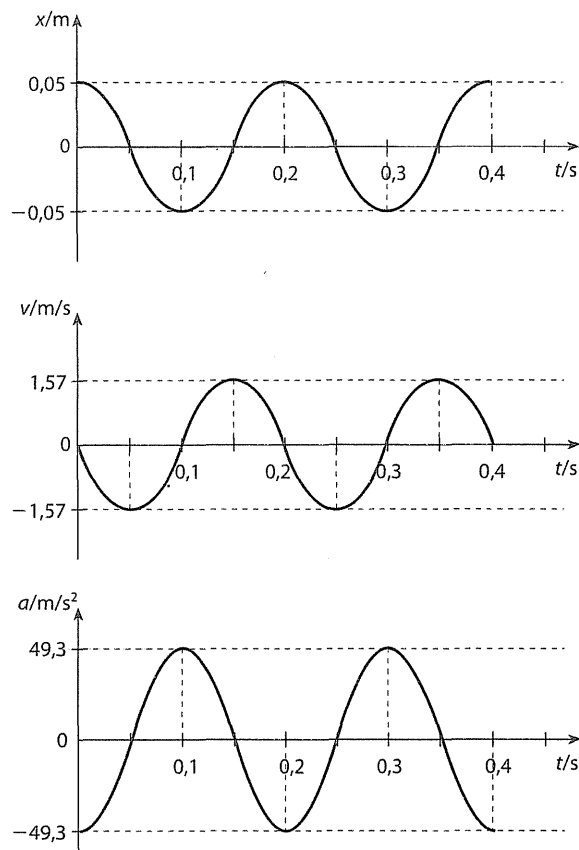


Las representaciones gráficas serán las siguientes:



**11** Razona cómo podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte.

Si colgamos las masas de un mismo resorte (misma  $k$ ), se cumplirá en ambos osciladores que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ y } \omega'^2 = \frac{k}{m'}$$

Por tanto,  $m\omega^2 = m'\omega'^2$ , y como, además,  $\omega = 2\pi f$ , se concluye:

$$\frac{m}{m'} = \frac{f'^2}{f^2}$$

Así, la relación entre las masas es igual a la relación inversa entre los cuadrados de las frecuencias de oscilación.

**12** La frecuencia de oscilación de cierta masa  $m$  en un resorte es el triple que la de otra masa  $m'$ . ¿Qué relación guardan ambas masas entre sí?

Según se desprende de la expresión anterior,  $m$  será la novena parte de  $m'$ , es decir:

$$m = \frac{1}{9} \cdot m'$$

**13 PAU** Un oscilador consistente en una masa unida a un resorte horizontal de constante restauradora  $k = 100 \text{ N/m}$  se mueve según la ecuación:

$$x = 6,5 \cos 5\pi t \text{ cm}$$

- ¿Cuál es la masa del oscilador?
- ¿Cuál es la frecuencia de oscilación?
- ¿Cuál es la velocidad máxima de su movimiento?
- ¿Cuál es la velocidad cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud?
- ¿Cuál es su aceleración máxima?
- De la ecuación  $x = 6,5 \cos 5\pi t \text{ cm}$  se deduce que:

$$A = 6,5 \text{ cm y } \omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Dado que  $\omega^2 = k/m$ , podemos determinar  $m$ :

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{100}{25\pi^2} = 0,40 \text{ kg}$$

**b)** La frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,5 \text{ Hz}$$

**c)** La velocidad máxima de su movimiento es:

$$|v_{\text{máx}}| = \omega A = 102,1 \text{ cm/s} = 1,02 \text{ m/s}$$

**d)** Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, la velocidad es:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} v_{\text{máx}} = 88,4 \text{ cm/s} = 0,884 \text{ m/s}$$

**e)** La aceleración máxima es:

$$|a| = \omega^2 A = 16 \text{ m/s}^2$$

**14** Demuestra cómo a partir de la igualdad  $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$  puede obtenerse la expresión 7.7, que relaciona la velocidad con la posición del oscilador.

Puesto que  $\omega^2 = k/m$ , lo que implica que  $k = m\omega^2$ , es posible escribir la igualdad dada de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

que, simplificando, se transforma en:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

de donde:

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

es decir:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

**15 PAU** Si la amplitud de un cuerpo que oscila con MAS es  $A$ :

- ¿En qué punto son iguales su energía cinética y potencial?
- ¿En qué punto es su energía potencial el doble que la cinética?
- ¿En qué punto es su energía cinética el doble que la potencial?
- Su energía total es  $\frac{1}{2} k A^2$ . El punto en el que la energía potencial se iguala con la cinética será aquel en el que ambas expresiones valgan la mitad de la energía total. Por tanto:  $E_p = E_{\text{total}}/2$ .

Es decir:

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k A^2\right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot A$$

**b)** En este caso:  $E_p = 2 \cdot E_c$ .

Es decir:

$$\frac{1}{2} k x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2$$

Sustituyendo la velocidad:

$$\frac{1}{2} k x^2 = m \omega^2 (A^2 - x^2) = k (A^2 - x^2) \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 = A^2 - x^2$$

Es decir:

$$x = \sqrt{2/3} \cdot A = 0,82 \cdot A$$

**c)** En este caso debe cumplirse que  $E_c = 2 \cdot E_p$ . Es decir:

$$\frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = k x^2 \Rightarrow A^2 - x^2 = 2x^2$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{3}} = 0,57 \cdot A$$

- 16 PAU** Un cuerpo de 5 kg choca con una velocidad de 10 m/s contra un muelle de constante elástica  $k = 25$  N/m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2. Calcula la longitud que se comprime el muelle si consideramos la masa despreciable.

Al chocar el cuerpo contra el muelle y comprimirlo, parte de la energía mecánica se disipa en forma de trabajo de rozamiento (no conservativo). Dicho trabajo es igual a la variación de energía mecánica del sistema:

$$W_{\text{roz}} = \Delta E$$

Por tanto:

$$-F_r x = E_f - E_0$$

El punto final es el de máxima compresión del muelle, arrastrado por la masa de 5 kg. En ese punto, la energía mecánica del sistema es la energía potencial elástica del muelle comprimido, mientras que la energía mecánica inicial era la cinética del cuerpo. Así pues:

$$\begin{aligned} -F_r x &= 1/2 kx^2 - 1/2 mv^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\mu mgx &= 1/2 kx^2 - 1/2 mv^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$1/2 kx^2 + \mu mgx - 1/2 mv^2 = 0$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

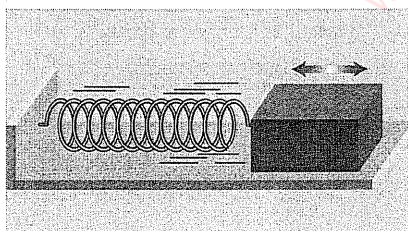
$$12,5x^2 + 9,8x - 250 = 0$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = 4,097 \text{ m}$$

- 17 PAU** Un cuerpo de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de constante elástica 15 N/m, y el sistema oscila tal como indica la figura 7.23. La amplitud del movimiento es de 2 cm. Calcula:

- La energía total del sistema.
- Las energías cinética y potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.
- La velocidad máxima del cuerpo.



- a) La energía total del sistema viene dada por:

$$E = 1/2 kA^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

- b) Cuando  $x = 1,3$  cm, la velocidad del cuerpo es:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3,27 \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$v = \pm 4,97 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

En consecuencia, la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = 1/2 mv^2 = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

y la energía potencial es:

$$E_p = 1/2 kx^2 = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Puede observarse que la suma de ambos términos da como resultado el valor calculado en el apartado a).

- c) La velocidad máxima del cuerpo es:

$$v = \omega A = 6,54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

- 18** Deduce la expresión de la aceleración en el MAS mediante la proyección de la aceleración centrípeta del MCU.

Si el radio es igual a la amplitud, entonces:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{A} = \omega^2 A$$

Este sería el valor de la aceleración máxima en el MAS.

En cualquier otro punto, la proyección de la aceleración centrípeta o normal sería:

$$a = a_c \cos \theta = \omega^2 A \cos \omega t$$

que corresponde a la expresión general (en valor absoluto) de la aceleración del MAS en función del tiempo.

- 19 PAU** ¿Cómo varía el período de un péndulo al duplicar la longitud? ¿Y al disminuirla a 1/3 de su longitud original?

Puesto que el período de un péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

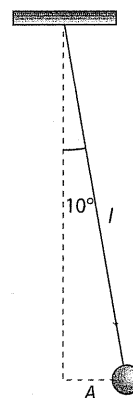
al duplicar la longitud,  $l$ , el período aumenta en un factor  $\sqrt{2}$ . Al reducir la longitud inicial hasta 1/3, el período disminuye en un factor  $1/\sqrt{3}$ .

- 20** ¿Bajo qué condiciones podemos decir que un péndulo simple oscila de forma armónica? ¿Cuál es la fuerza restauradora en el caso del péndulo simple?

Un péndulo simple puede considerarse como un oscilador armónico solo si oscila con amplitudes pequeñas. La fuerza restauradora es la componente tangencial del peso, que actúa en la dirección del movimiento.

- 21 PAU** Se deja oscilar libremente un péndulo de 2 m de longitud después de haberlo desplazado  $10^\circ$  hacia la derecha de la vertical. ¿Cuál es la ecuación que nos da la elongación en función del tiempo? ¿Cuál es el período y la frecuencia de oscilación de dicho péndulo?

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



Como se observa en ella:

$$A = l \sin 10^\circ = 0,35 \text{ m}$$

A su vez, dado que  $\omega = \sqrt{g/l}$ , su valor es:

$$\omega = 2,2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$x = A \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,35 \sin \left( 2,2t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ m}$$

El período de dicho movimiento vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,84 \text{ s}$$

De este modo, la frecuencia será:

$$f = \frac{1}{T} = 0,35 \text{ Hz}$$

# Questiones y problemas (páginas 204/205)

## Guía de repaso

**1** ¿Qué se entiende por período y frecuencia de un movimiento oscilatorio?

El período es el tiempo que tarda en repetirse una posición dada, es decir, el que corresponde a una oscilación completa y la frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

**2** ¿Cuándo se produce un movimiento oscilatorio?

Cuando un sistema o cuerpo está apartado de su posición de equilibrio.

**3** ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un movimiento oscilatorio sea armónico simple?

Que la partícula oscile bajo la acción de fuerzas restauradoras que obedecen a la ley de Hooke.

**4** ¿Puede escribirse la ecuación de posición de un oscilador armónico indistintamente en función del seno o del coseno? ¿En qué se diferencian ambas formas? ¿Cuándo conviene usar una u otra?

Sí, hay dos formas de escribirlas en función del seno y del coseno. Se diferencian en un pequeño desfase de  $90^\circ$ . Dependiendo de las condiciones iniciales del problema podremos utilizarlo de una forma a otra. Esas condiciones son la posición inicial y el sentido inicial de la partícula que empieza a oscilar.

**5** ¿Qué representan los distintos factores que aparecen en la ecuación del oscilador? ¿Hay alguno de ellos que dependa de las propiedades físicas del oscilador?

$x$  representa la posición del móvil en función del tiempo;  $A$  representa el máximo o mínimo valor de la elongación;  $\omega$  es la frecuencia angular.  $(\omega t + \delta)$  representa la fase;  $\delta$  es la fase inicial.

De todos los factores,  $\omega$  es el que depende de las características físicas del oscilador.

**6** ¿Qué expresión tiene la velocidad en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero?

Considerando la ecuación general del movimiento  $x$  en función del coseno, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

La velocidad es máxima cuando  $x = 0$ .

**7** ¿Qué expresión tiene la aceleración en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero? ¿Qué sentido tiene en función de la posición?

Considerando la ecuación general del movimiento  $x$  en función del coseno, tendremos:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

La aceleración es máxima en los extremos;  $x = \pm A$ . Es nula en la posición de equilibrio. Su sentido es opuesto a la posición  $x$ .

**8** En un movimiento armónico simple, la posición, la velocidad y la aceleración varían periódicamente. ¿Son iguales los períodos en los tres casos?

Los períodos son iguales en los tres casos, pero las fases no coinciden.

**9** Demuestra que la ecuación del oscilador armónico es congruente con la consideración dinámica del sistema, es decir, con el hecho de que la fuerza obedezca la ley de Hooke.

Por un lado, cuando el cuerpo es separado de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. Se cumple que:

$$ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

Por otro lado:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 A$$

Igualando ambas aceleraciones obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

**10** ¿Por qué decimos que la frecuencia angular del oscilador armónico es una característica de las propiedades físicas del sistema?

Porque es igual a la raíz cuadrada del cociente  $k/m$ , que son las constantes físicas del oscilador.

**11** ¿De qué depende el período de un oscilador armónico, de la amplitud de la oscilación?

No depende de la amplitud; depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del sistema.

**12** ¿Cómo varían las energías cinética y potencial de un oscilador armónico? ¿Cuál es su valor máximo? ¿Por qué permanece constante la energía mecánica?

Varían de forma periódica. Su valor máximo es  $1/2 kA^2$  y se conserva debido a que las fuerzas elásticas o restauradoras de tipo Hooke son conservativas.

**13** ¿Qué relación hay entre el movimiento circular uniforme y el armónico simple?

El MAS es el resultado de observar movimientos circulares desde el propio plano del movimiento.

**14** ¿De qué depende el período de un péndulo simple si la amplitud de la oscilación es pequeña comparada con la longitud del péndulo?

Depende de la longitud del hilo y del valor de la aceleración de la gravedad local. Véase el epígrafe 6.

**15** ¿Qué es una oscilación forzada?

Es una oscilación que tiene lugar bajo la acción de una fuerza periódica externa.

**16** ¿Cuándo se produce el fenómeno de resonancia en la amplitud?

El fenómeno de la resonancia se produce cuando la frecuencia angular de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilación del sistema, lo cual se traduce en un aumento de la amplitud de la oscilación.

## El movimiento armónico simple

**17** Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de  $\pi$  radianes. ¿En qué punto de la trayectoria se cruzan?

Un ejemplo de movimiento de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de  $\pi$  radianes sería el caso de dos osciladores que parten de extremos opuestos o que, partiendo de la posición de equilibrio, comienzan a oscilar en sentidos opuestos. Como se demuestra en el problema de cálculo número 21, los dos osciladores se cruzarán en la posición de equilibrio.

**18** Dos partículas efectúan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y período a lo largo de la misma recta. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas si se cruzan cuando su elongación es la mitad de la amplitud?

Si  $x = A \cos \omega t$  es la ecuación de uno de los osciladores, la correspondiente al otro será  $x = A \cos (\omega t + \delta)$ . Cuando  $x = A/2$ , se cumple que:

$$A/2 = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = 1/2$$

Es decir:

$$\omega t = \pi/3 \text{ rad}$$

El otro oscilador se encuentra en ese mismo instante en la misma posición, si bien su sentido de movimiento es opuesto. Por tanto, debe cumplirse que:

$$\omega t + \delta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \Rightarrow \delta = 4\pi/3 \text{ rad}$$

o bien:

$$\delta = -2\pi/3 \text{ rad}$$

**19 PAU** Una partícula que oscila armónicamente con una amplitud de 15 cm tarda 1,5 s en realizar una oscilación completa. Sabiendo que en  $t = 0$  su velocidad es nula y su elongación es positiva, determina:

- La ecuación de su movimiento  $x(t)$ .
- La velocidad y la aceleración de la oscilación en  $t = 0,5$  s.
- Los valores absolutos de velocidad y aceleración máximas.

a) Dadas las condiciones iniciales del problema, la ecuación es de la forma  $x = A \cos \omega t$ , siendo  $A = 15$  cm y  $\omega = 2\pi/T = 4\pi/3$ , pues  $T = 3/2$  s. Por tanto:

$$x = 15 \cos \frac{4\pi}{3} t \text{ cm}$$

b) Derivando una y dos veces respecto al tiempo, obtenemos:

$$v = -15 \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} t = -20\pi \sin \frac{4\pi}{3} t$$

$$v(t = 0,5 \text{ s}) = -54,4 \text{ cm/s}$$

$$a = -15 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \cos \frac{4\pi}{3} t = -\frac{80\pi^2}{3} \cos \frac{4\pi}{3} t$$

$$a(t = 0,5 \text{ s}) = 131,59 \text{ cm/s}^2$$

c) Los valores absolutos de  $v_{\text{máx}}$  y  $a_{\text{máx}}$  son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 62,8 \text{ cm/s}$$

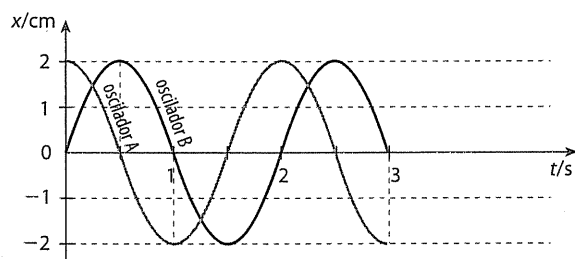
$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 263,2 \text{ cm/s}^2$$

**20 PAU** Representa en una misma gráfica los movimientos de los siguientes osciladores:

- Oscilador A: se suelta desde el extremo  $x = +2$  cm de la posición de equilibrio, y su período es de 2 s.
- Oscilador B: idéntico al anterior, pero la oscilación parte de la posición de equilibrio hacia amplitudes positivas.

¿Qué ecuaciones representan a ambos osciladores? ¿En qué puntos se cruzan estos?

La gráfica correspondiente es la siguiente:



y las ecuaciones son:

- Para el oscilador A:

$$x_A = 0,02 \cos \pi t = 0,02 \sin (\pi t + \pi/2) \text{ m}$$

- Para el oscilador B:

$$x_B = 0,02 \sin \pi t \text{ m}$$

En ambos casos,  $T = 2$  s, y  $\omega = 2\pi/T = \pi$  rad.

Los puntos donde se cruzan ambos osciladores se calculan haciendo  $x_A = x_B$ ; por lo que:

$$\cos \pi t = \sin \pi t \Rightarrow \tan \pi t = 1$$

valor que corresponde a un ángulo de  $\pi/4$  rad.

Así:

$$\pi t = \pi/4 \Rightarrow t = 0,25 \text{ s}$$

Dicho valor también correspondería al de un ángulo de  $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$  rad.

Así pues:

$$\pi t = 5\pi/4 \Rightarrow t = 1,25 \text{ s}$$

valores de tiempo que corresponden a las dos primeras veces que se cruzan, cosa que ocurre en los puntos:

$$x = 0,02 \sin (\pi \cdot 0,25) = 0,0141 \text{ m} = 1,41 \text{ cm}$$

$$x' = 0,02 \sin (\pi \cdot 1,25) = -0,0141 \text{ m} = -1,41 \text{ cm}$$

**21 PAU** Tenemos dos osciladores armónicos cuyas ecuaciones de posición son  $x_1 = A \cos (\omega t + \pi/2)$  y  $x_2 = A \cos (\omega t - \pi/2)$ . Determina:

- La posición inicial.
- El sentido en que comienzan a moverse los osciladores.
- El punto en el que se cruzan.
- La diferencia de fase entre los dos.

a) La posición inicial, para  $t = 0$ , resulta ser cero en ambos casos.

b) La ecuación del primer oscilador corresponde a un oscilador que comienza a oscilar hacia valores negativos de  $x$  desde la posición de equilibrio.

Esto puede comprobarse haciendo  $t = T/4$ . Dado que,  $T = 2\pi/\omega$ , entonces:

$$t = \frac{2\pi}{4\omega}$$

por lo que:

$$x = A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2} \right)$$

es decir:

$$x = A \cos \pi = -A$$

Como puede observarse, al cabo de  $T/4$  s, el oscilador se encuentra en la posición  $x = -A$ .

Por el contrario, la segunda corresponde a un oscilador que se mueve hacia valores positivos de  $x$  (hacia la derecha) desde la posición de equilibrio. Si se repite el proceso para  $t = T/4$ , se encontrará que  $x = A$ .

c) Cuando se cruzan, las posiciones de ambos coinciden, por lo que:

$$A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos (\omega t - \pi/2)$$

Desarrollando la expresión, tenemos:

$$\cos \omega t \cdot \cos \pi/2 - \sin \omega t \cdot \sin \pi/2 = \cos \omega t \cdot \cos \pi/2 + \sin \omega t \cdot \sin \pi/2$$

de donde:

$$2 \sin \omega t = 0$$

o bien, dado que  $\omega = 2\pi/T$ :

$$2 \sin \frac{2\pi}{T} t = 0$$

igualdad que se cumple siempre que:

$$\frac{2\pi}{T} t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$$

Por tanto, se cumple cuando:

$$t = 0, T/2, T, 3T/2 \dots$$

valores de tiempo que corresponden a  $x = 0$ . Es decir, como era de prever, se cruzarán siempre en la posición de equilibrio.

d) Como se desprende de las ecuaciones, la diferencia de fase es de  $\pi$  rad.

22) La ecuación de posición de un oscilador es:

$$x = 5 \cos(\pi t + \pi) \text{ cm}$$

Determina:

- La frecuencia y el período de oscilación.
  - La amplitud.
  - La posición inicial de la partícula.
  - La gráfica en los cuatro primeros segundos.
  - La velocidad y la aceleración del oscilador en  $t = 5$  s.
  - La velocidad y la aceleración máximas.
- a) Dado que  $\omega = 2\pi f$ , entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,5 \text{ Hz}$$

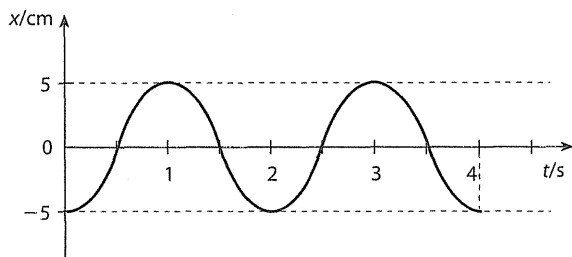
y, por tanto,  $T = 2$  s.

b) Como se desprende de la ecuación,  $A = 5$  cm.

c) La posición inicial, es decir, para  $t = 0$ , es:

$$x_0 = 5 \cos \pi = -5 \text{ cm}$$

d) La gráfica en los cuatro primeros segundos es:



e) La velocidad y la aceleración vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \sin(\pi t + \pi) \text{ cm/s}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \cos(\pi t + \pi) \text{ cm/s}^2$$

cuyos valores en  $t = 5$  s son:

$$v(5) = 0$$

$$a(5) = -5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

f) La velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 5\pi \text{ cm/s}$$

y la aceleración:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

23) **PAU** Una partícula oscila en el eje  $X$  con movimiento armónico simple. Si parte de la posición de equilibrio y comienza a oscilar hacia la derecha con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de  $1/3$  Hz, determina:

- La ecuación de posición.
  - La velocidad y la aceleración cuando  $t = 5$  s.
  - La velocidad cuando pasa por la posición  $x = -1$  cm.
  - El desplazamiento neto y el espacio recorrido en 1 s.
- a) Con los datos ofrecidos, deducimos que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/3 \text{ rad/s}$$

Si la partícula comienza a oscilar hacia la derecha, su ecuación puede escribirse de estas dos maneras:

$$x = 4 \sin \frac{2\pi}{3} t \text{ cm} \quad x = 4 \cos \left( \frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}$$

b) Eligiendo la primera expresión, la velocidad y la aceleración de la partícula vienen dadas por:

$$v = \frac{8\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}$$

$$a = -\frac{16\pi^2}{9} \sin \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}^2$$

Sustituyendo para  $t = 5$  s, obtenemos:

$$v(5) = -4,19 \text{ cm/s}; a(5) = 15,2 \text{ cm/s}^2$$

c) La velocidad en función de la posición es:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

para  $x = -1$  cm, la velocidad será:

$$v = -8,11 \text{ cm/s}$$

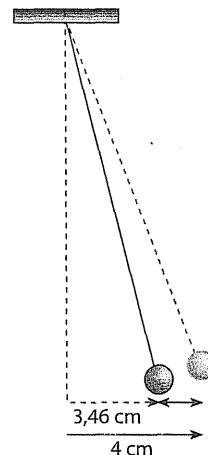
d) El desplazamiento neto será:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 3,46 - 0 = 3,46 \text{ cm}$$

Puesto que  $t = 1$  s es un tiempo superior a  $T/4$  (0,75 s), la partícula se encuentra a 3,46 cm de la posición de equilibrio, pero encaminándose hacia ella después de pasar por el punto de máxima elongación.

En consecuencia, el espacio recorrido es:

$$s = A + (4 - 3,46) = 4,54 \text{ cm}$$



### Consideraciones dinámicas del MAS

24) Si tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante  $k$  también desconocida. ¿Cómo podríamos averiguar el período de oscilación de dicho sistema sin hacerlo oscilar?

Bastaría con colgar la masa desconocida del muelle y medir el alargamiento producido. Cuando se consigue el equilibrio, se cumple que:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

Así pues, el período de oscilación de dicho sistema sería:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}}$$

que, como es fácil ver, puede obtenerse sin más que medir el alargamiento del muelle.

25) Un resorte del que pende una masa  $m$  tiene una constante de fuerza  $k$ . El resorte se corta por la mitad, y la masa se cuelga de una de las mitades. ¿Oscilará ahora con el mismo período que antes? Razona y demuestra tu afirmación.

No oscilará con el mismo período, pues el valor de  $k$  varía al cortar el muelle por la mitad. Podemos expresar  $k$  como  $k = F/l$ , por lo que, si  $l' = l/2$ , entonces  $k' = 2 \cdot k$ . Es decir, al cortar el muelle por la mitad, la constante  $k$  se duplica, por lo que el período disminuye en un factor:

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T$$

**26 IPAU** Al colgar una masa del extremo de un muelle vertical, este sufre un alargamiento de 7 cm.

a) ¿De qué magnitudes del sistema depende la relación entre el alargamiento  $x$  y la aceleración de la gravedad?

b) ¿Cuál es el período de oscilación del sistema si comienza a oscilar en posición horizontal sin rozamiento?

a) Cuando el sistema alcanza el equilibrio, el valor del peso y la fuerza restauradora se igualan, es decir:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{x}{g} = \frac{m}{k}$$

Es decir, la relación entre el alargamiento y la aceleración de la gravedad es equivalente a la relación entre la masa y la constante elástica. Por tanto, dicha relación depende de las características dinámicas del sistema.

b) El período viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dada la identidad anterior, podemos determinar el período conociendo el alargamiento del muelle:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}} = 0,53 \text{ s}$$

**27 IPAU** Una masa de 50 g unida a un resorte horizontal de constante  $k = 200 \text{ N/m}$  es soltada después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio.

a) Determina su período y su frecuencia de oscilación.

b) Escribe su ecuación de movimiento.

c) Calcula la velocidad y aceleración máxima.

d) Establece la velocidad y la aceleración en  $x = 1 \text{ cm}$ .

e) Representa con los valores correspondientes las gráficas  $x$ ,  $v$  y  $a$  frente al tiempo.

a) El período del objeto viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,1 \text{ s}$$

Y, por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

b) Su ecuación se escribirá de la siguiente forma:

$$x = A \cos \omega t = 0,02 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$x = 0,02 \cos 20\pi t \text{ m}$$

c) Su velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 1,26 \text{ m/s}$$

Su aceleración máxima es:

$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = -79 \text{ m/s}^2$$

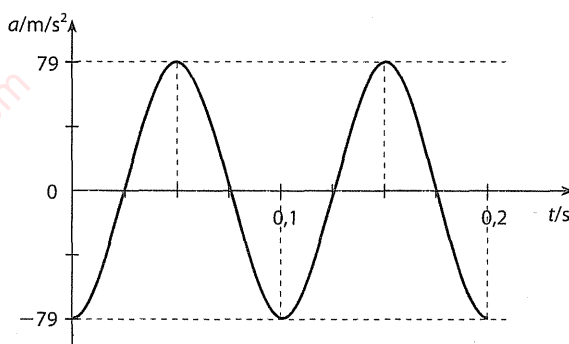
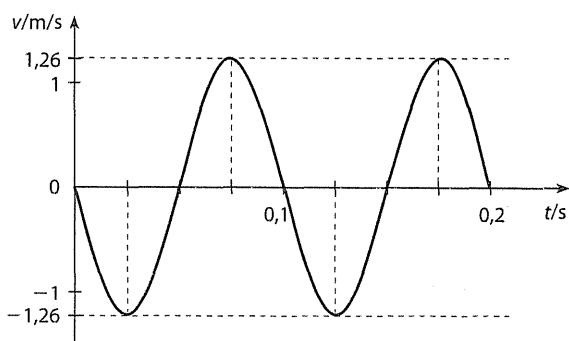
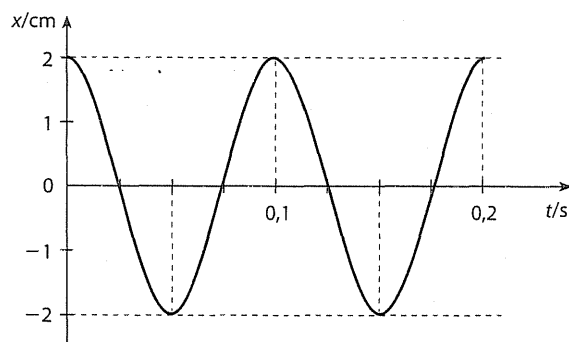
d) La velocidad y la aceleración serán, respectivamente:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \mp 1,09 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -39,44 \text{ m/s}^2$$

Según el sentido del movimiento, la velocidad será positiva o negativa.

e) Las gráficas son las siguientes:



**28 IPAU** Una masa de 200 g colgada de un resorte de constante  $k = 10 \text{ N/m}$  oscila con una amplitud de 4 cm. Calcula:

a) La velocidad y la aceleración del oscilador cuando la posición de la partícula es  $x = 3 \text{ cm}$ .

b) El valor máximo de la aceleración y la velocidad.

a) La velocidad y la aceleración en función de la posición vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0,18 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -1,50 \text{ m/s}^2$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \text{ rad/s}$$

b) Sus valores máximos son:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 0,28 \text{ m/s}; a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = 2 \text{ m/s}^2$$

### Consideraciones energéticas en el MAS

**29 IPAU** Una masa de 1,5 kg unida a un muelle realiza oscilaciones armónicas sin rozamiento sobre una superficie horizontal; sabemos que la amplitud es de 3 cm y la frecuencia es de 2 Hz. Si las oscilaciones comienzan desde la máxima elongación positiva, determina:

a) La ecuación representativa del movimiento.

b) La constante elástica del muelle.

c) El valor de la velocidad de oscilación en  $x = 2 \text{ cm}$ .

d) La energía mecánica del oscilador, así como la posición en que las energías cinética y potencial del oscilador son iguales.

a) Puesto que la oscilación comienza desde su máxima elongación positiva, la ecuación es del tipo  $x = A \cos \omega t$ , donde  $A = 3 \text{ cm}$  y  $\omega = 2\pi f = 4\pi \text{ rad/s}$ . Así pues:

$$x = 3 \cos 4\pi t \text{ cm}$$

b) La constante elástica del muelle es:

$$k = m\omega^2 = 1,5 \cdot (4\pi)^2 = 236,87 \text{ N/m}$$

c) La velocidad de oscilación en  $x = 2 \text{ cm}$ , es, en valor absoluto:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi \sqrt{5} = 28,1 \text{ cm/s}$$

d) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,106 \text{ J}$$

El valor de la elongación en el que la energía potencial y cinética del oscilador son iguales se obtiene de la igualdad:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

Dado que  $m\omega^2 = k$ , la igualdad se reduce a:

$$x^2 = A^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}A = 2,12 \text{ cm}$$

30 **PAU** Dos partículas de masas  $m$  y  $m'$ , respectivamente, efectúan oscilaciones armónicas de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante  $k$ . Si  $m' > m$ :

a) ¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?

b) ¿Cuál de las dos tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio?

c) ¿Son iguales sus velocidades en la posición de equilibrio?

d) ¿Son iguales sus períodos de oscilación?

a) Los dos osciladores tienen la misma energía mecánica, pues esta es igual a  $\frac{1}{2}kA^2$ .

b) La energía cinética en ese punto adquiere su máximo valor, que es igual a  $\frac{1}{2}kA^2$  y la misma para ambos osciladores.

c) En la posición de equilibrio sus velocidades no son iguales, debido a que en ese punto se cumple que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}A^2$$

Dado que  $k$  y  $A$  son iguales en ambos casos, a mayor masa, menor velocidad. Es decir, la velocidad de  $m'$  en ese punto es menor.

d) Los períodos de oscilación no son iguales; dado que el período depende de la masa, el de mayor masa tendrá mayor período.

31 **PAU** Una partícula de 40 g de masa unida a un muelle horizontal describe un MAS mediante el cual recorre una distancia total de 16 cm en cada ciclo completo de oscilación. Sabiendo que su aceleración máxima es de  $36 \text{ cm/s}^2$ , halla:

a) La frecuencia y el período del movimiento.

b) La constante elástica del muelle.

c) La energía mecánica del sistema.

d) La velocidad del oscilador en  $x = 2 \text{ cm}$ .

En cada ciclo completo, la partícula recorre cuatro veces el espacio equivalente a la amplitud. Al ser ese espacio 16 cm, resulta que la amplitud es  $A = 4 \text{ cm}$ . Conocida la amplitud

y la aceleración máxima, podemos determinar la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\text{máx}}}{A}} = 3 \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,48 \text{ Hz}$$

El período es  $T = 1/f = 2,1 \text{ s}$ .

b) La constante elástica es  $k = m\omega^2 = 0,36 \text{ N/m}$ .

c) La energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2,88 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

d) La velocidad viene dada por:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 10,4 \text{ cm/s}$$

32 **PAU** Una masa de 500 g unida a un resorte oscila armónicamente con una frecuencia de 0,4 Hz. Si la energía mecánica del oscilador es de 3 J:

a) Calcula la constante  $k$  del resorte.

b) Determina la amplitud de la oscilación.

c) Representa en una misma gráfica las variaciones de la energía cinética y potencial del oscilador frente al tiempo en los cinco primeros segundos y compara dicha gráfica con la de posición.

a) Dado que  $\omega^2 = k/m$ , entonces  $k = m\omega^2$ , donde:

$$\omega = 2\pi f = 2,51 \text{ rad/s}$$

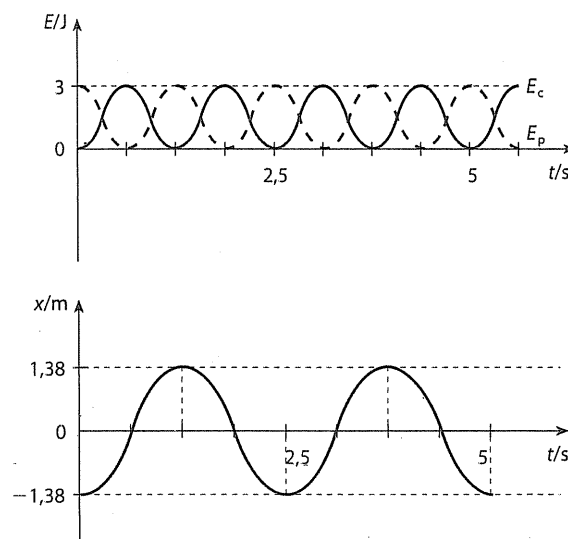
Por tanto:

$$k = m\omega^2 = 3,15 \text{ N/m}$$

b) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 1,38 \text{ m}$$

c) Las gráficas pedidas son:



**Nota:** la oscilación vertical del muelle no supone mayor problema si consideramos que la posición de equilibrio se halla desplazada una distancia  $y_0 = mg/k$  con respecto a la posición de equilibrio  $y_0$  sin ninguna masa colgada. Teniendo en cuenta ese nuevo sistema de referencia, el problema se aborda de idéntica manera que si se tratase de una oscilación horizontal.

Para la gráfica de posición, se ha considerado que el sistema es estirado hacia abajo y luego soltado.

**DEB PAU** Una masa de 100 g unida a un muelle horizontal de constante elástica  $k = 30 \text{ N/m}$  oscila armónicamente sin amortiguamiento. Sabiendo que su amplitud es de 7 cm, determina:

- La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.
  - La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.
  - La energía cinética del sistema en  $x = 3 \text{ cm}$ .
  - La energía cinética y potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es de  $8 \text{ m/s}^2$ .
- a) A partir de los datos ofrecidos, podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{0,1}} = 17,32 \text{ rad/s}$$

Por lo que:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 17,32 \sqrt{49 - x^2} \text{ cm/s}$$

- b) Cuando la velocidad de oscilación es nula, la energía potencial del sistema alcanza su valor máximo, que coincide con la energía mecánica del sistema, es decir:

$$E_{p \text{ máx}} = \frac{1}{2} k A^2 = 0,0735 \text{ J}$$

- c) Cuando  $x = 3 \text{ cm}$ , la velocidad es:

$$v = 17,32 \sqrt{49 - 3^2} = 109,5 \text{ cm/s} \cong 1,1 \text{ m/s}$$

por lo que la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 0,0605 \text{ J}$$

- d) El valor de  $x$  correspondiente a ese valor de la aceleración es:

$$x = \frac{a}{\omega^2} = \frac{8}{300} = 0,0267 \text{ cm}$$

La energía potencial en dicho punto será:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = 0,0107 \text{ J}$$

Luego la energía cinética será:

$$E_c = E_{\text{mecánica}} - E_p = 0,0628 \text{ J}$$

**34 PAU** Si la amplitud de un movimiento armónico simple se duplica, calcula cuánto varía:

- Su energía mecánica y período.
- Su velocidad máxima y aceleración máxima.

- a) La energía mecánica viene dada por  $E = 1/2 k A^2$ . Por tanto, si  $A$  se duplica, la energía se cuadruplica:  $E' = 4 \cdot E$ .

El período es  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  y depende solo de las características mecánicas del oscilador y no de la amplitud. Por tanto, el período no varía:  $T' = T$ .

- b) Su velocidad máxima es  $v_{\text{máx}} = \pm \omega A$ ; por tanto, se duplicará:  $v' = 2 \cdot v$ .

Su aceleración máxima es  $|a_{\text{máx}}| = |-\omega^2 A|$ , por lo que también se duplicará:  $a' = 2 \cdot a$ .

### El péndulo simple

**35** La longitud de un péndulo simple es el cuádruple que la de otro. Compara sus períodos de oscilación.

El período del péndulo de cuádruple longitud será el doble, como se desprende de la expresión 7.15.

**36 PAU** Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene un período de 2,84 s para pequeñas oscilaciones:

- Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar de la medición.
  - Si la velocidad de la bolita del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio es de 0,4 m/s, calcula la amplitud de la oscilación.
  - Si la oscilación comienza en uno de los extremos, escribe la ecuación de posición en el eje  $X$  y represéntala gráficamente en función del tiempo.
- a) El período del péndulo, para pequeñas oscilaciones, viene dado por:

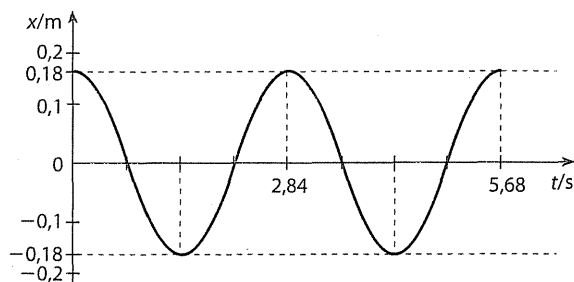
$$T = 2\pi \sqrt{l/g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \cong 9,79 \text{ m/s}^2$$

- b) En la posición de equilibrio, el péndulo alcanza su máxima velocidad, por lo que:

$$v = \omega A = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow A = \frac{vT}{2\pi} = 0,18 \text{ m}$$

- c) Si suponemos que la posición inicial es la correspondiente al extremo de amplitud positiva, y considerando que  $\omega = 2\pi/T = 2,21$ , resulta:

$$x = A \cos \omega t = 0,18 \cos 2,21 t \text{ m}$$



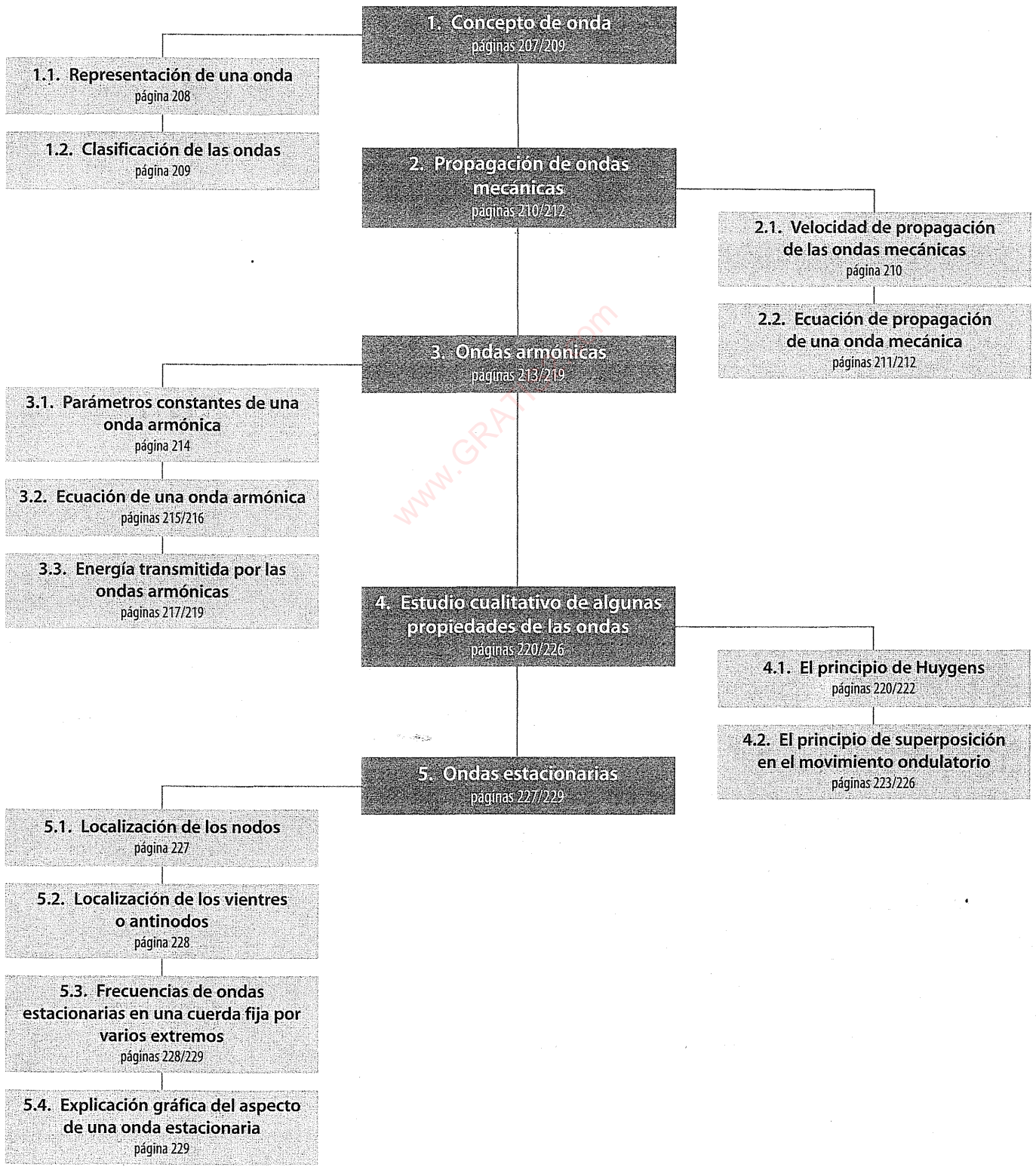




# 8

# Movimiento ondulatorio: ondas mecánicas

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D



www.1FISICA.blogspot.com  
www.GRATIS2.com  
www.GRATIS2.com  
www.librospdf1.blogspot.com

## Questiones previas (página 206)

### 1. ¿Es lo mismo un movimiento oscilatorio que uno ondulatorio?

No es lo mismo, la propagación de ese movimiento oscilatorio conduce al movimiento ondulatorio.

