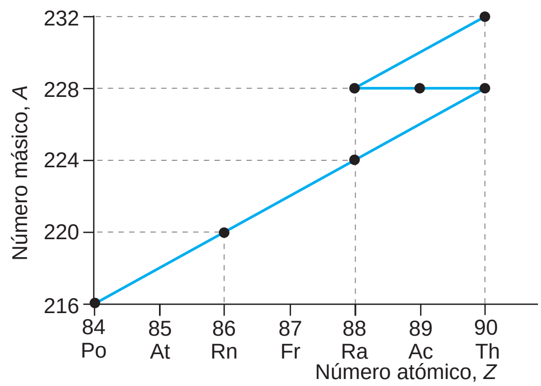
Cuando han pasado 15 minutos, la fracción de talio que queda en la muestra es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-0,2 \cdot 15} \rightarrow \frac{N}{N_0} = 0,05 = \frac{1}{20}$$

En la muestra, el talio que se desintegra se convierte en plomo. Por tanto, la fracción de plomo que habrá será el total menos la fracción de talio que acabamos de calcular:

$$F_{Pb} = 1 - F_{Ta} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

14. La parte inicial de una serie radiactiva natural es la que se muestra en la figura.



a) ¿Con qué radionúclido comienza la serie?

b) Indica en la serie los procesos que se corresponden con emisiones β y escribe la ecuación que corresponde a cada una de ellas. Haz lo mismo con las desintegraciones α.

c) Indica los isótopos que hay en la serie.

a) El radionúclido que comienza la serie es ${}^{232}_{90}\text{Th}$.

En las desintegraciones α, el número másico disminuye en dos unidades, y en las desintegraciones β no se altera. En conjunto, la serie radiactiva siempre hace que descienda el número másico. Por tanto, el radionúclido con el que comienza la serie es siempre aquel cuyo número másico es mayor.

b) En una desintegración β^-, el proceso que tiene lugar es:

$${}^{A}_{Z}Y \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

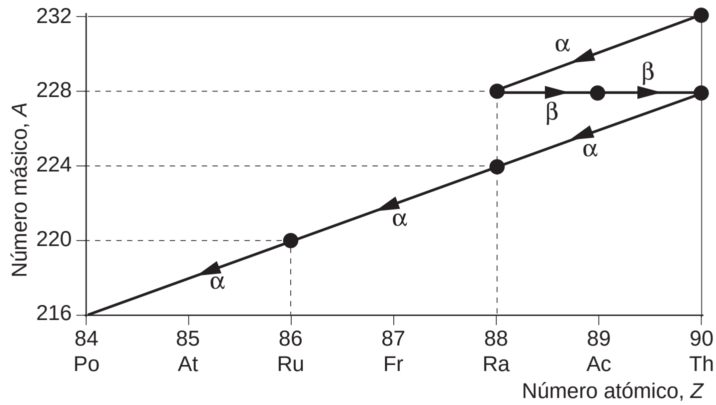
Como se aprecia en el diagrama, esto equivale a desplazarse hacia la derecha por una de las líneas horizontales, en las que el número másico no cambia.

En cambio, para una desintegración α, el proceso que se produce es:

$${}^{A}_{Z}Y \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}\text{He}$$

En el diagrama, ello equivale a moverse dos posiciones a la izquierda (disminuye el número atómico) y cuatro posiciones hacia abajo (disminuye el número másico). El movimiento resultante, por tanto, es una diagonal descendente.

De acuerdo con lo expuesto, las reacciones α y β son las que se indican en el diagrama adjunto.



c) En la serie aparecen dos isótopos del torio:

$$^{228}_{90}\text{Th} \quad \text{y} \quad ^{232}_{90}\text{Th}$$

y dos isótopos del radio:

$$^{224}_{88}\text{Ra} \quad \text{y} \quad ^{228}_{88}\text{Ra}$$

15. Se tienen dos isótopos del mismo elemento químico. Cada uno de ellos presenta un defecto de masa diferente.

¿Cuál de los isótopos es más estable? Razona tu respuesta.

Supongamos que el isótopo 1, de número másico A_1, tiene un defecto de masa Δm_1, y que el isótopo 2, de número másico A_2, tiene un defecto de masa Δm_2, siendo:

$$\Delta m_1 > \Delta m_2$$

Vamos a calcular la energía de enlace por nucleón de cada isótopo. Cuanto mayor sea esa energía, mayor será la estabilidad nuclear, ya que esa energía es la que hay que suministrar a cada nucleón para separarlo del núcleo.

De este modo:

$$E_{n-1} = \frac{\Delta m_1 \cdot c^2}{A_1} \quad ; \quad E_{n-2} = \frac{\Delta m_2 \cdot c^2}{A_2}$$

No podemos determinar cuál de las dos energías de enlace por nucleón es mayor, ya que, si bien $\Delta m_1 > \Delta m_2$, no sabemos el número másico de ninguno de los dos isótopos.

16. Algunos átomos de $^{14}_{7}$N atmosférico chocan contra un neutrón y se transforman en $^{14}_{6}$C, que, por emisión beta, se convierte de nuevo en nitrógeno. Completa las correspondientes reacciones nucleares.

Los restos orgánicos recientes contienen mayor proporción del isótopo indicado del carbono que los restos orgánicos más antiguos. ¿A qué crees que se debe este hecho y qué aplicación tiene?

Las reacciones nucleares que se producen son las siguientes:

$$^{14}_{7}\text{N} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}\text{H}$$

$$^{14}_{6}C \rightarrow ^{14}_{7}N + ^{0}_{-1}e \qquad [1]$$

Los átomos de carbono-14 se combinan con el oxígeno del mismo modo que los átomos de carbono-12, para formar moléculas de dióxido de carbono, CO_2, y parte del carbono del cuerpo de un organismo vivo es carbono-14 radiactivo. Como los seres vivos intercambian continuamente CO_2 con la atmósfera, la relación entre los dos isótopos de carbono en el organismo vivo es prácticamente constante e igual a la que existe en la atmósfera.

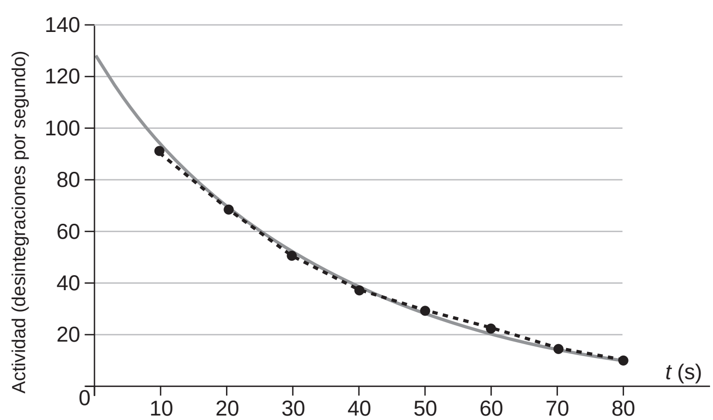
Cuando el organismo muere ya no puede absorber carbono-14, y como este se desintegra según la ecuación [1], la cantidad que contiene de este isótopo disminuye con el tiempo. Basta medir el número de desintegraciones que se producen por gramo de carbono para determinar la fecha en que murió un organismo determinado.

17. Con ayuda de un contador Geiger medimos la actividad de una sustancia radiactiva de período de vida corto. Al hacerlo, obtenemos los siguientes resultados:

Tiempo (s)	10	20	30	40	50	60	70	80
Desint/s	91	67	51	38	29	22	15	10

Confecciona la gráfica en la que se indique cómo varía el número de desintegraciones por unidad de tiempo. A partir de esa gráfica, estima la vida media de la sustancia radiactiva que se investiga.

Al representar los datos de la tabla, obtenemos el siguiente resultado:



Los datos representados, resultado de la experiencia, son los puntos negros. La curva exponencial que ajusta los datos de la experiencia es la de color gris. De acuerdo con la tendencia de la curva ajustada, la actividad inicial de la muestra es de 128 desintegraciones por segundo, aproximadamente.

El período de semidesintegración es el tiempo que transcurre desde el instante inicial hasta que la actividad se reduce a la mitad, esto es, 64 desintegraciones por segundo, lo que ocurre en el instante $t = 21$ s.

Por tanto, la vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{ln\ 2 / T} = \frac{T}{ln\ 2} = \frac{21}{ln\ 2} = 30,3 \text{ s}$$

18. La vida media del ^{238}U es 4,5 · 10^9 años:

a) Calcula la constante de desintegración de este radionúclido.

b) Calcula su vida media.

c) Si tenemos una muestra con 2 · 10^{20} átomos de ^{238}U, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que la muestra, inicialmente pura, se reduzca hasta 1,5 · 10^{20} átomos?

a) De acuerdo con la ecuación de desintegración radiactiva, la constante radiactiva resulta:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{\tau}$$

Sustituyendo el valor de la vida media, τ:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{4,5 \cdot 10^9} = 2,22 \cdot 10^{-10} \text{ años}^{-1}$$

b) La vida media es un dato proporcionado por el enunciado del ejercicio.

c) Para hallar el tiempo, hemos de despejar dicha magnitud de la ecuación que permite calcular la desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow ln\frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t \rightarrow t = \frac{ln\dfrac{N}{N_0}}{-\lambda}$$

Si sustituimos ahora los datos del enunciado, resulta:

$$t = \frac{ln\dfrac{N}{N_0}}{-\lambda} = \frac{ln\left(\dfrac{1,5 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^{20}}\right)}{-2,22 \cdot 10^{-10}} = 1,295 \cdot 10^9 \text{ años}$$

19. El período de semidesintegración del $^{222}_{86}$Rn es 3,824 días. Por la chimenea de una central se emite, en cierto instante, una corriente de gases que contiene 3,02 g de este gas:

a) Calcula la cantidad de radón que quedará transcurrido un mes.

b) Este isótopo se desintegra por emisión α. Escribe la ecuación correspondiente al proceso.

a) Podemos suponer que la masa de radón es proporcional al número de átomos de la muestra.

Por tanto, podemos escribir la ecuación de desintegración en la forma:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

donde m_0 y m son la masa inicial y actual, respectivamente.

Podemos calcular la constante de desintegración a partir del período de semidesintegración:

$$T = \frac{ln\ 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{ln\ 2}{T} = \frac{ln\ 2}{3,824} = 0,181 \text{ días}^{-1}$$

Para resolver correctamente el ejercicio, debemos expresar todos los tiempos en la misma unidad. Por tanto, si hemos expresado en días^{-1} la constante radiactiva, el tiempo, t, debemos expresarlo en días.