La diferencia fundamental radica en que en el movimiento ondulatorio se transporta energía.

### 2. Cita ejemplos de ondas. ¿Qué se propaga en una onda?

Ejemplos de ondas tenemos: olas en el agua, ondulaciones que se propagan por una cuerda, la luz, el sonido, etcétera.

En una onda se propaga exclusivamente energía.

### 3. ¿Qué parámetros se usan para caracterizar una onda? ¿Cuál es su significado físico?

Los parámetros que caracterizan una onda son:

- La longitud de onda (la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentran en el mismo estado de vibración); el período (el tiempo que tarda un punto cualquiera en repetir una oscilación).
- La frecuencia (el número de veces que un punto cualquiera repite cierto estado de oscilación por unidad de tiempo); velocidad de propagación (el cociente entre la longitud de la onda y su período).
- El número de onda (número de longitudes de onda que hay en una distancia  $2\pi$ ).

### 4. ¿Por qué se concede en física tanta importancia al estudio de las ondas?

La importancia de las ondas radica en la cantidad de aplicaciones técnicas que su estudio ha aportado así como por ejemplo la cobertura de un teléfono móvil, los radares de circulación, etcétera.

También es importante por la cantidad de fenómenos físicos estudiados como los efectos de un sismo, el movimiento de las olas marinas...

### 5. ¿Qué propiedades de las ondas conoces?

La reflexión, la refracción, difracción, interferencias, polarización, etcétera.

## Actividades (páginas 209/229)

### 1. Indica cuáles de los siguientes tipos de ondas son transversales y cuáles son longitudinales: las ondas en una cuerda, el sonido, la luz y los rayos X.

El sonido es la propagación de ondas longitudinales. El resto de ondas son transversales.

### 2. Se tensa una cuerda larga que tiene una densidad lineal de masa de 0,01 kg/m aplicando una fuerza de 60 N. Si se hace oscilar transversalmente un extremo de la cuerda, ¿con qué velocidad se propagarán las ondas en la cuerda?

Dado que la tensión es de 60 N y que la densidad lineal es  $\mu = 0,01$  kg/m, se obtiene directamente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 77,46 \text{ m/s}$$

### 3. PAU Repite los apartados de la aplicación, para el caso de un pulso con la forma:

$$y(x, t) = \frac{9}{3(x + 2t)^2}$$

donde  $x$  e  $y$  se miden en centímetros y el tiempo en segundos.

a) La amplitud del pulso es el valor máximo de  $y(x, t)$ , que se obtiene para el valor mínimo del denominador, lo cual sucede cuando  $x + 2t = 0$ ; por tanto, la amplitud es  $A = 3$  cm.

b) La velocidad de propagación es el factor que multiplica al tiempo en la función de onda; por tanto, la velocidad es 2 cm/s hacia la izquierda.

c) En  $t = 0$  s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 0) = \frac{9}{3 + x^2}$$

Es fácil comprobar que esta es una función par en forma de campana, que presenta un máximo para  $x = 0$ , y sendos puntos de inflexión en  $x = -1$  m y  $x = +1$  m.

En  $t = 1$  s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 1) = \frac{9}{3 + (x + 2)^2}$$

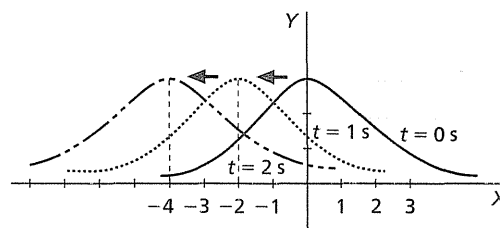
Esta función es idéntica a la anterior, aunque desplazada sobre el eje  $X$  dos unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para  $x = -2$  m.

En  $t = 2$  s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 2) = \frac{9}{3 + (x + 4)^2}$$

Esta función es idéntica a la primera, aunque desplazada sobre el eje  $X$  cuatro unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para  $x = -4$  m.

Así pues, el pulso progresa como se indica en la siguiente figura:



### 4. PAU Repite la aplicación anterior para la onda armónica $y = 3 \text{ sen } 5\pi(0,8x - t)$ cm.

La ecuación puede escribirse de este otro modo:

$$y = 3 \text{ sen } (4\pi x - 5\pi t) \text{ cm}$$

a) Por tanto:

$$A = 3 \text{ cm}$$

$$\omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

$$k = 4\pi \text{ cm}^{-1} = 12,56 \text{ cm}^{-1}$$

b) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0,5 \text{ cm}$$

La frecuencia valdrá:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,5 \text{ Hz}$$

y el período será, por último:

$$T = \frac{1}{f} = 0,4 \text{ s}$$

c) La velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 1,25 \text{ cm/s}$$

La ecuación de la onda indica que se desplaza hacia la derecha.

5 PAU Cierta onda transversal tiene por ecuación:

$$y = 0,2 \sin \frac{\pi}{3} (3x - 30t) \text{ m}$$

- Calcula la velocidad de propagación de dicha onda.
- Determina la velocidad de oscilación máxima de un punto cualquiera  $x$ .
- Detalla las diferencias entre las dos velocidades anteriores e indica si existe alguna relación entre ambas.
- Halla la velocidad de oscilación del punto  $x = 2 \text{ m}$  cuando  $t = 10 \text{ s}$ .

Según se desprende de la ecuación:

$$A = 0,2 \text{ m}; \omega = 10\pi \text{ rad/s}; k = \pi \text{ m}^{-1}$$

- La velocidad de propagación puede expresarse del siguiente modo:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi} = 10 \text{ m/s}$$

- La velocidad de oscilación de un punto cualquiera es la derivada de la posición y con respecto al tiempo. Por tanto:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \cos(\pi x - 10\pi t) \text{ m/s}$$

La velocidad máxima se producirá cuando el coseno alcance su valor máximo, que es 1, por lo que el valor absoluto de dicha velocidad será:

$$v_{\text{máx}} = 2\pi \text{ m/s} = 6,28 \text{ m/s}$$

- Ambas velocidades son totalmente distintas, pues una representa la velocidad a la que se propaga la perturbación, mientras que la otra es la velocidad de oscilación (en la dirección perpendicular, si la onda es transversal) de un punto del medio, en el caso de las ondas mecánicas.

Podemos establecer una relación entre ambas velocidades, usando, por ejemplo, la ecuación:

$$y = A \cos k(x - vt)$$

y derivando:

$$v_{\text{oscilación}} = Akv \sin k(x - vt)$$

- Sustituyendo en la expresión que obtuvimos en el apartado b), la velocidad de oscilación del punto  $x = 2 \text{ m}$ , cuando  $t = 10 \text{ s}$ , valdrá:  $v_{\text{oscilación}} = -6,28 \text{ m/s}$ .

6 PAU Una onda armónica viene dada por:

$$y = 25 \cos \pi (2x - 5t) \text{ cm}$$

- Determina la longitud de onda y el período.
- Calcula la velocidad y la aceleración de oscilación transversal de un punto cualquiera en función del tiempo.
- Calcula la velocidad y la aceleración transversal en  $t = 0$ , en un punto situado en  $x = 5,3 \text{ cm}$ .
- Puesto que  $k = 2\pi \text{ cm}^{-1}$ , entonces:

$$\lambda = 2\pi/k = 1 \text{ cm}$$

Además,  $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$ ; por lo que:

$$T = 2\pi/\omega = 0,4 \text{ s}$$

- Derivando una vez con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad de oscilación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 125\pi \sin \pi (2x - 5t) \text{ cm/s}$$

Al derivar por segunda vez, se calcula la aceleración de oscilación de un punto:

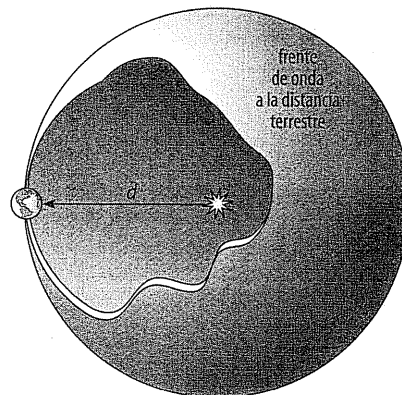
$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -625\pi^2 \cos \pi (2x - 5t) \text{ cm/s}^2$$

- Para  $t = 0$ ,  $y = 5,3 \text{ cm}$ , y sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$v = 373,29 \text{ cm/s}; a = 1904,24 \text{ cm/s}^2$$

7 Sabiendo que el radio terrestre es de  $6370 \text{ km}$  y que la distancia media al Sol es de  $1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$ , determina qué porción de la energía irradiada en la superficie solar llega a la terrestre (considera como superficie terrestre su sección transversal, de área  $\pi r^2$ ).

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, podemos suponer que toda la energía irradiada por segundo en la superficie solar es la misma que acaba repartiéndose por todo el frente esférico donde se sitúa la Tierra, como puede verse en la siguiente figura:



Considerando que la energía se distribuye uniformemente por todo el frente de onda, se cumplirá que:

$$\frac{E_T}{S_T} = \frac{E}{S}$$

donde  $E_T$  es la energía que llega a la superficie terrestre,  $S_T$  (considerada como su sección transversal), mientras que  $E$  es la energía total correspondiente al frente de onda esférico, cuyo radio es igual a la distancia Tierra-Sol.

Así pues, la energía que llega a la Tierra es:

$$E_T = E \frac{S_T}{S} = E \frac{\pi r_T^2}{4\pi d^2} = 4,53 \cdot 10^{-10} \cdot E$$

Es decir, llega aproximadamente la diezmilmillonésima parte de la energía irradiada por la superficie solar. Si tenemos en cuenta que el valor de la llamada constante solar es igual  $1,3 \text{ kW/m}^2$  y lo multiplicamos por los metros cuadrados de la superficie transversal terrestre, obtendremos la energía total que llega a la superficie terrestre.

Al dividir dicho valor por  $4,53 \cdot 10^{-10}$ , se calcula la energía irradiada por la superficie solar, cuyo valor figura en el texto del margen de la página 219.

8 ¿Qué diferencias encuentras en el transporte de energía por medio de ondas armónicas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales?

El transporte de energía en medios isotrópicos y no disipativos no conlleva amortiguación en el caso de las ondas unidimensionales, pero sí en el de las bidimensionales y tridimensionales.

Las bidimensionales se amortiguan conforme al inverso de la raíz cuadrada de la distancia, mientras que las tridimensionales lo hacen según el inverso de la distancia.

9 ¿Cuál crees que es el motivo por el que se hace imprescindible la instalación de repetidores de TV en montañas para la emisión de señales a distancia?

La instalación de repetidores se justifica por la inexistencia del fenómeno de difracción, debido a que las longitudes de onda típicas de la TV (del orden de  $0,1$  a  $10 \text{ cm}$ ) son demasiado pequeñas para producir difracción al encontrarse con obstáculos naturales (montañas y otros accidentes) o artificiales (edificios, por ejemplo).

**10** ¿Qué ocurre con la energía en los procesos de interferencia? ¿Se «disipa» o desaparece en los mínimos? Trata de dar una explicación.

La energía total permanece constante, pero no se distribuye homogéneamente, de modo que en los mínimos es nula y se incrementa en los máximos.

**11 PAU** Dos ondas armónicas responden a las ecuaciones:

$$y_1 = 0,5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t) \text{ m};$$

$$y_2 = 0,5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0,3) \text{ m}$$

a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de la interferencia? ¿Cómo calificarías la interferencia que se produce?

b) ¿Cuál es la frecuencia de dicha onda resultante? Escribe su ecuación.

La onda resultante de la interferencia tiene por ecuación la siguiente:

$$y = \left( 2A \cos \frac{\delta}{2} \right) \cdot \text{sen} \left( kx - \omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

a) La amplitud es:

$$A' = 2A \cos \frac{\delta}{2} = 0,99 \text{ m}$$

Así pues, es casi el doble que la amplitud de las ondas componentes, por lo que cabe calificar la interferencia de *prácticamente constructiva*.

b) La frecuencia de la onda resultante es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 250 \text{ Hz}$$

y su ecuación:

$$y = 0,99 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0,15) \text{ m}$$

**12 PAU** Un punto, P, se encuentra a 10 m y 11 m, respectivamente, de dos fuentes de ondas, S y S', muy próximas entre sí, que emiten ondas de amplitud A con una frecuencia de 1000 Hz. ¿Qué ocurrirá en dicho punto si las ondas se propagan por el medio con una velocidad de 500 m/s?

La diferencia de caminos desde cada fuente al punto, Δd, es de 1 m.

Si la frecuencia de las ondas es de 1000 Hz, su período será:

$$T = \frac{1}{f} = 0,001 \text{ s}$$

Como a su vez:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

entonces:

$$\lambda = vT = 500 \text{ m/s} \cdot 0,001 \text{ s} = 0,5 \text{ m}$$

Como puede comprobarse, se cumple que Δd = 2 · λ, por lo que la interferencia de las ondas será constructiva en el punto P.

**13 PAU** Una onda se propaga según la expresión:

$$y = 0,1 \text{ sen } 2\pi(100t - x/0,40)$$

donde x e y se expresan en metros, y t, en segundos.

Determina:

a) La longitud de onda, el período y la velocidad de propagación de la onda.

b) La distancia entre puntos que están en fase y en oposición de fase.

a) De la ecuación de la onda, podemos concluir que:

$$\omega = 200\pi \text{ rad/s}$$

$$k = 5\pi \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,4 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,01 \text{ s}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 40 \text{ m/s}$$

b) Dos puntos en consonancia de fase se encuentran separados por una distancia igual a λ, esto es, 0,4 m.

Por el contrario, dos puntos en oposición de fase se encontrarán separados por λ/2, es decir, por 0,2 m. En general:

$$\text{distancia entre puntos en fase} = n\lambda$$

$$\text{distancia entre puntos en oposición de fase} = (2n + 1) \lambda/2$$

**14 PAU** Cierta cuerda de longitud l, fija por ambos extremos, tiene 6 vientres al provocar oscilaciones a 840 Hz.

a) ¿A qué frecuencia tendrá cuatro vientres?

b) ¿A qué frecuencia habrá solo uno?

a) La frecuencia dada corresponde al sexto armónico. Por tanto, la frecuencia del cuarto armónico (donde presentará 4 vientres) es:

$$f^{IV} = 4 \frac{f^{VI}}{6} = 560 \text{ Hz}$$

b) La frecuencia fundamental es la que presenta un solo vientre y valdrá:

$$f_0 = \frac{f^{VI}}{6} = 140 \text{ Hz}$$

**15 PAU** Dos ondas armónicas vienen descritas por las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = 12 \text{ sen } \pi(2x - 3,2t) \text{ cm}$$

$$y_2 = 12 \text{ sen } \pi(2x + 3,2t) \text{ cm}$$

a) Calcula la amplitud de estas ondas en las posiciones x = 0,3 cm, x = 0,5 cm, y x = 1,5 cm.

b) Determina la distancia entre nodos consecutivos.

Al propagarse en sentidos opuestos, las dos ondas darán lugar al establecimiento de una onda estacionaria cuya expresión es:

$$y = (24 \text{ sen } 2\pi x) \cdot \cos 3,2\pi t \text{ cm}$$

a) Las amplitudes en los puntos citados serán:

$$x = 0,3 \text{ cm} \Rightarrow A = 22,8 \text{ cm}$$

$$x = 0,5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$

$$x = 1,5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$

b) En los nodos ha de cumplirse que:

$$kx = 0, \pi, 2\pi \dots \Rightarrow 2\pi x = 0, \pi, 2\pi \dots$$

Por tanto:

$$x = 0, 1/2, 1 \dots$$

Es decir, la distancia entre nodos consecutivos es de 0,5 cm.

## Actividades finales (páginas 232/233)

### Guía de repaso

**1** ¿Qué se entiende por onda?

Una onda representa el movimiento de propagación de una perturbación de un punto a otro sin que exista transporte neto de materia.

**2** ¿Qué es lo que se propaga en una onda?

Se transporta energía.

**3** Establece los criterios para clasificar las distintas ondas.

Según el número de dimensiones en que se propaga la onda o según la coincidencia o no entre la dirección de oscilación de la propiedad perturbada y la de la propagación de la onda.

**4** ¿Qué ejemplos tomados de la experiencia cotidiana conoces de ondas longitudinales y transversales?

Ejemplo de onda longitudinal es el sonido y de transversal la luz o las ondas en una cuerda.

**5** ¿De qué depende la velocidad de propagación de una onda en un medio?

Depende de la elasticidad y la inercia del medio.

**6** ¿Qué tipo de ecuación representaría una onda que se propaga hacia la derecha, en el sentido positivo de las  $x$ ? ¿Y hacia la izquierda?

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido positivo de  $x$ :

$$y = f(x - vt)$$

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido negativo de  $x$ :

$$y = f(x + vt)$$

**7** ¿Qué es una onda armónica? Escribe su ecuación general.

Una onda armónica es una perturbación que se propaga producida por un oscilador armónico. Su expresión general en función en función seno y coseno respectivamente es:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x \pm vt)$$

$$y(x, t) = A \operatorname{cos} k(x \pm vt)$$

**8** ¿Qué parámetros constantes definen una onda armónica?

La longitud de onda, período, frecuencia, velocidad de propagación y número de onda.

**9** ¿Qué relaciones pueden establecerse entre los parámetros?

Entre la frecuencia y el período ( $f = 1/T$ ); entre el número de onda y su longitud ( $k = 2\pi/\lambda$ ); y entre la velocidad, longitud y período ( $v = \lambda/T$ ).

**10** ¿Se amortigua una onda armónica unidimensional a medida que se propaga, si el medio no disipa energía?

No se amortigua la onda. Véase el subapartado del subepígrafe 3.3, dedicado a la energía en una onda armónica unidimensional.

**11** ¿Por qué se amortiguan las ondas bidimensionales y tridimensionales a medida que se propagan aunque el medio no disipe energía? ¿Lo hacen de la misma manera?

Debido a la conservación de la energía y a su distribución en frentes de onda. No lo hacen de la misma manera, en el caso de una bidimensional su amplitud decrece:  $1/\sqrt{r}$  y en el caso de la tridimensional decrece:  $1/r$ .

**12** ¿Qué fenómenos son específicamente ondulatorios? ¿Cuáles pueden darse tanto en el movimiento ondulatorio como en el de partículas?

La difracción, la interferencia y la polarización son fenómenos estrictamente ondulatorios; la reflexión y la refracción también se dan en el campo de las partículas.

**13** ¿En qué consiste el método de Huygens para explicar la propagación de las ondas?

Consiste en dos principios:

- Todo punto de un medio hasta el cual llega una perturbación se comporta como un foco emisor de ondas secundarias que se propagan en la dirección de la perturbación.

- La superficie tangente (envolvente) a todas las ondas secundarias en un instante dado constituye el siguiente frente de ondas.

**14** ¿Qué es la reflexión?

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y se refleja propagándose por el mismo medio.

**15** ¿En qué consiste la refracción?

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y pasa propagándose por distinto medio.

**16** ¿Qué es la difracción?

La difracción es el fenómeno por el cual una onda modifica su dirección de propagación al encontrarse con aberturas u obstáculos.

**17** ¿Qué es la interferencia entre ondas armónicas?

Es cuando dos ondas llegan a combinar sus efectos en un punto.

**18** ¿Cuándo tiene lugar una interferencia constructiva entre ondas idénticas? ¿Y cuándo es destructiva?

Una interferencia es constructiva cuando las ondas están en consonancia de fase, mientras que es destructiva cuando se hallan en oposición de fase (véase la página 226).

**19** Dos fuentes de ondas puntuales producen ondas circulares. ¿Qué condición se cumple en los puntos donde se producen máximos de interferencia? ¿Y en los mínimos?

En los máximos, la diferencia de recorridos de las ondas emitidas por cada fuente es un número entero de longitudes de onda, mientras que en los mínimos dicha diferencia es un número impar de semilongitudes de onda.

**20** ¿Cómo se pueden originar ondas estacionarias? ¿Qué tiene de particular la ecuación que las representa?

Por ejemplo, entre una onda dada y su onda reflejada en el mismo medio, como sucede en las ondas estacionarias en cuerdas fijas por uno o por sus dos extremos. La ecuación tiene de particular que la amplitud depende de la posición.

**21** ¿En qué posiciones se encuentran los nodos que se generan en una onda estacionaria producida en una cuerda fija por sus dos extremos? ¿Y los antinodos?

Los nodos se encuentran ubicados en  $x = n\lambda/2$ ; y los antinodos en  $x = (2n + 1)\lambda/4$ .

**22** ¿Qué son los armónicos? ¿Qué relación hay entre las frecuencias del quinto y del tercer armónico?

Los armónicos son las frecuencias a las que tienen lugar el establecimiento de ondas estacionarias. La frecuencia del tercer armónico es  $3/5$  de la frecuencia del quinto armónico.

**23** ¿Se propaga energía en una onda estacionaria?

No se propaga energía. Véase el subepígrafe 5.4.

**Propagación de ondas mecánicas****24** Disponemos de una cuerda de cierta longitud; ¿qué debemos hacer si deseamos triplicar la velocidad de propagación de un pulso sobre dicha cuerda?

Hay que aumentar nueve veces la tensión de la cuerda, como se desprende de la expresión 8.1.

**25** ¿Qué diferencia existe entre un movimiento oscilatorio y otro ondulatorio? Idea un símil que aclare esta diferencia.

Un movimiento oscilatorio es efectuado por un cuerpo o sistema.

El movimiento ondulatorio consiste en la propagación de la energía sin que exista transporte neto de materia; tampoco es preciso que oscile ninguna partícula del medio, dado que existen ondas que se propagan en el vacío.

Las ondas electromagnéticas, por ejemplo, son generadas por cargas eléctricas oscilantes (este sería el movimiento oscilatorio), pero su propagación consiste en modificaciones del campo electromagnético (que varía de forma ondulatoria).

**26 PAU** Un pulso de onda que se desplaza a lo largo del eje X viene dado por la siguiente función:

$$y(x, t) = \frac{2}{1 + (x + 3t)^2}$$

donde x se mide en centímetros, y t, en segundos.

- a) Determina la amplitud del pulso.
  - b) ¿Con qué velocidad y en qué sentido se desplaza?
  - c) Traza la forma de la onda en  $t = 0$ ,  $t = 1$  s, y  $t = 2$  s, y comprueba el sentido del desplazamiento.
- a) La amplitud o máximo valor de y es el que se obtiene cuando el denominador alcanza su valor mínimo (esto es, cuando el paréntesis es cero), de modo que:

$$A = 2 \text{ cm}$$

- b) La velocidad es el factor que multiplica al tiempo, por lo que:

$$v = 3 \text{ cm/s}$$

El pulso se desplaza hacia la izquierda, dado el signo positivo.

- c) Para  $t = 0$ :

$$y = \frac{2}{1 + x^2}$$

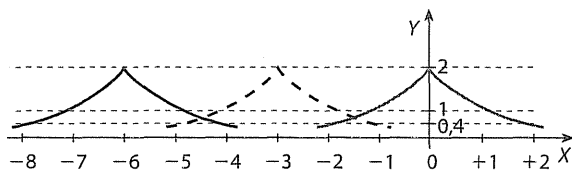
Para  $t = 1$  s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 3)^2}$$

Para  $t = 2$  s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 6)^2}$$

Al representar la propagación del pulso, observamos cómo se desplaza efectivamente 3 cm cada segundo hacia la izquierda:



**27** Sobre una cuerda tensa de 1,320 kg de masa y una longitud de 7 m, deseamos producir ondas que se propaguen a una velocidad de 30 m/s. ¿A qué tensión debemos someter la cuerda?

Puesto que:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}}$$

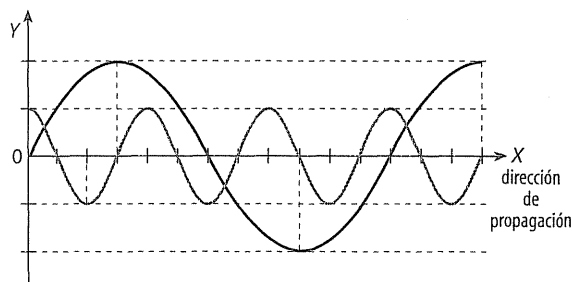
puede concluirse que:

$$T = \frac{mv^2}{l} = 169,7 \text{ N}$$

### Ondas armónicas

**28** Dibuja dos ondas armónicas tales que una tenga el triple de frecuencia y la mitad de amplitud que la otra y que entre las dos exista un desfase de  $\pi/2$ .

Las gráficas pedidas, considerando que las dos ondas tienen la misma velocidad de propagación, son:



**29** En un movimiento ondulatorio que se propaga a velocidad constante, la frecuencia y la longitud de onda:

- a) Son independientes.
- b) Están relacionadas.
- c) Están relacionadas solo si la onda se propaga en un medio material.

Razona y demuestra tu respuesta.

La respuesta correcta es la b). Están interrelacionadas como se muestra en la expresión 8.6. Incluso en el caso de que no exista medio material (ondas electromagnéticas), se mantiene la relación, que viene dada por la expresión  $c = \lambda f$ .

**30** Escribe la función de una onda armónica que se desplaza hacia la derecha en términos de:

- a)  $k$  y  $v$
- b)  $\lambda$  y  $v$
- c)  $\lambda$  y  $f$
- d)  $v$  y  $f$

a)  $y = A \sin k(x - vt)$       c)  $y = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - ft \right)$

b)  $y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$       d)  $y = A \sin 2\pi f \left( \frac{x}{v} - t \right)$

**31 PAU** Una onda armónica se mueve hacia la izquierda con una amplitud de 10 cm, una longitud de onda de 0,5 m y un período de 0,2 s. Escribe la ecuación que representa dicha onda si  $y = 10$  cm en  $x = 0$  en el instante inicial. Determina igualmente la velocidad de propagación de la onda.

Dado que en  $x = 0$  y  $t = 0$ , la onda presenta su máxima elongación ( $y = 0,1$  m), resulta conveniente escribir la ecuación en función del coseno:

$$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

El signo positivo denota la propagación hacia la izquierda. A partir de los datos se obtiene  $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \text{ m}^{-1}$  y  $\omega = 2\pi/T = 10\pi \text{ rad/s}$ . Por tanto, en su forma coseno, la ecuación de la onda es:

$$y(x, t) = 0,1 \cos(4\pi x + 10\pi t) \text{ m}$$

Si se escribe la ecuación en forma seno, se debe introducir una fase inicial  $\delta = \pi/2$ :

$$y(x, t) = 0,1 \sin(4\pi x + 10\pi t + \pi/2) \text{ m}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2,5 \text{ m/s}$$

**32 PAU** Escribe la ecuación de una onda armónica que avanza en el sentido positivo de las x con una amplitud de 15 cm y una frecuencia de oscilación de 350 Hz, si su velocidad de propagación es de 200 cm/s.

Del enunciado se desprende que:

$$A = 15 \text{ cm}$$

$$f = 350 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 700\pi \text{ rad/s}$$

$$v = 200 \text{ cm/s} \Rightarrow k = \omega/v = 3,5\pi \text{ cm}^{-1}$$

Con esto ya podemos escribir la ecuación de la onda:

$$y = 15 \sin \pi(3,5x - 700t) \text{ cm}$$

**33 PAU** Una onda armónica transversal se desplaza hacia la derecha (sentido positivo) en la dirección  $X$  y tiene una amplitud de 4 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determina:

- La velocidad de propagación de la onda.
- La fase inicial si en  $x = 0$  y  $t = 0$  la elongación es  $-2$  cm.
- La expresión matemática de la onda.
- La distancia que separa dos puntos del eje  $X$  que oscilan con una diferencia de fase de  $\pi/3$  rad.
- La velocidad de propagación es  $v = \lambda f = 32$  cm/s.
- Si la ecuación se escribe en forma coseno:

$$y(x, t) = A \cdot \cos(kx + \omega t + \delta)$$

Sabemos la elongación en  $x = 0$  y  $t = 0$ , luego:

$$y(0, 0) = 4 \cos \delta = -2 \Rightarrow \delta = 2\pi/3$$

Mientras que si la ecuación se escribe en forma seno:

$$y(0, 0) = 4 \sin \delta = -2 \Rightarrow \delta = -\pi/6$$

- Dado que  $k = 2\pi/\lambda = \pi/2$  cm $^{-1}$  y  $\omega = 2\pi f = 16\pi$  rad/s, la ecuación de la onda es, en forma coseno:

$$y(x, t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ cm}$$

Mientras que en forma seno, será:

$$y(x, t) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ cm}$$

- Sean dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ . La diferencia de fase entre ellos viene dada por:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)$$

Dado que la diferencia de fase es de  $\pi/3$  rad, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$$

**34 PAU** Una onda armónica viene descrita mediante la ecuación siguiente:

$$y = 15 \sin(0,4x - 20t) \text{ cm}$$

Determina:

- La amplitud, frecuencia angular y el número de onda.
- La longitud de onda, la frecuencia y el período.
- La velocidad de propagación y el sentido de la propagación.
- De la ecuación de la onda armónica se obtiene directamente:

$$A = 15 \text{ cm}$$

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

$$k = 0,4 \text{ cm}^{-1}$$

- A partir de los parámetros anteriores, podemos obtener estos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 15,7 \text{ cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3,18 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0,31 \text{ s}$$

- La velocidad de propagación será  $v = \lambda f = 50$  cm/s. Se llega a este mismo valor si se utiliza la expresión  $v = \omega/k$ .

A la vista del signo que hay dentro de la función seno, sabemos que la onda se propaga hacia la derecha ( $x$  crecientes).

**35 PAU** Una onda armónica viene dada por la ecuación:

$$y = 10 \sin 3\pi(3x + 30t) \text{ cm}$$

- ¿En qué sentido se desplaza?
- Halla su amplitud, frecuencia, período y longitud de onda.
- ¿A qué velocidad se propaga?

- Se desplaza en el sentido negativo de las  $x$ , es decir, hacia la izquierda.

- De la ecuación se desprende que:

$$A = 10 \text{ cm}$$

$$\omega = 90\pi \text{ rad/s}$$

$$k = 9\pi \text{ cm}^{-1}$$

Por lo que:

$$f = 45 \text{ Hz}$$

$$T = 2,22 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,22 \text{ cm}$$

- Su velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = 10 \text{ cm/s}$$

**36** Si la onda del ejercicio anterior se propaga por una cuerda, ¿cuál sería la velocidad máxima con la que oscilaría un punto cualquiera de dicha cuerda?

Partiendo de  $y = 10 \sin(9\pi x + 90\pi t)$  cm, y derivando, obtenemos:

$$v = \frac{dy}{dt} = 900\pi \cos(9\pi x + 90\pi t) \text{ cm/s}$$

La velocidad máxima de oscilación se alcanza cuando el valor del coseno es igual a la unidad. Por tanto:

$$v_{\text{máx}} = 900\pi \text{ cm/s} = 28,26 \text{ m/s}$$

**37 PAU** Escribe la ecuación de una onda que se propaga hacia el sentido negativo de las  $x$  y que tiene las siguientes características:  $A = 15$  cm,  $\lambda = 0,4$  cm,  $f = 5$  Hz. Ten en cuenta que  $y$  toma su valor máximo en  $x = 0$  y  $t = 0$ .

Dado que  $\lambda = 0,4$  cm y  $f = 5$  Hz, entonces:

$$k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ cm}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 10\pi \text{ rad/s}$$

Por consiguiente, la ecuación de la onda tendrá la siguiente forma:

$$y = A \sin(kx + \omega t + \delta)$$

Como  $y = A$  en  $x = 0$  y  $t = 0$ , entonces:

$$\sin \delta = 1 \Rightarrow \delta = \pi/2 \text{ rad}$$

Así pues, la ecuación será:

$$y = 15 \sin \pi(5x + 10t + 1/2) \text{ cm}$$

**38 PAU** Una partícula oscila verticalmente en la dirección  $Y$ , en torno al origen de coordenadas, con una amplitud de 2 cm y una frecuencia  $f = 1/8$  Hz. La posición inicial de la partícula en  $t = 0$  es  $y = 2$  cm. Las oscilaciones de la partícula originan una onda armónica transversal que se propaga hacia  $X^+$ . Sabiendo que la distancia entre dos puntos consecutivos del eje  $X$  que oscilan con un desfase de  $\pi$  radianes es de 20 cm, determina:

- La amplitud y frecuencia angular de la onda armónica.
- Su longitud de onda y su velocidad de propagación.
- La expresión matemática de la onda.
- La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para un punto del eje  $X$  situado a 20 cm y el valor de dicha velocidad en  $t = 10$  s.



- a) La amplitud de la onda es la propia del oscilador, es decir,  $A = 2$  cm. Del mismo modo, la frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

- b) La distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan con un desfase de  $\pi$  es igual a media longitud de onda. Por tanto:

$$\lambda = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

Así pues, la velocidad de propagación es:

$$v = \lambda f = 5 \text{ cm/s} = 0,05 \text{ m/s}$$

- c) Dada la posición inicial del oscilador, resulta conveniente escribir la ecuación en forma coseno, de modo que:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Puesto que  $k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ m}^{-1}$  y  $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$ , resulta:

$$y(x, t) = 0,02 \cos\left(5\pi x - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m}$$

- d) Derivando y respecto del tiempo, se obtiene:

$$v_{\text{osc}} = \frac{dy}{dt} = 5\pi \cdot 10^{-3} \sin\left(5\pi x - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m/s}$$

Si  $x = 20$  cm, resulta:

$$v_{\text{osc}} = 5\pi \cdot 10^{-3} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m/s}$$

Cuando  $t = 10$  s, la velocidad resulta ser:

$$v_{\text{osc}} = 1,57 \cdot 10^{-2} \sin(\pi - 2,5\pi) = 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

- 39 PAU** Una onda armónica con una frecuencia de 20 Hz se propaga a una velocidad de 80 m/s. Determina:

- a) A qué distancia mínima se encuentran dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados  $30^\circ$ .
- b) Cuál es el desfase, en un punto dado, entre dos desplazamientos que se producen en dos tiempos que distan 0,01 s.
- a) La distancia mínima entre dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados  $30^\circ$ , o  $\pi/6$  rad, se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{6}$$

A partir de los datos podemos determinar  $k$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \text{ m}$$

- b) Al tratarse de un desfase temporal, entonces:

$$\Delta\Phi(t) = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi f \cdot 0,01 = 0,4\pi \text{ rad} = 72^\circ$$

### Propagación de energía en ondas armónicas

- 40** ¿Cómo podemos duplicar la potencia transmitida por una onda armónica que se propaga en una determinada dirección?

Partiendo de la expresión 8.17, puede duplicarse la potencia aumentando la frecuencia en un factor raíz de dos, incrementando la amplitud en la misma medida o haciendo que la velocidad de propagación se duplique, lo que en el caso de las ondas que se desplazan en una cuerda podría conseguirse cuadruplicando la tensión de la misma.

- 41** Cuando una onda armónica se amortigua, ¿cambia su frecuencia? ¿Y su longitud de onda? ¿Y su velocidad de propagación? ¿Y su amplitud?

Por su carácter armónico, no cambia ni su frecuencia ni su longitud de onda; en consecuencia, tampoco varía la velocidad de propagación.

Lo que sí se modifica en una onda amortiguada es la amplitud.

- 42 PAU** Una cuerda sometida a una tensión constante de 60 N tiene una densidad lineal de 150 g/m. ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para producir ondas armónicas de una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 30 Hz?

La potencia transmitida a la cuerda viene dada por:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

En esta expresión, conocemos  $\mu$  (0,15 kg/m), así como la frecuencia y la amplitud, y podemos determinar la velocidad, pues:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 20 \text{ m/s}$$

Sustituyendo todos los datos, resulta:

$$P = 533 \text{ W}$$

- D43 PAU** Una cuerda tensa tiene una longitud de 8 m y pesa 8,7 N. Indica la potencia que debemos suministrarle para producir ondas armónicas que respondan a esta ecuación:  $y = 10 \sin \pi(4x - 80t)$  cm.

Al ser una onda unidimensional, la potencia que debemos suministrar viene dada por la expresión:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

donde:

$$\mu = \frac{m}{l} = 0,11 \text{ kg/m}$$

$$A = 0,1 \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{80\pi}{4\pi} = 20 \text{ cm/s} = 0,2 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

Por tanto:

$$P = 6,95 \text{ W}$$

### Interferencias y ondas estacionarias

- 44** ¿Se produce alguna alteración en el avance de ondas que interfieren entre sí? Cita un ejemplo que avale tu respuesta.

No hay interacción en lo relativo a la propagación de cada onda tomada individualmente. Lo único que puede variar es la amplitud resultante en determinados puntos, como consecuencia de la interferencia.

En el *Libro del alumno* (página 223) hemos proporcionado un ejemplo referido al sonido: varias personas pueden mantener conversaciones cruzadas, sin que las voces se estorben unas a otras.

- 45** Al originar oscilaciones en un extremo de una cuerda que se halla unida a la pared por el otro extremo, se produce una onda estacionaria que tiene un solo vientre. ¿Qué debemos hacer si deseamos que tenga tres vientres?

Hay que triplicar la frecuencia de la oscilación.

- 46** ¿Es siempre cinco veces mayor que la fundamental la frecuencia de un quinto armónico?

Siempre es, en efecto, cinco veces mayor, como vemos en el caso de la cuerda fija por ambos extremos, recogido en el *Libro del alumno*, y en el de la cuerda fija por un extremo, en el que no existen los armónicos pares y que figura como ampliación en el material fotocopiado número 2.

- 47 PAU** Dos ondas armónicas que se propagan en sentidos opuestos producen una onda estacionaria de ecuación:

$$y = 3 \operatorname{sen} 0,2x \cdot \cos 50t \text{ cm}$$

- a) Determina la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de las ondas componentes.

- b) ¿Cuál es la distancia entre dos nodos consecutivos?

Si las ondas componentes tienen la forma:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t); y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

entonces la onda estacionaria resultante vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cdot \cos \omega t \text{ cm}$$

- a) De la ecuación de la onda se obtiene que:

$$k = 0,2 \text{ cm}^{-1}; \omega = 50 \text{ rad/s}$$

De este modo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 10\pi \text{ cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \text{ Hz}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = 250 \text{ cm/s}$$

- b) Los nodos son los puntos de amplitud cero, lo cual se cumplirá cuando:

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots \Rightarrow 0,2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$$

De donde:

$$x = 0, 5\pi, 10\pi, 15\pi \dots$$

Como puede comprobarse, la distancia entre nodos consecutivos es de  $5\pi \text{ cm}$  o  $15,7 \text{ cm}$ .

- 48 PAU** La función de una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos es:

$$y = 0,3 \operatorname{sen} 0,2x \cdot \cos 500t \text{ cm}$$

- a) Determina su longitud de onda y su frecuencia.

- b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda?

- c) Si está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud?