En nuestro caso, 1 mes = 30 días. De este modo:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 3,02 \cdot e^{-0,181 \cdot 30} = 0,0131 \text{ gramos}$$

b) La ecuación que muestra el proceso de desintegración es:

$$^{A}_{Z}Y \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Esta expresión, en nuestro caso, se convierte en:

$$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

20. Sabiendo que en la siguiente reacción nuclear:

$$^{A}_{Z}X + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}\text{He}$$

se liberan 11,47 MeV de energía:

a) Escribe el isótopo $^{A}_{Z}X$ que falta en la reacción.

b) Calcula la masa atómica de dicho isótopo.

Datos: $m(^{1}\text{H}) = 1,0078$ u

$m(^{4}\text{He}) = 4,0026$ u

1 u equivale a 931 MeV.

a) Si tenemos en cuenta que en los procesos nucleares se conserva el número de nucleones y la carga eléctrica total, podemos escribir lo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} A + 1 &= 8 \\ Z + 1 &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} A &= 7 \\ Z &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, el isótopo $^{A}_{Z}X$ que falta en la reacción es:

$$^{A}_{Z}X = {}^{7}_{3}\text{Li}$$

b) El defecto de masa que corresponde al proceso nuclear que describe el enunciado es:

$$\Delta m = 2 \cdot m_{\text{He}} - m_{\text{H}} - m_{isótopo}$$

Si tenemos en cuenta que el defecto de masa que corresponde a 11,47 MeV de energía es:

$$\Delta m = 11,47 \text{ MeV} \cdot \frac{1 \text{ u}}{931 \text{ MeV}} = 0,0123 \text{ u}$$

Podemos calcular la masa atómica del isótopo:

$$m_{isótopo} = 2 \cdot m_{He} - m_H - \Delta m = 2 \cdot 4{,}0026 - 1{,}0078 - 0{,}0123 = 6{,}9851 \text{ u}$$

PROBLEMAS

21 Calcula la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para los isótopos:

$$\mathbf{^{25}Mg} \qquad \mathbf{^{16}O} \qquad \mathbf{^{56}Fe}$$

Si sobre los tres isótopos incide un neutrón, ¿en cuál de los tres casos sería más fácil que se produjese una emisión radiactiva? ¿Por qué?

Datos: $\boldsymbol{m(^{25}Mg) = 24{,}9858}$ **u**

$\boldsymbol{m(^{16}O) = 15{,}9949}$ **u**

$\boldsymbol{m(^{56}Fe) = 55{,}9349}$ **u**

$\boldsymbol{m(p) = 1{,}0073}$ **u**

$\boldsymbol{m(n) = 1{,}0087}$ **u**

1 u equivale a 931 MeV.

Calculemos, en primer lugar, el defecto de masa, en valor absoluto, para cada uno de los isótopos:

$$^{25}_{12}Mg \rightarrow \Delta m_{Mg} = 12 \cdot 1{,}0073 + (25 - 12) \cdot 1{,}0087 - 24{,}9858 = 0{,}2149 \text{ u}$$

$$^{16}_{8}O \rightarrow \Delta m_{O} = 8 \cdot 1{,}0073 + (16 - 8) \cdot 1{,}0087 - 15{,}9949 = 0{,}1331 \text{ u}$$

$$^{56}_{26}Fe \rightarrow \Delta m_{Fe} = 26 \cdot 1{,}0073 + (56 - 26) \cdot 1{,}0087 - 55{,}9349 = 0{,}5159 \text{ u}$$

Para calcular la energía de enlace, utilizamos la conversión de masa a energía, teniendo en cuenta la relación 1 u = 931 MeV. De este modo:

$$E\left(^{25}_{12}Mg\right) = 0{,}2149 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 200{,}07 \text{ MeV}$$

$$E\left(^{16}_{8}O\right) = 0{,}1331 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 123{,}92 \text{ MeV}$$

$$E\left(^{56}_{26}Fe\right) = 0{,}5159 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 480{,}30 \text{ MeV}$$

Para calcular la energía de enlace por nucleón, dividimos la energía de enlace entre el número de nucleones. De este modo:

$$E_{nucleón}\left(^{25}_{12}Mg\right) = \frac{200{,}08}{25} = 8{,}003 \text{ MeV}$$

$$E_{nucleón}\left(^{16}_{8}O\right) = \frac{105{,}30}{16} = 7{,}745 \text{ MeV}$$

$$E_{nucleón}\left(^{56}_{26}Fe\right) = \frac{480{,}30}{56} = 8{,}577 \text{ MeV}$$

La energía de enlace por nucleón es una medida de la estabilidad nuclear, ya que es la energía que hay que suministrar a cada nucleón para separarlo del núcleo. Por tanto, la emisión radiactiva más probable cabe esperarla en el núcleo ${}^{16}_{8}O$, que es el núclido que menor energía de enlace por nucleón posee.

22. Calcula:

a) La energía media de enlace por nucleón de un átomo de ${}^{40}_{20}Ca$, expresada en MeV.

b) La energía necesaria (en joule) para disociar completamente un gramo del isótopo indicado en sus partículas constituyentes.

Datos: $m({}^{40}_{20}Ca) = 39{,}97545$ **u**

$m(p) = 1{,}0073$ **u**

$m(n) = 1{,}0087$ **u**

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ **átomos · mol**$^{-1}$

1 u equivale a 931 MeV.

a) La energía media de enlace por nucleón corresponde al equivalente energético del defecto de masa que se produce en la formación del núcleo a partir de sus constituyentes dividido entre el número de nucleones.

El defecto de masa en la formación del ${}^{40}_{20}Ca$ es:

$$\Delta m = 20 \cdot m(p) + 20 \cdot m(n) - m({}^{40}_{20}Ca)$$

$$\Delta m = 20 \cdot 1{,}0073 + 20 \cdot 1{,}0087 - 39{,}97545 = 0{,}34455 \text{ u}$$

La energía equivalente a este defecto de masa, es decir, la energía de enlace del núcleo, es:

$$\Delta E = \Delta m \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} \rightarrow \Delta E = 0{,}34455 \cdot \frac{931}{1} = 320{,}776 \text{ MeV}$$

La energía media de enlace por nucleón se obtiene dividiendo la energía de enlace entre el número de nucleones:

$$E_n = \frac{\Delta E}{A} = \frac{320{,}776}{40} = 8{,}02 \text{ MeV/nucleón}$$

b) La energía necesaria para disociar un núcleo en sus partículas constituyentes es la misma energía que se desprende al formarse el átomo a partir de estas.

En este caso, debemos calcular cuántos átomos hay en un gramo de sustancia. Para ello, calculamos, en primer lugar, la cantidad de sustancia, expresada en mol, a que equivale 1 g de ${}^{40}_{20}Ca$:

$$n = \frac{m}{M({}^{40}_{20}Ca)} \rightarrow n = \frac{1}{39{,}97545} = 25{,}015 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Multiplicando por el número de Avogadro obtenemos el número de átomos:

$$N = n \cdot N_A \rightarrow N = 25{,}015 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}506 \cdot 10^{22} \text{ átomos}$$

Por tanto, la energía necesaria para disociar estos átomos es:

$$E = N \cdot \Delta E = 1{,}506 \cdot 10^{22} \cdot 320{,}776 = 4{,}83 \cdot 10^{24} \text{ MeV}$$

Expresada en joule, esta energía es:

$$E = 4{,}83 \cdot 10^{30} \text{ eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 7{,}73 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado; la numeración con que en él aparece es 28.

23. El bismuto-210 ($Z = 83$) emite una partícula β^- y se transforma en polonio, el cual emite una partícula α y se transforma en un isótopo del plomo.

a) Escribe las correspondientes reacciones de desintegración.

b) Si el período de semidesintegración del bismuto-210 es de 5 días y se tiene, inicialmente, 1 mol de átomos de bismuto, ¿cuántos núcleos de bismuto se han desintegrado en 10 días?

Dato: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ átomos · mol^{-1}.

a) La ecuación que corresponde a la reacción de desintegración β es:

$$^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}e$$

Y la que corresponde a la emisión de una partícula α:

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{206}_{82}\text{Pb}$$

b) A partir de la relación entre el período de semidesintegración y la constante radiactiva obtenemos el valor de esta última:

$$\lambda = \frac{ln\ 2}{T_{1/2}} = \frac{ln\ 2}{5} = 0{,}1386 \text{ días}^{-1}$$

Teniendo en cuenta que es un mol de átomos de bismuto hay N_A átomos y aplicando la ley de la desintegración radiactiva, obtenemos los átomos que quedan sin desintegrarse al cabo de 10 días.

$$N = 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot e^{-0{,}1386 \text{ días}^{-1} \cdot 10 \text{ días}} = 1{,}506 \cdot 10^{23} \text{ átomos de Bi}$$

Por tanto, el número de átomos que se han desintegrado es:

$$N_0 - N = 6{,}022 \cdot 10^{23} - 1{,}506 \cdot 10^{23} = 4{,}517 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

24 El ^{234}U tiene un período de semidesintegración de $2{,}5 \cdot 10^5$ años. Si tenemos una muestra que contiene un mol de átomos de ese elemento:

a) ¿Cuántos átomos quedarán transcurridos 1 000 años?

b) ¿Cuál es la actividad de la muestra en el instante inicial, expresada en desintegraciones/minuto?

c) ¿Es significativo el período de 1 000 años que estamos considerando?

a) El número de átomos de una muestra es proporcional a la cantidad de sustancia. Por tanto, podemos escribir la ecuación de desintegración en la forma:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

donde n_0 y n son la cantidad de sustancia (en mol) inicial y actual, respectivamente.

Podemos calcular la constante de desintegración a partir del período de semidesintegración:

$$T = \frac{ln\ 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{ln\ 2}{T} = \frac{ln\ 2}{2{,}5 \cdot 10^5} = 2{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}$$

Cuando hayan pasado 1 000 años, la cantidad de sustancia será:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1 \cdot e^{-2,77 \cdot 10^{-6} \cdot 1\,000} = 0,9972 \text{ mol}$$

b) La actividad de una muestra radiactiva es el producto de su constante de desintegración por el número de núcleos radiactivos, N, presentes en la muestra, $A = \lambda \cdot N$.

En el instante inicial hay un mol de núcleos radiactivos en la muestra. El número de núcleos presentes es el número de Avogadro, $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$.