- a) A partir de la ecuación dada se obtiene:

$$k = 0,2 \text{ cm}^{-1}; \omega = 500 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 31,41 \text{ cm}; f = \frac{\omega}{2\pi} = 79,62 \text{ Hz}$$

- b) La velocidad es:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2500 \text{ cm/s}$$

- c) Si vibra en su cuarto armónico, se cumplirá que:

$$f = 4 \frac{v}{2l} \Rightarrow l = \frac{2v}{f} = 62,82 \text{ cm}$$

- 49 PAU** Una onda estacionaria se establece en una cuerda de 2 m fija por ambos extremos. Cuando la frecuencia de la excitación es de 200 Hz, la cuerda presenta cuatro vientres.

- a) ¿Cuál es la longitud de la onda?

- b) ¿En qué armónico vibra la cuerda?

- c) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

- a) Si la cuerda presenta cuatro vientres, está vibrando en su cuarto armónico, tal como se observa en la figura 8.45 de la página 228. En consecuencia, la longitud de onda es justamente la mitad de la longitud de la cuerda:

$$l = 4 \frac{\lambda}{2}$$

En esta expresión, el número 4 indica los vientres que hay. Despejando  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l}{2} = 1 \text{ m}$$

- b) Como hemos visto, la cuerda vibra en el cuarto armónico.

- c) La frecuencia fundamental será:

$$f_0 = \frac{f^{\text{IV}}}{4} = 50 \text{ Hz}$$

- 50 PAU** Dos ondas armónicas tienen por ecuaciones:

$$y_1 = 3 \operatorname{sen} \pi(4x - 200t) \text{ m}$$

$$y_2 = 3 \operatorname{sen} \pi(4x - 200t - 0,15) \text{ m}$$

Halla la amplitud y frecuencia de la onda resultante

Se trata de dos ondas que se propagan en la misma dirección y sentido, pero que están desfasadas. En consecuencia, interfieren produciendo, en un punto  $x$  y un tiempo  $t$ , una perturbación que vendrá dada por:

$$y = 6 \cos 0,075\pi \cdot \operatorname{sen} \pi(4x - 200t - 0,075) \text{ m}$$

Así pues, la amplitud será:

$$A' = 6 \cos 0,075\pi = 5,83 \text{ m}$$

Puesto que  $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$ , la frecuencia será:

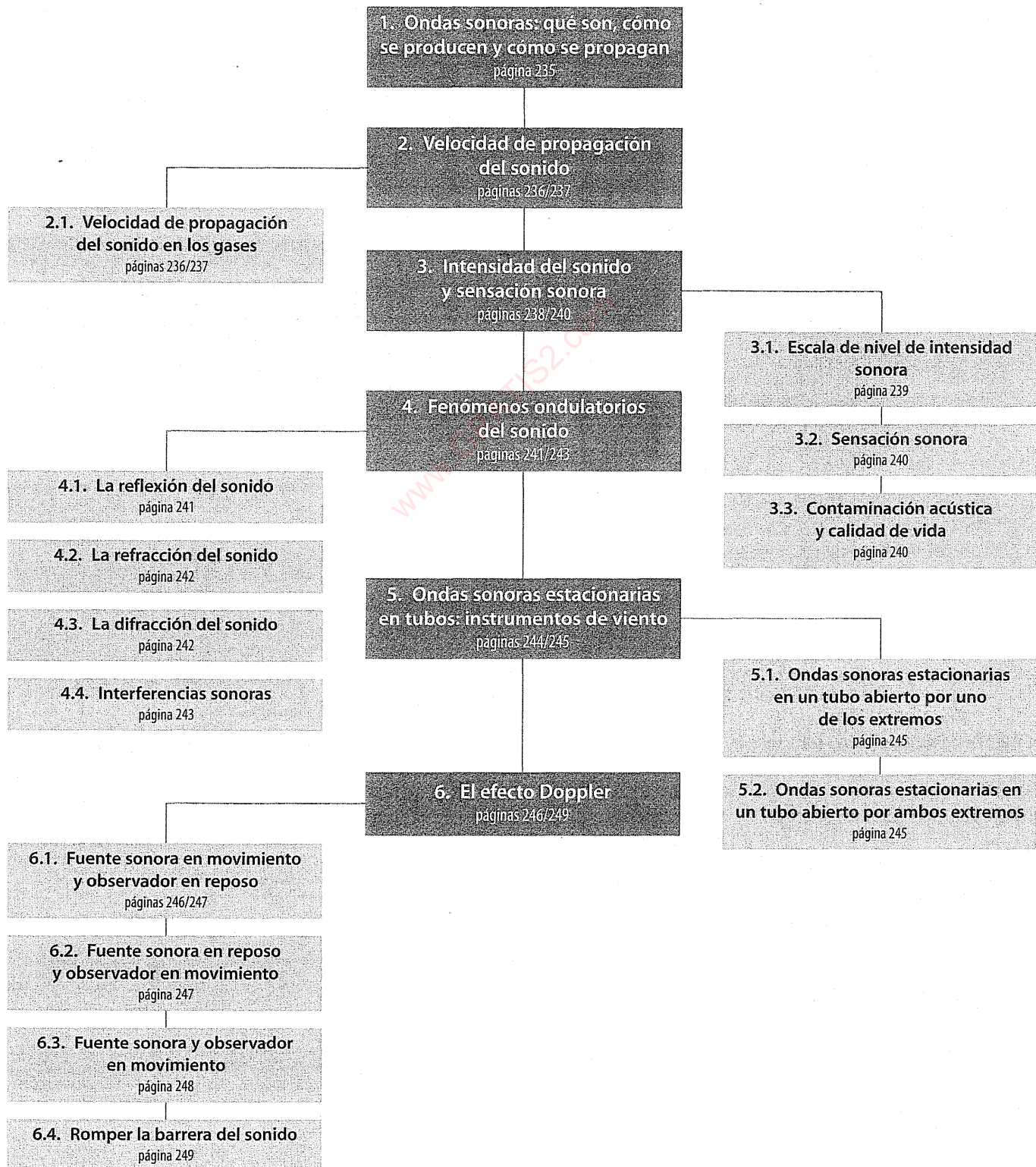
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$



# 9

# Ondas sonoras

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D



www.1FISICA.blogspot.com  
www.GRATIS2.com  
www.librospdf1.blogspot.com

## Questiones previas (página 234)

### 1. ¿De qué tipo son las ondas sonoras?

Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales.

Son mecánicas porque necesitan un medio material para propagarse y son longitudinales porque las partículas del medio oscilan en la misma dirección de propagación de la onda.

### 2. ¿En qué medios pueden propagarse las ondas sonoras? ¿En cuál de ellos lo hacen con mayor velocidad?

Las ondas sonoras se pueden propagar a través de medios materiales sólidos, líquidos o gaseosos.

Las ondas sonoras se propagan a mayor velocidad en líquidos y sólidos que en gases.

### 3. ¿Cómo se propaga el sonido? ¿Conoces algún hecho que permita demostrar su naturaleza ondulatoria?

Se propagan mediante variaciones alternadas de las densidades del medio, aunque en los gases estas variaciones de densidad equivalen a una secuencia alternada de compresiones y enrarecimientos.

Mediante un sencillo experimento que consiste en fijar una regla por uno de sus extremos a un tornillo de mordaza. Al separar la regla, el vaivén genera compresiones y enrarecimientos del aire generándose una onda mecánica.

### 4. ¿Por qué percibimos los sonidos de forma tan distinta en una misma habitación cuando está amueblada y cuando está sin amueblar?

Debido a fenómenos como la reflexión y difracción del sonido que hace que tengan distintos comportamientos el sonido en una habitación con mayor objetos que en otra que no tenga ningún objeto.

### 5. ¿Por qué suena distinto el claxon de un coche según se acerque o aleje de nosotros?

Por el efecto Doppler que debido al movimiento relativo entre la fuente sonora y el observador hace que cambie la frecuencia con que se percibe el sonido.

## Actividades (páginas 237/248)

### 1. Determina la velocidad de propagación del sonido en el aire a la temperatura de 0 °C y de 25 °C. Datos: $R = 8,31$ J/mol K, $\gamma = 1,4$ , y $M = 29$

Usando la expresión 9.2, cabe concluir que, para  $T = 273$  K:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 331 \text{ m/s}$$

donde  $M = 29$  g/mol = 0,029 kg/mol.

Así mismo, para  $T = 298$  K:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 345,7 \text{ m/s}$$

### 2. Una persona da un golpe en un extremo de una viga de gran longitud. Otra persona que se encuentra en el otro extremo con el oído pegado a la viga percibe dos golpes. ¿Por qué motivo?

La persona en cuestión percibe en primer lugar el sonido que se transmite a través de la viga sólida, que, al propagarse a mayor velocidad, llega antes a sus oídos.

El segundo golpe corresponde al sonido que se transmite por el aire.

### 3. A partir del dato del coeficiente de dilatación adiabática del hexafluoruro de azufre, determina la velocidad de propagación del sonido en dicho medio a 20 °C.

Dato: masas atómicas en kg/mol:  $F = 0,019$ ;  $S = 0,032$

La velocidad de propagación del sonido en el  $SF_6$  viene dada, como en cualquier gas, por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Sustituyendo los valores propios de este gas ( $\gamma = 1,08$  y  $M = 0,146$  kg/mol) se obtiene:

$$v = 129 \text{ m/s}$$

### 4. El sonido de la sirena de una fábrica llega a un trabajador 7 s después de que aquella haya empezado a funcionar. Calcula la frecuencia de la sirena, sabiendo que la distancia entre el trabajador y la fábrica es $49 \cdot 10^3$ veces la longitud de onda del sonido emitido.

La distancia que separa al trabajador de la fábrica es:

$$d = vt = 2317 \text{ m (suponiendo } T = 0^\circ\text{C)}$$

Por tanto, según se desprende de los datos, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{d}{49000} = 4,73 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Así pues, la frecuencia será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 6998 \text{ Hz}$$

### 5. ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda del sonido audible que se propaga en el aire?

Considerando la velocidad correspondiente a 0 °C, el intervalo de  $\lambda$  estaría comprendido entre:

$$\lambda_{\min} = \frac{v}{f_{\min}} = \frac{331 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 16,5 \text{ m}$$

y

$$\lambda_{\max} = \frac{v}{f_{\max}} = \frac{331 \text{ m/s}}{20000 \text{ Hz}} = 1,65 \text{ cm}$$

### 6. ICAU Considera una fuente sonora que emite a 500 Hz en el aire. Si este sonido se transmite después a un líquido con una velocidad de propagación de 1800 m/s, determina:

a) La longitud de onda del sonido en el aire.

b) El período del sonido en el aire.

c) La longitud de onda del sonido en el líquido.

Consideraremos que  $T = 0$  °C (en el aire).

a) La longitud de onda del sonido en el aire será:

$$\lambda = \frac{331 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0,662 \text{ m}$$

b) El período del sonido en el aire será:

$$T = \frac{1}{500 \text{ Hz}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

c) La longitud de onda del sonido en el líquido es:

$$\lambda = \frac{1800 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 3,6 \text{ m}$$

### 7. Halla las amplitudes en los cambios de presión que corresponden a los límites de intensidad del oído humano y compáralos con la presión atmosférica estándar.

A partir de la expresión 9.3, se obtiene:

$$\Delta p = 2\rho vI$$

Por tanto, para el límite bajo de intensidad:

$$\Delta p = 2 \cdot 1,22 \text{ kg/m}^3 \cdot 331 \text{ m/s} \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 8,07 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}$$

Y para el límite alto de intensidad:

$$\Delta p' = 2 \cdot 1,22 \text{ kg/m}^3 \cdot 331 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ W/m}^2 = 807,64 \text{ Pa}$$

Como la presión atmosférica es de 101 300 Pa, hay que admitir que el oído humano es muy sensible a pequeñas variaciones de presión.

- 8 Si el nivel de intensidad en una fábrica debe permanecer por debajo de 85 dB, ¿cuál es la máxima intensidad de sonido permitida en dicha fábrica?

Despejando de la expresión 9.4:

$$\log I = \frac{\beta + 10 \log I_0}{10}$$

La máxima intensidad es:

$$I = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

- 9 PAU El nivel de intensidad sonora de una bocina es de 60 dB a 10 m de distancia. Considerando la sirena un foco emisor puntual, determina:

- La intensidad sonora a 100 m y a 1 km de distancia.
- El nivel de intensidad sonora a 100 m y a 1 km de distancia.
- La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

A partir de la expresión 9.4. podemos determinar la intensidad a ese nivel:

$$60 \text{ dB} = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

- a) Teniendo en cuenta que el sonido se propaga como una onda esférica, se cumple la ley del inverso del cuadrado de la distancia, de modo que:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow I r_1^2 = I_2 r_2^2$$

donde  $I_1 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$  y  $r_1 = 10 \text{ m}$

Aplicando la expresión a las dos distancias consideradas, se obtiene:

$$I_2 (100 \text{ m}) = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

$$I_3 (1 \text{ km}) = 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

- b) Los valores de nivel de intensidad sonora correspondientes a  $I_2$  y  $I_3$  son respectivamente:

$$10 \log \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 40 \text{ dB}$$

$$10 \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20 \text{ dB}$$

- c) La sirena deja de ser audible en el punto en que  $I' = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ .

Por tanto:

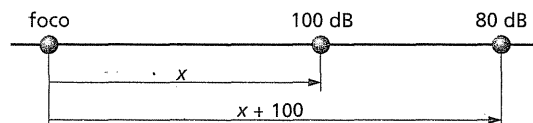
$$r' = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I'}} = 10 000 \text{ m} = 10 \text{ km}$$

- 10 PAU Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual. La primera, a una distancia  $x$  del foco, da como resultado 100 dB, y la segunda, realizada 100 m más lejos de  $x$  en la misma dirección, da como resultado 80 dB.

Determina:

- Las distancias al foco desde donde se hacen las mediciones.
- La potencia sonora del foco emisor.

El dibujo representativo de esta situación es el siguiente:



- a) Las intensidades correspondientes a 100 dB y 80 dB son, respectivamente,  $10^{-2} \text{ W/m}^2$  y  $10^{-4} \text{ W/m}^2$ . Aplicando la ley del inverso del cuadrado de la distancia se obtiene:

$$10^{-2} \cdot x^2 = 10^{-4} (x + 100)^2$$

Resolviendo  $x$ , obtenemos:

$$x = 11,1 \text{ m}$$

- b) La potencia se relaciona con la intensidad de una onda esférica según la expresión:

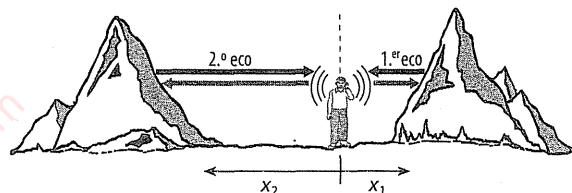
$$P = I \cdot 4\pi x^2 = 10^{-2} \cdot 4\pi (11,1)^2 = 15,5 \text{ W}$$

- 11 Una persona situada entre dos montañas oye ecos al cabo de 3,2 y 5 segundos.

- ¿A qué distancia se encuentran ambas montañas?
- ¿Cuándo oirá el tercer eco? ¿Y el cuarto? ¿Y el quinto?

Dato: velocidad del sonido = 340 m/s

- a) La siguiente figura ilustra la situación que plantea el enunciado:



Como puede comprobarse, el primer eco se percibe después de que el sonido haya recorrido una distancia  $2x_1$ , mientras que el segundo se percibe cuando la distancia recorrida es  $2x_2$ . Por tanto:

$$x_1 = \frac{vt_1}{2} = 544 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{vt_2}{2} = 850 \text{ m}$$

Así, la distancia a la que se encuentran las montañas es 1394 m (544 m + 850 m).

- b) El tercer eco es el que corresponde a la segunda reflexión de los sonidos. En este caso, el eco procedente de ambas montañas llegará a la vez a oídos de la persona al cabo de 8,2 s (3,2 s + 5 s).

El cuarto eco corresponde a la tercera reflexión proveniente de la montaña más cercana y se percibirá a los 11,4 s (8,2 s + 3,2 s).

El quinto eco, por último, corresponde a la tercera reflexión en la montaña más lejana y será escuchado a los 13,2 s (8,2 s + 5 s).

- 12 ¿Por qué se produce esa sensación tan peculiar de silencio cuando ha caído una copiosa nevada que ha cuajado?

Entre los copos de la nieve recién caída existen muchos espacios huecos, de modo que aquella se convierte en un material muy absorbente del sonido. De esa manera, desaparece cualquier efecto derivado de la reflexión del sonido.

- 13 ¿Se te ocurre algún modo de amplificar un sonido producido bajo el agua, mediante el principio de la lente acústica?

El sonido puede amplificarse, por ejemplo, intercalando entre la fuente y el receptor un globo lleno de aire. Como la velocidad de propagación en el aire es menor, se produce el efecto de refracción.

- 14 Determina las tres frecuencias más bajas de un tubo de 2 m que está abierto por un extremo si la velocidad del sonido es de 340 m/s.

A partir de la expresión:

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4l}$$

Las tres frecuencias más bajas corresponden a los valores de  $n = 0, 1$  y  $2$ . Así pues:

$$f_1 = \frac{v}{4l} = 42,5 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \frac{v}{4l} = 127,5 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5 \frac{v}{4l} = 212,5 \text{ Hz}$$

- 15 Halla las tres frecuencias más bajas de un tubo de 2,5 m que está abierto por ambos extremos si la velocidad del sonido es de 340 m/s.

Las frecuencias más bajas corresponden a los valores 1, 2 y 3 de  $n$  en la siguiente expresión:

$$f = n \frac{v}{2l}$$

Así pues:

$$f_1 = \frac{v}{2l} = 68 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2 \frac{v}{2l} = 136 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \frac{v}{2l} = 204 \text{ Hz}$$

- 16 El tren AVE, que se desplaza a 220 km/h, hace sonar su silbato con una frecuencia de 520 Hz. Halla la frecuencia que percibe un observador en reposo cuando el tren se aproxima y se aleje.

La frecuencia que percibe el observador en reposo cuando el tren se aproxima viene dada por:

$$f' = f \left( \frac{v}{v - v_f} \right)$$

donde  $v_f = 220 \text{ km/h} = 61,11 \text{ m/s}$ . Por tanto:

$$f' = 520 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 61,11 \text{ m/s}} \right) = 634 \text{ Hz}$$

Por el contrario, cuando el tren se aleja:

$$f' = f \left( \frac{v}{v + v_f} \right)$$

$$f' = 520 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 61,11 \text{ m/s}} \right) = 440,77 \text{ Hz}$$

- 17 **PAU** Una ambulancia se mueve con una velocidad de 80 km/h mientras suena su sirena de 450 Hz. En sentido contrario, viaja otro coche a 90 km/h. Determina la frecuencia que percibe el conductor del coche cuando:

a) Los dos vehículos se aproximan.

b) Los dos vehículos se alejan.

En este caso, la fuente sonora y el observador están en movimiento con una velocidad de:

$$v_f = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/s}$$

$$v_o = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

a) Cuando los dos vehículos se aproximan:

$$f' = f \left( \frac{v + v_o}{v - v_f} \right) = 516,86 \text{ Hz}$$

b) Cuando los dos vehículos se alejan:

$$f' = f \left( \frac{v - v_o}{v + v_f} \right) = 391,33 \text{ Hz}$$

- 18 El sonido de una campana que emite a 450 Hz se percibe a 485 Hz cuando nos acercamos a ella a cierta velocidad. ¿Qué frecuencia percibiremos cuando nos alejemos de ella a la misma velocidad?

La frecuencia que percibimos a medida que nos acercamos a la campana, viene dada por la siguiente expresión:

$$f' = f \left( \frac{v + v_o}{v} \right)$$

Sustituyendo los datos:

$$485 \text{ Hz} = 450 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s} + v_o}{340 \text{ m/s}} \right)$$

Resolviendo, obtenemos que:  $v_o = 26,4 \text{ m/s}$ .

Así pues, cuando nos alejemos de la campana con dicha velocidad, la frecuencia que percibiremos será:

$$f' = f \left( \frac{v - v_o}{v} \right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 450 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s} - 26,4 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} \right) = 415 \text{ Hz}$$

## Cuestiones y problemas (páginas 252/253)

### Guía de repaso

- 1 ¿Cómo se produce una onda sonora?

Se produce cuando las compresiones y los enrarecimientos del aire se suceden de forma alternada y se propaga por el aire. Además para que estas ondas mecánicas longitudinales sean sonoras sus frecuencias deben estar comprendidas entre 20 y 20 000 Hz.

- 2 ¿Cómo se propagan las ondas sonoras?

Se propagan mediante variaciones alternadas de densidad.

- 3 ¿Puede transmitirse el sonido en el vacío?

El sonido no puede transmitirse por el vacío, porque es una onda mecánica y como tal necesita un medio material para su propagación.

- 4 ¿En qué medios pueden propagarse las ondas sonoras? ¿En cuál lo hace con mayor velocidad?

Se propaga en cualquier medio ya sea líquido, gaseoso o sólido. Pero, lo hace con mayor velocidad en un medio sólido.

- 5 ¿Entre qué frecuencias se considera sonora una onda mecánica longitudinal?

Entre 20 y 20 000 Hz.

- 6 ¿Cómo varía con la temperatura la velocidad de propagación del sonido en un gas?

La velocidad de propagación del sonido en un gas aumenta con la temperatura.

- 7 ¿Cómo varía con la distancia la intensidad del sonido si lo consideramos como una onda esférica?

Disminuye conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

- 8 ¿Cómo se define el nivel de intensidad de una onda sonora? ¿En qué unidades se expresa?

El nivel de intensidad sonora es la relación entre la intensidad de una onda sonora y la intensidad umbral (umbral de la audición). Su unidad se expresa en decibelios (dB).

- 9** ¿Qué fenómenos se relacionan con la reflexión del sonido? El eco y la reverberación.
- 10** ¿Qué fenómenos se relacionan con la refracción del sonido? Por ejemplo, las lentes acústicas y la audición de sonidos lejanos.
- 11** ¿Cuándo se produce eco? Cuando la distancia a la superficie reflectante es mayor de 17 m.

- 12** ¿En qué consiste el fenómeno de la reverberación? Es cuando la reflexión del sonido no produce eco. Se produce cuando el tiempo que tarda en llegarnos el sonido reflejado tarda menos de 0,1 s.

- 13** ¿Cuál es el requisito para que se establezcan ondas estacionarias en un tubo con un extremo abierto? ¿Cuál es la expresión de las frecuencias posibles?

Se establecen ondas cuando:

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Y las posibles frecuencias son:

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4l}$$

- 14** ¿Cuál es el requisito para que se produzcan ondas estacionarias en un tubo con sus dos extremos abiertos? ¿Qué expresión nos da las frecuencias posibles?

Se establecen ondas cuando:

$$l = \frac{n\lambda}{2}$$

Y las posibles frecuencias son:

$$f = \frac{nv}{2l}$$

- 15** ¿En qué consiste el efecto Doppler? ¿Qué magnitud de onda varía cuando se mueve el foco? ¿Y cuando es el observador el que se mueve?

El efecto Doppler es el fenómeno relativo de la fuente sonora y el observador por el que cambia la frecuencia que se percibe de un sonido.

Cuando se mueve el foco varía la longitud de onda y cuando es el observador el que se mueve será la velocidad.

- 16** ¿Cuándo se producen las ondas de choque?

Se produce cuando la fuente supera la velocidad del sonido.

### Ondas sonoras y velocidad de propagación

- 17** La frecuencia de una onda sonora en el aire a 0 °C es de 520 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda?

Puesto que la velocidad de propagación del sonido en el aire a 0 °C es de 331 m/s, tendremos que:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,636 \text{ m}$$

- 18** El oído humano puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20 000 Hz, aproximadamente; ¿cuáles son las longitudes de onda en el aire que corresponden a estas frecuencias?

Las longitudes de onda para 20 Hz y 20 000 serán, respectivamente:

$$\lambda_{\text{umbral}} = \frac{v}{f_{\text{umbral}}} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{v}{f_{\text{máx}}} = 0,017 \text{ m}$$

- 19** **PAU** Se da un golpe en un extremo de una viga de hierro. Una persona que está situada en el otro extremo percibe dos golpes separados por un intervalo de 1,2 s. ¿Cuál es la longitud de la viga de hierro?

La velocidad de propagación del sonido en el hierro es 5 130 m/s. La diferencia de tiempo se debe a la distinta velocidad de propagación en el hierro y en el aire. En ambos casos, la distancia recorrida por el sonido es la misma, por lo que tendremos:

$$l = v_{\text{aire}} t \Rightarrow t = \frac{l}{v_{\text{aire}}}$$

$$l = v_{\text{Fe}} t' \Rightarrow t' = \frac{l}{v_{\text{Fe}}}$$

$$t - t' = 1,2 \text{ s}$$

Es decir:

$$l \left( \frac{1}{v_{\text{aire}}} - \frac{1}{v_{\text{Fe}}} \right) = 1,2$$

de donde:

$$l = 437 \text{ m}$$

### Intensidad y nivel de intensidad sonora

- 20** Razona la veracidad o falsedad del enunciado: «un sonido de 60 dB tiene el doble de intensidad que uno de 30 dB».

La afirmación es falsa: la intensidad del sonido es 1000 veces mayor. Dado que  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , al desarrollar la expresión 9.4 para un sonido de 60 dB, se obtiene:

$$60 \text{ dB} = 10 \log I + 120$$

Es decir:

$$I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

y para el sonido de 30 dB:

$$30 \text{ dB} = 10 \log I' + 120$$

Es decir:

$$I' = 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

Por tanto:

$$I = 10^3 \cdot I'$$

- 21** Dos ondas sonoras, una en el aire y otra en el agua, tienen la misma intensidad. ¿Qué relación existe entre sus amplitudes de presión? Y si tuvieran la misma amplitud de presión, ¿qué relación guardarían sus intensidades?

A partir de la expresión 9.3, podemos concluir que las amplitudes de presión se relacionan con la intensidad según la siguiente igualdad:

$$\Delta p = 2\rho v I$$

Como la velocidad en el agua es de 1 493 m/s y en el aire (a 25 °C) es de 340 m/s, y teniendo en cuenta los valores de densidad del agua y el aire (1 000 kg/m<sup>3</sup> para la primera y 1,29 kg/m<sup>3</sup> para el segundo), se obtiene que la amplitud de presión en el agua es 3 404 veces la del aire.

Por el contrario, si la amplitud de presión es la misma, la intensidad de la onda en el aire será 3 404 veces la intensidad en el agua.

- 22** **PAU** Un foco puntual emite ondas sonoras esféricas de 165 Hz de frecuencia que se propagan a 330 m/s. Si la intensidad de la onda a 1 m del foco es de 1 000 W/m<sup>2</sup>, determina:

- La intensidad de la onda a 10 m del foco.
- La diferencia de fase de la onda sonora entre ambos puntos.
- La variación del nivel de intensidad sonora entre ambos puntos.



a) Aplicando la ley del inverso del cuadrado de la distancia, se obtiene:

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \Rightarrow I_2 = 10 \text{ W/m}^2$$

b) La diferencia de fase  $\Delta\Phi = kr_2 - kr_1 = k\Delta r$

siendo  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/v = \pi \text{ m}^{-1}$  y  $\Delta r = 9 \text{ m}$

Por tanto:

$$\Delta\Phi = 9\pi$$

c) Los niveles de intensidad correspondientes a  $1000 \text{ W/m}^2$  y  $10 \text{ W/m}^2$  son, respectivamente, 150 dB y 130 dB. Así pues, la variación del nivel de intensidad entre ambos puntos es de 20 dB.

**25 PAU** El tubo de escape de una moto produce un nivel de intensidad sonora de 70 dB a 5 m de ella. Suponiendo que las ondas sonoras se propagan en frentes de onda esféricos, determina:

a) La velocidad constante a la que debe alejarse la moto para que deje de escucharse por completo su ruido al cabo de 7 minutos.

b) ¿Cuántas motos iguales a la anterior se necesitarían para aumentar el nivel de intensidad sonora a 5 m de ellas hasta 80 dB?

a) La intensidad correspondiente a 70 dB es  $10^{-5} \text{ W/m}^2$ . El ruido dejará de percibirse cuando la intensidad adquiera su valor umbral  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , cosa que sucede a la distancia  $d$  deducida de la ley del inverso del cuadrado de la distancia:

$$d = d_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} = 15811 \text{ m}$$

Por tanto, el desplazamiento de la moto en esos 7 minutos (420 s) ha sido  $\Delta d = 15806 \text{ m}$ . Así pues, su velocidad es:

$$v = \frac{\Delta d}{t} = 37,6 \text{ m/s} = 135 \text{ km/h}$$

b) La intensidad correspondiente a 80 dB es  $10^{-4} \text{ W/m}^2$ . Dado que la intensidad emitida por cada moto es de  $10^{-5} \text{ W/m}^2$ , se necesitan 10 motos idénticas.

**24** Una ventana de  $2 \text{ m}^2$  de superficie está abierta a una calle cuyo tráfico produce un nivel de intensidad, a la distancia a la que se encuentra la ventana, de 70 dB. ¿Cuál es la potencia acústica de las ondas sonoras que atraviesan la ventana?

Los 70 dB medidos corresponden a una intensidad de  $10^{-5} \text{ W/m}^2$ . Por tanto, la potencia acústica de las ondas que atraviesan la ventana es de:

$$P = I \cdot S = 10^{-5} \text{ W/m}^2 \cdot 2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

**25 PAU** Una fuente sonora puntual emite con una potencia de salida de 70 W. Determina:

a) La intensidad sonora a 5 m y a 50 m.

b) El nivel de intensidad sonora a esas distancias.

c) La distancia a la que el nivel de intensidad se reduce a 20 dB.

d) La distancia a la que deja de percibirse el sonido.

a) Puesto que las ondas son esféricas, la intensidad en función de la distancia viene dada por la expresión:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Sustituyendo para  $r = 5 \text{ m}$ , se obtiene  $I = 2,2 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2$

Sustituyendo para  $r = 50 \text{ m}$ , se obtiene  $I' = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$

b) Los niveles de intensidad correspondientes a esos valores son, por aplicación de la expresión 9.4:

$$113,5 \text{ dB para } I = 2,2 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2$$

$$93,5 \text{ dB para } I' = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

c) La intensidad correspondiente a 20 dB es  $10^{-10} \text{ W/m}^2$ , por lo que:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I^2}} = 236077 \text{ m} = 236 \text{ km}$$

Obviamente no se trata de un resultado muy realista, pues no se considera más amortiguación que la inherente a su propagación en frentes de ondas esféricas.

d) Corresponde a  $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Aplicando la expresión anterior, eso sucede a:

$$r = 2360 \text{ km}$$

Puede utilizarse el resultado poco realista de este problema para discutir qué procesos de amortiguación por pérdida de energía pueden tener lugar en una propagación sonora en el ambiente.

**26** Determina el nivel de intensidad, en dB, correspondiente a una onda sonora de intensidad:

a)  $10^{-8} \text{ W/m}^2$                       b)  $10^{-3} \text{ W/m}^2$

a) Para  $I = 10^{-8} \text{ W/m}^2$ :

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 40 \text{ dB}$$

b) Para  $I = 10^{-3} \text{ W/m}^2$ :

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 90 \text{ dB}$$

**27** Una fuente sonora emite un sonido de cierta intensidad. ¿Se duplica el nivel de intensidad al hacer sonar a la vez otra fuente sonora de la misma intensidad? Si no es así, ¿en qué factor aumenta?

No se duplica el nivel de intensidad. Lo que realmente se duplica es la intensidad, de modo que ahora  $I' = 2 \cdot I$ .

Para una sola fuente:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 (\log I - \log I_0)$$

Para las dos fuentes:

$$\beta' = 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 [(\log 2 + \log I) - \log I_0]$$

Como puede observarse en la expresión anterior, el nivel de intensidad  $\beta' = \beta + 10 \log 2$ . Por tanto, no se duplica sino que aumenta en 3 dB, pues  $10 \log 2 = 3$ .

**28 PAU** ¿En qué fracción de intensidad debe reducirse un sonido para rebajar de 80 dB a 60 dB su nivel de intensidad?

Llamando  $I_1$  a la intensidad correspondiente a 80 dB, e  $I_2$ , a la correspondiente a 60 dB, tenemos, en cada caso:

$$80 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$60 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}$$

Restando ambas expresiones se obtiene:

$$20 = 10 \left( \log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right)$$

Es decir:

$$20 = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$$

Por tanto:

$$\log \frac{I_1}{I_2} = 2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$$

En consecuencia, la intensidad  $I_2$  debe ser la centésima parte de  $I_1$ :

$$I_2 = \frac{I_1}{100} = 10^{-2} \cdot I_1$$

- 29** Un secador de pelo tiene un nivel de intensidad de 85 dB. ¿Cuál es la intensidad de su sonido en  $W/m^2$ ?

Despejando directamente de la expresión 9.4 de la página 239 del Libro del alumno:

$$85 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log I = -3,5$$

Es decir:

$$I = 3,1 \cdot 10^{-4} W/m^2$$

### Fenómenos ondulatorios del sonido

- 30** ¿Por qué navegando de noche cerca de la costa se oyen sonidos provenientes de ella que de día no se perciben?

Durante la noche, el aire más próximo a la superficie del agua suele estar a menor temperatura que el aire que se encuentra a mayor altura (recuérdese el fenómeno de las brisas costeras). En consecuencia, los sonidos procedentes de la costa se refractan en las capas donde la temperatura es mayor, con lo que sufren una desviación parecida a una reflexión, de modo que los sonidos pueden llegar al barco situado a cierta distancia.

- 31** ¿Hasta qué ángulo límite de incidencia podría sufrir refracción y propagarse por el agua una onda sonora que se desplazara por el aire?

El máximo valor del ángulo de refracción será  $90^\circ$  y marcará el límite entre refracción y reflexión total. Así pues, aplicando la ley de Snell, tendremos:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin 90^\circ} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{agua}}}$$

Usando los datos de la tabla 9.1, obtenemos que el máximo ángulo de incidencia posible sería de  $13^\circ$ .

- 32** Si el sonido es capaz de propagarse por la madera a mayor velocidad que por el aire, ¿por qué es tan difícil escuchar una conversación cuando la puerta está cerrada?

Dado que la velocidad de propagación del sonido en la madera es muy elevada ( $3850$  m/s para la madera de encina), el ángulo máximo de incidencia del sonido que puede transmitirse a través de la puerta sería de  $5^\circ$ . Todas las ondas sonoras que incidan sobre la puerta con un ángulo mayor serán reflejadas.

- 33** Dos altavoces emiten simultáneamente ondas sonoras de 680 Hz que se propagan por el aire a 340 m/s. Si colocamos enfrente de los altavoces un micrófono de modo que quede situado a 5 m de un altavoz y a 6,25 m del otro altavoz, ¿percibirá sonido?

Se percibirá un máximo de sonido si la interferencia es constructiva, cosa que sucede si se cumple:

$$\Delta x = n\lambda$$

Por el contrario, no se percibirá si la interferencia es destructiva, es decir, si:

$$\Delta x = (2n + 1)\lambda$$

donde  $2n + 1$  es un número impar. La longitud de onda correspondiente al sonido emitido es  $\lambda = v/f = 0,5$  cm.

Dado que  $\Delta x = 1,25$  m, puede comprobarse que:

$$\Delta x = 5\lambda/2$$

Por lo que el micrófono no recogerá sonido en esa posición.

- 34** Fíjate en la figura de la página 253 y responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿A qué es debido que oigamos a través de la puerta abierta el sonido producido en la otra habitación? ¿Qué fenómenos físicos tienen lugar?

b) ¿Qué sucedería si suprimiéramos la pared A? ¿Seguiría percibiendo el receptor el sonido emitido por el emisor?

a) Es debido a tres fenómenos:

- El primero es la difracción del sonido a través de la abertura de la puerta.
- El segundo es la reflexión en la pared A del sonido que pasa por la puerta.
- La tercera razón es la refracción (y, en consecuencia, transmisión) del sonido al atravesar la pared que separa las dos habitaciones. Este último fenómeno no suele ser despreciable en muchas viviendas de tabiques delgados.

b) Si se suprimiese la pared A, desaparecería el mecanismo de reflexión, pero se mantendrían los otros dos mecanismos, por lo que seguiría percibiéndose el sonido.

- 35** **PAU** Un sonido cuya longitud de onda en el aire es de 2 m penetra en el agua, en donde se mueve con una velocidad de 1493 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda en el agua?

La frecuencia del sonido en el aire es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170 \text{ Hz}$$

Puesto que la frecuencia no varía al pasar de un medio a otro, su longitud de onda en el agua es:

$$\lambda' = \frac{v'}{f} = \frac{1493 \text{ m/s}}{170 \text{ Hz}} = 8,78 \text{ m}$$

- 36** **PAU** Un barco emite ondas sonoras con su sonar. El eco procedente de la reflexión del sonido en el fondo del mar se escucha a los 4 s de ser emitido aquel. Calcula a qué profundidad está el fondo del mar.

Dato: velocidad del sonido en el agua de mar = 1533 m/s

El sonido reflejado recorre una distancia  $2d$  (ida y vuelta), es decir:

$$2d = vt$$

de donde:

$$d = \frac{1533 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s}}{2} = 3066 \text{ m}$$

- 37** **PAU** Calcula la desviación que experimenta un «rayo» sonoro al pasar del aire al agua si forma con la normal a la superficie de separación un ángulo de  $20^\circ$ . ¿Y si pasa del agua al aire con el mismo ángulo de incidencia?

Datos: velocidad de propagación en el aire = 340 m/s; velocidad de propagación en el agua 1493 m/s

Como se desprende de la ley de Snell, no se produce refracción si el sonido pasa del aire al agua.

La razón es que de la expresión:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{agua}}}$$

se obtiene esta otra:

$$\sin \hat{r} = \frac{v_{\text{agua}}}{v_{\text{aire}}} \sin \hat{i} > 1$$

Por tanto, no es posible la refracción. Es un hecho que habremos comprobado alguna vez al hablar desde fuera del agua a alguien que está sumergido en ella; sencillamente, nunca podrá oír lo que le decimos.

Si el sonido pasa del agua al aire, entonces:

$$\sin \hat{r} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{agua}}} \sin \hat{i} = 0,0778$$

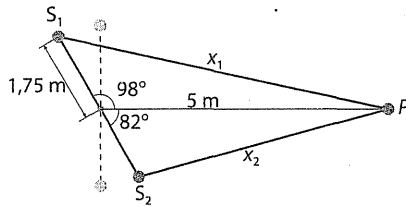
Es decir:

$$\hat{r} = 4,46^\circ$$

Efectivamente, es fácil comprobar que un sonido emitido bajo el agua puede escucharse en el exterior.

**DEB PAU** Dos altavoces que emiten en la misma frecuencia están separados 3,5 m entre sí. A 5 m del punto medio de los altavoces, en dirección perpendicular, se sitúa un micrófono. Al girar la caja de los altavoces, se registra un máximo para un ángulo de  $8^\circ$ . ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del sonido?

La situación descrita en el problema se reproduce en la siguiente figura:



El primer máximo tiene lugar cuando:

$$x_1 - x_2 = \lambda$$

Aplicando el teorema de los cosenos, obtenemos, en primer lugar:

$$x_1^2 = (1,75 \text{ m})^2 + (5 \text{ m})^2 - 2 \cdot 1,75 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos 98^\circ$$

es decir:

$$x_1 = 5,52 \text{ m}$$

y, en segundo lugar:

$$x_2^2 = (1,75 \text{ m})^2 + (5 \text{ m})^2 - 2 \cdot 1,75 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos 82^\circ$$

es decir:

$$x_2 = 5,06 \text{ m}$$

Por tanto, la longitud de onda valdrá:

$$\lambda = x_1 - x_2 = 0,46 \text{ m}$$

y la frecuencia será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 739,13 \text{ Hz}$$

## Ondas sonoras estacionarias

**39** ¿Cómo podríamos conseguir una frecuencia más baja que la fundamental en un tubo de cierta longitud, abierto por sus dos extremos?

Podría conseguirse tapando uno de los extremos del tubo.

De ese modo, la frecuencia más baja viene dada por  $\frac{v}{4l}$  en lugar de por  $\frac{v}{2l}$ .

**40** Es corriente ver que, en los intermedios de un concierto, los músicos afinan los instrumentos debido al aumento de temperatura en la sala. ¿Cómo afecta este aumento de temperatura a los instrumentos de viento? ¿Y a los de cuerda?

Con el aumento de temperatura de la sala, se incrementa ligeramente la velocidad de propagación del sonido, con lo que las frecuencias de los instrumentos de viento aumentan un poco y las notas son más altas.

En el caso de los instrumentos de cuerda, el propio uso y la dilatación debida al aumento de temperatura hacen que la cuerda se destense ligeramente; como se desprende de la expresión 8.29, la frecuencia disminuye.

Por tanto, el efecto es el contrario en los dos tipos de instrumentos.

**41** ¿Por qué cuando aplicamos el oído a una caracola escuchamos un rumor parecido al del mar?

Porque la caracola actúa como cavidad resonante que amplifica ciertos ruidos ambientales, lo que origina ese peculiar «ruido de mar» tan característico.

**42 PAU** En un laboratorio que se encuentra a una temperatura de  $27^\circ\text{C}$  se lleva a cabo el experimento descrito en el dispositivo representado en la figura 9.20. Usando un diapason de 512 Hz, se obtienen resonancias cuando las longitudes de la columna de aire son de 17 cm, 51 cm, 85 cm, etcétera. ¿Cuál es la velocidad de propagación del sonido a la temperatura indicada?