Por tanto, la actividad de la muestra es:

$$A = \lambda \cdot N_0 = 6,023 \cdot 10^{23} \cdot 2,77 \cdot 10^{-6} \text{ años}^{-1}$$

$$A = 1,67 \cdot 10^{18} \text{ desintegraciones} \cdot \text{año}^{-1}$$

Expresando la actividad en las unidades que nos indican, resulta:

$$A = 1,67 \cdot 10^{18} \frac{\text{desintegraciones}}{\text{año}}$$

$$A = 1,67 \cdot 10^{18} \frac{\text{desintegraciones}}{\text{año}} \cdot \frac{1 \text{ año}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ minutos}}$$

$$A = 3,177 \cdot 10^{12} \text{ desintegraciones} \cdot \text{minuto}^{-1}$$

c) El período que estamos considerando no es significativo.

Hemos de tener en cuenta que, para que se reduzca a la mitad el número de átomos presentes en la muestra, han de pasar $2,5 \cdot 10^5$ años, que es un intervalo de tiempo 250 veces superior a los 1 000 años que estamos considerando.

25. En una excavación arqueológica se ha encontrado una estatua de madera cuyo contenido en ^{14}C es el 58% del que poseen las maderas actuales de la zona. Sabiendo que el período de semidesintegración del ^{14}C es de 5 570 años, determina la antigüedad de la estatua encontrada.

Podemos obtener el tiempo transcurrido teniendo en cuenta que el número de radionúclidos en la muestra es el 58% del que posee la madera recién cortada:

$$N = 0,58 \cdot N_0$$

Sustituyendo en la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0,58 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0,58 = e^{-\lambda \cdot t}$$

Antes de despejar el tiempo en la expresión anterior necesitamos conocer el valor de la constante radiactiva de este isótopo, que podemos obtener a partir del período de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{ln\ 2}{T_{1/2}} \rightarrow \lambda = \frac{ln\ 2}{5\,570} = 1,244 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Por tanto, la antigüedad de la estatua resulta:

$$0,58 = e^{-1,244 \cdot 10^{-4} \cdot t} \rightarrow ln\ 0,58 = -1,244 \cdot 10^{-4} \cdot t \rightarrow t = \frac{ln\ 0,58}{-1,244 \cdot 10^{-4}} = 4\,378,8 \text{ años}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado; la numeración con que en él aparece es 31.

26. El $^{210}_{83}$Bi se desintegra espontáneamente por emisión beta con un período de semidesintegración de 5 días. Inicialmente tenemos 16 · 10^{-3} kg de dicho isótopo. Calcula:

a) ¿Qué cantidad quedará al cabo de 15 días?

b) ¿Cuántos protones y neutrones tiene el núcleo que resulta después de dicha emisión?

a) Para obtener la cantidad de muestra radiactiva que quedará al cabo de 15 días, aplicamos la ley de la desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Como desconocemos la masa atómica del isótopo, expresaremos la ley anterior en función de la masa, teniendo en cuenta que:

$$N = \frac{m}{M(^{210}_{83}\text{Bi})} \cdot N_A \quad ; \quad N_0 = \frac{m_0}{M(^{210}_{83}\text{Bi})} \cdot N_A$$

Por tanto:

$$\frac{m}{M(^{210}_{83}\text{Bi})} \cdot N_A = \frac{m_0}{M(^{210}_{83}\text{Bi})} \cdot N_A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

La constante de desintegración para este isótopo vale:

$$\lambda = \frac{ln\ 2}{T_{1/2}} = \frac{ln\ 2}{5} = 0{,}139 \text{ días}^{-1}$$

Por tanto, al cabo de 15 días quedará:

$$m = 16 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0{,}139 \cdot 15} = 1{,}99 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

b) Puesto que el $^{210}_{83}$Bi se desintegra por emisión β, la reacción que tiene lugar es:

$$^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}X$$

donde $^{A}_{Z}X$ es el núcleo que resulta de la desintegración. Teniendo en cuenta que tanto el número másico como el número atómico se conservan en la reacción:

$$210 = 0 + A \rightarrow A = 210$$

$$83 = -1 + Z \rightarrow Z = 84$$

El núcleo resultante tiene 84 protones y 210 − 84 = 126 neutrones. Corresponde, por tanto, al núclido $^{210}_{84}$Po.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado; la numeración con que en él aparece es 32.

27 El $^{210}_{84}$Po es un isótopo radiactivo del polonio que se desintegra siguiendo la ley radiactiva de desintegración. Si en el instante inicial hay N_0 núcleos de este isótopo en la muestra, y el número del núcleos que existe, transcurrido un tiempo *t*, es *N*, calcula el período de semidesintegración y la fracción de núcleos sin desintegrar que quedan en los instantes $t_1 = 2 \cdot T_{1/2}$ y $t_2 = 3 \cdot T_{1/2}$, sabiendo que la constante de desintegración es 0,005 días^{-1}.

El período de semidesintegración de un isótopo radiactivo es el tiempo que dicho isótopo tarda en reducir a la mitad el número de átomos existentes inicialmente en una muestra.

De acuerdo con la definición:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T} \rightarrow T = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\lambda} = \frac{ln\ 2}{\lambda}$$

Sustituyendo el valor de la constante de desintegración, obtenemos el período de semidesintegración:

$$T = \frac{ln\ 2}{\lambda} = \frac{ln\ 2}{0,005} = 138,63 \text{ días}$$

Como $T = ln\ 2 \cdot \lambda^{-1}$, la fracción de núcleos de $^{210}_{84}Po$ que quedan, transcurrido un tiempo $t = 2 \cdot T$ y un tiempo $t = 3 \cdot T$, resulta:

$$t = 2 \cdot T \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{ln2}{T} \cdot 2T} = \frac{1}{4}$$

$$t = 3 \cdot T \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{ln2}{T} \cdot 3T} = \frac{1}{8}$$

28. El ^{131}I es un isótopo radiactivo que se utiliza en medicina para el tratamiento del hipertiroidismo, ya que se concentra en la glándula tiroides. Su período de semidesintegración es 8 días.

a) Explica cómo ha cambiado una muestra de 20 mg de ^{131}I tras estar almacenada en un hospital durante 48 días.

b) ¿Cuál es la actividad de 1 µg de ^{131}I?

Dato: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ átomos · mol^{-1}.

a) De acuerdo con la ley de la desintegración radiactiva, el número de núcleos radiactivos que quedan sin desintegrar en un instante dado se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Como las masas están en la misma relación que el número de núcleos, podemos escribir la siguiente expresión:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

El valor de la constante radiactiva, λ, es:

$$\lambda = \frac{ln\ 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{8} = 8,66 \cdot 10^{-2} \text{ días}^{-1}$$

Por tanto, al cabo de 48 días quedará la siguiente masa de isótopo sin desintegrar:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 20 \cdot e^{-8,66 \cdot 10^{-2} \cdot 48} = 0,31 \text{ mg}$$

b) La actividad de una sustancia radiactiva es el número de núcleos que se desintegran por unidad de tiempo:

$$A = \lambda \cdot N$$

En la expresión anterior, N es el número de núcleos existentes en determinado instante. Teniendo en cuenta la masa de isótopo, 1 μg, su masa atómica y el número de Avogadro, el valor de N es:

$$N = \frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{10^{-6}}{131} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{22} = 4{,}6 \cdot 10^{15} \text{ núcleos}$$

Por tanto, la actividad de la muestra es:

$$A = \lambda \cdot N = 8{,}66 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{15} = 3{,}98 \cdot 10^{14} \text{ núcleos/día} = 4{,}6 \cdot 10^{9} \text{ núcleos/segundo}$$

29. Un neutrón incide sobre un núcleo de deuterio, formándose un núcleo de tritio. El proceso va acompañado de la emisión de un fotón de radiación gamma.

a) Escribe la ecuación que corresponde al proceso de desintegración nuclear.

b) Calcula la energía desprendida en el proceso, expresada en eV.

c) ¿Cuántas reacciones de este tipo son necesarias para producir 1 J de energía?

Datos: $m(^2\text{H}) = 2{,}014740$ **u**

$m(^3\text{H}) = 3{,}017005$ **u**

$m(n) = 1{,}008986$ **u**

a) La ecuación nuclear que corresponde al proceso es:

$${}^1_0n + {}^2_1\text{H}^* \rightarrow {}^3_1\text{H} + \gamma$$

En el término de la izquierda hemos puesto el símbolo *, que significa, como ya sabes, que el núcleo está excitado. Fruto de la desexcitación, se produce la emisión del fotón gamma.

b) Para calcular la energía desprendida, no tendremos en cuenta el fotón gamma, que no forma parte del proceso, propiamente dicho, de formación del tritio.

Calculemos en primer lugar el defecto de masa:

$$\Delta m = m_p - m_r = 3{,}017005 - (1{,}008986 + 2{,}014740) = -0{,}006721 \text{ u}$$

El signo negativo indica que en el proceso de formación del tritio se desprende energía. El equivalente energético de la diferencia de masa que obtenemos en el proceso es:

$$E = \Delta m \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = -0{,}006721 \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = -6{,}26 \text{ MeV} = -6{,}26 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

c) Teniendo en cuenta que un electronvolt equivale a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ joule, el número de reacciones necesarias lo obtendremos dividiendo un joule entre el equivalente en joules de $6{,}26 \cdot 10^6$ eV, que es la energía desprendida en cada reacción.

Por tanto:

$$E_{reacción} = -6,26 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = -1,0016 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$n = \frac{E_{total}}{E_{reacción}} = \frac{1 \text{ J}}{1,0016 \cdot 10^{-12} \text{ J}} = 9,9884 \cdot 10^{11} \text{ reacciones}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado; la numeración con que en él aparece es 35.

30. En cierto mineral de uranio, la relación que existe entre el número de átomos de ^{238}U y el número de átomos de ^{214}Pb, es 2,1.

Calcula la edad del mineral. Considera, para ello, que todo el plomo se obtiene al desintegrarse el uranio.