La condición que debe cumplirse para que se establezcan ondas estacionarias es que:

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{2n + 1}$$

Sus frecuencias permitidas estarán regidas por la siguiente expresión:

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4l}$$

De ella se desprende que:

$$v = \frac{4lf}{2n + 1}$$

Las longitudes dadas corresponden al primer, tercer y quinto armónico (para  $n$  igual a 0, 1 y 2, respectivamente). Empleando cualquiera de ellas, obtenemos:

$$v = \frac{4 \cdot 0,17 \text{ m} \cdot 512 \text{ Hz}}{1} = 348,16 \text{ m/s}$$

**43 PAU** La distancia que separa dos nodos consecutivos en un sistema de ondas sonoras estacionarias en el aire es de 80 cm. Calcula la frecuencia y el período del sonido.

La distancia entre dos nodos consecutivos es igual a  $\lambda/2$ , pues, como se desprende de la ecuación 8.23 (página 226), los nodos tienen lugar cuando:

$$kx = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Como  $k = 2\pi/\lambda$ , las posiciones  $x$  serán:

$$x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$$

Así pues:

$$\Delta x = \lambda/2$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$\lambda = 160 \text{ cm} = 1,6 \text{ m}$$

Así pues:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 212,5 \text{ Hz}; T = \frac{1}{f} = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

**44 PAU** Un tubo de órgano de 1,2 m se encuentra abierto por sus dos extremos:

a) ¿Cuál es su frecuencia fundamental?

b) ¿Cuál es el armónico más alto posible para este tubo, dentro del intervalo audible?

a) Su frecuencia fundamental es:

$$f = \frac{v}{2l} = 141,66 \text{ Hz}$$

b) Considerando 20 000 Hz la máxima frecuencia audible, tendremos:

$$f = n \frac{v}{2l} \Rightarrow n = \frac{2lf}{v}$$

Sustituyendo los datos:

$$n = \frac{2 \cdot 1,2 \text{ m} \cdot 20\,000 \text{ Hz}}{340 \text{ m/s}} = 141$$

Por tanto, el armónico más alto es el 141.

## Efecto Doppler

- 45** Cuando el murciélago vuela emite unos gritos estridentes ( $f = 60$  Hz). Al incidir estas ondas sonoras en un objeto sólido, por ejemplo una presa, emiten un eco que es captado por los finos oídos del murciélago. ¿Cómo sabe el murciélago si su presa está acercándose, alejándose o si permanece estacionaria? ¿Cómo calcula la distancia a la que se encuentra?

El hecho de saber si la presa se acerca o se aleja está relacionado con el efecto Doppler: si el murciélago percibe una frecuencia mayor que la de la onda reflejada, es que él y su presa se aproximan. Por el contrario, si la frecuencia es menor, la presa se está alejando. Si la frecuencia no varía, la presa se encuentra estacionaria con respecto al murciélago. La distancia a la presa o al obstáculo la estima en función del tiempo que tarda en percibir el eco.

- D46** Un observador en reposo percibe que la frecuencia del claxon de un vehículo que se le acerca disminuye su frecuencia en un 18% después de pasar por delante de él. Si la velocidad de propagación del sonido en esas condiciones es de 340 m/s, determina la velocidad a la que se mueve el vehículo.

Cuando la fuente se aproxima al observador, la frecuencia  $f'$  que este percibe, viene dada por:

$$f' = f \left( \frac{v}{v - v_F} \right)$$

Cuando se aleja, después de pasar por delante del observador, la frecuencia  $f''$  que este percibe es:

$$f'' = f \left( \frac{v}{v + v_F} \right) \text{ siendo } f'' = 0,82 f'$$

Así pues, dividiendo ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{v + v_F}{v - v_F} \Rightarrow \frac{1}{0,82} = \frac{340 + v_F}{340 - v_F}$$

Resolviendo, se obtiene para la velocidad del vehículo:

$$v_F = 33,6 \text{ m/s}$$

- 47** **IP10** La sirena de una ambulancia que viaja a 110 km/h emite un sonido intermitente de 400 Hz de frecuencia. Calcula la frecuencia que percibe el pasajero de un autocar que viaja en sentido contrario a 100 km/h cuando:

- a) Se aproxima hacia la ambulancia.  
b) Se aleja de la ambulancia después de cruzarse.

- a) La frecuencia que percibe el observador a medida que se aproxima mutuamente es:

$$f' = f \left( \frac{v + v_o}{v - v_F} \right)$$

Siendo  $v_F = 110$  km/h = 30,5 m/s y  $v_o = 100$  km/h = 27,7 m/s. Sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$f' = 475 \text{ Hz}$$

- b) Por el contrario, a medida que se alejan, la expresión de la frecuencia percibida viene dada por:

$$f'' = f \left( \frac{v - v_o}{v + v_F} \right)$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$f'' = 337 \text{ Hz}$$

- 49** Un coche que circula a 120 km/h adelanta a otro que va a 90 km/h, haciendo sonar su claxon. Si la frecuencia de la bocina es de 480 Hz, halla la que percibe el conductor adelantado antes y después de ser adelantado.

- a) Es posible considerar al conductor adelantado como si estuviese en reposo y el contrario (la fuente sonora) se aproximara a una velocidad relativa de 30 km/h (120 km/h - 90 km/h) o 8,33 m/s. En ese caso, la frecuencia que percibe el conductor adelantado antes de serlo es:

$$f' = f \left( \frac{v}{v - v_F} \right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 480 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 8,33 \text{ m/s}} \right) = 492 \text{ Hz}$$

- b) Después de que se haya efectuado el adelantamiento, el resultado es equivalente a suponer que la fuente se mueve con una velocidad relativa igual a 8,33 m/s, pero alejándose.

Por tanto:

$$f' = f \left( \frac{v}{v + v_F} \right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 480 \text{ Hz} \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 8,33 \text{ m/s}} \right) = 468,5 \text{ Hz}$$

**Nota:** obsérvese que en este ejercicio no se han aplicado las expresiones 9.9 y 9.10, pues estas implican el supuesto de que fuente y observador se mueven en sentidos opuestos.



# 10

# Naturaleza de la luz

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D

### 1. La controvertida naturaleza de la luz páginas 257/259

1.1. ¿Naturaleza ondulatoria o corpuscular?  
página 257

1.2. La reflexión y la refracción desde el punto de vista corpuscular  
página 258

1.3. El éxito de la teoría ondulatoria  
página 259

1.4. Siglo xx: establecimiento de la naturaleza dual  
página 259

### 2. Velocidad de propagación de la luz páginas 260/261

2.1. Método de Römer  
página 260

2.2. Método de Fizeau  
página 261

2.3. Valor actual de la velocidad de la luz  
página 261

### 3. La luz y las ondas electromagnéticas páginas 262/265

3.1. Ondas electromagnéticas  
páginas 262/263

3.2. Espectro electromagnético  
páginas 264/265

### 4. Fenómenos ondulatorios de la luz páginas 266/276

4.1. La reflexión de la luz  
páginas 266/267

4.2. La refracción de la luz  
páginas 267/269

4.3. Algunos fenómenos asociados con la refracción  
páginas 270/272

4.4. Interferencia de la luz  
páginas 272/273

4.5. Difracción de la luz  
páginas 274/275

4.6. Polarización de la luz  
páginas 275/276

### 5. Aspectos relativos a la interacción luz-materia páginas 277/281

5.1. Dispersión de la luz. Prismas  
página 277

5.2. Absorción selectiva. El color  
páginas 278/279

5.3. Esparcimiento de la luz. Cielos azules, amaneceres y atardeceres  
páginas 280/281

## Cuestiones previas (página 256)

### 1. ¿Por qué se habla de la naturaleza dual de la luz?

Se habla de naturaleza dual debido a su doble naturaleza: corpuscular y ondulatoria.

### 2. ¿Se propaga la luz a la misma velocidad en todos los medios? ¿A qué se llama índice de refracción?

No se propaga a la misma velocidad porque depende del medio en el que se propaga. El índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio.

### 3. ¿Qué principio ilustra el funcionamiento de las fibras ópticas?

El principio de la de la reflexión total interna.

### 4. ¿Por qué algunas sustancias son transparentes y otras son opacas?

Depende de la interacción de la luz con la materia desde un punto de vista ondulatorio. Así, las sustancias transparentes transmiten todas las radiaciones hasta emerger por el lado opuesto. En cambio, los materiales opacos reflejan todas las radiaciones.

### 5. ¿A qué se deben los colores de los cuerpos?

Se debe a la absorción selectiva. Un determinado color se forma cuando un material iluminado con luz blanca absorbe todas las radiaciones salvo la correspondiente a ese color.

### 6. ¿Por qué el cielo se ve azul durante el día?

Se debe a un fenómeno llamado esparcimiento de la luz que consiste en que la intensidad esparcida es considerablemente mayor en el azul y el violeta que en el rojo. Como nuestra sensibilidad al azul es mucho mayor que al violeta, por este motivo el color del cielo que observamos es azul.

## Actividades (páginas 259/281)

### 1. ¿Qué fenómenos relativos a la luz pueden ser explicados desde el punto de vista corpuscular y cuáles no?

Desde el punto de vista corpuscular pueden explicarse la reflexión (asumiendo que los corpúsculos colisionan de forma elástica contra la superficie de separación de los dos medios) y la refracción. Sin embargo, no pueden explicarse ni la difracción ni la polarización ni las interferencias.

### 2. Teniendo en cuenta el valor obtenido por Fizeau para la velocidad de la luz y los datos referidos a su dispositivo, determina a qué velocidad angular en rps y en rad/s giraba la rueda cuando el pulso reflejado se hacía visible.

En el tiempo que tarda el pulso de luz en recorrer los 17 266 m de ida y vuelta, la rueda dentada habrá girado  $1/720$  de vuelta. Con el valor de velocidad obtenido por Fizeau, el tiempo empleado por el pulso será:

$$t = \frac{d}{v} = 5,516 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad angular de la rueda en revoluciones por segundo será:

$$\omega = \frac{1/720 \text{ revoluciones}}{5,516 \cdot 10^{-5} \text{ s}} = 25,18 \text{ rps}$$

valor que, multiplicado por  $2\pi$ , nos da la velocidad de la rueda en rad/s:

$$\omega = 25,18 \cdot 2\pi = 158,13 \text{ rad/s}$$

### 3. Considerando el valor actual de la luz, y teniendo en cuenta que la distancia media Tierra-Sol es de $1,496 \cdot 10^8$ km, trata de estimar la diferencia de períodos de Ío, observado desde el punto más próximo y más distante de nuestra órbita.

Tomando  $3 \cdot 10^8$  m/s como velocidad de la luz, y teniendo en cuenta que la diferencia de períodos se debe al tiempo que tarda la luz en recorrer el diámetro de la órbita terrestre ( $D = 2 \cdot d_{T-S}$ ), dicha diferencia será:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot d_{T-S}}{c} = 997,3 \text{ s} = 16 \text{ min } 37 \text{ s}$$

### 4. ¿Qué ocurrirá si el rayo incidente es perpendicular a la superficie de separación de dos medios?

En ese caso no se produce ninguna desviación del rayo refractado. La razón es evidente si se considera la igualdad:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r}$$

Si  $\sin \hat{i} = 0$ , debe cumplirse también que  $\sin \hat{r} = 0$ .

### 5. ¿Se producirá refracción si el ángulo de incidencia se aproxima a $90^\circ$ ?

Sí se producirá refracción, siempre que el índice de refracción del medio de incidencia sea menor que el del medio de refracción, como ocurre si el rayo pasa del aire al agua, por ejemplo. En esas condiciones, si  $\sin \hat{i} = 1$  ( $\hat{i} = 90^\circ$ ), entonces:

$$n_1 = n_2 \sin \hat{r} \Rightarrow \sin \hat{r} = \frac{n_1}{n_2}$$

Como se observa, la exigencia de que  $\sin \hat{r}$  pueda valer como máximo 1 implica que  $n_2 \geq n_1$ .

### 6. PAU Un haz fino de luz amarilla de sodio de 589 nm pasa de propagarse en el aire ( $n = 1,000 293$ ) a hacerlo en cristal de cuarzo. Cuando el ángulo de incidencia es de $30^\circ$ , se observa que el de refracción es de $18,9^\circ$ . Determina:

- El índice de refracción del cristal de cuarzo para esa luz.
- La velocidad a la que se propaga dicha luz en el cuarzo.
- La longitud de onda en el nuevo medio.

a) De la ley de Snell se desprende que:

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = 1,544$$

b) De la definición del índice de refracción obtenemos lo siguiente:

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = 1,943 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

c) La longitud de onda en el nuevo medio se obtiene a partir de la expresión 10.6:

$$\lambda' = \lambda \frac{n_1}{n_2} = 381,59 \text{ nm}$$

### 7. ¿Qué ocurrirá cuando un haz de luz incide con cierto ángulo sobre una superficie de separación de dos medios si el segundo medio tiene menor índice de refracción? ¿Podemos garantizar que siempre se producirá refracción?

Si el segundo medio tiene un índice  $n_2 < n_1$ , entonces  $\sin \hat{r} > \sin \hat{i}$ , es decir, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. Puede llegar un momento en el que  $\hat{r} = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{r} = 1$ . Esto ocurrirá cuando:

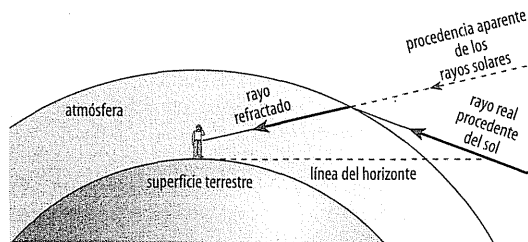
$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \Rightarrow \sin \hat{i} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como  $n_2 < n_1$ , sí existe un ángulo de incidencia para el que ya no se produce refracción. Luego, no podemos garantizar que siempre se produzca refracción.

**8** Suele decirse que, cuando observamos un bello atardecer, el Sol hace ya rato que se ocultó realmente. Trata de explicar este fenómeno.

Efectivamente, al pasar la luz solar de propagarse en el medio interplanetario (que se halla prácticamente vacío) a hacerlo en la atmósfera, que tiene un mayor índice de refracción, sufre una desviación, que será tanto mayor cuanto mayor sea  $\hat{i}$ .

Como puede verse en la figura, el Sol, que está por debajo de la línea del horizonte, es, sin embargo, visible antes de su salida o después de su puesta en virtud de este fenómeno de refracción, ya que el ojo sitúa su imagen en la prolongación de los rayos que le alcanzan.



Esto ocurre fundamentalmente al atardecer y cuando amanece.

**9** Teniendo en cuenta el fenómeno de la refracción, responde de forma razonada a las siguientes preguntas:

- a) ¿Sufrir desviaciones la luz al pasar de un medio a otro si ambos tienen distinto índice de refracción?
  - b) ¿Cambia la luz de velocidad de propagación al pasar de un medio a otro con distinto índice de refracción?
- a) Efectivamente, debido al cambio de velocidad que sufre la luz al pasar de un medio a otro, varía también la dirección de propagación.
- b) Por la propia definición del índice de refracción, si dos medios tienen distinto índice de refracción, la luz se propagará con diferente velocidad en ellos.

**10** **PAU** Una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, suspendida en el aire, tiene un espesor de 8 cm y un índice de refracción de 1,6. En la cara superior de la lámina incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de  $45^\circ$ .

- a) Calcula los valores correspondientes del ángulo de refracción en el interior de la lámina y del ángulo de emergencia.
  - b) Determina el desplazamiento lateral experimentado al atravesar la lámina.
  - c) Dibuja la trayectoria geométrica del rayo.
- a) El ángulo de refracción en el interior del vidrio se obtiene por la ley de Snell:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r}$$

de donde:

$$\sin \hat{r} = \frac{n_1 \sin \hat{i}}{n_2} = \frac{1,000\,293 \cdot \sin 45^\circ}{1,6}$$

$$\sin \hat{r} = 0,44$$

Por tanto:

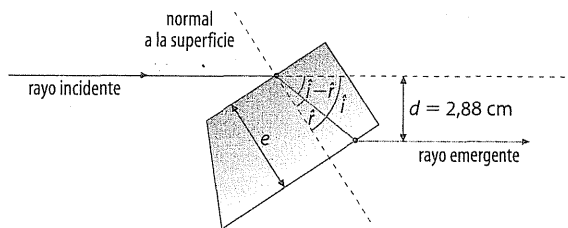
$$\hat{r} = 26,10^\circ$$

El ángulo de emergencia es igual al de incidencia, es decir, de  $45^\circ$ .

- b) El desplazamiento lateral que experimenta el rayo al atravesar la lámina de vidrio es:

$$d = e \frac{\sin (\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}} = 2,88 \text{ cm}$$

c) La trayectoria geométrica del rayo es:



**11** Si observas un objeto rojo a través de un filtro transparente azul-verdoso, ¿de qué color se verá?

El objeto rojo se verá negro, pues el filtro deja pasar el azul y el verde, pero absorbe justamente el rojo.

**12** **PAU** ¿De qué color veremos una rosa roja iluminada con luz verde?

La luz verde no tiene componente roja. Puesto que la rosa absorbe todos los colores salvo el rojo, al iluminarla con luz verde se verá negra.

**13** ¿Por qué el humo de los cigarrillos tiene un tono azulado?

El tono azulado se observa cuando el humo sale del cigarro en reposo, pero no si es exhalado. Cuando sale del cigarro en reposo, se cumplen las condiciones del esparramiento Rayleigh: el pequeño tamaño de las partículas y la gran separación que hay entre ellas hacen que se esparza mayoritariamente la luz azul. Por el contrario, si el humo es exhalado, consta en realidad de vapor de agua condensado sobre las partículas del humo, por lo que estas son ahora demasiado grandes y ocurre un fenómeno similar al explicado para las nubes: el humo se percibe grisáceo-blancuecino.

**14** Puede explicarse de la manera aquí expuesta el tono azulado de los mares o crees que se debe a otro fenómeno? Busca información al respecto.

El color del mar no puede explicarse mediante el fenómeno del esparramiento. El color de la superficie se debe en realidad a la reflexión del azul celeste. Sin embargo, hay un hecho que puede comprobarse fácilmente: un bañador de color rojo, bajo el agua, se ve de un tono más apagado. La explicación es que las moléculas de agua tienen frecuencias naturales en el rango del infrarrojo.

No obstante, también resuenan muy débilmente con las frecuencias rojas visibles, por lo que a medida que aumenta la profundidad, el color rojo va siendo absorbido de forma paulatina. De este modo, a unos 30 m, apenas llega la componente roja de la luz solar, por lo que el agua adquiere ese color verde-azulado tan característico y los objetos rojos se ven negros.

Así pues, el tono verde-azulado del mar en las profundidades es un fenómeno de absorción selectiva.

## Cuestiones y problemas (páginas 284/285)

### Guía de repaso

**1** ¿Qué fenómenos relativos a la luz pueden ser explicados desde el punto de vista ondulatorio y cuáles no?

Se pueden estudiar la reflexión, refracción, difracción e interferencias. No se pueden estudiar la propagación rectilínea de la luz.

**2** ¿A qué resultados conducía el tratamiento mecánico corpuscular que daba Newton a la refracción?

Conducía a la ley de la reflexión, es decir, el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.



**3** ¿Qué concepción se tiene hoy en día acerca de la naturaleza de la luz?

Que la naturaleza de la luz es dual.

**4** Detalla cómo midió Römer la velocidad de la luz.

Römer estudió las ocultaciones de los satélites galileanos al pasar por detrás del planeta. Centró su atención en Ío y llegó a determinar que, cuando Júpiter se hallaba a la mínima distancia de la Tierra, el tiempo o período entre dos «salidas sucesivas de la sombra» de Ío era de 42 h 28 min, período que se mantenía con asombrosa regularidad.

Sin embargo, si efectuaba la medida cuando la Tierra se encontraba en su posición más alejada de Júpiter, el período se incrementaba en 22 min. Si esa distancia adicional era el diámetro de la órbita terrestre alrededor del Sol ( $d$ ), la diferencia de períodos era igual al tiempo que tardaba la luz en recorrer esa distancia. Con los datos sobre el diámetro de la órbita terrestre de que se disponía en aquel momento (no demasiado precisos), llegó a establecer la velocidad de la luz.

**5** Explica el método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. ¿Cuál es la razón por la que la rueda debía tener numerosos dientes?

Su dispositivo constaba básicamente de una rueda dentada giratoria de numerosos dientes y un espejo situado a una cierta distancia. Se mandaba un pulso de luz que, después de pasar entre los dientes de la rueda, llegaba al espejo, donde se reflejaba y emprendía el camino de vuelta. Esto quería decir que el pulso, en su viaje de ida y vuelta había tardado lo mismo que la rueda en girar desde un hueco al siguiente.

Conociendo la velocidad de rotación de la rueda, Fizeau llegó a estimar la velocidad de la luz. La rueda debería tener numerosos dientes para hacer coincidir con el viaje de ida y vuelta de la luz.

**6** ¿Cómo se produce una onda electromagnética?

Se produce cuando una carga eléctrica se encuentra oscilando.

**7** ¿Qué magnitudes se ven perturbadas en la propagación de una onda electromagnética? ¿Cómo son esas perturbaciones con respecto a la dirección de propagación?

Se ven perturbadas el campo eléctrico y el magnético. Son perpendiculares con respecto a la dirección de propagación.

**8** ¿Cómo se relaciona la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío con las propiedades eléctricas y magnéticas del mismo?

A través de la expresión  $10.1$ .

**9** ¿Qué es el espectro electromagnético? ¿Cómo se clasifican las ondas de menor a mayor frecuencia?

Se clasifican en siete zonas: radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos  $\gamma$ .

**10** ¿Entre qué valores de longitud de onda se encuentran las llamadas ondas de radio? ¿Y las microondas?

Ondas de radio entre  $10^3$  y  $10^4$  m. Y las microondas desde  $10^{-3}$  m hasta 21 cm.

**11** ¿Cómo se subdividen las ondas electromagnéticas visibles? ¿Entre qué frecuencias se encuentran?

Se subdivide en los famosos colores del arco iris: rojo: 620 a 1 000 nm; verde: 490 a 550 nm; naranja: 590 a 620 nm; azul: 430 a 490 nm; amarillo: 550 a 590 nm; violeta: 390 a 430 nm.

**12** ¿Qué fenómenos demuestran inequívocamente la naturaleza ondulatoria de la luz? ¿Por qué?

La interferencia, la difracción y la polarización son fenómenos que solo pueden ser explicados desde una concepción ondulatoria, mientras que la reflexión y la refracción pueden ser entendidos también desde el punto de vista corpuscular.

**13** Resume en un mismo esquema las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz.

Ley de la reflexión:

- El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia.
- El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Ley de refracción:

- El ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia.
- El ángulo de refracción depende de la relación entre los índices de refracción de los medios.

**14** ¿Se encuentran en distintos planos los rayos incidente, reflejado y refractado?

No, los rayos se encuentran en el mismo plano.

**15** Explica el concepto de la reflexión especular y el de la difusa.

Cuando la reflexión es perfecta y el haz luminoso emerge en una sola dirección es la reflexión especular. Cuando las reflexiones se producen en las mismas direcciones es difusa.

**16** ¿Qué magnitudes propias de la onda se ven afectadas al pasar esta de un medio a otro que tiene distinto índice de refracción?

La longitud de onda y la velocidad de la luz.

**17** ¿A qué llamamos ángulo límite o ángulo crítico? ¿Cómo funcionan las fibras ópticas?

El ángulo límite es el mayor ángulo posible de refracción que tiene lugar cuando la incidencia sea prácticamente rasante. El funcionamiento de las fibras ópticas se basan en la reflexión total.

**18** ¿Cómo se producen los espejismos?

Se produce cuando los rayos de luz sufren diversas refracciones que lo alejan progresivamente de su normal, entonces los rayos refractados parecen provenir de una imagen especular.

**19** ¿Qué requisitos deben cumplirse para que se produzcan interferencias luminosas? ¿Cómo consiguió Young que se cumplieran esos requisitos?

Las luces deben de ser coherentes, es decir, deben tener la misma frecuencia y una diferencia de fase constante. Young lo consiguió utilizando el experimento de la doble rendija.

**20** ¿Por qué es tan difícil observar los fenómenos de difracción de la luz?

Para que la difracción sea observable el tamaño de la abertura debe ser comparable a la longitud de onda de la luz incidente. Este es el motivo por el cual es tan difícil observar la difracción.

**21** ¿Por medio de qué fenómeno queda demostrada la polarización de la luz?

Por la absorción de la luz.

**22** ¿En qué consiste la dispersión de la luz? ¿Y la absorción?

La dispersión de la luz se produce cuando un medio presenta una dependencia entre el índice de refracción y la frecuencia. Debido a esta dependencia cuando la luz blanca incide sobre un prisma, cada color sufrirá su refracción particular en distinto ángulo. Al salir del prisma sufrirá una segunda refracción, distinguiéndose los colores claramente divididos.

La absorción se produce cuando incide la luz sobre un material, parte de esa energía se transforma en interna y parte vuelve a ser emitida.

**23** ¿A qué llamamos materiales opacos? ¿Y a los materiales transparentes?

Los materiales transparentes transmiten todas las radiaciones, en cambio los materiales opacos reflejan todas las radiaciones.

## Reflexión y refracción de la luz

**24** Cuando una luz que se propaga por el aire atraviesa un vidrio, disminuye su velocidad. Cuando haya atravesado el vidrio, ¿se moverá con la velocidad que adquirió en él?

La velocidad de la luz en un medio determinado depende del índice de refracción de este y no del lugar del que procede o de los medios que haya atravesado. En consecuencia, al salir del vidrio volverá a propagarse con la velocidad correspondiente al aire como medio.

**25** ¿Cuál es la razón física por la que la velocidad de la luz disminuye al propagarse por un medio material? ¿Crees que esa razón está avalada por los valores del índice de refracción correspondientes a cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos?

En un medio transparente, la luz es absorbida por los átomos, para inmediatamente ser reemitida. Esta luz reemitida es absorbida por los átomos vecinos y vuelve a ser emitida, y así sucesivamente. El tiempo implicado en este proceso explica que la velocidad de transmisión de la luz sea menor al atravesar un medio transparente. Por otra parte, la velocidad de la luz en el medio interatómico es la correspondiente al vacío. Por este motivo, la velocidad de propagación es mayor, en general, cuanto mayor sea la distancia interatómica, como es el caso de los gases frente a los líquidos y los sólidos.

**26** En algunos países nórdicos son famosas las leyendas de los «barcos que navegan por el aire». ¿Se te ocurre alguna explicación física de esto?

En dichos países es frecuente que las capas de aire que están más próximas al agua se hallen a menor temperatura que las capas que se encuentran algo más altas. En consecuencia, la luz que proviene de los barcos, se refracta en las capas más altas curvando su trayectoria en un fenómeno que aparenta ser una reflexión, para llegar finalmente a un observador que estuviese en la costa. Para este, la luz del barco parecería provenir del aire y no del agua; de ahí, las leyendas de barcos fantasmas.

**27** ¿Por qué al conducir de noche con el pavimento mojado se ve la carretera con más dificultad?

Se ve peor la carretera porque se produce mayor reflexión especular sobre el pavimento mojado, de modo que la luz reflejada ya no se dirige hacia nosotros, sino en dirección contraria. Cuando el asfalto está seco, la reflexión difusa hace que parte de la luz reflejada llegue a nuestros ojos, lo que posibilita la visión de la carretera.

**28** **PAU** Sobre un prisma de  $60^\circ$  como el de la figura, rodeado de aire ( $n = 1$ ), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de  $42^\circ$  con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:

- Determina el índice de refracción del prisma.
- Realiza el esquema gráfico de la trayectoria total del rayo.
- Determina el ángulo de desviación del rayo al atravesar el prisma.
- Razona si varían la frecuencia y la longitud de onda del rayo dentro y fuera del prisma.

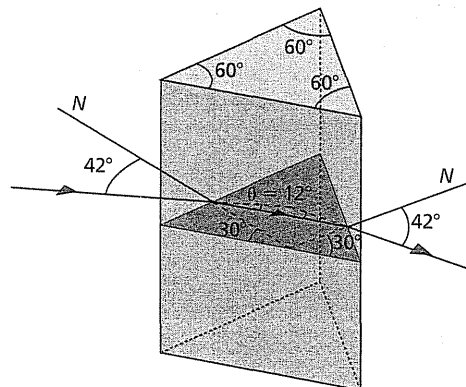
**a)** Dada la geometría del problema el haz refractado forma un ángulo de  $30^\circ$  con la normal. Considerando  $n_{\text{aire}} = 1$ , se tiene:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin \hat{i} = n_{\text{prisma}} \cdot \sin \hat{r}$$

Por tanto:

$$n_{\text{prisma}} = n_{\text{aire}} \cdot \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = 1,34$$

**b)** El esquema gráfico que representa la trayectoria del rayo es:



**c)** El ángulo  $\delta$  de desviación, es la diferencia angular entre el rayo de entrada (incidente) y el de salida. Como se desprende de la geometría del problema:

$$\delta = 2\theta = 24^\circ$$

**d)** La frecuencia es invariable, pues según incide un frente de onda sale otro refractado.

Sin embargo, el cambio de velocidad supone un cambio de la longitud de onda en el interior del prisma, de modo que:

$$\lambda_{\text{prisma}} = \lambda_{\text{aire}} \cdot \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{prisma}}} \cong 0,75 \cdot \lambda_{\text{aire}}$$

**29** **PAU** Un rayo láser de  $660 \text{ nm}$  emite en el aire una luz roja monocromática. Desde el aire, se hace penetrar el haz en el agua ( $n = 1,333$ ).

- ¿Cuál es la velocidad del haz en el agua?
  - ¿Cuál es su longitud de onda en este medio?
  - ¿De qué color lo verá una persona que esté dentro del agua?
- a)** De la definición del índice de refracción se obtiene:

$$v = \frac{c}{n} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

**b)** Al pasar del aire (consideremos  $n_1 = 1$ ) al agua, se cumplirá que:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Como  $v = \lambda f$ , y  $f$  no varía, obtenemos:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

De donde:

$$\lambda_2 = \frac{n_1 \lambda_1}{n_2} = \frac{1 \cdot 660 \text{ nm}}{1,333} = 495 \text{ nm}$$

**c)** La frecuencia de la luz no varía al penetrar en otro medio por el que puede transmitirse, por lo que se seguirá viendo rojo.

**Comentario:** al considerar medios transparentes, no tenemos en cuenta la absorción del agua para frecuencias próximas al infrarrojo, lo que hace que absorba débilmente el rojo. Este fenómeno, sin embargo, solo es apreciable a grandes profundidades.

**30** **PAU** Un rayo de luz incide en un prisma como se indica en la figura. Si deseamos que se produzca la reflexión total:

- ¿Cuál debe ser el mínimo valor que puede tener  $n$ ?
- Cuando se sumerge el prisma en un líquido de  $n' = 1,20$  aún se produce la reflexión total, pero deja de producirse al sumergirse en agua ( $n_{\text{agua}} = 1,33$ ). Con esta información, determina entre qué valores está el valor real del índice de refracción del prisma.
- El mismo valor para el que se produce reflexión total interna viene dado por la condición:

$$n_{\text{prisma}} \cdot \sin \hat{i} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90^\circ$$

Dado que el ángulo de incidencia sobre la cara inclinada es  $45^\circ$ , entonces el mínimo valor del índice de refracción del prisma es:

$$n_{\text{prisma}} = n_{\text{aire}} \cdot \frac{1}{\sin \hat{i}} = 1,41$$

- Al sumergirlo en un líquido de  $n' = 1,20$ , aún se produce reflexión total interna, por lo que el mínimo valor de  $n_p$  en ese caso es:

$$n_{\text{prisma}} = n' \cdot \frac{1}{\sin \hat{i}} = \frac{1,2}{\sin 45^\circ} = 1,69$$

Sin embargo, deja de haber reflexión total interna cuando se sumerge en agua, por lo que el valor límite del índice del prisma es:

$$n_{\text{prisma}} = n_{\text{aire}} \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1,33}{\sin 45^\circ} = 1,88$$

Por tanto, el índice real se encuentra comprendido entre 1,69 y 1,88.

**31** **PAU** Una lámina de cuarzo de caras planas y paralelas de 10 cm de espesor, tiene un índice de refracción de 1,458. Si un rayo de luz monocromática incide sobre una de las caras con un ángulo de  $60^\circ$ , calcula:

- Los valores del ángulo de refracción en el interior de la lámina y el ángulo de emergencia al volver a salir al aire por la otra cara.
- El desplazamiento lateral experimentado por dicho rayo al atravesar la lámina.
- Dibuja correctamente la marcha geométrica del rayo, especificando todos los fenómenos que tienen lugar en cada interfase de separación de los medios.

- El ángulo de refracción viene dado por la ley de Snell, de modo que:

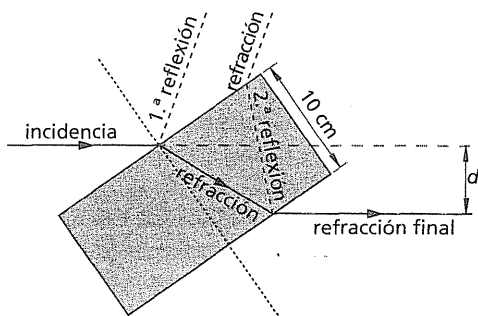
$$n_{\text{prisma}} \cdot \sin \hat{i} = n_{\text{cuarzo}} \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \hat{r} = 36,4^\circ$$

Por la simetría del problema, el ángulo de emergencia es igual al de incidencia, es decir  $60^\circ$ .

- El desplazamiento lateral del haz es:

$$d = e \frac{\sin(\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}} = 10 \frac{\sin 23,6^\circ}{\cos 36,4^\circ} = 4,97 \text{ cm}$$

- La marcha geométrica del rayo está representado en el siguiente dibujo:



**32** **PAU** Un haz monocromático incide con cierto ángulo sobre una lámina de material transparente de caras planas y paralelas de 15 cm de espesor. Se observa que el ángulo de refracción del haz en el interior del material es de  $30^\circ$  y que al salir de él muestra un desplazamiento de 8 cm. Determina:

- ¿Cuál era el ángulo de incidencia del haz?
- ¿Cuál es el índice de refracción del material relativo al aire (medio de incidencia)?
- A partir de la expresión del desplazamiento se obtiene:

$$\sin(\hat{i} - \hat{r}) = \frac{d \cos \hat{r}}{e} = \frac{8 \cos 30^\circ}{15} = 0,46$$

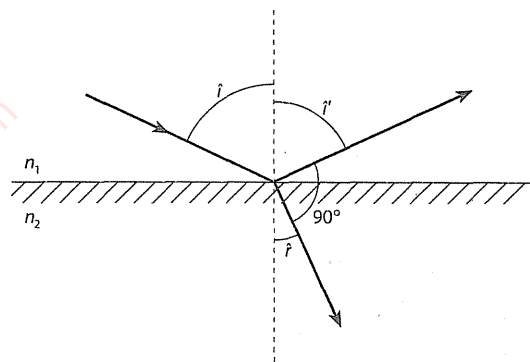
$$\text{Por tanto: } \hat{i} - \hat{r} = 27,5 \Rightarrow \hat{i} = 57,5^\circ$$

- Por aplicación de la ley de Snell:

$$n = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = 1,68$$

**33** **PAU** Un rayo luminoso llega a la interfase de dos medios con un ángulo de incidencia  $\hat{i}$ . Si los rayos reflejado y refractado forman entre sí  $90^\circ$ , halla la relación que existe entre el ángulo de incidencia y el índice de refracción relativo de los dos medios.

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema, donde  $\hat{i}$  es el ángulo de incidencia,  $\hat{r}$  es el de reflexión, y  $\hat{r}'$  el de refracción:



Si aplicamos la ley de Snell:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r}'$$

donde  $\hat{r}' = 180^\circ - (90^\circ + \hat{r})$

Puesto que  $\hat{r}' = \hat{i}$ , entonces:

$$\hat{r} = 90^\circ - \hat{i}$$

Por lo que:

$$\sin \hat{r} = \sin(90^\circ - \hat{i}) = \cos \hat{i}$$

Así pues:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \cos \hat{i}$$

de donde:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \hat{i}}{\cos \hat{i}} = \text{tg } \hat{i}$$

o bien:

$$n_{21} = \text{tg } \hat{i}$$

**34** Dibuja la trayectoria exacta de todos los rayos que se forman en la experiencia de la figura del ejercicio 34 página 287 (especificando cómo salen) e indica los valores de los ángulos que intervengan, así como los puntos exactos donde los rayos entran en contacto con las superficies.

El haz es de luz amarilla de sodio e incide con un ángulo de  $45^\circ$  en un punto que se encuentra situado a 2,5 cm de la superficie inferior. La altura de cada bloque es de 5 cm, y el medio que los rodea es aire. (Considera que el valor del índice de refracción del aire es 1 y desprecia el efecto de la interfase de cristal que contiene el agua.)

Los fenómenos que tendrán lugar son la reflexión y la refracción al cambiar de medio.

Cuando el haz incidente entra en el vidrio, sufrirá una refracción bajo un ángulo dado por:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r} \Rightarrow \sin \hat{r} = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{1,46}$$

Y por tanto:

$$\hat{r} = 28,96^\circ$$

A continuación, este haz refractado llega a la cara inferior del bloque de vidrio a una distancia que, como puede verse en la figura que aparece al final, será de:

$$\operatorname{tg} \hat{r} = \frac{2,5}{x_1} \Rightarrow x_1 = 4,5 \text{ cm}$$

Al llegar a la cara inferior con un ángulo de incidencia de  $90^\circ - 28,96^\circ = 61,04^\circ$ , sufrirá una reflexión total interna, pues este ángulo es superior al ángulo crítico correspondiente a la interfase vidrio-aire, que es de:

$$\sin \hat{r}_c = \frac{1}{1,46} \Rightarrow \hat{r}_c = 43,23^\circ$$

Este rayo reflejado llegará ahora a la interfase vidrio-agua en el punto B, a una distancia horizontal de 9 cm con respecto al punto A. Parte del haz que incide (con un ángulo de  $61,04^\circ$ ) se reflejará y parte se refractará.

El ángulo de refracción al pasar al agua será:

$$\sin \hat{r}' = \frac{n_v}{n_a} \sin \hat{i}$$

Y sustituyendo los datos:

$$\sin \hat{r}' = \frac{1,46}{1,333} \cdot \sin 61,04^\circ \Rightarrow \hat{r}' = 73,4^\circ$$

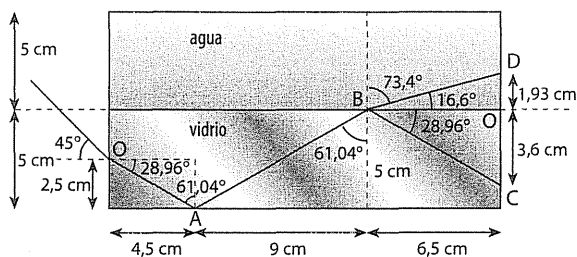
Así pues, al final ambos emergerán del bloque por los puntos C y D, situados a 3,6 cm por debajo de la interfase vidrio-agua y a 1,93 cm por encima, respectivamente, pues, como se deduce de la figura:

$$\operatorname{tg} (90^\circ - 73,4^\circ) = \frac{OD}{6,5 \text{ cm}} \Rightarrow OD = 1,93 \text{ cm}$$

Mientras que:

$$\operatorname{tg} 28,96^\circ = \frac{OC}{6,5 \text{ cm}} \Rightarrow OC = 3,6 \text{ cm}$$

Así pues, el sistema sirve como divisor del haz.



**35** Un haz de luz monocromática de sodio, de 589 nm, incide con un ángulo de  $45^\circ$  sobre una lámina de caras planas y paralelas de circonita ( $n = 1,92$ ) de 10 cm de espesor. Calcula el desplazamiento lateral que ha sufrido el haz cuando sale.

El ángulo de refracción en la circonita será:

$$\sin \hat{r} = \frac{n_1 \sin \hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{1,92} \Rightarrow \hat{r} = 21,57^\circ$$

El desplazamiento lateral que sufre al atravesar una lámina de espesor  $e$  viene dado por:

$$d = e \frac{\sin (\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}} = 4,27 \text{ cm}$$

**D36 PAU** Un haz de luz láser de 550 nm incide en un bloque de vidrio:

- Describe los fenómenos ópticos que ocurren y represéntalos fielmente en un dibujo.
- Si el ángulo de incidencia es de  $40^\circ$  y el de refracción es de  $25^\circ$ , ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?
- ¿Sería diferente el valor anterior si la longitud de onda fuese de 710 nm?
- Razona cómo calcularías el ángulo límite y ofrece su valor a partir de los datos del apartado b).

En todos los casos considera aproximadamente 1 el valor del índice de refracción en el aire.

- Parte del haz incidente se refleja, y otra parte pasa a propagarse por el vidrio, es decir, se refracta.
- Considerando  $n_1 = 1$  (para el aire), el índice de refracción del vidrio será:

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{1 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 25^\circ} = 1,52$$

- El valor calculado es para luz amarilla (550 nm). El valor deducido sería ligeramente distinto si se hubiese calculado para luz roja (710 nm), pues el vidrio es un medio dispersivo, por lo que el índice de refracción depende ligeramente de  $\lambda$ . Sin embargo, el valor obtenido afectaría tan solo a la segunda cifra decimal considerada, como puede observarse en la gráfica de la página 277. Podemos suponer, pues, que apenas variará.
- El ángulo límite o crítico será aquel que corresponde a una incidencia rasante ( $\sin \hat{i} = 1$ , puesto que  $\hat{i} = 90^\circ$ ). De este modo:

$$\sin \hat{r}_c = \frac{1}{n_2} \Rightarrow \hat{r}_c = 41,1^\circ$$

### Interferencia y difracción de la luz

**37** ¿Se te ocurre algún procedimiento para medir el ancho de una rendija submilimétrica? Explica el procedimiento y la forma de llevarlo a cabo.

Habría que situar la rendija a cierta distancia de una pantalla y producir un patrón de difracción con un láser de longitud de onda conocida. De esa manera, conociendo la longitud de onda y la distancia entre la rendija y la pantalla, y midiendo la mitad del ancho del máximo principal, podemos averiguar la anchura de la rendija, utilizando la expresión 10.10 del texto.

**38** ¿Podrían interferir dos haces de luz polarizada, de la misma frecuencia y con diferencia de fase constante, si el plano de polarización entre ambos es perpendicular?

No podrían interferir. La condición de coherencia exige que, si la luz es polarizada, el plano de polarización sea el mismo.

**39** Si aproximas, hasta casi juntarlos, los dedos índice y corazón y miras hacia alguna luz a través de ellos, verás que los bordean ciertas líneas oscuras. ¿A qué se debe esto?

Se debe al patrón de difracción que se origina en la ranura que forman los dos dedos casi juntos.

**40 PAU** En un experimento como el de Young se hace incidir sobre dos rendijas luz amarilla de sodio de 589 nm. En una pantalla que está situada a 3 m de las rendijas se cuentan 30 franjas brillantes por centímetro. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?

Puesto que hay 30 máximos en cada centímetro, la distancia entre máximos será:

$$\Delta y = \frac{1}{30} = 0,033 \text{ cm} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Según el experimento de Young la distancia entre máximos viene dada por:

$$\Delta y = \frac{d}{a} \lambda$$

donde  $d$  es la distancia entre pantallas, y  $a$  es la distancia o separación entre rendijas. De este modo:

$$a = \frac{d\lambda}{\Delta y} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- 41** **1210** Se efectúa el experimento de Young iluminando con luz amarilla de sodio de 589 nm dos rendijas separadas una de la otra 2 mm. Si la pantalla en la que se observa el patrón de interferencias está a 5 m, ¿cuál es la separación que se observará entre las franjas?

La separación entre las franjas será de:

$$\Delta y = \frac{d}{a} \lambda = \frac{5 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cdot 5,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Es decir:

$$\Delta y = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Luego, la separación entre máximos es de 1,47 mm.

- 42** **1210** Sobre una pantalla que se encuentra situada a 3,5 m de una rendija se observa el patrón de difracción de un haz de 650 nm. Calcula la anchura del máximo central si la de la rendija es:

- a) 0,1 mm      b) 0,01 mm      c) 0,001 mm

La anchura de la banda central es el doble que la distancia del centro del patrón al primer mínimo, por lo que vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\text{anchura de la banda} = \frac{2d}{a} \lambda$$

Así pues, según las anchuras de las rendijas, las de los máximos centrales serán:

- a) Para la rendija de 0,1 mm:

$$\text{anchura máxima} = 0,046 \text{ m}$$

- b) Para la rendija de 0,01 mm:

$$\text{anchura máxima} = 0,46 \text{ m}$$

- c) Para la rendija de 0,001 mm:

$$\text{anchura máxima} = 4,6 \text{ m}$$

- 43** ¿Por qué los diamantes y otras piedras preciosas talladas con varias caras presentan un brillo extraordinario así como esos bellos centelleos o irisaciones tan característicos?

La razón es que precisamente por el elevado índice de refracción del diamante, la reflexión total interna en las distintas caras talladas se ve favorecida, lo que hace que presenten ese brillo de reflejos tan peculiar y característico.

Además, como el índice de refracción depende ligeramente de la frecuencia, la luz blanca se descompone en el interior del cristal, lo que da lugar a esas irisaciones tan característica.

- 44** ¿Podemos broncearnos en días nublados? ¿Y tomando el sol a través de una ventana de cristal?

Las nubes son, en realidad, semitransparentes a la radiación ultravioleta, por lo que, en efecto, podemos broncearnos algo en días nublados.

Por el contrario, sería una pérdida de tiempo pretender broncearse a través de una ventana de cristal, pues el vidrio es opaco a la radiación ultravioleta.

- 45** Explica por qué en los eclipses de Luna esta aparece sombreada con un tono rojizo a diferencia del eclipse que tuvo lugar inmediatamente después de la explosión del volcán Pinatubo (Filipinas), en el que la sombra era prácticamente negra.

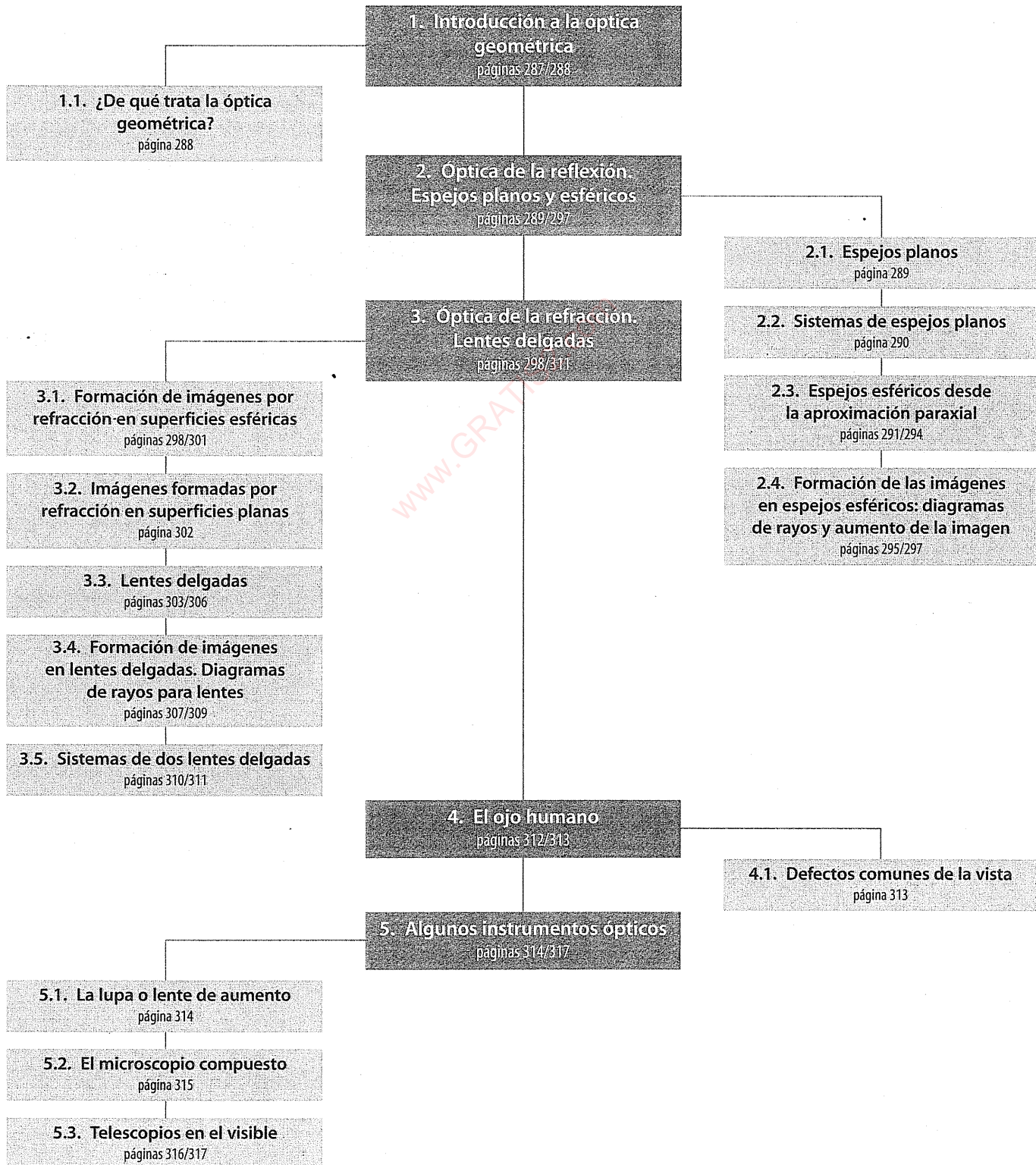
La componente de la luz que sufre menos esparcimiento Rayleigh es la roja, que es la que logra, por tanto, propagarse y atravesar grandes extensiones atmosféricas. Durante un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se proyecta sobre nuestro satélite; sin embargo, parte de la luz solar atraviesa nuestra atmósfera, aunque de ella solo trasciende la componente roja que menos se esparce y que finalmente se proyecta sobre la Luna, dando lugar a esa típica coloración rojiza.

Sin embargo, los eclipses de Luna que sucedieron después de la explosión del Pinatubo fueron especialmente oscuros por la gran cantidad de polvo en suspensión que quedó en la atmósfera y que produjo, debido al tamaño de las partículas en suspensión, un esparcimiento de tipo no Rayleigh. Esto provocó un esparcimiento similar en cualquier frecuencia, incluidas las correspondientes a la componente rojiza de la luz.

# 11

# Óptica geométrica

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D



www.1FISICA.blogspot.com  
www.GRATIS2.com  
www.librospdf1.blogspot.com

## Cuestiones previas (página 372)

1. ¿Cómo se ven las imágenes cuando nos miramos en un espejo plano?

La imagen que vemos en un espejo plano es virtual (se forma detrás del espejo), tiene el mismo tamaño que el objeto y presenta inversión lateral izquierda-derecha.

2. ¿Qué tipo de espejo se utiliza en algunos cruces de calles? ¿Por qué?

Se suelen utilizar espejos convexos porque permiten una amplia visión al aparecer la imagen disminuida.

3. ¿Para qué sirven las lentes? ¿Qué clase de lentes conoces?

Las lentes sirven sobretodo para el aumento de la imagen, corrección de problemas visuales, etcétera.

Se utilizan para la fabricación de lupas, telescopios, prismáticos, objetivos de cámara, etcétera.

Las lentes delgadas que pueden ser convergentes o divergentes.

4. ¿Qué es la distancia focal? ¿Qué es lo que hacemos cuando «enfocamos» el objetivo de una cámara?

Es la distancia entre el centro óptico O y el foco F.

Cuando enfocamos el objetivo de una cámara estamos variando la distancia focal para que la imagen se vea con mayor nitidez.

5. ¿Representan lo mismo los aumentos microscópicos que los aumentos telescópicos?

No representan lo mismo, los aumentos telescópicos son angulares y los microscópicos son laterales.

6. ¿Cuáles son los defectos más habituales de la visión ocular?

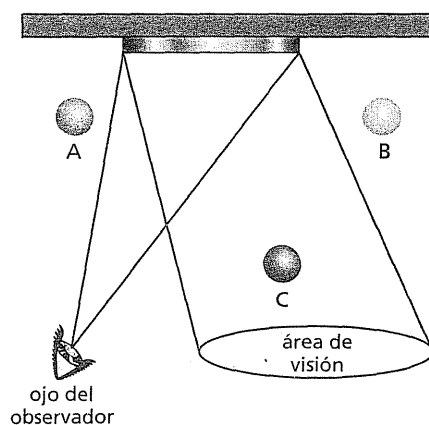
Los más habituales son: miopía, hipermetropía, astigmatismo, vista cansada o presbicia y cataratas.

## Actividades (páginas 289/317)

1. Razona cuál de los objetos, A, B o C es visible a través del espejo para el observador de la figura 11.7.

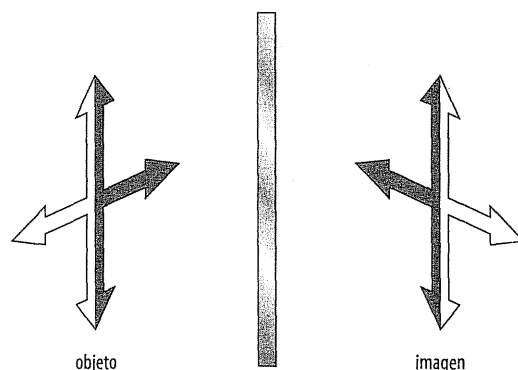
Los objetos observables a través del espejo son los que se encuentran dentro del área abarcada por los «rayos límite» que se reflejan en los bordes del espejo, según la ley de la reflexión, para confluir en el ojo del observador.

En consecuencia, como puede apreciarse, solo el objeto C es visible para el observador a través del espejo.



2. Si los espejos planos producen inversión lateral, ¿por qué no originan inversión vertical?

Esto ocurre por la propia naturaleza de la reflexión. Como puede observarse en el dibujo, la imagen de la flecha superior es otra flecha superior (por tanto, no presenta inversión vertical), pero invertida lateralmente.



3. Una persona de 1,70 m de altura se coloca delante de un espejo plano a una distancia de 0,80 m.

- a) ¿Qué tamaño tiene la imagen?  
b) ¿Cuál debe ser la altura mínima del espejo para que la persona se vea de cuerpo entero?

a) La imagen en un espejo plano tiene el mismo tamaño que la persona.

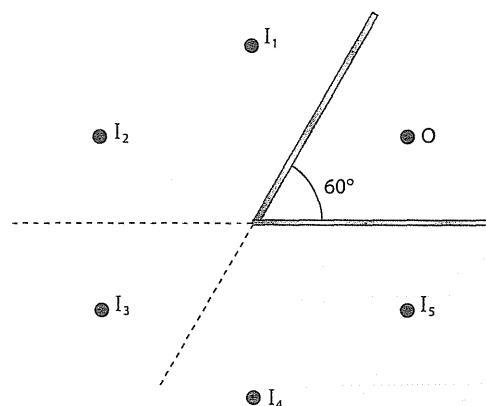
b) Como puede comprobarse en la cuestión resuelta número 1 de la página 318 del *Libro del alumno*, la altura mínima del espejo ha de ser de 85 cm, es decir, la mitad de la altura de la persona. La parte superior del espejo ha de estar a la altura del punto medio de la frente de la persona. La distancia a la que la persona se sitúe con respecto al espejo carece de toda importancia.

4. Comenta la formación de las siete imágenes del objeto O que aparecen cuando los dos espejos forman un ángulo de 45°, como se indica en la figura 11.12.

Las imágenes  $I_1$  e  $I_7$  son las imágenes directas de O en el espejo plano e inclinado, respectivamente. La imagen  $I_6$  puede considerarse como la imagen o proyección de  $I_1$  en el espejo inclinado, mientras que  $I_2$  es la imagen de  $I_7$  en el espejo plano. A su vez,  $I_3$  puede considerarse la proyección o imagen de  $I_6$  en el espejo plano. Por último,  $I_4$  sería la imagen de  $I_3$  en el espejo oblicuo, e  $I_5$ , la de  $I_4$  en el espejo plano.

5. ¿Cuántas imágenes de O se obtendrán si los espejos planos forman 60°? Localízalas.

Se formarían cinco imágenes, como puede comprobarse en el dibujo.



Las imágenes  $I_1$  e  $I_5$  son las producidas directamente por  $O$  en los espejos oblicuo y horizontal, respectivamente. La imagen de  $I_1$  es  $I_4$  en el espejo horizontal, mientras que  $I_2$  es la imagen de  $I_5$  en el oblicuo. Por último,  $I_3$  puede considerarse la imagen de  $I_4$  en el espejo oblicuo o la de  $I_2$  en el plano.

**6** Comprueba que en los casos de las actividades 4 y 5 se cumplen las propiedades:

- Todos los puntos (tanto los del objeto como los de las imágenes) se encuentran en una circunferencia centrada en el punto de corte del sistema.
- El número de imágenes que se obtiene para ángulos divisores exactos de  $360^\circ$  responde a la expresión:

$$N = \frac{360^\circ}{\theta} - 1$$

Efectivamente, si se toma un compás, se comprobará que en ambos casos, todas las imágenes, junto con el objeto, se encuentran en la circunferencia centrada en la intersección de los espejos. Obsérvese, igualmente, que los dos supuestos cumplen con la expresión expuesta:

- Ángulo de  $45^\circ$ :

$$N = \frac{360^\circ}{45^\circ} - 1 = 7$$

- Ángulo de  $60^\circ$ :

$$N = \frac{360^\circ}{60^\circ} - 1 = 5$$

También puede comprobarse esto en el caso que se aprecia en la figura 11.8 (ángulo de  $90^\circ$ ):

$$N = \frac{360^\circ}{90^\circ} - 1 = 3$$

**7** Explica en qué lado se forma la imagen en un espejo esférico cóncavo cuando:

- a)  $s_o < f$ .      b)  $s_o = f$ .      c)  $s_o > f$ .

Las tres posibilidades pueden deducirse a partir de la expresión:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

- a) Si  $s_o < f$ , entonces:

$$\frac{1}{s_o} > \frac{1}{f}$$

Por tanto, la distancia  $s_i < 0$ , es decir, la imagen se forma en el lado virtual.

- b) Si  $s_o = f$ , entonces:

$$\frac{1}{s_i} = 0$$

Es decir,  $s_i = \infty$ , por lo que no se forma imagen.

- c) Si  $s_o > f$ , entonces  $s_i > 0$ , y la imagen se forma en el lado real.

**8** Un objeto se encuentra situado a 20 cm del vértice de un espejo esférico convexo de 25 cm de radio de curvatura. Determina la posición de la imagen.

Al ser un espejo convexo, y según el criterio de signos, la distancia focal  $f = r/2$  es negativa. Dicha distancia es de 12,5 cm. Así pues, sustituyendo los datos en:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

tenemos:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-12,5 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} \Rightarrow s_i = -7,69 \text{ cm}$$

Por tanto, la imagen se forma en el lado virtual, a 7,69 cm del vértice.

**9** Se desea formar una imagen invertida de 30 cm de altura sobre una pantalla que se encuentra a 4,2 m del vértice de un espejo esférico cóncavo. El objeto que produce la imagen mide 5 mm. Determina:

a) La distancia respecto del espejo a la que debe colocarse el objeto.

b) La distancia focal y el radio de curvatura del espejo.

a) Puesto que la imagen es invertida,  $h' = -30$  cm, mientras que  $h = 0,5$  cm, y  $s_i = 420$  cm, lugar donde queremos que se forme la imagen. Con estos datos, podemos calcular la distancia a la que debe situarse el objeto a partir de:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} \Rightarrow s_o = -s_i \frac{h}{h'}$$

Sustituyendo los datos:

$$s_o = 7 \text{ cm}$$

Por consiguiente, el objeto debe situarse a 7 cm del espejo.

b) A partir de la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

y sustituyendo los datos:

$$\frac{1}{7 \text{ cm}} + \frac{1}{420 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

se obtiene que la distancia focal vale:

$$f = 6,88 \text{ cm}$$

y como esta distancia es la mitad del radio:

$$r = 2f = 13,76 \text{ cm}$$

**10** Un objeto de 10 cm de altura se sitúa a 1 m de un espejo esférico convexo cuya distancia focal es de 3 m. Describe la imagen que se formará.

La distancia a la que se formará la imagen se obtiene de la ecuación de los espejos, teniendo en cuenta que  $f < 0$ . Así:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

de donde:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-3 \text{ m}} - \frac{1}{1 \text{ m}} \Rightarrow s_i = -0,75 \text{ m}$$

Así pues, la imagen es virtual.

Analizamos ahora el aumento de la imagen:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} \Rightarrow \frac{h'}{h} = -\frac{0,75}{1}$$

De modo que el tamaño de la imagen es:

$$h' = 0,75 \cdot h = 7,5 \text{ cm}$$

Se comprueba, pues, que la imagen es virtual ( $s_i < 0$ ), derecha ( $h'/h > 0$ ) y disminuida ( $h' < h$ ).

**11** ¿Qué tipo de espejo necesitamos y con qué radio de curvatura si deseamos que un objeto situado a 1 m de su vértice produzca una imagen derecha que tenga la mitad de su tamaño?

Obviamente tiene que ser convexo, pues las imágenes derechas que se obtienen con los cóncavos son siempre aumentadas y con los planos son de tamaño natural. Si el aumento ha de ser 0,5, entonces:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} = 0,5 \Rightarrow s_i = -0,5 \cdot s_o$$

Conocidas  $s_i$  y  $s_o$ , podemos calcular el radio de curvatura mediante la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{1 \text{ m}} + \frac{1}{-0,5 \text{ m}} = \frac{2}{r} \Rightarrow r = -2 \text{ m}$$

El signo negativo de  $r$  nos confirma que es un espejo convexo.



- 12 PAU** Desde el interior de una pecera de forma esférica de 50 cm de diámetro, un pez observa los ojos de un gato que se encuentran a 20 cm de la superficie de la pecera. Describe la imagen que ve el pez (distancia a la que se produce, aumento y características de la imagen). Dato:  $n_{\text{agua}} = 1,333$ . Consideramos  $n_1 = 1$ , y  $n_2 = 1,333$ . Los datos que nos ofrece el problema son  $s_o = 20$  cm, y  $r = 25$  cm, ambos positivos. Por tanto, aplicando la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

cabe concluir:

$$\frac{1,333}{s_i} = \frac{0,333}{25 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} \Rightarrow s_i = -36,34 \text{ cm}$$

Por otra parte, el aumento de la imagen será:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_o}$$

que, al sustituir los datos, nos da:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{1 \cdot (-36,34 \text{ cm})}{1,333 \cdot 20 \text{ cm}} = 1,36$$

Es decir, el pez vería al gato como si estuviera algo más alejado (a 36,34 cm de la pecera), pero lo percibe con un tamaño 1,36 veces mayor que el real. Puesto que el signo de aumento es positivo, lo ve derecho.

- 13** Una superficie convexa separa dos medios de índices 1 y 1,6, respectivamente. Si un objeto que se encuentra a 40 cm del vértice en el primer medio tiene su imagen en el segundo a 64 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la superficie?

Aplicamos directamente la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Sustituyendo los datos, y teniendo en cuenta que  $s_o = 40$  cm, y  $s_i = 64$  cm (positiva según el criterio para la refracción):

$$\frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1,6}{64 \text{ cm}} = \frac{0,6}{r} \Rightarrow r = 12 \text{ cm}$$

- 14** ¿Cuáles serían las distancias focales objeto e imagen de la superficie de la actividad 13?

La distancia focal objeto correspondería al caso en que  $s_i = \infty$ , por lo que:

$$f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = 20 \text{ cm}$$

mientras que la distancia focal imagen correspondería al caso en que  $s_o = \infty$ , por lo que:

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = 32 \text{ cm}$$

- 15 PAU** Una varilla de vidrio de gran longitud tiene un extremo en forma de superficie semiesférica convexa con un radio de curvatura de 10 cm. Teniendo en cuenta que el índice de refracción del vidrio es 1,5, halla dónde se formará la imagen de un objeto puntual y describe el tipo de imagen en los siguientes casos:

- a) El objeto está situado sobre el eje, en el aire, a 30 cm de la superficie.  
b) El objeto está situado a 5 cm de la superficie.  
c) El objeto está muy alejado de la superficie.

Teniendo en cuenta que  $r = 10$  cm,  $n_1 = 1$ , y  $n_2 = 1,5$  y aplicando la ecuación del dioptrio:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

llegamos a:

$$\frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{s_o}$$

- a) Como  $s_o = 30$  cm, la imagen se forma a 90 cm en el interior de la varilla, es decir:

$$s_i = +90 \text{ cm}$$

Si se tratara de un objeto no puntual, la imagen tendría el doble de tamaño y sería invertida.

- b) En este caso,  $s_o = 5$  cm, por lo que  $s_i = -10$  cm. Es decir, la imagen se forma en el lado de incidencia (fuera de la varilla) a 10 cm de la superficie. Si el objeto no fuese puntual, la imagen sería derecha y estaría aumentada 1,33 veces.

- c) Si  $s_o = \infty$ , la imagen se forma en el foco imagen:

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = 30 \text{ cm}$$

En este caso, la imagen es puntual.

- 16 PAU** En algunas zonas del planeta aún existen pueblos que pescan peces sirviéndose de lanzas. Si una de estas personas desea atrapar una pieza, ¿hacia dónde crees que tendría que apuntar?

Deberá apuntar un poco más abajo, ya que la profundidad aparente del pez es, concretamente, 3/4 partes la profundidad real.

- 17** ¿A qué profundidad real estaría una piedra del fondo de un río si la vemos como si se hallase a 40 cm de distancia con respecto a la superficie?

Su profundidad real sería:

$$s_o = -\frac{n_1}{n_2} s_i = -\frac{1,333}{1} \cdot (-40 \text{ cm}) = 53,32 \text{ cm}$$

- 18** ¿Cuál es la profundidad a la que vemos un objeto bajo el agua, en comparación con su profundidad real? ¿Depende dicha profundidad aparente del ángulo desde el que mire el observador? Ayúdate de los diagramas de rayos.

Se verá siempre a tres cuartas partes de la profundidad real. Dicha profundidad aparente no depende del ángulo desde el que mire el observador, pues la relación entre el ángulo de incidencia y el de refracción es siempre constante e igual a  $n_2/n_1 = 0,75$ , factor que determina la distancia a la que se forma la imagen.

- 19 PAU** Se tiene un sistema constituido por dos lentes delgadas biconvexas de distancias focales 10 cm y 15 cm respectivamente, separadas 10 cm entre sí. Describe las características de la imagen formada de un objeto de 5 cm de altura situado a 20 cm de la primera lente. Dibuja posteriormente el diagrama de rayos correspondiente.

La imagen formada por la primera lente se obtiene de la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i}$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{10} \Rightarrow s_i = 20 \text{ cm}$$

Esta imagen es ahora objeto para la segunda lente. Dado que si  $s_i > d$ , la distancia objeto  $s'_o = -10$  cm, pues está en el lado de transmisión de la segunda lente, por lo que:

$$\frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f_2}$$

Sustituyendo sus respectivos valores:

$$\frac{1}{-10} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{15} \Rightarrow s'_i = 6 \text{ cm}$$

Por otra parte, el aumento total es igual al producto de los aumentos de cada lente:

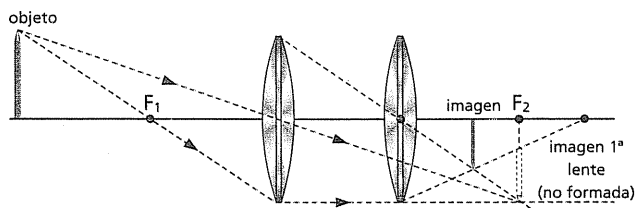
$$M_{\text{total}} = M_1 \cdot M_2$$

siendo:

$$M_1 = -\frac{s_i}{s_o} = -1 \quad M_2 = -\frac{s'_i}{s'_o} = -\frac{6}{-10} = 0,6$$

Por lo que el aumento total es  $M_{\text{total}} = -0,6$

Lo que quiere decir que la imagen se forma a 6 cm de la segunda lente, es real, invertida y de tamaño igual a 3 cm como vemos en el siguiente dibujo:



- 20** **12A10** Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es bicóncava (convergente) y con distancia focal de 20 cm, y la segunda, situada a 50 cm de la primera, es biconvexa (divergente) y con una distancia focal de 15 cm. Delante de la primera se sitúa un objeto de 4 cm de altura a una distancia de 40 cm.

- Halla la posición de la imagen producida por el sistema.
- Describe la naturaleza y el tamaño de la imagen final producida por el sistema óptico.
- Dibuja mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.
- La imagen producida por la primera lente viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i}$$

Sustituyendo los valores del problema,  $s_o = 40$  cm y  $f_i = 20$  cm, obtenemos  $s_i = 40$  cm.

Puesto que la separación entre lentes es de 50 cm, entonces la imagen de la primera lente actúa como objeto situada a 10 cm de la segunda lente.

En este caso, siendo biconvexa, se tiene:

$$\frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{-15} - \frac{1}{10}$$

por lo que:

$$s'_i = -6 \text{ cm.}$$

- Así pues, la imagen final se forma 6 cm por delante de la segunda lente. El aumento total es el producto de los momentos de cada lente,  $M_{\text{total}} = M_1 \cdot M_2$ , siendo:

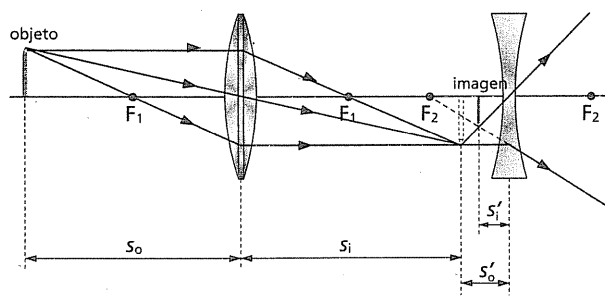
$$M_1 = -\frac{s_i}{s_o} = -1 \quad M_2 = -\frac{s'_i}{s'_o} = -\frac{-6}{10} = 0,6$$

Así pues es aumento total será:

$$M_{\text{total}} = -0,6$$

Lo que significa que la imagen es virtual, invertida y de 2,4 cm de tamaño.

- El dibujo de la imagen obtenida mediante el diagrama de rayos es el siguiente:



- 21** «Observa» tu punto ciego. Sitúate a unos 30 cm del papel y, con un ojo tapado, fija tu vista en la X de la figura 11.58. Si te acercas lentamente, llegará un momento en el que no verás la B. Si sigues aproximándote, la B reaparecerá y desaparecerá la A.

Actividad de observación.

- 22** Se desea obtener un aumento 300x en un microscopio compuesto. ¿Cuál es la distancia focal del ocular si el aumento lateral que produce el objetivo es de 30x y la imagen se forma en el punto próximo a 25 cm del ojo?

El aumento total,  $m$ , es:

$$m = m_{\text{obj}} \frac{x_p}{f_{\text{ocular}}}$$

Por tanto:

$$f_{\text{ocular}} = \frac{m_{\text{obj}} x_p}{m} = 2,5 \text{ cm}$$

- 23** Un telescopio Schmidt-Cassegrain tiene una focal de objetivo de 2000 mm. Determina los aumentos que se consiguen en cada caso si se utilizan oculares de focales de 4 mm, 12 mm, 20 mm y 40 mm.

Los aumentos angulares obtenidos son, en cada caso:

$$\text{Para el ocular de 4 mm: } M_1 = \frac{D_{\text{objetivo}}}{d_{\text{ocular}}} = \frac{2000}{4} = 500 \text{ aumentos.}$$

$$\text{Para el ocular de 12 mm: } M_2 = \frac{D_{\text{objetivo}}}{d_{\text{ocular}}} = \frac{2000}{12} = 167 \text{ aumentos.}$$

$$\text{Para el ocular de 20 mm: } M_3 = \frac{D_{\text{objetivo}}}{d_{\text{ocular}}} = \frac{2000}{20} = 100 \text{ aumentos.}$$

$$\text{Para el ocular de 40 mm: } M_4 = \frac{D_{\text{objetivo}}}{d_{\text{ocular}}} = \frac{2000}{40} = 50 \text{ aumentos.}$$

## Cuestiones y problemas (páginas 320/321)

### Guía de repaso

- 1** ¿Sobre qué conjunto de leyes se estructura la denominada óptica geométrica?

Sobre las leyes de propagación rectilínea de la luz, independencia de los rayos luminosos, reflexión, refracción y reciprocidad.

- 2** ¿Cuáles son las características de la imagen formada en un espejo plano? aumento angular que produce?

Es virtual, del mismo tamaño que el objeto y presenta inversión lateral (izquierda-derecha).

- 3** ¿Puede conseguirse, mediante espejos planos, que la imagen no presente inversión lateral? ¿Cómo?

Puede conseguirse mediante un sistema de dos espejos planos que formen ángulo recto, por ejemplo. Véase el subepígrafe 2.2.

- 4** ¿Qué es la aproximación paraxial? ¿Por qué motivo se hace uso de ella?

La aproximación paraxial consiste en considerar que la imagen de un objeto O se forma en un único punto, I.

Se hace uso de ella para determinar con claridad la posición de la imagen.

- 5** ¿Cuál es la ecuación de los espejos en función del radio de curvatura? ¿Qué signo tiene dicho radio si el espejo es cóncavo? ¿Y si es convexo?

Véase la expresión 11.4. En cuanto al signo, es positivo si el espejo es cóncavo y negativo si es convexo.

**16** ¿Cuál es la ecuación de los espejos en función de la distancia focal? ¿Qué relación tiene la distancia focal con el radio de curvatura del espejo?

Véase la expresión 11.7. La distancia focal es la mitad del radio de curvatura.

**17** ¿Qué criterio de signos se emplea para los espejos?

Se emplea el signo positivo cuando las distancias ( $s_o$ ,  $s_i$ ,  $r$ ,  $f$ ) están por delante del espejo o en el lado real y signo negativo cuando las distancias ( $s_o$ ,  $s_i$ ,  $r$ ,  $f$ ) quedan por detrás del espejo o en el lado denominado virtual.

**18** Detalla en qué consiste el procedimiento del diagrama de rayos en el caso de los espejos.

El diagrama de rayos nos permite averiguar como es la imagen formada y consiste en trazar tres rayos: Rayo 1. Se traza desde la parte superior del objeto y transcurre paralelo al eje óptico. Al reflejarse según la ley de la reflexión, pasará por el foco F. Rayo 2. Se traza desde la parte superior del objeto y pasa por el centro de curvatura C. El rayo reflejado tiene la misma dirección que el incidente. Rayo 3. Se traza desde la parte superior del objeto y pasa por el foco F. El rayo reflejado sale paralelo al eje óptico.

**19** ¿Cómo podemos averiguar el aumento de la imagen que produce un espejo esférico?

Mediante la expresión 11.8.

**20** Valiéndote de los diagramas de rayos correspondientes, describe de forma resumida cómo son las imágenes formadas en un espejo esférico cóncavo, según la distancia entre el objeto y el vértice del espejo.

Si  $s_o > r$ ; real, invertida, disminuida; si  $s_o = r$ , real, invertida, tamaño natural; si  $r > s_o > f$ ; real, invertida, aumentada; si  $s_o > f$ ; no se forma imagen nítida; si  $s_o < r$ , virtual, derecha, aumentada.

**21** Repite la cuestión anterior para el caso de un espejo esférico convexo.

Para cualquier posición es virtual, derecha y aumentada.

**22** ¿Cuál es la ecuación de un dioptrio esférico teniendo en cuenta la aproximación paraxial?

Véase la expresión 11.12.

**23** ¿Cómo puede determinarse el aumento de la imagen formada por refracción al pasar de un medio a otro de distinto índice?

Véase la expresión 11.13.

**24** ¿Cuántas distancias focales tiene un dioptrio esférico? ¿Cuáles son y qué significado físico tienen? ¿Qué relación existe entre ellas?

Tiene dos; la distancia focal imagen,  $f_i$ , es la distancia donde convergen todos los rayos refractado y la distancia focal objeto,  $f_o$ , es la distancia al punto desde donde deberían partir los rayos incidentes para que salieran refractados.

Se relacionan a través de la expresión 11.16 y son directamente proporcionales a sus respectivos índices de refracción.

**25** ¿Qué tipos de lentes conoces en función de la forma de sus superficies?

Lentes convergentes o convexas (biconvexa, plano-convexa y menisco-convexa) y lentes divergentes o cóncavas (bicóncava, plano-cóncava y menisco-cóncava).

**26** ¿Cuál es la fórmula de las lentes delgadas? Escríbela también considerando la distancia focal de la lente.

Véanse las expresiones 11.17 y 11.18.

**27** ¿A qué se llama potencia de una lente? ¿En qué unidades se mide?

La potencia de una lente es la inversa de su distancia focal,  $f$ .

Cuando  $f$  se mide en metros, la potencia viene dada en dioptrías.

**28** ¿De qué factores depende la distancia focal de una lente? Desea usarse un espejo esférico para configurar

Como vemos en la expresión 11.18 depende del índice de refracción del medio y del radio de curvatura de la lente.

**29** Describe el procedimiento conocido como diagrama de rayos para la formación de imágenes en el caso de las lentes delgadas.

Rayo 1; es paralelo al eje óptico y, tras ser refractado en la lente, pasa por el foco imagen de la misma.

Rayo 2; pasa por el centro óptico de la lente y atraviesa la lente en línea recta.

Rayo 3; pasa por el foco anterior a la lente, foco objeto, y, tras ser refractado en la lente, emerge paralelo al eje óptico.

**30** ¿Cómo se calcula el aumento de la imagen producido por una lente?

Mediante la expresión 11.20.

**31** ¿Cómo es el tipo de imagen formada por una lente biconvexa en función de la distancia del objeto comparada con la focal de la lente? Ayúdate de los diagramas de rayos.

$s_i > s_o > 2f$ ; real, invertida, disminuida; si  $s_o = 2f$ , real, invertida, tamaño natural; si  $2f > s_o > f$ ; real, invertida, aumentada; si  $s_o = f$ ; no se forma imagen nítida; si  $s_o < r$ , virtual, derecha, aumentada.

**32** Repite la cuestión anterior con una lente bicóncava.

Para cualquier posición la imagen es virtual, derecha y disminuida.

**33** ¿Cuáles son las partes principales del ojo humano? ¿Qué defectos visuales son los más comunes? ¿En qué consisten y cómo se corrigen?

Las partes más principales del ojo son: la córnea, el iris, el cristalino, el humor vítreo, la coroides y la retina.

Los defectos visuales más comunes son: la miopía, que se debe a una deformación del globo ocular y se corrige con lentes ligeramente divergentes; hipermetropía, que es la alteración opuesta a la miopía y se corrige con lentes ligeramente convergentes; astigmatismo, que se debe a irregularidades en la cornea, se corrige también con el uso de lentes.

**34** ¿Cómo funciona una lupa? ¿Cómo se determina el aumento angular que produce?

Una lupa es una lente biconvexa y si se sitúa prácticamente pegado al ojo se forma la imagen en el infinito y será derecha, virtual y aumentada.

Se determina el aumento mediante la expresión 11.21.

**35** ¿Qué diferencia existe entre los aumentos de un telescopio y los de un microscopio?

Los aumentos de los telescopios son angulares y los de un microscopio son laterales.

**36** ¿Cómo se determinan los aumentos de un telescopio?

Mediante la expresión 11.25.

## Óptica de la reflexión. Espejos

**27** Indica las características de la imagen de un objeto situado ante un espejo cóncavo que se encuentra en el punto medio entre el foco y el centro del espejo.

Si el objeto está situado en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura del espejo, entonces  $s_o = 3/2 \cdot f$ . En consecuencia, usando la fórmula de los espejos, se obtiene:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3 \cdot f}$$

Por tanto,  $s_i = 3 \cdot f$ , es decir, la imagen se forma delante del espejo (lado real) y a una distancia igual al triple de la distancia focal. Por otra parte, el aumento de la imagen será igual a  $-s_i/s_o$ . Sustituyendo los valores, podemos comprobar que el resultado de esta expresión es  $-2$ . Así pues, la imagen es real, invertida y aumentada al doble del tamaño del objeto y se forma a una distancia igual al triple de la focal.

**28** Indica las condiciones necesarias para que se forme en un espejo esférico, ya sea cóncavo o convexo:

- Una imagen real.
  - Una imagen disminuida.
  - Una imagen derecha (no invertida).
- Una imagen real solo se puede formar con un espejo cóncavo siempre que el objeto se sitúe a una distancia mayor que la focal.
  - Una imagen disminuida puede conseguirse con un espejo cóncavo si el objeto se sitúa a una distancia superior al radio de curvatura del espejo o en cualquier otra circunstancia siempre y cuando se emplee un espejo convexo.
  - Una imagen derecha se forma con un espejo cóncavo si el objeto se sitúa a una distancia menor que la focal o en cualquier otra posición en un espejo convexo.

**29** Sirviéndote de diagramas de rayos, describe las características de la imagen de un objeto en un espejo esférico cóncavo cuando dicho objeto se encuentra:

- Entre el foco y el vértice.
  - A una distancia mayor que el radio de curvatura.
- Véase la figura 11.24.e.
  - Véanse las figuras 11.24.a y 11.24.b.

**30** Completa la tabla de la actividad referida a espejos esféricos (las distancias se dan en cm).

Las expresiones que hay que utilizar para completar la tabla son las siguientes:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}; r = 2f; \text{ aumento} = -\frac{s_i}{s_o}$$

	Cóncavo	Cóncavo	Convexo	Convexo
$f$	+30	+16,66	-20	-25
$r$	+60	+33,33	-40	-50
$s_i$	-15	+25	-4	-11,1
$s_o$	+10	+50	+5	+20
Aumento	+1,5	-0,5	0,8	0,55
Imagen real	No	Sí	No	No
Imagen invertida	No	Sí	No	No

**31** **PAU** Un objeto de 10 cm de altura se sitúa a 1,5 m de un espejo esférico convexo de  $-3,5$  m de distancia focal. Determina las características de la imagen formada.

La distancia a la que se forma la imagen responde a la siguiente expresión:

Es decir:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-3,5 \text{ m}} - \frac{1}{1,5 \text{ m}} \Rightarrow s_i = -1,05 \text{ m}$$

Y su tamaño será:

$$h' = -\frac{s_i h}{s_o} = -\frac{-1,05 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} \cdot 10 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

Puesto que  $h'$  es positiva, la imagen es derecha.

Por tanto, la imagen es virtual ( $s_i = -1,05 \text{ m}$ ), derecha ( $h' > 0$ ) y disminuida ( $h' = 7 \text{ cm}$ ), como corresponde a un espejo convexo.