En primer lugar hemos de hallar la fracción de uranio que queda en el mineral. Si consideramos que solo existe uranio y plomo, podemos escribir para la composición actual, en tanto por uno:

$$X_{Pb} + X_U = 1$$

siendo la relación entre ambos:

$$\frac{X_U}{X_{Pb}} = 2,1$$

Si despejamos de la segunda ecuación X_{Pb} y sustituimos en la primera, obtenemos la fracción de uranio, X_U, que contiene actualmente el mineral.

$$X_{Pb} = \frac{X_U}{2,1} \rightarrow \frac{X_U}{2,1} + X_U = 1 \rightarrow X_U \cdot \left(1 + \frac{1}{2,1}\right) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow X_U = \frac{1}{1 + \frac{1}{2,1}} = 0,677$$

Para calcular la edad del mineral, hemos de hallar el tiempo transcurrido desde que la fracción del uranio en el mineral era la unidad hasta ahora. Para ello utilizamos la expresión que conocemos para la desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow ln \frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t \rightarrow t = \frac{ln \frac{N}{N_0}}{-\lambda}$$

En esta expresión, el cociente entre el número de átomos de uranio actuales y el número de átomos de uranio iniciales lo conocemos:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{X_U}{1} = 0,677$$

La vida media del ^{238}U es $4,5 \cdot 10^9$ años. Por tanto:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{4,5 \cdot 10^9} = 2,22 \cdot 10^{-10} \text{ años}^{-1}$$

Sustituyendo en la ecuación de desintegración, el tiempo transcurrido resulta:

$$t = \frac{ln \frac{N}{N_0}}{-\lambda} = \frac{ln(0,677)}{-2,22 \cdot 10^{-10}} = 1,755 \cdot 10^9 \text{ años}$$

31 En la desintegración del $^{226}_{88}$Ra para formar radón, cada átomo emite una partícula alfa y también un rayo gamma de longitud de onda $6,52 \cdot 10^{-12}$ m.

a) Escribe la reacción de desintegración.

b) Calcula la energía máxima de cada fotón de rayos gamma en MeV.

c) Calcula la pérdida de masa de la reacción anterior debida a la emisión gamma.

Datos: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J · s

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula α, se convierte en otro núcleo con dos unidades menos de número atómico, *Z,* y cuatro unidades menos de número másico, *A*:

$$^{A}_{Z}X + {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{A-4}_{Z-2}Y$$

Por tanto, en el caso del radio:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{222}_{86}\text{Rn} + \gamma$$

La radiación gamma es energía que emite el átomo en forma de radiación electromagnética.

b) La energía de un fotón se calcula de acuerdo con la expresión de Planck:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{6,52 \cdot 10^{-12}} = 3,05 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Teniendo en cuenta que:

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

El valor de la energía máxima de cada fotón de rayos gamma, expresada en MeV, es:

$$E = \frac{3,05 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 0,19 \text{ MeV}$$

c) La pérdida de masa la podemos obtener a partir de la ecuación de Einstein:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{3,05 \cdot 10^{-14}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3,38 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

32. Aplicando el principio de conservación de la energía, calcula la energía cinética con que son emitidas las partículas alfa en el proceso de desintegración del ^{226}Ra en ^{222}Rn:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Si la energía con que son realmente emitidas las partículas α es del orden de 4,80 MeV, explica a qué puede deberse la diferencia.

Masas atómicas: $\boldsymbol{m(^{226}Ra) = 226{,}025406\ u}$

$\boldsymbol{m(^{222}Rn) = 222{,}017574\ u}$

$\boldsymbol{m(^{4}He) = 4{,}002603\ u}$

En primer lugar calculamos el defecto de masa que corresponde a la reacción nuclear:

$$\Delta m = m_{Ra} - (m_{Rn} + m_{He}) = 226{,}025406 - (222{,}017574 + 4{,}002603) =$$

$$= 0{,}005229\ u = 0{,}005229\ u \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg}{1\ u} = 8{,}68 \cdot 10^{-30}\ kg$$

La energía desprendida en la reacción, de acuerdo con la relación de Einstein, es:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 8{,}68 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 7{,}81 \cdot 10^{-13}\ J = 7{,}81 \cdot 10^{-13}\ J \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} =$$

$$= 4{,}88 \cdot 10^6\ eV = 4{,}88\ MeV$$

El resultado obtenido difiere de la energía con que realmente son emitidas las partículas α. Ello puede ser debido a que, cuando se produce una desintegración α, el nucleido resultante de la transmutación puede quedar en un estado fundamental o en alguno de sus estados excitados. Las partículas alfa más energéticas corresponden al caso en que el núcleo transmutado quede en un estado fundamental. Si el núcleo obtenido se queda en un estado excitado, este se desexcitará, casi inmediatamente (en un tiempo del orden de 10^{-14} segundos); este proceso va acompañado, generalmente, de la emisión de un fotón gamma cuya energía será la diferencia entre las que corresponden a los niveles inicial y final de la transición.

Por tanto, la gran mayoría de emisiones alfa también emiten rayos gamma.

33. Determina las intensidades de las fuerzas gravitatoria y eléctrica que ejercen dos protones separados 10 pm entre sí. ¿Son de repulsión o de atracción? ¿A qué es debido que la repulsión que ejercen entre sí los protones en un núcleo atómico no haga que explote?