**32** **PAU** Desea usarse un espejo esférico para configurar una imagen 4 veces mayor que el tamaño del objeto en una pantalla situada a 4 m de este. Describe el tipo de espejo que se requiere y dónde deberá colocarse con relación al objeto.

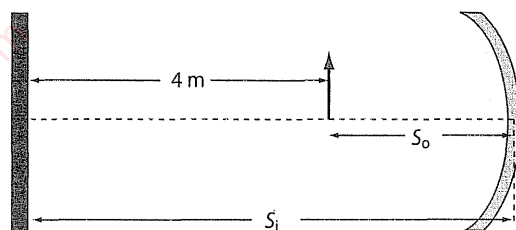
El espejo ha de ser cóncavo, pues uno convexo produce imágenes virtuales y disminuidas.

Puesto que  $s_i = 4 \text{ m}$ , y  $-s_i/s_o = -4$  (pues la imagen es invertida si es real), entonces  $s_o = 1 \text{ m}$ .

El espejo debe situarse, por tanto, a 1 m del objeto.

El enunciado del problema puede dar lugar a otra interpretación, que es considerar que la pantalla se sitúa a 4 m del objeto y no a 4 m del espejo.

En este caso, el problema sería distinto y también la solución. Como se ve en el dibujo:



$$s_i = 4 + s_o$$

Como la imagen es real (pues se proyecta en pantalla) y, en consecuencia, invertida, se cumplirá:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -4 \Rightarrow \frac{4 + s_o}{s_o} = 4$$

despejando queda:

$$s_o = 1,33 \text{ m}$$

Es decir, el espejo habría de situarse a 1,33 m del objeto.

**33** **PAU** Se tiene un espejo esférico cóncavo de 40 cm de distancia focal. Determina la distancia que debe situarse un objeto para que la imagen sea:

- Real y de doble tamaño que el objeto.
- Virtual y de doble tamaño que el objeto.

**a)** Si la imagen ha de ser real (si y so positivas) y de doble tamaño, debe cumplirse:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -2 \Rightarrow s_i = 2s_o$$

Utilizando esta expresión en la ecuación de espejo, tenemos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{2s_o} = \frac{1}{40} \Rightarrow s_o = 60 \text{ cm}$$

**b)** En este caso, si la imagen ha de ser virtual y de doble tamaño, se cumplirá:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -2 \Rightarrow s_i = 2s_o$$

Que, aplicada a la ecuación del espejo, conduce a:

$$s_o = 20 \text{ cm}$$

## Óptica de la refracción. Lentes delgadas

- 34** ¿De qué manera puede producir una lente un aumento igual a +1? ¿Y a -1?

Un aumento igual a +1 podría conseguirse con una lente biconvexa si el objeto estuviera pegado a la lente. En ese caso, la imagen sería virtual y, como puede comprobarse mediante el diagrama de rayos, tendría el mismo tamaño que el objeto y estaría derecha. Podemos comprobar esto considerando que  $s_o \lll f$ , en cuyo caso  $1/s_o \ggg 1/f$ . De este modo, aplicando la ecuación de las lentes en la forma:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

podemos concluir que:

$$\frac{1}{s_i} \cong -\frac{1}{s_o} \Rightarrow s_i = -s_o$$

En consecuencia, el aumento es igual a +1 y la imagen es virtual. Puedes comprobar este hecho pegando una lupa al objeto: lo verás de tamaño natural y derecho. Un aumento igual a -1 supone que  $s_i = s_o$ , situación que, aplicada a la ecuación de las lentes, conduce a que  $s_o = 2 \cdot f$ . Así pues, se obtendrá situando el objeto a una distancia igual al doble de la focal de la lente biconvexa.

En el caso de una lente bicóncava, solo podría conseguirse un aumento igual a +1 aplicando las mismas condiciones que para la lente biconvexa, es decir, con el objeto pegado a la lente. Sin embargo, nunca conseguiríamos un aumento de -1.

- 35** ¿A qué distancia de una lente biconvexa debe situarse un objeto para que la imagen tenga su mismo tamaño?

Como acabamos de ver en la cuestión anterior, habría que situarlo a una distancia igual a  $2 \cdot f$  o pegado a la lente.

- 36** Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «Una lente biconvexa siempre es convergente».

La afirmación es falsa, pues la distancia focal y, en consecuencia, el carácter convergente o divergente de la lente no dependen tan solo de las características estructurales de la lente, sino de la relación que existe entre el índice de refracción del vidrio de la lente y el del medio en el que está inmersa, de modo que, si este último índice de refracción es mayor que el de la lente, esta se comportará como divergente.

- 37** Indica razonadamente cuál es el comportamiento de los rayos que parten del foco objeto en una lente convergente:

- Convergen en el foco imagen.
- Emergen paralelos.
- No se desvían.

La respuesta correcta es la **b)**, por la propia definición de foco objeto.

- 38** Indica razonadamente cuál es el comportamiento de un rayo paralelo al eje óptico al atravesar una lente delgada:

- No se desvía.
- Se desvía o no, dependiendo del tipo de lente.
- Se desvía siempre.

La respuesta correcta es la **c)**.

- 39** Repite la pregunta anterior para el caso de que el rayo coincida con el eje óptico.

La respuesta correcta es la **a)**.

- 40** Una superficie esférica convexa separa dos medios, uno de los cuales es aire. El radio de curvatura de la superficie es de +20 cm, y cuando un objeto puntual se sitúa a 40 cm del vértice, su imagen se forma a 100 cm en el otro medio. ¿Cuál es el índice de refracción de este medio?

Se parte de la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Como, además,  $n_1 = 1$ ,  $s_o = +40$  cm,  $s_i = +100$  cm, y  $r = +20$  cm, obtenemos:

$$n_2 = 1,875$$

- 41** **PAU** Un objeto se sitúa 40 cm a la izquierda de una lente biconvexa de índice de refracción 1,54. La superficie izquierda de la lente tiene un radio de curvatura de 25 cm y en estas condiciones forma una imagen real a 65 cm. ¿Cuál es el radio de curvatura de la segunda superficie?

Hay que aplicar la fórmula de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Al sustituir los datos  $s_o = 40$  cm,  $s_i = 65$  cm,  $n = 1,54$ , y  $r_1 = 25$  cm, y resolver la expresión, se obtiene:

$$r_2 = -28,75 \text{ cm}$$

- 42** **PAU** Se fabrica una lente biconvexa hueca (llena de aire) con superficies de vidrio de grosor despreciable y de radios de curvatura de 15 cm y 20 cm. Determina la distancia focal y el comportamiento de esta lente de aire cuando se sumerge en agua y en benceno ( $n = 1,501$ ).

El índice de refracción de la lente es  $n = 1$ . Su comportamiento y su focal en un medio vienen dados por:

$$\frac{1}{f} = (n_{\text{rel}} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

donde  $n_{\text{rel}} = n/n'$ ,  $r_1 = 15$  cm, y  $r_2 = -20$  cm. Aplicando la expresión, obtenemos:

en agua;  $n' = 1,333 \Rightarrow f = -34,28$  cm

en benceno;  $n' = 1,501 \Rightarrow f = -25,68$  cm

En ambos casos, el foco queda en el lado de incidencia y la lente biconvexa se comporta como divergente.

- 43** **PAU** ¿Cuál es la distancia focal de una lente bicóncava de índice de refracción 1,46 si sus radios de curvatura son de 15 cm y 20 cm? Resuelve el problema suponiendo que la luz puede incidir por ambas caras de la lente.

Al ser una lente bicóncava e incidir la luz por el lado izquierdo,  $r_1 = -15$  cm y  $r_2 = 20$  cm. Como además  $n = 1,46$ , entonces:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = 0,46 \cdot \left( \frac{1}{-15 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} \right) \Rightarrow f = -18,63 \text{ cm}$$

De manera análoga, si la luz incide por la derecha,  $r_1 = -20$  cm, y  $r_2 = 15$  cm, por lo que:

$$\frac{1}{f} = 0,46 \cdot \left( \frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}} \right) \Rightarrow f = -18,63 \text{ cm}$$

El comportamiento en el aire es, pues, divergente, al estar el foco en el lado de incidencia en ambos casos. Compruébese que la distancia focal es una característica de la lente e independiente del lado de incidencia de la luz.

- 44** **PAU** ¿Cuál sería la distancia focal de la lente del problema anterior si se está sumergida en agua?

En este caso:

$$\frac{1}{f} = (n_{\text{rel}} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

donde  $n_{\text{rel}} = 1,095$ .

Sustituyendo y resolviendo, obtenemos:

$$f = -89,97 \text{ cm}$$

Sigue siendo, pues, divergente, aunque en menor medida.

**45 PAU** Los radios de curvatura de una lente biconvexa de vidrio de  $n = 1,5$  guardan una relación de 3 a 2. Determina una expresión para el menor de ellos en función de la distancia focal.

La relación entre  $r_1$  y  $r_2$  es:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$$

Puesto que la lente es biconvexa,  $r_1$  y  $r_2$  tienen signos distintos, por lo que escribiremos:

$$r_1 = \frac{3}{2} \cdot r_2$$

Así pues:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\frac{1}{f} = 0,5 \cdot \left( \frac{1}{-3/2 \cdot r_2} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow f = -\frac{6}{5} \cdot r_2$$

Por lo que:

$$r_2 = -\frac{5}{6} \cdot f$$

**46 PAU** Una lente biconvexa elaborada con vidrio de refracción de índice 1,53 tiene dos radios de curvatura de 10 cm y 16 cm, respectivamente. Si se sitúa una estatuilla de 5 cm de altura a 15 cm de la lente, ¿a qué distancia apreciaremos la imagen? Determina las características de la imagen.

La distancia a la que se forma la imagen se obtiene de la ecuación de las lentes expresada de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

con  $s_o = 15$  cm,  $n = 1,53$ ,  $r_1 = +10$  cm, y  $r_2 = -16$  cm. Sustituyendo y despejando  $s_i$ , obtenemos:

$$s_i = 51,37 \text{ cm}$$

Como es positivo, la imagen es real.

Por otra parte, los aumentos serán:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} = -3,42$$

De donde:

$$h' = 17,12 \text{ cm}$$

Por tanto, la imagen es aumentada (3,42 veces) e invertida.

**47 PAU** La estatuilla del problema anterior es contemplada ahora a través de una lente divergente cuyos radios de curvatura miden 10 cm cada uno y su índice es 1,53. Halla la distancia y las características de la imagen (calculando el aumento) cuando se coloca a una distancia de la lente de:

- 6 cm
- 15 cm
- 1 m

Según este planteamiento,  $r_1 = -10$  cm,  $r_2 = 10$  cm,  $n = 1,53$ , y  $s_o$  varía en cada caso.

Procediendo como hemos hecho antes, obtenemos:

$$a) s_o = 6 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -3,67 \text{ cm} \Rightarrow h' = 3,06 \text{ cm}$$

La imagen es virtual ( $s_i < 0$ ), derecha y disminuida.

$$b) s_o = 15 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -5,80 \text{ cm} \Rightarrow h' = 1,93 \text{ cm}$$

Ahora la imagen es virtual, derecha ( $h/h' > 0$ ) y disminuida.

$$c) s_o = 100 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -8,62 \text{ cm} \Rightarrow h' = 0,43 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y disminuida.

**D48 PAU** Con una lente convergente, de un objeto real se obtiene una imagen también real, invertida y aumentada 4 veces. Al desplazar el objeto 3 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual, derecha y con el mismo aumento en valor absoluto. Determina:

- La distancia focal imagen y la potencia de la lente.
- La distancia del objeto a la lente en los dos casos.
- Las respectivas distancias imagen.
- Las construcciones geométricas correspondientes.

a) Al tratarse de la misma lente, su distancia focal no cambia, de modo que aplicaremos en ambos casos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \text{ y } \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i}$$

En la primera posición del objeto, la imagen es real, invertida y aumentada 4 veces, por lo que:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -4 \Rightarrow s_i = 4 s_o$$

Mientras que en la segunda posición, la imagen es virtual, derecha y del mismo aumento. En consecuencia:

$$-\frac{s'_i}{s'_o} = 4 \Rightarrow s'_i = -4 s'_o$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{4 s_o} = \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{4 s'_o} \Rightarrow \frac{5}{4 s_o} = \frac{3}{4 s'_o} \Rightarrow 5 s'_o = 3 s_o$$

Y puesto que  $s'_o = s_o - 3$ , sustituyendo se obtiene que  $s_o = 7,5$  cm. Dado que:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{4 s_o} = \frac{1}{f}$$

La distancia focal imagen vale:  $f = 6$  cm

y la potencia de la lente:  $P = 1/f = 1/6$  dioptrías

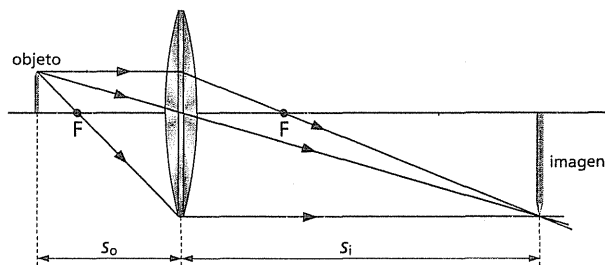
b) Las distancias objeto son:

$$s_o = 7,5 \text{ cm}; s'_o = 4,5 \text{ cm}$$

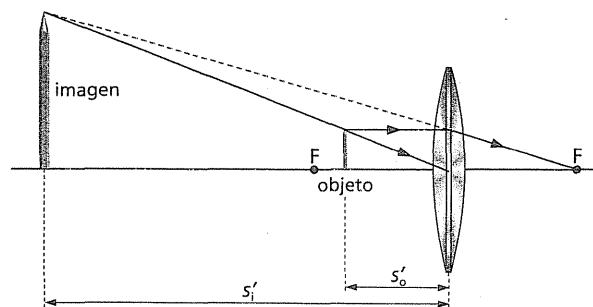
c) Las distancias imagen son:

$$s_i = 4, s_o = 30 \text{ cm}; s'_i = -4, s'_o = -18 \text{ cm}$$

d) Para el primer caso tenemos:



Cuando desplazamos la lente 3 cm tendremos:



**D49 PAU** Una lente convergente de 10 cm de distancia focal se encuentra a 30 cm de otra lente convergente cuya distancia focal es de 5 cm. Se sitúa un objeto de 3 cm de altura a 30 cm de la primera lente:

- ¿Cuál es la posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada por el sistema óptico?
- Si las dos lentes se ponen en contacto, ¿cuál es la distancia focal efectiva de la combinación?
- ¿Cuál sería la ubicación de la imagen de un objeto que se situara a 10 cm frente a las dos lentes en contacto?
- La imagen producida por la primera lente se obtiene de:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} \Rightarrow s_i = 15 \text{ cm}$$

Dado que la distancia entre lentes es de 30 cm, la imagen de la primera lente (ahora objeto para la segunda) se encuentra a 15 cm de esta última ( $s'_o = 15$  cm). Aplicando la misma expresión para la segunda lente:

$$\frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s'_o} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15} \Rightarrow s'_i = 7,5 \text{ cm}$$

El aumento total es:

$$M = M_1 \cdot M_2 = \left(\frac{s_i}{s_o}\right) \cdot \left(-\frac{s'_i}{s'_o}\right) = \frac{1}{4}$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es de 0,75 cm, siendo la imagen real y derecha y formándose a 7,5 cm detrás de la segunda lente.

- La distancia focal efectiva de dos lentes en contacto es:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f' = 3,3 \text{ cm}$$

- Si  $s'_o = 10$  cm y  $f' = 3,3$  cm, entonces:

$$\frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s'_o} = \frac{1}{3,3} - \frac{1}{10} \Rightarrow s'_i = 5 \text{ cm}$$

Se formará la imagen a 5 cm por detrás de las lentes.

**50 PAU** Una lente biconvexa de índice de refracción 1,5 tiene un radio de curvatura de 15 cm en la superficie de incidencia y de 30 cm en la superficie de transmisión. Si se desea que proyecte una imagen de la mitad del tamaño del objeto:

- ¿Cuáles deben ser las distancias a las que deben situarse el objeto y la pantalla con respecto a la lente?
- Construye el correspondiente diagrama de rayos.

- La distancia focal de la lente así construida se obtiene de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0,5 \left( \frac{1}{15} - \frac{1}{-30} \right)$$

Por lo que:

$$f = 20 \text{ cm}$$

Dado que la imagen debe proyectarse, es real ( $s_i > 0$ ), y si debe ser la mitad del tamaño del objeto, entonces:

$$M = \frac{s_i}{s_o} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$s_o = 2 s_i \Rightarrow s_i = s_o/2$$

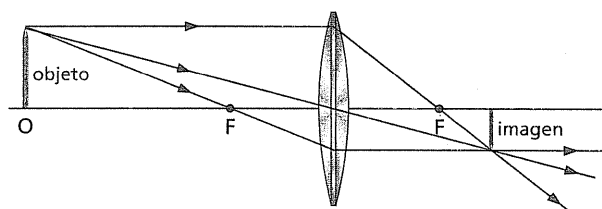
Sustituyendo estas identidades en la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s_o} + \frac{2}{s_o} = \frac{1}{20} \Rightarrow s_o = 60 \text{ cm}$$

Y, en consecuencia,

$$s_i = 30 \text{ cm}$$

- El correspondiente diagrama de rayos es:



## Instrumentos ópticos

- 51** Por qué hay que introducir las diapositivas invertidas en un proyector? Dado que la imagen en la pantalla resulta aumentada, ¿a qué distancia deben situarse las diapositivas con respecto a la distancia focal de la lente?

Se introducen las diapositivas de ese modo porque la imagen aumentada que se obtiene con una lente biconvexa (la del objetivo del proyector) es siempre invertida (salvo en el caso de la lupa). Por este motivo, si deseamos ver la imagen derecha, el objeto (la diapositiva) tendrá que estar invertido.

Las diapositivas han de encontrarse a una distancia comprendida entre  $f$  y  $2 \cdot f$ . Dicha distancia se regula con el enfoque del proyector.

- 52** ¿Qué tipo de lente se usa en las mirillas de las puertas?

La lente que se utiliza es biconcava, pues de ese modo la imagen de los objetos, sea cual sea la distancia a la que se encuentran, se ve siempre derecha aunque la imagen esté disminuida.

Además, el campo de visión es mayor.

- 53** Los astrónomos aficionados saben que para apreciar al telescopio imágenes de muy débil luminosidad (galaxias, nebulosas planetarias, etcétera) es mejor mirar ligeramente de reojo. ¿Se te ocurre alguna explicación?

La razón es que en la zona de la retina situada en la dirección del eje óptico en visión directa se encuentra la fóvea, donde se concentra el mayor número de conos, pero donde no existen bastoncillos, que son los responsables de la visión nocturna de la luz de baja intensidad, como la que se observa en los objetos captados a través del telescopio.

Para evitar la fóvea, es mejor mirar ligeramente de reojo.

- 54 PAU** El aumento deseable de un microscopio compuesto es de 200x. Si el aumento lateral que produce el objetivo es de 20x, ¿cuál será la distancia focal del ocular si la imagen se forma en el punto próximo a 25 cm del ojo?

Los aumentos del microscopio compuesto responden a la siguiente expresión:

$$m = m_{\text{obj}} \frac{x_p}{f_{\text{ocular}}}$$

Por tanto:

$$f_{\text{ocular}} = \frac{m_{\text{obj}} x_p}{m}$$

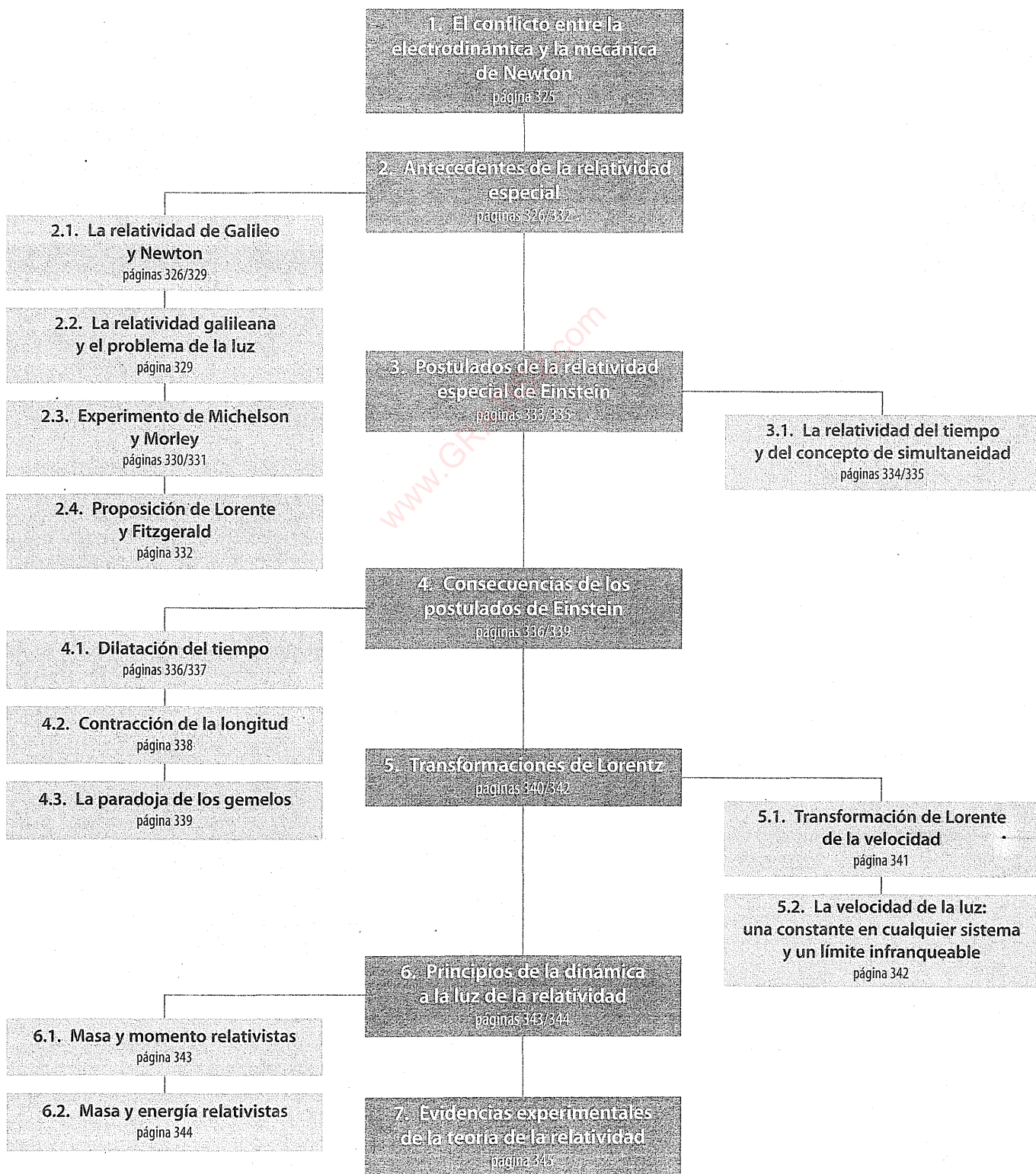
y sustituyendo los datos:

$$f_{\text{ocular}} = 2,5 \text{ cm}$$

# 12

# Principios de la relatividad especial

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D





## Cuestiones previas (página 324)

1. Como sabes, la velocidad de la luz en el vacío de unos 300 000 km/s. Ahora bien, ¿qué valor tendría para un observador que se desplazara a 50 000 km/s en la misma dirección de propagación de la luz?

Si el observador se desplaza en la misma dirección y sentido que la velocidad de la luz, la velocidad relativa entre ambos sistemas sería la velocidad de la luz que observa la persona:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'} = 300\,000 \text{ km/h} - 50\,000 \text{ km/h} = 250\,000 \text{ km/h}$$

2. ¿Es el tiempo una variable independiente, es decir, transcurre por igual para todos los observadores, con independencia de si se mueven o no?

No es independiente, el tiempo será distinto para dos observadores en movimiento relativo de uno con respecto al otro.

3. Imagínate un objeto que se mueve a la velocidad de la luz con respecto a un observador O' que, a su vez, se mueve a la velocidad de la luz en relación con otro observador O que está en reposo. ¿A qué velocidad se mueve el objeto con respecto a O?

Se mueve a la velocidad  $c$ , debido a que la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas inerciales, con independencia de su movimiento relativo.

4. ¿En qué consiste la «paradoja de los gemelos»?

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

## Actividades (páginas 328/345)

1. Una trainera emplea 10 min en recorrer 4 km cuando navega a favor de la corriente. Esos mismos 4 km los recorre en 24 minutos al navegar a contracorriente.

¿Cuál es la velocidad de la trainera y la de la corriente con respecto a un observador que se halla en reposo en la orilla?

La velocidad de la trainera cuando navega a favor de la corriente es, desde el punto de vista de un observador situado en tierra  $v + v_c$ , donde  $v$  es la velocidad de la trainera con respecto al agua, y  $v_c$  es la velocidad de la corriente.

Por tanto, al navegar a favor de la corriente, se debe cumplir que:

$$d = (v + v_c) t$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v + v_c) \cdot 600 \text{ s}$$

Por otro lado, al navegar a contracorriente:

$$d = (v - v_c) t'$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v - v_c) \cdot 1\,440 \text{ s}$$

De ambas expresiones obtenemos que:

$$v + v_c = 6,67 \text{ m/s}$$

$$v - v_c = 2,78 \text{ m/s}$$

Resolviendo el sistema, encontramos que:

$$v = 4,73 \text{ m/s}$$

$$v_c = 1,94 \text{ m/s}$$

2. La posición de una partícula según el sistema O es  $\vec{r} = (4t^2 - 2t)\vec{i} - t^3\vec{j} + 2t\vec{k}$  m, mientras que con respecto a O' es  $\vec{r}' = (4t^2 + 3t)\vec{i} - t^3\vec{j} - 4t\vec{k}$  m.

a) ¿Cuál es la velocidad relativa entre ambos sistemas?

b) ¿Se cumplen las leyes físicas por igual en ambos sistemas? Demuéstralo.

a) La velocidad relativa entre ambos sistemas vendrá dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'}$$

donde:

$$\vec{v}_O = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t - 2)\vec{i} - 3t^2\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = (8t + 3)\vec{i} - 3t^2\vec{j} \text{ m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'} = -5\vec{i} \text{ m/s}$$

Es decir, O' se aleja relativamente de O hacia la izquierda.

b) Si la aceleración de la partícula que miden ambos observadores es la misma, las leyes físicas serán iguales para ambos.

Como las aceleraciones coinciden (bajo la suposición de que el tiempo transcurre por igual en ambos sistemas):

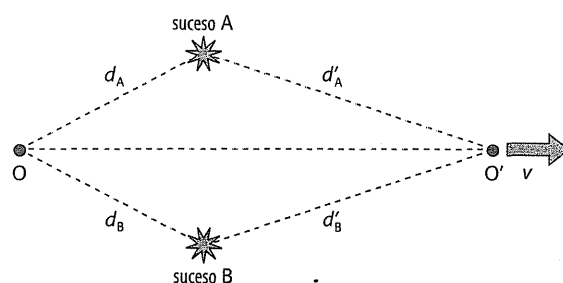
$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = 8\vec{i} - 6t\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = 8\vec{i} - 6t\vec{j} \text{ m/s}^2$$

las leyes físicas que describen ambos observadores serán también las mismas.

3. Dos observadores se mueven relativamente uno con respecto al otro; ¿podrían estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos sucesos en alguna circunstancia?

Podrían estar de acuerdo, por ejemplo, si los dos sucesos ocurren en posiciones equidistantes para cada uno de los observadores:



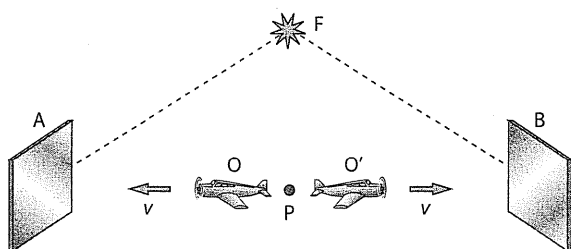
Para O,  $d_A = d_B$ , y, del mismo modo, para O',  $d'_A = d'_B$ .

Por tanto, ambos observadores estarían de acuerdo en este caso sobre la simultaneidad de los sucesos.

4. Para cierto sistema de referencia, un suceso A ocurre antes que otro B. ¿Podría ocurrir lo contrario en otro sistema de referencia?

Podría ocurrir, en efecto, lo contrario en otro sistema de referencia. Supongamos, por ejemplo, que una misma señal de luz es enviada desde un foco F equidistante con respecto a las pantallas A y B reflectantes.

Para el observador O, que se dirige hacia A desde el punto P con una velocidad  $v$ , la luz llega a A antes que a B. Por el contrario, para el observador O' que se dirige hacia B desde P, la luz llega a B antes que a A.



- 5 Un viaje interestelar a un sistema planetario extrasolar ha durado, según los relojes de a bordo de la nave, 4 años, a una velocidad constante de  $0,9 \cdot c$ . ¿Cuánto tiempo ha durado el viaje según el centro de control de Tierra?

Para el control de Tierra, la duración del viaje es de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9 \cdot c)^2}{c^2}}} = 2,29$$

Por tanto:

$$\Delta t = 9,16 \text{ años}$$

- 6 Una vara de 1 m de longitud se mueve con respecto a nuestro sistema de referencia con una velocidad de  $0,7 \cdot c$ . ¿Cuál sería la longitud que mediríamos? ¿A qué velocidad debería moverse la vara para que su longitud fuera de 50 cm para nosotros?

La longitud que mediríamos vendría dada por:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,714 \text{ m}$$

Para que su longitud fuese de 0,5 m medida en nuestro sistema, su velocidad tendría que ser de  $0,867 \cdot c$ , como vamos a comprobar.

Si  $l' = 0,5 \text{ m}$ , entonces:

$$0,5 = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 0,25$$

Es decir:

$$v = \sqrt{0,75} \cdot c = 0,867 \cdot c$$

- 7 Los astronautas de una nave interestelar que viaja al 99 % de la velocidad de la luz deciden emplear una hora de su tiempo para la comida. ¿Cuánto dura esta para el centro de control de Tierra?

Para el control de Tierra, la comida duraría siete horas, pues:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y sustituyendo los datos:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,99 \cdot c)^2}{c^2}}} = 7 \text{ h}$$

- 8 ¿Podría una persona que viviera 90 años hacer un viaje de ida y vuelta a un sistema estelar que se encontrara a 100 años luz? Explica tu respuesta.

Podría, en efecto, realizar el viaje. Si se desplazara, por ejemplo, a una velocidad de  $0,99 \cdot c$ , la distancia entre la Tierra y el sistema estelar, medida en su sistema, sería:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,99 \cdot c)^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$l' = 14,1 \text{ años luz}$$

Por tanto, el tiempo que emplearía en su trayecto de ida y vuelta sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 14,1 \cdot c}{0,99 \cdot c} = 28,48 \text{ años}$$

Por el contrario, para una persona en Tierra habrían transcurrido 202 años.

- 9 ¿Qué contracción de longitud experimentaría el diámetro terrestre (12 740 km) desde un sistema de referencia con respecto al cual la Tierra se moviera a  $30 \text{ km/s}$ ?

La longitud medida desde el sistema de referencia sería de:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos:

$$l' = 12740 \cdot \sqrt{1 - \frac{30^2}{300000^2}}$$

Es decir:

$$l' = 12739,99994 \text{ km}$$

Por tanto, la contracción del diámetro terrestre vendría dado por:

$$\Delta l = l - l' = 6,37 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 0,0637 \text{ m} = 6,37 \text{ cm}$$

- 10 ¿Podría viajar un equipo de astronautas a un sistema estelar que se encontrara a 500 años luz (suponiendo que no hubiese problemas técnicos y que la tripulación dispusiese de métodos de protección frente a la radiación inducida)?

Podría viajar si se desplazara a una velocidad de  $0,999 \cdot c$ , en cuyo caso, para el equipo de astronautas, la distancia al sistema estelar sería de:

$$l' = 500 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,999 \cdot c)^2}{c^2}} = 22,35 \text{ años luz}$$

El tiempo que emplearían en el viaje de ida y vuelta el equipo de astronautas, sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 22,35 \cdot c}{0,999 \cdot c} = 44,74 \text{ años}$$

Por el contrario, para un observador en Tierra habrían transcurrido 1001 años.

- 11 Dos cuerpos, A y B, se alejan de un observador O en el mismo sentido y con una velocidad de  $0,5 \cdot c$  y de  $0,3 \cdot c$ , respectivamente, en relación con O.

a) ¿Cuál es la velocidad de A medida desde B?

b) ¿Concuerda el resultado anterior con el que se obtendría aplicando la transformación galileana?

a) La velocidad de A medida desde B vendría dada por la expresión de la transformación de Lorentz de la velocidad (12.16):

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$v'_x = \frac{0,5 \cdot c - 0,3 \cdot c}{1 - \frac{0,3 \cdot c}{c^2} \cdot 0,5 \cdot c} = 0,235 \cdot c$$

b) El resultado, evidentemente, no concuerda con el que obtendríamos aplicando la transformación de Galileo, que sería:

$$v'_x = v_x - v = 0,5 \cdot c - 0,3 \cdot c = 0,2 \cdot c$$

- 12 Un fotón en reposo tiene una energía cero, lo que significa que su masa en reposo es también cero. ¿Qué sentido físico encierra esta aseveración?

El significado físico de esta aseveración es que un fotón no puede existir en reposo, lo que es consistente con la propia naturaleza de la luz: no es posible que la luz esté en reposo. Como se ha demostrado en el subepígrafe 5.2, incluso para un observador que se moviera a la velocidad de la luz, esta seguiría moviéndose a la velocidad  $c$ ; en consecuencia, un fotón nunca podría estar en reposo. Su existencia solo es posible a la velocidad de la luz.

- 13 Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV y se mueve con una velocidad igual a  $0,7 \cdot c$ . Calcula su energía total, su energía cinética y su momento lineal.

La energía total es:

$$E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

donde  $E_0$  es la energía en reposo.

Puesto que  $v = 0,7 \cdot c$ , entonces:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,4$$

Y por tanto:

$$E_{\text{total}} = 147,98 \text{ MeV}$$

La energía cinética del muón es la diferencia entre la energía total y la energía en reposo,  $E_0$ , por lo que:

$$E_c = E_{\text{total}} - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = 42,28 \text{ MeV}$$

Por otra parte, el momento lineal será:

$$p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \cdot 0,7 \cdot c = \frac{\gamma m_0 c^2 \cdot 0,7}{c} = \frac{0,7 \cdot E_{\text{total}}}{c} = 103,586 \text{ MeV}/c$$

Esta unidad, MeV/c, es la más conveniente para el momento lineal relativista.

## Cuestiones y problemas (páginas 348/349)

### Guía de repaso

- 1 ¿Qué propiedades mecánicas se le asignaban al «éter luminífero» para explicar el elevado valor de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas?

La elasticidad y rigidez.

- 2 ¿Qué es lo que afirma el principio de relatividad de Galileo y Newton?

Las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

- 3 ¿Es distinta la distancia entre dos puntos medida por observadores situados en sistemas de referencia inerciales galileanos? ¿Por qué?

La distancia medida entre dos puntos es la misma. Es una de las consecuencias de las transformaciones galileanas.

- 4 ¿Es distinta la velocidad de un cuerpo observada desde dos sistemas de referencia inerciales galileanos que se desplazan con movimiento relativo uno con respecto al otro? ¿Por qué?

Es distinta ya que depende del movimiento relativo entre ambos.

- 5 ¿Es invariable la aceleración en todos los sistemas de referencia inerciales galileanos? Explica qué implicaciones tiene este hecho.

Sí es invariable y tiene dos implicaciones muy importantes: la primera que las leyes físicas son las mismas para observadores que se encuentren en sistemas de referencias inerciales; la segunda, que es imposible conocer si un sistema de referencia está en reposo absoluto o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.

- 6 ¿Por qué motivo se esperaba observar un desplazamiento de las franjas de interferencia en el experimento llevado a cabo por Michelson y Morley? ¿Qué significaba la ausencia de ese desplazamiento?

Debido a la diferencia de velocidades entre ambos haces estos llegarían con un ligero desfase de tiempo. Esta ausencia de desplazamiento se debe a que los haces se movían con una velocidad constante, independiente de su orientación.

- 7 ¿Qué concluyeron Michelson y Morley acerca del éter luminífero y de la velocidad relativa de la Tierra con respecto a aquel?

Que la velocidad de la luz es siempre constante, independientemente del movimiento del foco emisor. Además supusieron que el éter pertenecía en reposo con respecto a la superficie terrestre.

- 8 ¿Qué propusieron Lorentz y Fitzgerald para explicar los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley? ¿En qué se basaban su propuesta?

Propusieron la hipótesis de la contracción de la longitud de los cuerpos en movimiento a través del éter. Se basaban en que las interacciones electrostáticas entre átomos y moléculas, al propagarse por el éter, se verían afectadas por el movimiento de traslación a través del mismo.

- 9 ¿Cuáles son los dos postulados de la relatividad especial de Einstein?

Primer postulado: todas las leyes físicas se cumplen por igual en todos los sistemas de referencias inerciales.

Segundo postulado: la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencias inerciales y es, además, independiente del movimiento de la fuente emisora y del observador.

- 10 ¿Qué consecuencia se deriva de los postulados de Einstein en relación con el tiempo?

Que el tiempo es relativo, y el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del sistema de referencia.

- 11 Dos sucesos son simultáneos en un sistema de referencia determinado; ¿lo son también en cualquier otro sistema de referencia inercial? ¿Por qué motivo?

En otro sistema de referencia no serían simultáneos. El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos es distinto para sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo.

- 12 ¿Es igual el intervalo de tiempo entre dos sucesos para dos observadores inerciales estacionarios uno con respecto al otro?

El intervalo de tiempo es igual si los dos sucesos ocurren en el mismo punto.

- 13 ¿En qué consiste la dilatación del tiempo? ¿Cuál es su fórmula?

Que el tiempo no es algo absoluto y que transcurre más lentamente para observadores que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. Su fórmula es la expresión 12.11.

- 14 ¿Es igual la distancia entre dos puntos para dos observadores inerciales einsteinianos?

Debido a una de las consecuencias de los postulados de Einstein; la contracción de la longitud.

- 15** ¿Qué fórmula expresa la relación existente entre las longitudes medidas por dos observadores inerciales que se desplazan con velocidad relativa  $v$ ? ¿Con qué nombre se conoce dicha fórmula?

Se conoce con el nombre de la fórmula de la contracción de la longitud y viene formulada en la expresión 12.12.

- 16** ¿Por qué se les atribuye significados físicos tan distintos a la contracción de Lorentz-Fitzgerald y a la de Einstein a pesar de tener idéntica formulación?

En la contracción de Lorentz-Fitzgerald no cuestiona el marco newtoniano, lo único que pretende es adaptar la realidad a los resultados. En cambio, la proposición de Einstein altera de manera notable los conceptos de espacio y tiempo.

- 17** ¿En qué consiste la paradoja de los gemelos?

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

- 18** ¿Cuáles son las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espacio-temporales de un observador  $O'$  con las de  $O$ ?

Las expresiones son las siguientes:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}$$

- 19** ¿Qué ocurre con las transformaciones de Lorentz cuando se cumple que  $v \ll c$ ?

Se convierten en las transformaciones galileanas.

- 20** ¿Por qué se afirma que la velocidad de la luz constituye un límite insuperable? ¿Qué implicaciones tiene este hecho en las leyes de la dinámica de Newton?

La velocidad de la luz constituye un límite insalvable porque no existe ningún cuerpo que pueda desplazarse a velocidades mayores que la de la luz. Fue un resultado que se deduce de las transformaciones de Lorentz y viene avalado por el experimento de Michelson.

Tiene implicaciones sobre dos conceptos; masa y momento lineal; en relación con la masa, esta permanece invariable y no depende del estado de movimiento, en cuanto al momento lineal permanece constante en sistemas o cuerpos aislados.

- 21** ¿Por qué se define una masa relativista? ¿Qué condiciones ha de cumplir dicha masa?

De la formulación original de la segunda ley de Newton, como la velocidad no puede crecer infinitamente, tendremos que admitir que la masa se incrementa con la velocidad. Dicha masa debe alcanzar un valor infinito cuando  $v = c$ . Además la masa debe coincidir con la del cuerpo medida en reposo relativista (cuando  $v = 0$ ).

- 22** ¿Qué es la energía en reposo de un cuerpo o partícula? ¿Tenemos evidencias experimentales de su existencia?

Es una energía que no presenta dependencia con la velocidad y su expresión es:  $E = mc^2$ .

Las evidencias experimentales quedan demostradas en las reacciones nucleares.

- 23** ¿Qué concluye la teoría de la relatividad acerca de la masa y la energía?

La masa es una forma de energía.

- 24** Elabora un cuadro-esquema que recoja las relaciones y diferencias entre la relatividad galileana y la einsteiniana.

El siguiente cuadro-esquema tiene carácter orientativo:

Relatividad galileana	Relatividad einsteiniana
<b>Concepto de tiempo.</b> El tiempo entre dos sucesos es siempre el mismo medido desde cualquier sistema de referencia. El tiempo es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	<b>Concepto de tiempo.</b> El tiempo es relativo, y el intervalo entre dos sucesos depende del sistema de referencia y del movimiento relativo.
<b>Concepto de distancia.</b> La distancia entre dos puntos es invariable para cualquier sistema de referencia inercial. El espacio es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	<b>Concepto de distancia.</b> La distancia entre dos puntos es distinta según la mida un observador estacionario o uno que se encuentre en movimiento relativo entre ambos. Únicamente tiene sentido hablar de espacio-tiempo y no de espacio como realidad absoluta.
<b>Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales.</b> Se llevan a cabo mediante las transformaciones galileanas.	<b>Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales.</b> Se realizan mediante las transformaciones de Lorentz, que conducen a la constancia de $c$ , a su carácter de velocidad límite y a la paradoja de que $c + c = c$ .

### Transformaciones de Galileo

- 25** Dentro de un vagón de tren que se mueve con una velocidad de 90 km/h, un pasajero lanza una pelota con una velocidad de 30 km/h a una persona que viaja en la parte trasera. ¿A qué velocidad se desplaza la pelota para esta última persona?

Puesto que ambos se encuentran en el mismo sistema inercial, la velocidad que miden para la pelota es la misma, es decir, 30 km/h.

### Relatividad especial de Einstein

- 26** ¿Podrían ser simultáneos dos sucesos para dos observadores inerciales si la velocidad relativa que existe entre ambos es de  $0,5 \cdot c$ ?

Sí podría ser simultáneo, pero con la condición expuesta y explicada en la actividad número 3.

- 27** ¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial, tampoco lo serán en otro estacionario con respecto al anterior»?

La proposición es falsa. Imaginemos que el observador  $O$  se encuentra situado entre los puntos  $A$  y  $B$  a la misma distancia de ambos, en los que se hallan dos potentes reflectores.

Por el contrario, el observador  $O'$  está, por ejemplo, en la misma dirección, pero más próximo a  $B$  que a  $A$ . Si el observador  $O$  lanza un destello, percibirá los reflejos de  $A$  y  $B$  a la vez. Por tanto, los sucesos  $A$  y  $B$  son simultáneos para él.

Sin embargo, para  $O'$ , el suceso  $B$  tiene lugar antes que  $A$  y no son, por tanto, simultáneos. En consecuencia, no estarían de acuerdo sobre la simultaneidad, pese a hallarse ambos observadores estacionarios uno con respecto al otro.

- 28** ¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial determinado, no lo serán en ningún sistema inercial»?

Como acabamos de ver en la cuestión anterior, la proposición es falsa, pues es más general que la anterior.

- 29 ¿Sería posible rejuvenecer viajando a velocidades próximas a las de la luz?

No sería posible en absoluto. La percepción del tiempo para el viajero no cambia con respecto a la que tenía en Tierra; por tanto, no rejuvenece ni envejece más lentamente según su propia percepción. Sin embargo, sí parecería hacerlo para un observador que estuviera en la Tierra, el cual percibiría que el tiempo transcurre más lentamente para aquel.

- 30 Si la velocidad de la luz es la mayor posible, ¿resulta congruente afirmar que un astronauta que viaja a una velocidad inferior a la de la luz tarda 6 años en recorrer cierta distancia si la luz lo hace en 10 años?

La luz tarda diez años desde la percepción temporal de un observador que esté en Tierra. Sin embargo, el astronauta solo puede tardar seis años desde su propia percepción, es decir, según los relojes de a bordo. El que el tiempo empleado según sus relojes sea menor se debe a que, en su sistema, la longitud resulta contraída.

En cualquiera de los casos, el viaje, según los relojes terrestres, nunca sería inferior a diez años. Por tanto, la aparente incongruencia radica en que el tiempo se ha medido en distintos sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo.

- 31 ¿Implica el fenómeno de la dilatación del tiempo que una persona vive más tiempo al viajar en una nave que se desplaza a velocidades próximas a las de la luz? ¿Percibe esta persona un envejecimiento más lento?

No lo implica. Véase la explicación de la actividad final número 30.

- 32 En el interior de una nave que se mueve con una velocidad de  $0,8 \cdot c$  hay una vara de dos metros. ¿Qué longitud medirá el astronauta de su interior?

La longitud que medirá el astronauta del interior de la nave será de 2 m, pues la vara no se mueve con respecto al astronauta.

- 33 Si pasáramos junto a un planeta con una velocidad próxima a la de la luz, ¿veríamos contraídas las dimensiones del planeta?

Solo veríamos contraída la dimensión en la dirección del movimiento. Así pues, a ojos del observador de la nave, el planeta adquiriría la forma de un elipsoide, es decir, la que tiene un balón de rugby.

- 34 ¿Por qué no apreciamos nunca la contracción de la longitud en las experiencias cotidianas?

No apreciamos esto porque a las velocidades cotidianas, el factor  $\gamma$  es básicamente igual a 1.

- 35 PAU Si la vida media propia de un muón es de 2 microsegundos, determina:

- Su vida media desde el sistema terrestre si se mueve con una velocidad de  $0,99 \cdot c$ .
  - La distancia que recorrerá, desde el punto de vista del sistema terrestre, antes de desintegrarse.
  - La distancia que recorrerá desde el punto de vista de su propio sistema.
- a) Desde el sistema terrestre, la vida propia de un muón sería de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 7,088$$

Por tanto:

$$\Delta t = 14,17 \mu s$$

- b) La distancia que recorrerá desde el punto de vista terrestre será:

$$d = v \Delta t = (0,99 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 14,17 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4208,5 \text{ m}$$

- c) Desde el punto de vista del sistema centrado en el muón, dicha distancia es:

$$d' = v \Delta t' = (0,99 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 594 \text{ m}$$

- 36 ¿A qué velocidad relativa debería moverse una nave para que la distancia entre dos puntos se redujera en un 40% con respecto a la distancia medida desde la Tierra?

Si la distancia entre dos puntos ha de reducirse un 40%, entonces:

$$l' = 0,6 \cdot l$$

Por lo que:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$0,6 \cdot l = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La velocidad relativa de la nave es:

$$v = 0,8 \cdot c$$

- 37 PAU Una astronauta de 40 años de edad deja en la Tierra a una hija de 10 años. ¿Cuánto tiempo debería estar viajando en una nave que surca el espacio a  $0,95 \cdot c$ , para que, al regresar, su hija sea 10 años mayor que ella? Determina el tiempo en ambos sistemas.

La edad de la astronauta, a su regreso, es de  $40 + \Delta t'$  años, mientras que la de la hija que dejó en Tierra será de  $10 + \Delta t$ . Puesto que la madre es a su regreso, diez años más joven que la hija, debe cumplirse que:

$$40 + \Delta t' = (10 + \Delta t) - 10 \Rightarrow 40 + \Delta t' = \Delta t$$

Por otra parte,  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ , por lo que tendremos que:

$$40 + \Delta t' = \gamma \Delta t' \Rightarrow 40 = \Delta t' (\gamma - 1)$$

Es decir:

$$\Delta t' = \frac{40}{\gamma - 1}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3,2$$

Por tanto:

$$\Delta t' = 18,18 \text{ años}$$

mientras que:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 58,18 \text{ años}$$

Es decir, desde el punto de vista del sistema terrestre, la astronauta debería estar viajando durante un período de 58,18 años a esa velocidad, mientras que desde el punto de vista de la propia astronauta, habrán transcurrido 18,18 años.

- 38 María y Ana son dos gemelas que tienen 30 años de edad. María emprende un viaje de ida y vuelta a la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz de la Tierra, a una velocidad de  $0,95 \cdot c$ . ¿Qué edades tendrán las dos hermanas cuando María regrese a la Tierra?

Desde el punto de vista de Ana, que se ha quedado en Tierra, el tiempo transcurrido ha sido de:

$$\Delta t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \cdot 8,7 \cdot c}{0,95 \cdot c} = 18,31 \text{ años}$$

mientras que el tiempo transcurrido en el sistema de María es:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 5,72 \text{ años}$$

pues:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3,2$$

De este modo, a su regreso, María se conservará más joven (35,72 años), mientras que Ana tendrá 48,31 años.

- 39 PAU** Una nave realiza un viaje interestelar a  $0,999 \cdot c$ . ¿Cuánto tiempo ha transcurrido según los relojes terrestres si, según los de a bordo, la nave lleva 4 años viajando?

El tiempo transcurrido según los relojes terrestres viene dado por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 22,36$$

Por tanto:

$$\Delta t = 89,44 \text{ años}$$

- 40 PAU** Con respecto a un observador estacionario, la longitud de una nave en reposo es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueva con una velocidad de  $2,4 \cdot 10^8$  m/s?

La longitud que medirá vendrá dada por:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos ofrecidos, se obtiene:

$$l' = 50 \cdot \sqrt{1 - \frac{(2,4 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} = 30 \text{ m}$$

## Transformaciones de Lorentz

- 41** ¿Por qué motivo no cambia el parámetro  $\gamma$  en las transformaciones de Lorentz de O a O' con respecto a las transformaciones de O' a O?

Dicho parámetro no cambia porque no puede admitirse ningún sistema de referencia privilegiado fijo o en reposo. Es decir, dos sistemas se mueven relativamente entre sí, de modo que cada uno percibe que el otro se aleja con cierta velocidad. Por este motivo, el factor  $\gamma$  debe ser el mismo en las transformaciones directa e inversa.

- 42 PAU** Un móvil, A, se desplaza con una velocidad de  $0,9 \cdot c$  en la dirección positiva del eje X con respecto a un observador O. Otro móvil, B, se desplaza con una velocidad de  $0,8 \cdot c$  con respecto a A, también en la dirección positiva del eje X. ¿Cuál es la velocidad de B con respecto a O?

Denominamos  $v'_x$  a la velocidad de B con respecto a A. Del mismo modo, denominaremos  $v$  a la velocidad de A con respecto a O. Así pues, para determinar la velocidad de B con respecto a O, hay que realizar la transformación inversa de la velocidad de Lorentz.

Para ello, partimos de la expresión 12.16:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Se trata de determinar  $v'_x$ , conocidas  $v'_x = 0,8 \cdot c$ , y  $v = 0,9 \cdot c$ . Despejando, obtenemos:

$$v'_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x}$$

Sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$v'_x = \frac{0,8 \cdot c + 0,9 \cdot c}{1 + \frac{0,9 \cdot c}{c^2} \cdot 0,8 \cdot c} = 0,988 \cdot c$$

Observa que el resultado de la transformación galileana nos habría llevado a una velocidad superior a  $c$ .

$$v'_x = v'_x + v = 0,8 \cdot c + 0,9 \cdot c = 1,7 \cdot c$$

- 43 PAU** Una nave espacial avanza en la dirección negativa del eje X con una velocidad de  $0,9 \cdot c$  con respecto a la Tierra, mientras otra lo hace en la dirección positiva del eje X con la misma velocidad en relación con nuestro planeta.

Determina:

- a) La velocidad relativa de una nave con respecto a la otra.  
b) Esa velocidad, pero aplicando las transformaciones galileanas.

a) Consideremos como sistema O' la nave que avanza en el sentido negativo del eje X. En ese caso:

$$v = -0,9 \cdot c$$

$$v_x = 0,9 \cdot c$$

Por tanto, la velocidad de la otra nave con respecto a la primera será:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = 0,994 \cdot c$$

b) Aplicando las transformaciones galileanas, esta velocidad sería:

$$v'_x = v_x - v = 1,8 \cdot c$$

## Masa y energía relativistas

- 44** ¿Qué significado físico tiene afirmar que la masa en reposo de un fotón es nula?

Véase la resolución de la actividad número 12.

- 45** Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona tu respuesta: «A velocidades próximas a la de la luz, la masa de las partículas aumenta».

La proposición puede considerarse verdadera, pero haciendo una matización: la masa de las partículas aumenta si se incrementa la velocidad, hasta un valor próximo al de la luz.

Así pues, la masa no aumenta por el hecho de moverse a una velocidad próxima a la de la luz que sea constante, sino por el incremento de la velocidad.

- 46** ¿Qué le sucede a la masa de una partícula cuando aumenta su energía cinética? ¿Y a la velocidad?

Para velocidades no relativistas, un aumento de la energía cinética no supone ningún cambio en la masa de una partícula, pero sí un incremento de su velocidad. Sin embargo, a velocidades relativistas, una elevación de la energía cinética sí puede conllevar un aumento de la velocidad.

Ahora bien, la velocidad tiene un límite superior y para  $v = c$ , la energía cinética sería infinita. Esto se debe a que, a velocidades relativistas, un aumento de energía cinética se traduce en un incremento de masa.

¿A qué velocidad será la masa de un cuerpo el doble que la que tiene en reposo?

Si la masa relativista ha de ser el doble que la masa en reposo, entonces:

$$\gamma m_0 = 2 \cdot m_0 \Rightarrow \gamma = 2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

la velocidad pedida es:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

**Comentario:** resulta conveniente expresar  $v$  como  $v = xc$  y determinar  $x$  como se explica en el problema resuelto número 4 (página 347). Haciéndolo así, se obtiene:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

**48** **PAU** Un neutrón tiene una energía en reposo de 939,573 MeV. ¿Cuál es su masa (en kg) en dicho estado?

La energía en reposo viene dada por la siguiente expresión:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Luego, si:

$$E_0 = 939,573 \cdot 10^6 \text{ eV} = 1,5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

entonces:

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{1,5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

**49** **PAU** Un neutrón se mueve con una velocidad de  $0,9 \cdot c$ .

a) ¿Cuál es su masa relativista?

b) ¿Cuál será entonces su momento lineal?

a) La masa relativista del neutrón será:

$$m_{\text{relativista}} = \gamma m_0$$

donde  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

Por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,29$$

Por tanto:

$$m_{\text{relativista}} = \gamma m_0 = 3,84 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

b) El momento lineal valdrá, entonces:

$$p = m_{\text{relativista}} v = \gamma m_0 \cdot 0,9 \cdot c = 1,03 \cdot 10^{-18} \text{ kg m/s}$$

**50** **PAU** Un haz de protones se acelera hasta alcanzar una energía de 900 MeV. Calcula la velocidad de dichas partículas. Datos:  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Si la energía cinética que adquieren es de 900 MeV ( $1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ ), entonces:

$$E_c = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

De donde:

$$\gamma - 1 = \frac{1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{m_0 c^2} = 0,956 \Rightarrow \gamma = 1,956$$

Si consideramos  $v$  en términos de  $c$  (véase problema resuelto número 4),  $x$  valdrá:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0,86$$

Por tanto:

$$v = 0,86 \cdot c = 2,57 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

**51** **PAU** Un mesón  $\pi^0$  tiene una energía en reposo de 135 MeV y se mueve con una velocidad de  $0,85 \cdot c$ . Determina:

a) Su energía total.

b) Su energía cinética.

c) Su momento lineal.

a) La energía total del mesón viene dada por:

$$E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

donde  $E_0$  es la energía en reposo y, por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,898$$

De este modo:

$$E_{\text{total}} = 256,23 \text{ MeV}$$

b) La energía cinética es:

$$E_c = E_{\text{total}} - E_0 = 121,23 \text{ MeV}$$

c) El momento lineal es:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{\gamma m_0 c^2 \cdot 0,85}{c} = 217,80 \text{ MeV}/c$$

**52** **PAU** La energía total de una partícula es el doble que su energía en reposo. ¿Con qué velocidad se mueve?

Puesto que  $E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2$ , y  $E_0 = m_0 c^2$ , si  $E_{\text{total}} = 2 \cdot E_0$ :

$$\gamma = 2$$

Por tanto, la velocidad de la partícula será  $v = xc$ , donde  $x$  valdrá:

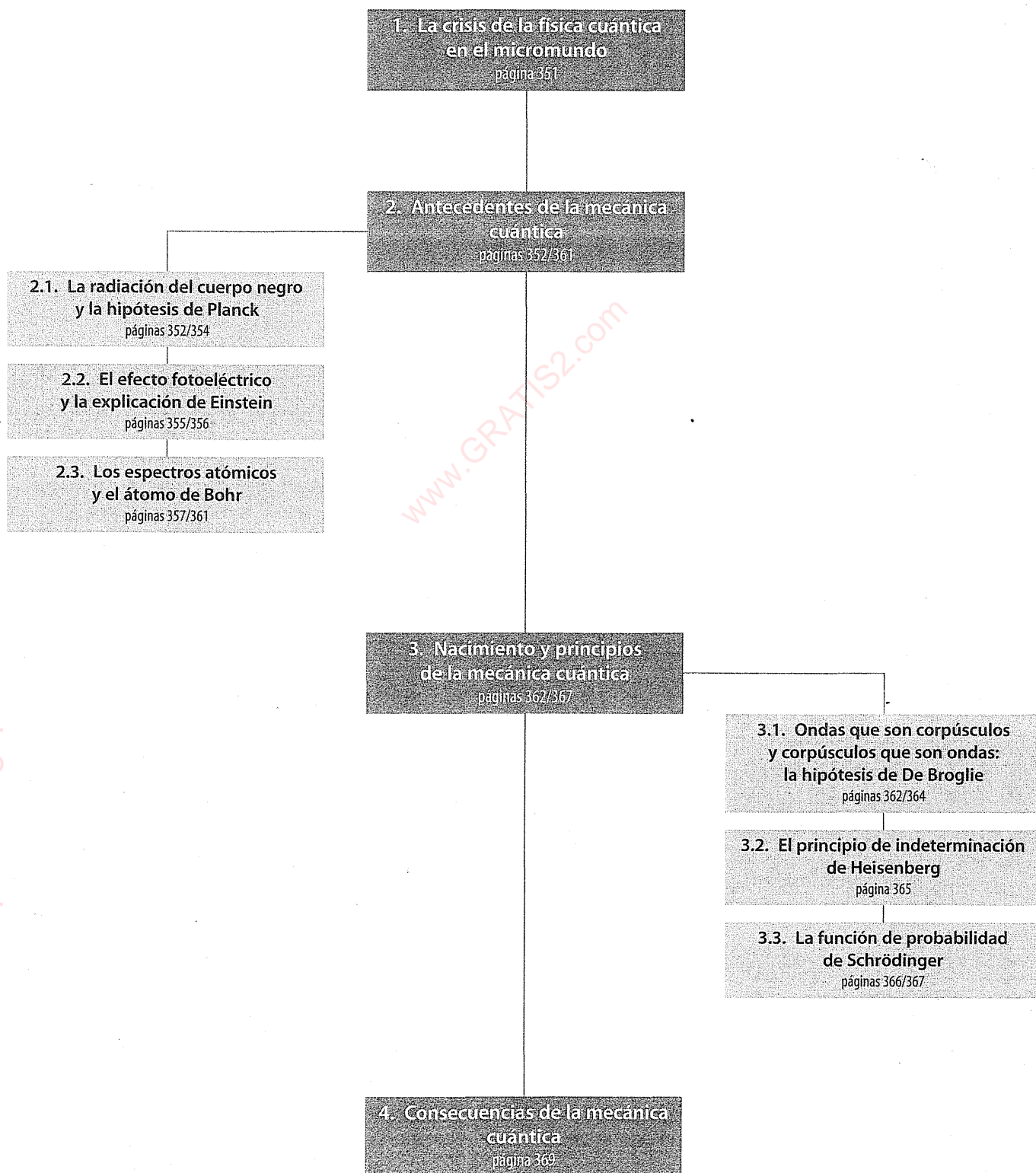
$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0,866$$

Así pues, la velocidad es de  $0,866 \cdot c$ .

# 13

# Fundamentos de la mecánica cuántica

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D



www.1FISICA.blogspot.com  
www.GRATIS2.com  
www.librospdf1.blogspot.com

www.GRATIS2.com



## Cuestiones previas (página 350)

1. Un cuerpo que se calienta emite, en un primer momento, radiación térmica no visible. ¿Qué pasa a medida que seguimos calentándolo?

A medida que calentamos el cuerpo irá cambiando de color. Ese calor que inicialmente percibimos es radiación infrarroja invisible.

Conforme vamos calentando el cuerpo pasará por el color rojo, por tanto, emite en la frecuencia más baja del espectro visible. Si seguimos calentado al cuerpo, este cambiará a tonos más brillantes, se convierte en un cuerpo amarillo e incluso llegando al blanco. Esto significa que la frecuencia que emite un cuerpo irá aumentando con la temperatura.

2. ¿En qué momento aparece la idea de que la energía está cuantizada? ¿Qué fenómeno se logra explicar con dicha idea?

El primero que sugirió la cuantización de la energía fue Max Planck quién entonces enunció la hipótesis de que la radiación electromagnética es absorbida y emitida por la materia en forma de cuantos de luz o fotones de energía.

Einstein retomó el trabajo de Planck y extendió su estudio a la propia naturaleza y propagación de la luz. Se logra dar una explicación al efecto fotoeléctrico.

3. ¿Qué son los espectros atómicos? ¿Qué modelo de átomo logra dar una primera explicación satisfactoria del espectro más simple del átomo de hidrógeno?

El espectro atómico de un elemento es el conjunto de frecuencias de las ondas electromagnéticas emitidas por ese elemento y es característico de cada elemento.

El primer modelo de átomo que logra dar una explicación es el modelo de Bohr.

4. ¿Sigue vigente la división tradicional entre ondas y partículas?

Sí sigue vigente sobretodo para explicar insospechados efectos y fenómenos que tienen lugar a escala subatómica.

5. Si los electrones son partículas, como parece demostrado, ¿podrían dar lugar a fenómenos de difracción?

Si pueden los electrones dar lugar al fenómeno de la difracción. Fue de forma accidental C. J. Davisson y L. H. Germer, estudiando la dispersión de electrones en un blanco de níquel.

## Actividades (páginas 353/365)

1. Vega es una estrella azulada de la constelación de Lira, mientras que Aldebarán es una gigante roja de la constelación de Tauro. ¿Cuál de las dos tiene una mayor temperatura superficial?

Como se desprende de la ley de Wien, puesto que la longitud de onda del azul es menor que la del rojo, la temperatura superficial de Vega es mayor que la de Aldebarán.

2. Dada la temperatura superficial de nuestro cuerpo, ¿qué tipo de radiación emiten los seres humanos?

La temperatura de nuestro cuerpo es de unos 37 °C (310 K), por lo que, en virtud de la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0,2897 \text{ cm K}}{310 \text{ K}} = 9,345 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 9345 \text{ nm}$$

Esta longitud de onda corresponde al infrarrojo, que es el tipo de radiación que emiten los seres humanos.

3. ¿Cuál es el tamaño energético de un cuanto de luz amarilla de 510 nm?

El tamaño energético será:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda}$$

y sustituyendo los datos:

$$E = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 3,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,44 \text{ eV}$$

4. Sustituyendo los valores de las constantes que figuran en la expresión 13.21 de Bohr, demuestra que la constante que aparece fuera del paréntesis tiene el mismo valor que la constante de Rydberg.

Los valores de las constantes son las siguientes:

- $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$
- $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
- $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$

Al sustituirlos en la expresión 13.21, se obtiene el valor de la constante de Rydberg:

$$\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 107\,643,9 \text{ cm}^{-1}$$

La desviación del conocido valor se debe a las aproximaciones decimales de las constantes involucradas.

5. PAU Cuando un electrón pasa a órbitas superiores, ¿aumenta su energía total? ¿Y su energía cinética? Demuéstralo utilizando las expresiones pertinentes.

La energía total del electrón (para el átomo de hidrógeno) sí aumenta, como se puede ver en la siguiente expresión:

$$E_{\text{total}} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

Según esto, al incrementarse el valor de  $n$  y ser la energía total negativa, aumentará la energía total. Por el contrario, la energía cinética del electrón viene dada por la expresión:

$$E_c = \frac{1}{8} \cdot \frac{m_e e^4}{\epsilon_0^2 n^2 h^2}$$

por lo que al aumentar el valor de  $n$ , disminuye la energía cinética.

6. Calcula la longitud de onda asociada a:

- a) Un electrón que tiene una energía cinética de 200 eV.  
b) Un protón que tiene una energía cinética de 104 eV.

a) Teniendo en cuenta que  $E_c = p^2/2m$  (desde el punto de vista clásico, aplicable cuando  $v \ll c$ , como es el caso del electrón de esta actividad), tenemos que:

$$p = \sqrt{2mE_c}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 8,687 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,0868 \text{ nm}$$

donde se ha considerado que la energía cinética vale 200 eV ( $3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ ).

b) Procediendo de idéntico modo:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 2,865 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

**7** Halla la longitud de onda asociada a los siguientes cuerpos e indica a qué zona del espectro corresponde cada una de ellas:

a) Un neutrón que se mueve con una velocidad de 10 km/s.

b) Una pelota de 20 g de masa que se mueve a una velocidad de 20 m/s.

a) En este caso:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 3,96 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Se trata de una longitud de onda correspondiente a radiaciones gamma.

b) En este caso:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}} = 1,66 \cdot 10^{-33} \text{ m}$$

Evidentemente, para cuerpos y velocidades del dominio clásico, la longitud de onda tiende a cero, como es el caso, pues no se contemplan propiedades ondulatorias en el movimiento de dichos cuerpos.

**8** Calcula la indeterminación mínima de la cantidad de movimiento de un electrón confinado en un átomo de 1 Å de diámetro, así como su energía cinética mínima.

Asumiremos que el tamaño del átomo es la indeterminación posible en la posición del electrón.

Así pues, la mínima indeterminación posible en la cantidad de movimiento del electrón se obtendrá de este modo:

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2\pi \Delta x}$$

Puesto que  $\Delta x = 10^{-10} \text{ m}$ , al sustituir, se obtiene:

$$\Delta p = 1,056 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

Según esto, el mínimo valor posible de momento lineal del electrón sería igual a su incertidumbre. Dado que  $E_c = p^2/2m$ , la energía cinética mínima será:

$$E_{c \text{ min}} = \frac{\Delta p^2}{2m} = 6,11 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,82 \text{ eV}$$

## Questiones y problemas (páginas 370/371)

### Guía de repaso

**1** ¿Qué problema dio pie a la introducción del concepto de cuanto de energía?

No explicaba la curva de emisión de un cuerpo negro debido a que los cuantos de mayor frecuencia podrían emitir mayores energías.

**2** ¿Cómo varía la longitud de onda de la radiación emitida por un cuerpo caliente conforme se aumenta la temperatura? ¿Sabrías citar ejemplos que lo avalen?

Disminuye su longitud de onda que viene determinada por la ley de desplazamiento de Wien.

Por ejemplo, los cambios de coloración del carbón o de un metal fundido cuando aumentamos su temperatura.

**3** ¿Qué es un cuerpo negro? ¿Cómo podemos «construir» un cuerpo negro?

Un cuerpo negro es aquel que absorbe todas las radiaciones; en consecuencia, es también un emisor ideal.

Podemos construir un cuerpo negro mediante una caja herméticamente cerrada y practicando un pequeño orificio en ella.

**4** ¿Cómo es posible que un cuerpo negro se considere el emisor o radiador ideal si absorbe todas las radiaciones?

Si un cuerpo se encuentra en equilibrio térmico, la energía que absorbe debe ser igual a la que emite. En consecuencia, un cuerpo negro en equilibrio térmico es un emisor ideal por ser un absorbente ideal.

**5** ¿Qué leyes empíricas describen la radiación de un cuerpo negro? Enúncialas.

- Ley de Stefan-Boltzmann: La intensidad de la radiación térmica de un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.

- Ley de desplazamiento de Wien: El producto de la longitud de onda correspondiente al máximo de emisión por la temperatura absoluta es constante.

**6** ¿A qué resultados conducían las teorías clásicas en su intento de interpretar el problema del cuerpo negro?

Conducían a la llamada «catástrofe ultravioleta».

**7** ¿A qué se llama catástrofe ultravioleta?

Se llama catástrofe ultravioleta al hecho de que, según los resultados clásicos del problema de la emisión del cuerpo negro, para longitudes de onda muy pequeñas (del orden de las ultravioletas), la potencia irradiada tendería a infinito.

**8** ¿Cuál es el procedimiento que sigue Planck al abordar el problema del cuerpo negro?

En primer lugar formuló la ecuación matemática que se ajustara de una manera general a todas las gráficas y, una vez encontradas, buscó una interpretación física.

**9** ¿Por qué decimos que la constante de Planck es universal? ¿Hay hechos que puedan demostrarlo?

Puesto que la radiación electromagnética se rige por las mismas leyes, con independencia del origen de su emisión, y estas radiaciones encuentran explicación en la teoría de Planck, la constante  $h$  se convierte en universal.

**10** ¿Qué hipótesis plantea Planck en la resolución del problema del cuerpo negro?

El número de osciladores de baja frecuencia es muy superior al de osciladores de alta frecuencia.

**11** ¿Qué es el efecto fotoeléctrico? ¿Conoces algunas aplicaciones de este efecto?

El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones por un material cuando se le ilumina con radiación electromagnética. Las células fotoeléctricas basan su funcionamiento en dicho efecto.

**12** ¿Cómo se descubrió el efecto fotoeléctrico?

Mediante el experimento de Hertz.

**13** ¿Cómo puede determinarse la energía cinética de los electrones que saltan en el efecto fotoeléctrico?

Mediante la expresión 13.7 conocida también como la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico. Si conocemos el trabajo de extracción necesario para arrancar un electrón y la energía del fotón incidente podremos calcular dicha energía cinética.

**14** ¿Qué características presenta el efecto fotoeléctrico?

Solo se emiten electrones cuando la frecuencia de la luz que incide sobre la placa supera cierto valor que se denomina frecuencia umbral, y que es característico de cada metal. Por debajo de dicha frecuencia umbral no hay emisión de electrones. Por encima de dicha frecuencia umbral, un aumento de intensidad luminosa produce un incremento del número de electrones emitidos, pero no de su energía cinética máxima.

El número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación luminosa recibida.

**15** ¿Qué diferencia hay entre la idea de los cuantos de Planck y la de los de Einstein? ¿Qué son los fotones?

Los cuantos de Planck se introducen para explicar los fenómenos de absorción y emisión de energía por parte de los átomos. Por tanto, en realidad, están relacionados únicamente con la naturaleza de los átomos. La idea de Einstein es que es la propia luz la que está constituida por cuantos de energía de diversos «tamaños», de modo que la energía que transporta una radiación electromagnética no está repartida de manera uniforme, sino que se encuentra concentrada en forma de cuantos, a los que se dio el nombre de fotones. De ese modo, la luz recuperaba su naturaleza corpuscular.

**16** ¿Qué significa la ecuación de Einstein que describe el efecto fotoeléctrico?

Significa que un aumento de intensidad solo supone un incremento del número de fotones que llegan a la superficie, con lo que es mayor el número de electrones arrancados, pero no su energía cinética.

**17** ¿Qué reconocimiento experimental tuvo la teoría de los cuantos en 1916?

La demostración experimental que hizo Millikan de  $h$  a partir del efecto fotoeléctrico.

**18** ¿Cómo calculó Millikan la constante de Planck?

Midiendo en un mismo metal los potenciales de frenado necesarios para distintas radiaciones incidentes de frecuencias conocidas. El valor que obtuvo concordaba con el que Planck había usado en su explicación de la emisión del cuerpo negro.

**19** ¿Qué es un espectro atómico? Describe el dispositivo experimental que nos permite obtenerlos.

Es el conjunto de frecuencias de las ondas electromagnéticas emitidas por átomos de ese elemento. Haciendo pasar luz blanca por una rendija estrecha y se descompone luego en un prisma (ver figura 13.8).

**20** ¿Qué características hicieron que los espectros se convirtieran en objeto de estudio de muchos científicos?

Debido a que como el espectro es algo característico de cada elemento esta relacionado con la naturaleza de los átomos que constituyen dicho elemento.

**21** ¿Qué regularidad observó Balmer? ¿Para qué espectro? ¿Cómo la formuló matemáticamente?

La regularidad que encontró fue la constante de Rydberg para el átomo de hidrógeno a través de la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

**22** ¿Qué expresión general representa las series espectrales? ¿Cuántas series espectrales se conocen para el hidrógeno atómico?

La expresión general es:

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Se conocen las series: Lyman, Balmer, Paschen, Brackett, Pfund y Humphreys.

**23** ¿Qué problema se le planteó al modelo atómico propuesto por Rutherford?

La estabilidad de los átomos requería que los electrones giraran alrededor del núcleo en diferentes órbitas. En este punto, sin embargo, la física clásica volvía a introducir otra contradicción: los electrones en movimiento circular periódico debían emitir radiación electromagnética de modo continuo.

Esto llevaba inexorablemente a concluir que su trayectoria acabaría en el núcleo.

**24** ¿Cómo resuelve Bohr el problema de Rutherford?

Mediante la condición de cuantización de la energía de Planck y Einstein y la condición de cuantización del momento angular.

**25** ¿Qué expresión nos da el radio permitido (en Å) de las órbitas de Bohr?

La expresión:

$$r = 0,53 \cdot n^2 \text{ \AA}$$

**26** ¿Cuál es la explicación que da el modelo de Bohr del espectro del hidrógeno?

Por un lado explica que los átomos solo emitirán aquellas energías que corresponden a diferencias de energía entre las distintas órbitas y, por otro lado, que la separación energética entre niveles superiores sea menor que entre niveles inferiores.

**27** ¿Por qué la serie de Lyman aparece en el ultravioleta según este modelo?

Porque equivale a los valores del espectro dentro de la zona del ultravioleta.

**28** ¿Qué hipótesis plantea De Broglie? ¿Obtuvo confirmación experimental?

Consiste en sugerir que la naturaleza debía regirse por leyes simétricas, de modo que si una onda (como la luz) tenía propiedades corpusculares, un corpúsculo (como el electrón) debía tener propiedades ondulatorias.

Consiguió confirmación experimental a través de la difracción e interferencia de los electrones.

**29** ¿Cómo explica De Broglie el concepto de órbita estacionaria de Bohr? ¿Cómo obtiene el segundo postulado?

Para De Broglie una órbita estacionaria es aquella que corresponde al establecimiento en su seno de una onda estacionaria del electrón.

El segundo postulado lo obtiene desde un punto de vista ondulatorio y con la condición de cuantización de Bohr.

**30** ¿Qué afirma el principio de indeterminación? ¿Tiene correlación este principio con la mecánica clásica?

El principio de indeterminación afirma que el producto de las indeterminaciones de medida de la posición y del momento lineal es, como mínimo, igual a la constante de Planck dividida por  $2\pi$ , de modo que cuanto mayor sea la precisión en la medida de la posición, mayor será la imprecisión del momento lineal, y viceversa.

Sí tiene correlación ya que en la mecánica clásica a medida que aumenta la masa, el producto de las indeterminaciones tiende a disminuir y se acerca a cero.

**31** ¿Qué es la energía del punto cero?

La energía del punto cero es la energía cinética a 0 K que implica que existe movimiento.

**32** ¿Qué significado tiene la función de onda introducida por Schrödinger?

Representa la probabilidad máxima de encontrar un electrón en un determinado volumen.

**33** ¿Existe algún símil clásico de la ecuación ondulatoria de Schrödinger?

Sí existe un símil clásico que es el cálculo de la energía de un sistema se realiza a partir de la energía cinética y potencial.

**34** ¿Mantiene la mecánica cuántica el concepto de órbita del átomo de Bohr?

No la mantiene, la idea de las trayectorias precisas de Bohr se sustituye por zonas o regiones donde existe máxima probabilidad de hallar al electrón.

### Radiación del cuerpo negro

**35** Si el color negro es el que más radiaciones absorbe, ¿por qué los exploradores de los polos utilizan habitualmente colores claros en las ropas que llevan?

Dado que un buen absorbente es también un buen emisor, podemos concluir, igualmente, que un mal absorbente es también un mal emisor.

Al ser el color blanco un mal absorbente (pues refleja todas las radiaciones), será también un mal emisor, lo que hace que disminuya la pérdida de la propia energía del cuerpo por radiación. Por ese motivo, la ropa aconsejable en zonas polares para preservar la temperatura corporal sería la blanca.

En cualquier caso, los exploradores de los polos suelen usar colores claros y no blancos, con el objeto de no ser confundidos con la nieve y poder ser localizados en caso de extrañarse.

**36** Cuando se representa un cuerpo negro ideal, suele elegirse como cavidad un orificio esférico. ¿A qué es debido esto?

Porque de ese modo el número de reflexiones es mucho mayor, lo que permite que la energía sea absorbida paulatinamente en cada reflexión y evita que vuelva a salir por el orificio.

**37** Al calentar un alambre de platino, este va tomando distintas tonalidades; rojas, naranjas, amarillas, para llegar finalmente al blanco brillante. ¿Por qué no se vuelve verde o azul?

Según puede observarse en la figura 13.3 (página 353), a medida que la temperatura aumenta, el pico de emisión se desplaza hacia longitudes de onda menores; sin embargo, también se observa que aumenta la intensidad de las emisiones correspondientes a las demás longitudes de onda adyacentes. Esto, combinado con la distinta sensibilidad de nuestros ojos a los colores, conduce a que percibamos finalmente un blanco rojizo brillante como resultado de la combinación de las intensidades de los colores presentes.

**38** ¿Cómo se puede determinar la temperatura de la superficie de una estrella?

Se determina analizando la longitud de onda correspondiente a la luz que se emite con máxima intensidad y aplicando la ley de Wien.

**39** La temperatura superficial del Sol es de aproximadamente 6 000 K. ¿A qué longitud de onda y a qué color corresponde el pico de emisión?

Teniendo en cuenta la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0,2897 \text{ cm K}}{6\,000 \text{ K}} = 4,82 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 482 \text{ nm}$$

El pico de emisión correspondería al azul.

### Efecto fotoeléctrico

**40** Cuando un fotón choca con un electrón en la superficie de un material, el fotón transfiere toda su energía al electrón.

a) ¿De qué magnitudes depende la energía que tiene el fotón?

b) ¿Será siempre emitido el electrón con la energía transferida o es preciso que se dé alguna otra condición? Razona tu respuesta.

a) Depende de la frecuencia de la radiación incidente, así como de la constante de Planck.

b) Parte de la energía transferida se emplea en el trabajo de extracción, por lo que la energía cinética del electrón emitido será siempre menor que la del fotón incidente.

**41** **PAU** Sabiendo que el valor de la longitud de onda umbral de la plata es de 262 nm. Determina la energía cinética de los electrones emitidos si se ilumina la superficie con una radiación incidente de 200 nm.

Puesto que:

$$hf = hf_0 + E_c$$

entonces:

$$E_c = h(f - f_0) = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 2,35 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

**42** **PAU** El potencial de ionización del litio es 5,38 eV. Deduce el valor de la frecuencia y la longitud de onda umbral para que pueda producirse efecto fotoeléctrico. ¿Qué tipo de radiación produce emisión fotoeléctrica en el litio?

Dado que el potencial de ionización es lo mismo que el trabajo de extracción del electrón:

$$f_0 = \frac{E_0}{h} = 1,30 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

donde hemos considerado que 5,38 eV equivale a  $8,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . La longitud de onda umbral será:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 230 \text{ nm}$$

que corresponde a la radiación ultravioleta.

**43** **PAU** El valor del umbral fotoeléctrico para cierto metal es de 2,9 eV. Determina:

a) La frecuencia a partir de la cual un haz de luz podrá arrancar electrones de ese material.

b) La energía cinética máxima, expresada en julios, que podrán tener los electrones arrancados por otro haz cuya longitud sea de  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

a) La frecuencia que corresponde al valor umbral es:

$$f_0 = \frac{E_0}{h} = \frac{4,64 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} = 6,99 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

b) La energía incidente para esa longitud de onda es:

$$E = h \frac{c}{\lambda} = 9,945 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por otro lado:

$$E = E_{\text{umbral}} + E_c \Rightarrow E_c = E - E_{\text{umbral}}$$

Sustituyendo los datos:

$$E_c = (9,945 - 4,64) \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

**44** Sobre un metal inciden fotones cuya longitud de onda es de 500 nm. Si la longitud de onda umbral correspondiente a dicho metal es de 612 nm:

a) Indica si se extraen o no electrones.

b) Determina, en su caso, la energía cinética que tienen los mismos.

c) Calcula la energía de extracción en eV.

a) Sí se extraen electrones, pues, al ser la longitud de onda incidente menor que la umbral, la energía asociada es mayor.

b) La energía cinética de los fotones es:

$$E_c = E_{\text{incidente}} - E_{\text{umbral}} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 7,29 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,455 \text{ eV}$$

c) La energía de extracción o umbral es:

$$E_{\text{umbral}} = h \frac{c}{\lambda_0} = 3,25 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,03 \text{ eV}$$

- 45 **PAU** Se ilumina una superficie pulida y limpia de litio con una radiación de 200 nm de longitud de onda. ¿Con qué velocidad salen los electrones de la superficie?

Puesto que el potencial de ionización del litio es de 5,38 eV ( $8,608 \cdot 10^{-19}$  J), si se ilumina con radiación de 200 nm, le corresponde una energía asociada de:

$$E = h \frac{c}{\lambda} = 9,945 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

entonces, la energía cinética comunicada a los electrones es de:

$$E_c = E - E_0 = 1,337 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De este modo, la velocidad de los electrones será de:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 5,42 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

- 46 **PAU** ¿Qué potencial debe aplicarse para detener los electrones más rápidos emitidos por una superficie de cobre sometida a la acción de una radiación de 1500 Å de longitud de onda, sabiendo que el valor de la energía umbral del cobre es de 4,4 eV?