Datos: $\boldsymbol{m(p) = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ kg}$

$\boldsymbol{e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C}$

La fuerza gravitatoria que ejercen los dos protones entre sí se obtiene a partir de la ley de gravitación universal:

$$F_g = G \cdot \frac{m(p) \cdot m(p)}{r^2}$$

$$F_g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1{,}6726 \cdot 10^{-27})^2}{(10 \cdot 10^{-12})^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-42}\ N$$

Por otra parte, la fuerza electrostática la proporciona la ley de Coulomb:

$$F_e = K \cdot \frac{e \cdot e}{r^2}$$

$$F_g = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{(10 \cdot 10^{-12})^2} = 2{,}31 \cdot 10^{-6}\ N$$

La fuerza gravitatoria, de atracción, es despreciable frente a la fuerza eléctrica repulsiva que ejercen los dos protones entre sí. Sin embargo, los protones se mantienen unidos en el núcleo atómico debido a la existencia de una tercera fuerza, muy intensa y atractiva, que supera a la fuerza eléctrica de repulsión. Esta fuerza es la fuerza nuclear fuerte, responsable de la elevada estabilidad del núcleo atómico.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado; la numeración con que en él aparece es 39.

34. Calcula la masa de deuterio ($^{2}_{1}H$) que requeriría cada día una hipotética central de fusión de 500 MW de potencia eléctrica en la que la energía se obtuviese del proceso $2\,^{2}_{1}H \rightarrow \,^{4}_{2}He$, suponiendo un rendimiento del 30%.

Datos: $m(^2H) = 2{,}01474$ u

$m(^4He) = 4{,}00387$ u

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ átomos · mol^{-1}

La energía que suministra la central corresponde al equivalente energético de la diferencia de masa entre los reactivos y los productos de la reacción nuclear que tiene lugar, según la ecuación de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

En un día, la central proporciona una energía:

$$P = \frac{E}{t} \rightarrow E = P \cdot t$$

$$E = 500 \cdot 10^6 \cdot 86\,400 = 4{,}32 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Pero, como indica el enunciado, esta energía representa tan solo el 30% de la energía puesta en juego en la reacción nuclear. Por tanto, la energía total desprendida en la reacción es:

$$E_{total} = \frac{E}{0{,}3} \rightarrow E_{total} = \frac{4{,}32 \cdot 10^{13}}{0{,}3} = 1{,}44 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

La masa a que equivale esta energía es:

$$m = \frac{E_{total}}{c^2} \rightarrow m = \frac{1{,}44 \cdot 10^{14}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Esta masa corresponde a la diferencia de masa que se obtiene a lo largo del día en el total de reacciones que tienen lugar. Su valor, expresado en u.m.a., es:

$$m = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1 \text{ u}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 9{,}64 \cdot 10^{23} \text{ u}$$

La diferencia de masa que se obtiene en cada reacción es:

$$\Delta m = 2 \cdot m(^2H) - m(^4He)$$

$$\Delta m = 2 \cdot 2{,}01474 - 4{,}00387 = 0{,}02561 \text{ u}$$

El número de reacciones que se producen cada día es:

$$n = \frac{m}{\Delta m} \rightarrow n = \frac{9{,}64 \cdot 10^{23}}{0{,}02561} = 3{,}764 \cdot 10^{25} \text{ reacciones}$$

Como en cada reacción intervienen dos núcleos de deuterio, la masa de este necesaria cada día para que la central suministre una potencia de 500 MW es:

$$m = 2 \cdot n \cdot M(^2H) \rightarrow m = 2 \cdot 3{,}764 \cdot 10^{25} \cdot 2{,}01474 = 1{,}517 \cdot 10^{26} \text{ u}$$

Expresada en kilogramos, esta masa es:

$$m = 1{,}517 \cdot 10^{26}\ \text{u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1\ \text{u}} = 0{,}2518\ \text{kg}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado, la numeración con que en él aparece es 40.

35 Cuando un núcleo de ^{235}U captura un neutrón, se parte (fisiona) en dos fragmentos, más dos o tres neutrones, y libera unos 210 MeV de energía. La energía de enlace por nucleón de los fragmentos de fisión es, en promedio, de 8,4 MeV. Haz un cálculo aproximado de la energía de enlace por nucleón del ^{235}U, despreciando la contribución de los neutrones producidos.

La reacción nuclear a que se refiere el enunciado es la siguiente:

$$^{235}\text{U} + n \rightarrow {}^{x}X + {}^{y}Y + 2n$$

Si despreciamos la contribución de los neutrones producidos y la del neutrón capturado, la reacción se puede considerar como una reacción nuclear en la que los 235 nucleones del uranio se transforman en 235 nucleones repartidos en dos núcleos.

La energía que desprenderían los 235 nucleones cuando se formó el uranio es igual en la energía de enlace por nucleón multiplicada por el número de nucleones:

$$\Delta E_{\text{uranio}} = \left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{\text{uranio}} \cdot 235$$

La energía que se desprendería, si esos 235 nucleones formasen dos núcleos de 8,4 MeV de energía de enlace por nucleón, $\Delta E/A$, sería:

$$\Delta E_{2\ \text{fragmentos}} = 235 \cdot \left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{\text{fragmentos}} = 235 \cdot 8{,}4\ \text{MeV}$$

La energía de enlace desprendida si se forman los dos núcleos intermedios es mayor que la desprendida cuando se forma el uranio. Esa diferencia de energía es la energía liberada en la fisión, 210 MeV.

Si igualamos las energías anteriores:

$$235 \cdot 8{,}4 - 235 \cdot \left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{\text{uranio}} = 210\ \text{MeV}$$

se obtiene la energía de enlace por nucleón del ^{235}U:

$$\left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{\text{uranio}} = \frac{235 \cdot 8{,}4 - 210}{235} = 7{,}5\ \text{MeV}$$