El potencial de frenado es igual a:

$$V_f = \frac{E_c}{e}$$

Y la energía incidente es:

$$E = h \frac{c}{\lambda} = 1,326 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Puesto que  $E_{\text{umbral}} = 7,04 \cdot 10^{-19}$  J, entonces:

$$E_c = E - E_{\text{umbral}} = 6,22 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por tanto:

$$V_f = 3,88 \text{ V}$$

## Espectros atómicos

- 47 Los espectros de absorción atómicos se fundamentan en el análisis de la luz que llega de cierta fuente después de atravesar una muestra gaseosa de algún elemento. El resultado es un conjunto de líneas negras (ausencia de radiación de ciertas frecuencias) sobre un fondo de espectro continuo. ¿Qué relación guardan dichas líneas negras con el espectro de emisión del elemento gaseoso?

Dichas líneas aparecen exactamente en los mismos lugares (mismas longitudes de onda) del registro gráfico que las líneas de emisión. Un espectro de absorción registra la luz no absorbida por la muestra, apareciendo como líneas negras las zonas cuya longitud de onda o frecuencia corresponde a la luz absorbida. Sin embargo, la energía que un átomo absorbe al excitarse es la que emite cuando vuelve a su estado fundamental; por esa razón, las líneas de absorción y emisión de un espectro son coincidentes.

- D.48 **PAU** El postulado de cuantización del momento angular de Bohr establece valores discretos para esta magnitud. Haciendo uso del principio de correspondencia, demuestra que en la mecánica clásica se llega a la ausencia de dicha cuantización.

El principio de correspondencia, formulado por el propio Bohr, establece que, para números cuánticos grandes, se obtienen las predicciones clásicas. En la mecánica clásica, el momento angular, puede adquirir cualquier valor y no existe cuantización alguna. La condición de cuantización del momento angular (en realidad, arbitraria) fue impuesta con el fin de conseguir que las diferencias energéticas entre niveles correspondiesen a las transiciones energéticas de las líneas espectrales.

Dado que la energía de las órbitas de Bohr para el átomo de hidrógeno viene dada por la expresión  $-13,6/n^2$  eV, la diferencia de energía entre niveles tiende a cero para valores grandes de  $n$ , de modo que en estos casos la energía puede suponerse continua, lo cual se corresponde con la predicción clásica. De ese modo, desaparece también la condición de cuantización del momento angular, que puede adquirir cualquier valor.

- 49 **PAU** ¿Cómo puede deducirse el potencial de ionización de un elemento a partir del modelo de Bohr?

El potencial de ionización es la mínima energía necesaria para que un electrón deje de estar ligado al núcleo y, por tanto, su energía sea cero (recordemos que la energía de un electrón ligado a un átomo es negativa). En consonancia, con el modelo de Bohr, este valor de energía sería el correspondiente a  $n$  infinito. Por tanto, se trataría de calcular la energía absorbida cuando  $n_2$  es infinito.

- 50 ¿Qué relación existe entre el espectro de un átomo de helio ionizado y el del hidrógeno?

Ambos son monoeléctricos, pero, en el caso del helio ionizado, la carga nuclear es  $Ze$ . Si se desarrolla la expresión de la energía emitida al pasar de una órbita superior a una inferior, aparecerá el término  $Z^2$ , lo que significa que las líneas correspondientes a las series espectrales aparecen desplazadas en el caso del helio con respecto al hidrógeno. Concretamente, como  $Z = 2$ , los números de onda de las líneas del helio ionizado serán cuatro veces mayores.

- 51 **PAU** Al excitar un átomo de hidrógeno, su electrón pasa a otro nivel energético y absorbe 12 eV. Calcula la frecuencia y la longitud de onda de la radiación emitida cuando vuelve a su estado fundamental.

La energía emitida al volver a su estado fundamental será también de 12 eV =  $1,92 \cdot 10^{-18}$  J. Así pues:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} = 2,9 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

mientras que:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 103 \text{ nm}$$

- 52 **PAU** Con respecto a un átomo de hidrógeno, calcula:

- La energía necesaria, en eV, para excitar el electrón hasta el nivel 5.
- La longitud de onda de la radiación emitida al volver a su estado fundamental.
- La energía que se necesita si se quiere excitar todos los electrones de 1 mol de átomos hasta el nivel 5. Exprésala en J/mol.
- En el átomo de hidrógeno, la energía correspondiente a cada nivel viene dada, en eV, por la expresión de Bohr:

$$E = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

Por tanto, la energía requerida para excitar un electrón hasta el nivel 5 es:

$$E_5 - E_1 = -0,544 - (-13,6) = 13,056 \text{ eV}$$

- Al volver al estado fundamental, emitirá la energía absorbida, por lo que:

$$\Delta E = 13,056 \text{ eV} = 2,08 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Por tanto:

$$\Delta E = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 95 \text{ nm}$$

- Se requerirá una energía igual a:

$$E = N_A \Delta E = 7,86 \cdot 10^{24} \text{ eV/mol} = 1,252 \cdot 10^6 \text{ J/mol}$$

- 53 ¿Cuál es la longitud de onda más corta de la serie de Lyman? ¿Y de la de Balmer?

La longitud de onda más corta es la que corresponde a la mayor transición posible en cada serie y, por tanto, a la mayor energía.

En cada caso, pues,  $n_2 = \infty$ .

De este modo:

- Para la serie de Lyman:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} \right)$$

despejando queda:

$$\lambda = \frac{n_1^2}{R} = 9,11 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 91,1 \text{ nm}$$

- Para la de Balmer:

$$\lambda = \frac{n_1^2}{R} = 364 \text{ nm}$$

- 54 Determina la longitud de onda correspondiente a la tercera raya espectral de la serie de Paschen y calcula luego su frecuencia.

En la serie de Paschen,  $n_1 = 3$ , por lo que:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) \Rightarrow \lambda = 1094 \text{ nm}$$

valor que corresponde, pues, a la zona del infrarrojo.

Por otro lado, la frecuencia de esta raya espectral es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 2,74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

## Mecánica cuántica

- 55 **PAU** ¿Qué significa que las órbitas de Bohr sean estacionarias a la luz de la hipótesis de De Broglie?

Significa que corresponden al establecimiento de ondas estacionarias del electrón en dicha órbita.

Esta condición sí tiene significado físico real y conduce a la cuantización del momento angular.

- 56 Se determina la posición de una partícula y su momento lineal con un error de  $10^{-5} \text{ m}$  y  $10^{-7} \text{ kg m/s}$ , respectivamente.

a) Es imposible, pues esto va en contra del principio de incertidumbre.

b) Es posible, ya que no viola dicho principio.

c) No se puede asegurar si es o no posible; es necesario conocer la energía de la partícula.

El producto de las indeterminaciones es  $10^{-12}$  y, por tanto, mayor que  $h/2\pi$ , por lo que la respuesta correcta es la **b**).

- 57 Un electrón tiene una longitud de onda de 250 nm. ¿A qué velocidad se mueve?

Según el principio de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = 2912 \text{ m/s}$$

- 58 ¿Con qué diferencia de potencial tendríamos que acelerar un electrón para que su longitud de onda fuese de 10 nm?

El momento lineal de un electrón que tuviera esa longitud de onda sería de:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ kg m/s}$$

por lo que su energía cinética sería:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = 2,41 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Así, la diferencia de potencial que habría que aplicar sería:

$$e\Delta V = \Delta E_c \Rightarrow \Delta V = 0,015 \text{ V}$$

- 59 ¿Cuál sería la longitud de onda asociada a una pelota de 50 g que se moviera con una velocidad de 30 m/s?

La longitud de onda asociada será:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 4,4 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

Es decir, es prácticamente cero.

- 60 **PAU** Una partícula de 2  $\mu\text{g}$  se mueve con una velocidad de 5 cm/s. Calcula la indeterminación mínima de su posición teniendo en cuenta que la indeterminación de su velocidad es de un 0,002 %.

La indeterminación de la velocidad es:

$$\Delta v = 0,05 \text{ m/s} \cdot \frac{0,002}{100} = 10^{-6} \text{ m/s}$$

Por tanto, la indeterminación del momento lineal será:

$$\Delta p = m\Delta v = 2 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot 10^{-6} \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ kg m/s}$$

En consecuencia, la indeterminación de la posición viene dada por la expresión:

$$\Delta x = \frac{h}{2\pi\Delta p} = 5,28 \cdot 10^{-20} \text{ m}$$

- 61 **PAU** Si la posición de un electrón puede medirse con una exactitud de  $1,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ , ¿con qué precisión se puede conocer su velocidad?

Datos:  $h = 6,63 \cdot 10^{-36} \text{ J s}$ ;  $m_e 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Si la indeterminación de la posición es  $\Delta x = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ , la de la velocidad será:

$$\Delta v = \frac{h}{2\pi m\Delta x} = 7,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

- 62 Un fotón posee una longitud de onda de  $2,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Calcula:

a) Su cantidad de movimiento.

b) Su energía.

a) El momento lineal o cantidad de movimiento del fotón es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3,31 \cdot 10^{-23} \text{ kg m/s}$$

b) La energía es:

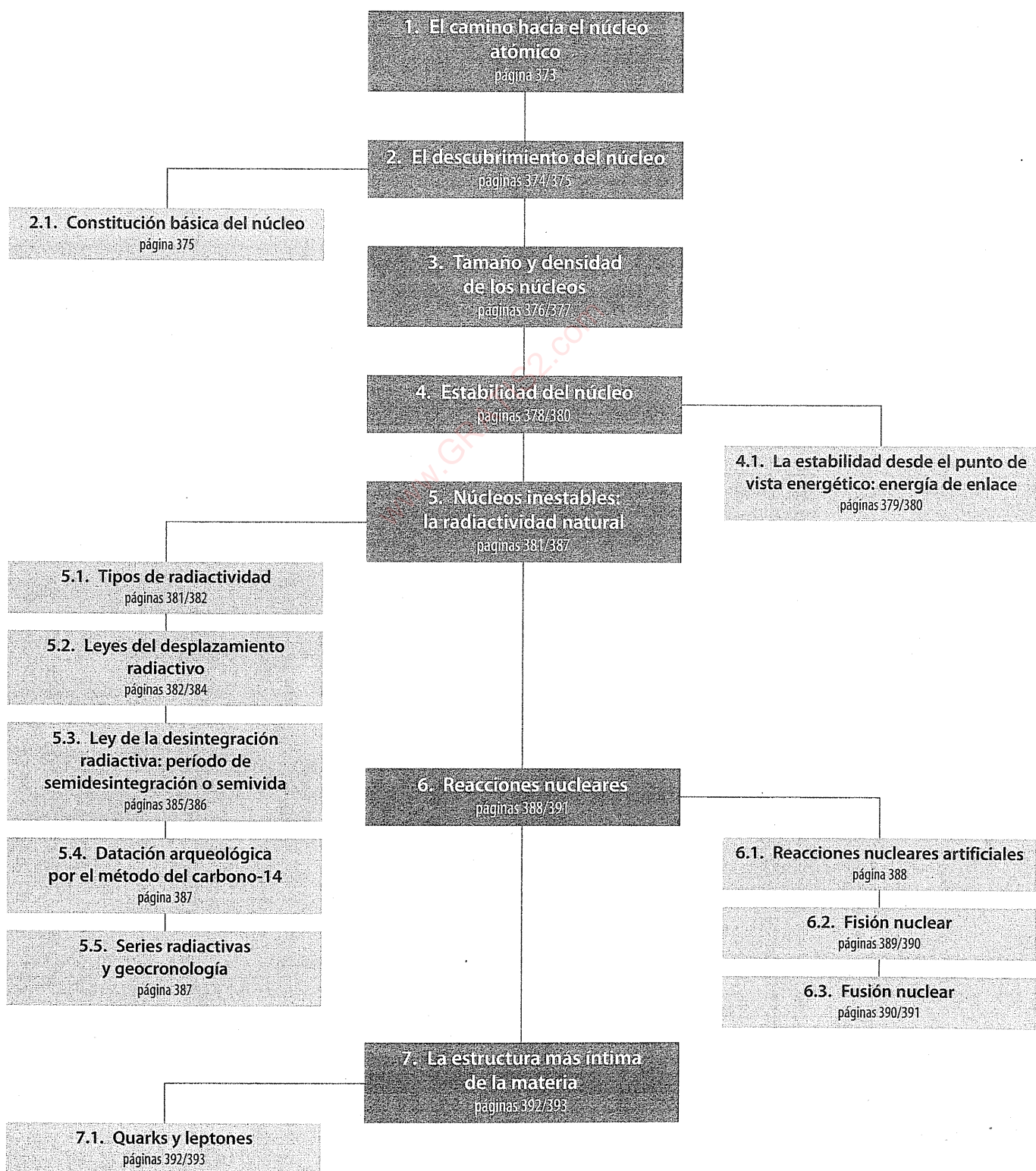
$$E = h \frac{c}{\lambda} = 9,94 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$



# 14

# Física nuclear

## E S Q U E M A D E L A U N I D A D





### Cuestiones previas (página 372)

1. ¿Qué experimento evidenció la naturaleza nuclear del átomo? ¿Qué características tenía que tener el núcleo atómico para dar cuenta de los resultados de dicha experiencia?

El experimento fue llevado a cabo por Rutherford mediante un dispositivo que permitía medir las dispersiones de las partículas alfas que atravesaban una lámina de oro. Estableció después del experimento que toda la masa del átomo se encontraba concentrada en una zona muy pequeña y superdensa que era el núcleo. Y que los electrones giran alrededor del núcleo en ciertas órbitas en una zona mucho menos densa.

2. ¿Qué es la radiactividad? ¿Cuál es su origen y su naturaleza?

La radiactividad es un fenómeno por el cual algunas sustancias son capaces de emitir radiaciones. Estas radiaciones pueden ser de tres tipos: la radiación alfa constituida por las partículas alfas (núcleos de helio), la radiación beta que son electrones que se mueven a gran velocidad y las radiaciones gamma que son radiaciones electromagnéticas.

3. ¿Puede explicarse la estabilidad nuclear acudiendo a la ley de Coulomb?

No porque las fuerzas electrostáticas serían fuertemente repulsivas a la distancia que se encuentra los protones en el núcleo.

4. ¿Qué son las reacciones nucleares? ¿Cómo se producen?

Las reacciones nucleares consisten en modificar artificialmente los núcleos de los átomos. Se producen, en general, bombardeando núcleos con protones, neutrones o incluso con átomos de menor tamaño.

5. ¿De dónde proviene la enorme cantidad de energía que se libera en las reacciones nucleares?

Es debida al defecto de masa entre los productos y los reactivos y esta se transforma en energía.

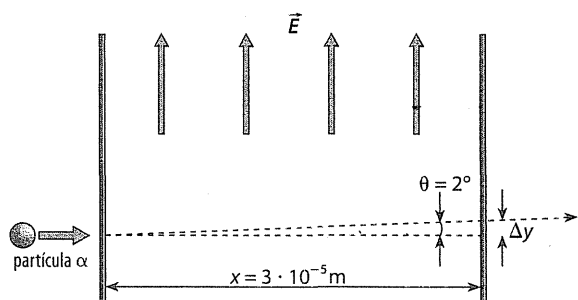
6. ¿Qué son las series radiactivas? ¿Conoces algunas aplicaciones de los isótopos radiactivos?

Son la serie de reacciones que se produce que se inicia con un núcleo inestable hasta llegar a su núcleo estable. Aplicaciones de los isótopos radiactivos puede ser la datación arqueológica, el diagnóstico y tratamiento de determinadas enfermedades, etcétera.

### Actividades (páginas 373/391)

1. Deduce la expresión que permitió a Rutherford estimar el valor del campo eléctrico capaz de producir desviaciones de cierto ángulo al atravesar un espesor de mica de 30 μm. ¿De qué factores depende?

Si suponemos la existencia de un campo eléctrico uniforme transversal que actúe a lo largo del grosor de la mica, se explicaría la desviación que experimentan las partículas α:



La trayectoria seguida por el haz en el interior de la mica vendría dada por:

$$x = vt$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} at^2$$

por lo que:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot a \frac{x^2}{v^2}$$

De la figura se deduce que:

$$\Delta y = x \operatorname{tg} \theta$$

Y como:

$$a = \frac{QE}{m}$$

entonces:

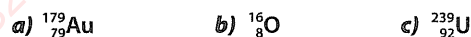
$$x \operatorname{tg} \theta = \frac{QEx^2}{2mv^2}$$

Despejando E, obtenemos:

$$E = \frac{2mv^2 \operatorname{tg} \theta}{Qx}$$

Esta es la expresión que permitió a Rutherford estimar el valor del campo transversal que tenía que actuar en el grosor de la mica. Los factores que debían conocerse, aparte de los citados, era la relación Q/m de las partículas α y su velocidad.

2. Haciendo uso de la expresión 14.3, calcula los valores aproximados de los radios nucleares de los siguientes núclidos:



a) Para el oro ( $A = 197$ ):  $r = 1,2 \cdot A^{1/3} = 6,98 \text{ fm}$

b) Para el oxígeno ( $A = 16$ ):  $r = 3,02 \text{ fm}$

c) Para el uranio ( $A = 235$ ):  $r = 7,4 \text{ fm}$

3. ¿Por qué en los experimentos de dispersión de electrones por los núcleos los electrones deben tener un momento lineal elevado?

El momento lineal debe ser elevado porque de ese modo la longitud de onda de los electrones ( $\lambda = h/p$ ) es muy pequeña y comparable al tamaño de los núcleos atómicos, lo que posibilita la difracción de aquellos por estos.

4. Las masas atómicas del  $^7_4\text{Be}$  y del  $^9_4\text{Be}$  son 7,016 930 u y 9,012 183 u, respectivamente. Determina cuál es el átomo más estable.

El defecto de masa para el  $^7_4\text{Be}$  es:

$$\Delta m = (4 \cdot m_p + 3 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}} = 0,038 169 \text{ u}$$

Por tanto, la energía liberada en la formación del núcleo de  $^7_4\text{Be}$  es:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 35,55 \text{ MeV}$$

Por su parte, el defecto de masa para el  $^9_4\text{Be}$  es:

$$\Delta m = (4 \cdot m_p + 5 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}} = 0,060 246 \text{ u}$$

y la energía liberada:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 56,12 \text{ MeV}$$

Por consiguiente, el núcleo más estable es el de número másico 9.

5. ¿Qué energía se libera por núcleo en una reacción nuclear en la que se produce un defecto de masa de 0,1 u?

Se libera una energía de:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 93,15 \text{ MeV}$$

- 6** Calcula la energía nuclear de enlace correspondiente al  ${}^7_3\text{Li}$ , sabiendo que su masa es de 7,016 01 u.

La energía de enlace es la misma que la que resulta del defecto de masa, pues sería la que debe suministrarse para separar el núcleo en sus componentes. Por tanto:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = \\ &= [(3 \cdot m_p + 4 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}}] \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = \\ &= 0,040\,047\,8 \text{ u} \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 37,7 \text{ MeV}\end{aligned}$$

- 7** Calcula la energía de enlace del helio-4 a partir de los datos de tabla 14.2.

Puesto que el defecto de masa es  $\Delta m = 0,030\,4 \text{ u}$ , entonces:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 28,32 \text{ MeV}$$

- 8** **PAU** Considera los núcleos de litio Li-6 y Li-7 de masas 6,015 2 u y 7,016 0 u, respectivamente, siendo 3 el número atómico de estos dos isótopos. Calcula para ambos núcleos:

a) El defecto de masa.

b) La energía de enlace.

c) La energía de enlace por nucleón.

Datos: 1 uma =  $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ; 1 uma = 931 MeV;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ; 1 eV =  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ;  $m_{\text{protones}} = 1,007\,3 \text{ u}$ ;  $m_{\text{neutrón}} = 1,008\,7 \text{ u}$

a) Calculamos el defecto de masa utilizando la expresión 14.4:

$$\Delta m = (Z_{\text{protón}} \cdot m_{\text{protón}} + (A+Z)_{\text{neutrón}} \cdot m_{\text{neutrón}}) - m_{\text{núcleo}}$$

Para el  ${}^6_3\text{Li}$  su valor es:

$$\Delta m = (3 \cdot 1,007\,3 + 3 \cdot 1,008\,7) \text{ u} - 6,015\,2 \text{ u} = 0,032\,8 \text{ u}$$

Para el  ${}^7_3\text{Li}$ :

$$\Delta m = (3 \cdot 1,007\,3 + 4 \cdot 1,008\,7) \text{ u} - 7,016\,0 \text{ u} = 0,040\,7 \text{ u}$$

b) Para calcular la energía de enlace utilizamos el equivalente energético de 1 u = 931,5 MeV:

Para el  ${}^6_3\text{Li}$ :

$$\Delta E = 0,032\,8 \text{ u} \cdot 931 \text{ MeV/u} = 30,54 \text{ MeV}$$

Para el  ${}^7_3\text{Li}$ :

$$\Delta E = 0,040\,7 \text{ u} \cdot 931 \text{ MeV/u} = 37,9 \text{ MeV}$$

c) La energía de enlace por nucleón se consigue dividiendo la energía de enlace por el número de nucleones.

Para el  ${}^6_3\text{Li}$ :

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{30,54 \text{ MeV}}{6} = 5,09 \text{ MeV}$$

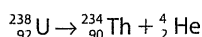
Para el  ${}^7_3\text{Li}$ :

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{37,9 \text{ MeV}}{7} = 5,41 \text{ MeV}$$

- 9** **PAU** Calcula la energía cinética y la velocidad de la partícula alfa emitida en la desintegración del uranio-238.

Datos: masa del U-238 = 238,050 786 u; masa del Th-234 = 234,043 583 u; masa de la partícula  $\alpha$  = 4,002 603 u

La desintegración del  ${}^{238}_{92}\text{U}$  es:



Hay que tener en cuenta que:

$$p_{\alpha} = p_{\text{Th}}$$

y que la energía que se transfiere a los productos de desintegración es:

$$E_{c\alpha} + E_{c\text{Th}} = E = [m_{\text{U}} - (m_{\text{Th}} + m_{\alpha})] \cdot 931,5 \text{ MeV/u}$$

Como:

$$E_{c\alpha} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}}$$

$$E_{c\text{Th}} = \frac{p_{\text{Th}}^2}{2m_{\text{Th}}} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\text{Th}}}$$

entonces:

$$E = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} \right) = E_{c\alpha} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} \right)$$

de donde:

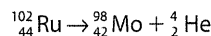
$$E_{c\alpha} = \frac{E}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}}} = 4,21 \text{ MeV}$$

energía cinética que corresponde a una velocidad de:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{c\alpha}}{m_{\alpha}}} = 1,42 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

- 10** ¿Tendrá lugar de modo espontáneo el decaimiento alfa de rutenio-102? Datos: masa del Ru-102 = 101,904 348 u; masa del Mo-98 = 97,905 405 u

No ocurrirá de modo espontáneo, pues el defecto de masa de la hipotética desintegración  $\alpha$  es negativo:



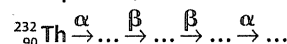
Por tanto, dicha desintegración es inviable.

- 11** **PAU** Sabiendo que la desintegración de un átomo de U-235 produce unos 200 MeV de energía, calcula la energía total liberada por cada gramo de dicho elemento.

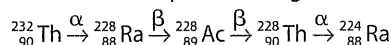
Un átomo de  ${}^{235}_{92}\text{U}$  tiene  $235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 3,9 \cdot 10^{-22} \text{ g}$  de masa. Por tanto, la energía total liberada en la desintegración de 1 g de esta sustancia será de:

$$E = \frac{200 \text{ MeV}}{3,9 \cdot 10^{-22} \text{ g}} = 5,12 \cdot 10^{23} \text{ MeV/g} = 8,2 \cdot 10^{10} \text{ J/g}$$

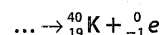
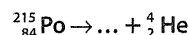
- 12** **PAU** Completa la siguiente secuencia radiactiva (la letra situada encima de cada flecha indica la partícula emitida por el núcleo de la izquierda):



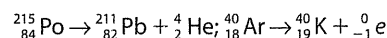
La secuencia radiactiva completa es la siguiente:



- 13** **PAU** ¿Cuál es el núcleo que falta en las siguientes reacciones de desintegración?

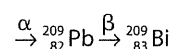
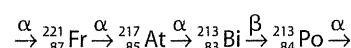
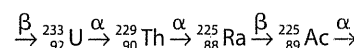
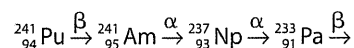


Las reacciones completas son estas:



- 14** Completa la gráfica de la figura 14.14 de la página 384 de libro de texto.

Los núcleos que completan la gráfica son:



Como se ve en el subepígrafe 5.5, esta es la serie  $4n + 1$  de  ${}^{241}_{94}\text{Pu}$ , con respecto a la cual solo se tiene constancia de su producto final, el  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ .

- 15** Determina el número atómico y másico del isótopo que resultará del  ${}^{238}_{92}\text{U}$  después de emitir tres partículas alfa y dos beta.

El isótopo tendrá  $3 \cdot 4 = 12$  unidades menos de número másico y  $3 \cdot 2 + 2(-1) = 4$  unidades menos del número atómico es decir,  $A = 226$ , y  $Z = 88$ ; por tanto, será:



- 16** **PAU** El período de semidesintegración de un núcleo es de 50 años. Una muestra original de 50 g contiene en la actualidad 30 g del núcleo original. Calcula la antigüedad y actividad actual de la muestra.

Aplicando la ley de la desintegración radiactiva en la forma:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

y teniendo en cuenta que:

$$N = \frac{30}{50} \cdot N_0 = \frac{3}{5} \cdot N_0$$

cabe concluir que:

$$\frac{3}{5} = 2^{-t/T}$$

tomando logaritmos queda:

$$\ln \frac{3}{5} = -\frac{t}{T} \ln 2$$

de donde:

$$t = 36,79 \text{ años}$$

Luego, la antigüedad de la muestra es de 36,79 años. Su actividad actual será 3/5 de la inicial ( $\lambda N_0$ ).

- 17** **PAU** El cobalto  $^{60}\text{Co}$  se utiliza frecuentemente como fuente radiactiva en medicina. Su periodo de semidesintegración es 5,25 años determinar cuánto tiempo, después de entregada una muestra nueva a un hospital habrá disminuido su actividad a una octava parte del valor original.

Hallamos la constante radiactiva mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{5,25} = 0,132 \text{ años}^{-1}$$

Y como la actividad tiene que disminuir a la octava parte de su valor inicial ( $N = 1/8 N_0$ ), sustituimos en la expresión:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} N_0 = N_0 \cdot e^{-0,132t} \Rightarrow 0,125 = e^{-0,132t}$$

Y tomando logaritmos neperianos obtenemos:

$$\ln 0,125 = -0,132t$$

despejando:

$$t = 15,75 \text{ años}$$

- 18** **PAU** La actividad de una muestra que contiene carbono 14,  $^{14}\text{C}$  es de  $5 \cdot 10^7$  Bq.

a) Halla el número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en la muestra.

b) Calcula la actividad de la muestra dentro de 11 460 años.

a) Primero expresamos el período de semidesintegración en segundos:

$$T_{1/2} = 5730 \text{ años} \cdot 365,25 \text{ días/año} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3600 \text{ s/h} = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

La constante radiactiva se calcula mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1,8 \cdot 10^{11} \text{ s}} = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Como la actividad de la muestra es  $5 \cdot 10^7$  Bq =  $\lambda N$ , despejando N:

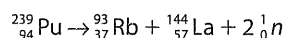
$$N = \frac{5 \cdot 10^7}{3,9 \cdot 10^{-12}} = 1,28 \cdot 10^{19} \text{ núcleos de } ^{14}\text{C}$$

b) Ya que 11 460 años son dos períodos del  $^{14}\text{C}$ . Utilizando la expresión 14.12 tenemos que:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = 5 \cdot 10^7 \text{ Bq} \cdot e^{-\frac{0,693}{5730 \text{ años}} \cdot 11460 \text{ años}} = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

- 19** La fisión de un núcleo de plutonio-239 produce rubidio-93 y lantano-144. Escribe la reacción completa.

La reacción completa es:



- 20** Calcula cuánta masa pierde el Sol cada segundo en forma de energía liberada. Compárala con su masa estimada (aproximadamente  $2 \cdot 10^{30}$  Kg). ¿Cuánto tardaría el Sol en perder una millonésima parte de su masa?

Teniendo en cuenta que la energía irradiada por el Sol es de  $3,8 \cdot 10^{26}$  J/s, la pérdida de masa por segundo será:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = 4,22 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Esto, comparado con la masa solar, supone:

$$\frac{\Delta m}{m_s} = 2,1 \cdot 10^{-21}$$

Es decir, constituye una fracción insignificante. A ese ritmo, el tiempo que tardaría el Sol en perder una millonésima parte de su masa sería:

$$\frac{10^{-6}}{2,1 \cdot 10^{-21}} \cdot 1 \text{ s} = 4,76 \cdot 10^{14} \text{ s} \approx 15 \text{ millones de años}$$

## Cuestiones y problemas (páginas 396/397)

### Guía de repaso

- 1** ¿Quién descubrió la radiactividad? ¿Cómo lo hizo?

Lo descubrió Antoine Henri Becquerel que investigaba la posibilidad de producir radiaciones similares a los rayos X en sales de uranio que presentaban el fenómeno de la fosforescencia.

- 2** ¿Cuántos tipos de radiactividad hay? ¿Cómo pueden diferenciarse? ¿Qué poder de penetración tienen?

Existen tres tipos: radiaciones alfa, beta y gamma. Se distinguen por su distinto poder de penetración y peligrosidad.

Las radiaciones gamma son las de mayor poder de penetración seguidas de las beta y las alfa.

- 3** ¿Qué llevó a Rutherford a investigar la dispersión de las partículas alfa?

El fenómeno de dispersión de los rayos alfa al atravesar una lámina de mica.

- 4** ¿Qué hecho peculiar condujo a la consideración de la existencia del núcleo?

Mediante el detector-contador descubrió que había partículas alfa que rebotaban.

- 5** Detalla el procedimiento usado por Rutherford para determinar de un modo aproximado el tamaño de los núcleos.

A partir de sus experimentos de dispersión de partículas alfa, Rutherford calculó, de un modo aproximado, cuál podría ser el tamaño del núcleo. Las partículas que salían rebotadas tenían que haber colisionado frontalmente contra el núcleo; sin embargo, este choque no implicaba contacto físico entre núcleo y partícula, sino que el rebote se debía a la intensa repulsión coulombiana que existía entre ambos. Mediante consideraciones energéticas llegó a una expresión matemática de la distancia de máxima aproximación entre el núcleo y la partícula alfa debe ser ligerísimamente mayor que el radio nuclear.

- 6** ¿Cuál es el tamaño relativo que tiene un núcleo con respecto al átomo?

Del orden de  $10^{-10}$  m.

- 7** ¿Qué hecho parece demostrar que los núcleos tienen bordes difusos?

Empleando técnicas de dispersión de electrones de elevado momento lineal se observó que la intensidad de los mínimos que se producen no es nula.

- 8** ¿Cuál es la fórmula empírica que relaciona el radio de los núcleos con el número másico?

La siguiente expresión:

$$r \approx 1,2 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$$

- 9** Demuestra que la densidad de los núcleos es constante y determina su valor.

Véase el procedimiento de la página 377, en el que partiendo de la fórmula de la densidad y considerando la expresión que relaciona el radio con el número másico se llega a que:

$$\rho = 2,4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

- 10** ¿Cómo es posible que los protones puedan coexistir en un espacio tan reducido como el núcleo?

Debido a que las fuerzas nucleares son atractivas, de gran intensidad y de muy corto alcance.

- 11** ¿Qué hecho hace suponer que las fuerzas nucleares son de corto alcance?

El corto alcance de estas fuerzas se debe al hecho de que la densidad nuclear es constante, lo que supone que cada nucleón solo interactúa con los vecinos.

- 12** ¿Muestran dependencia de la carga eléctrica las fuerzas nucleares?

No, las fuerzas nucleares no dependen de la carga eléctrica.

- 13** ¿Cuándo puede afirmarse que un núcleo es estable?

El defecto de masa.

- 14** ¿A qué se denomina defecto de masa?

El defecto de masa es la variación de la masa de los nucleones (protones y neutrones) y la masa de los núcleos.

- 15** ¿Qué parámetro sirve para comparar las estabilidades relativas de los diversos núclidos? ¿Cómo se define?

El parámetro es la energía de enlace que corresponde a cada nucleón y viene determinada por la expresión:

$$E_{\text{enlace/nucleón}} = \frac{\Delta E}{A}$$

- 16** ¿Cuál es el equivalente energético de 1 u? Cálculalo.

El equivalente energético de 1 u es de 931,5 MeV. Se calcula mediante la expresión  $\Delta E = mc^2$ :

$$\Delta E = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931,5 \text{ MeV}$$

- 17** ¿Qué núcleos son los más estables? ¿Qué hechos experimentales lo avalan?

Los núcleos medianos.

- 18** ¿Por qué aumenta el número de neutrones por encima del de protones a medida que se incrementa el número atómico de un núcleo?

A medida que aumenta el número de protones, la creciente repulsión exige un número cada vez mayor de neutrones presentes.

- 19** ¿A partir de qué número atómico resultan inestables los núcleos?

A partir del número atómico 83 que corresponde el bismuto.

- 20** ¿En qué consiste el decaimiento alfa? ¿Y el beta?

El decaimiento alfa es cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, este se transforma en otro cuyo número atómico es dos unidades menor y cuya masa es aproximadamente cuatro unidades menor. El decaimiento beta es cuando un núcleo radiactivo emite un electrón beta, este se transforma en otro cuyo número atómico es una unidad mayor y cuya masa es prácticamente igual.

- 21** ¿Cómo podemos saber si un núclido puede sufrir un decaimiento alfa?

Si aplicamos la expresión 14.8 y nos sale positiva, habría transferencia cinética a las partículas finales, con lo cual conllevará a un decaimiento alfa.

- 22** Enuncia y representa las leyes del desplazamiento radiactivo.

Las leyes de desplazamiento radiactivo se enuncian:

- Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, el elemento resultante se desplaza dos lugares a la izquierda en el sistema periódico, es decir, se transforma en otro cuyo número atómico es dos unidades menor y cuya masa es aproximadamente cuatro unidades menor.
- Cuando un núcleo radiactivo emite un electrón beta, el elemento resultante se desplaza un lugar a la derecha en el sistema periódico, esto es, se transforma en otro cuyo número atómico es una unidad mayor y cuya masa es prácticamente igual.
- Cuando un núcleo radiactivo excitado emite radiación gamma, se desexcita energéticamente, pero no sufre transmutación alguna.

- 23** ¿Son emitidas con igual velocidad las partículas alfa y beta?

No, las beta tienen mayor velocidad que las alfa.

- 24** ¿Existen realmente electrones en el núcleo?

No existen electrones en el núcleo.

- 25** ¿Cómo varía con el tiempo la actividad de una sustancia radiactiva?

A través de la ley de la desintegración radiactiva (expresión 14.10) vemos que su variación es exponencial y negativa.

- 26** ¿Qué es el período de semidesintegración? ¿Coincide con la vida media?

El período de semidesintegración es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos iniciales. Es el mismo concepto que la vida media.

- 27** ¿Cuál es la ley de la desintegración radiactiva? Escríbela también en función de la constante de desintegración radiactiva.

La ley de desintegración radiactiva nos relaciona el número de núcleos que quedan sin desintegrar con el tiempo.

En función de la constante de desintegración radiactiva,  $\lambda$ , es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- 28** ¿En qué consiste el método de datación arqueológica del carbono-14?

Consiste en medir la proporción residual de C-14 en la muestra y teniendo en cuenta que su período de semidesintegración es de 5730 años, poder determinar la antigüedad de un resto arqueológico.

- 29** ¿Qué son las series radiactivas? ¿Cuántas series se conocen? ¿Qué particularidad tienen todos los núclidos de una serie?

Las series o familias radiactivas son la serie de elementos que mediante deseintegraciones alfa y beta a partir de un elemento radiactivo. Se conocen cuatro series radiactivas: torio-232, plutonio-241, uranio-238 y uranio-235.

Los núclidos de cada serie tienen sus números másicos proporcionales a un número.

- 30** ¿Qué procedimiento se usa para la cronología geológica?

En la aplicación de la ley de desintegración radiactiva a rocas y minerales.

**31** ¿Qué es una reacción nuclear?

Las reacciones nucleares consisten en modificar artificialmente los núcleos de los átomos bombardeando núcleos con protones, neutrones o incluso con átomos de menor tamaño.

**32** ¿Cómo se descubrió el protón? ¿Y el neutrón?

El protón se descubrió mediante una reacción nuclear que consistía en bombardear núcleos de nitrógeno con partículas alfa, liberando núcleos de hidrógenos o protones. Y los neutrones, bombardeando núcleos de berilio con partículas alfa.

**33** ¿Qué puede ocurrir cuando un núcleo captura un neutrón lento?

Puede producir cuatro procesos distintos: radiaciones gamma, emitir partículas alfa, emitir un protón y la fisión nuclear.

**34** ¿Qué es la fisión nuclear? ¿Cómo se produce?

La fisión nuclear consiste en fragmentar un núcleo desestabilizado en dos núcleos más pequeños. Cuando el núcleo absorbe un neutrón, se excita y se deforma. Debido que las fuerzas de repulsión son mayores que las de atracción se va separando hasta dividirse el núcleo en dos partes iguales.

**35** ¿Qué hay que hacer para mantener controlada una reacción de fisión en cadena? ¿Qué pasa si se descontrola?

Utilizando grafito para moderar la velocidad de los neutrones y barras de cadmio para absorberlos.

Si la reacción no se controla se libera energía de forma explosiva.

**36** ¿Qué es la masa crítica?

Es cuando el número de neutrones producidos es igual al número de neutrones que se escapan; a partir de aquí se descontrola la cadena.

**37** ¿Qué es la fusión nuclear? ¿Qué proceso tiene lugar en el Sol? Escribe las reacciones que pueden producirse en él.

La fusión nuclear es cuando núcleos pequeños se unen para formar núcleos mayores.

En el Sol se produce la fusión del hidrógeno cuyas reacciones están descritas en la página 390 del *Libro del alumno*.

**38** ¿De dónde proviene la enorme cantidad de energía liberada en los procesos de fisión y de fusión?

Es debida al defecto de masa entre los productos y los reactivos y al ser menor la masa de los productos, esta se transforma en energía.

**39** ¿Cuáles son los constituyentes básicos de la materia según las teorías modernas?

Los quarks y los leptones.

**40** ¿Qué partículas están constituidas por quarks?

Los quarks están constituidos por: u (up, «arriba»), d (down, «abajo»), s (strange, «extraño»), c (charm, «encanto»), b (bottom, «fondo») y t (top, «cima»).

**41** ¿En qué se diferencian los bariones y los mesones?

Los bariones están constituidos por tres quarks y los mesones por un quark y un antiquark.

**42** ¿Qué propiedades se asigna a los quarks?

Se le asigna una tercera propiedad adicional a la carga y al espín; el color.

**43** ¿Qué leptones forman parte de la materia ordinaria?

Solamente el electrón y su correspondiente neutrino.

**El núcleo atómico y estabilidad****44** **PAU** Determina qué isótopo debemos usar como blanco para formar Na-24 si se emplean:

- Protones.
  - Neutrones.
  - Partículas alfa.
- Ne-23.
  - Na-23.
  - F-20.

En todos los casos hemos supuesto que la reacción es de captura.

**45** **PAU** Determina el radio nuclear y el volumen de una partícula alfa. A partir de los datos obtenidos, determina el volumen de un nucleón.

El número másico de la partícula  $\alpha$  es 4, por lo que:

$$r \cong 1,2 \cdot A^{1/3} \text{ fm} = 1,9 \text{ fm}$$

Suponiendo que la partícula  $\alpha$  es esférica, su volumen será:

$$V = 4/3 \pi r^3 = 2,8 \cdot 10^{-44} \text{ m}^3$$

Puesto que consta de 4 nucleones, el volumen de un nucleón será:

$$V_{\text{nucleón}} = 7 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3$$

**46** **PAU** Calcula la energía de enlace del deuterón si su masa es de 2,014 102 u.

El deuterón se compone de un protón y un neutrón, por lo que su energía de enlace, igual a la liberada en el proceso de constitución, será:

$$E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = [(m_p + m_n) - m] \cdot 931,5 \text{ MeV}$$

Por tanto:

$$E = 1,713 \text{ MeV}$$

**47** **PAU** Calcula la energía de ligadura por nucleón del Ne-20 y del Ca-40. Datos: masa atómica del Ne-20 = 19,992 440 u; masa atómica del Ca-40 = 39,962 591 u

El  $^{20}_{10}\text{Ne}$  tiene 10 protones y 10 neutrones. Su energía de enlace es:

$$E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 155,53 \text{ MeV}$$

Por tanto, la energía de enlace por nucleón será:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{155,53 \text{ MeV}}{20} = 7,77 \text{ MeV}$$

En el caso del  $^{40}_{20}\text{Ca}$ , con 20 protones y 20 neutrones, la energía de enlace es:

$$E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 331,83 \text{ MeV}$$

Así, la energía de enlace por nucleón será:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{331,83 \text{ MeV}}{40} = 8,29 \text{ MeV}$$

**48** **PAU** La masa atómica del plomo-208 es 207,976 6 u.

- ¿Qué energía se desprende en la formación del núcleo?
- ¿Cuál es la energía de enlace por nucleón correspondiente a este núcleo?

El  $^{208}_{82}\text{Pb}$  consta de 126 neutrones y 82 protones. Por tanto:

- La energía que se desprende en la formación del núcleo es:

$$E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 1 594,56 \text{ MeV}$$

- La energía de enlace por nucleón es:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{1 594,56 \text{ MeV}}{208} = 7,66 \text{ MeV}$$

## Radiactividad y desplazamiento radiactivo

**49** ¿Podría ocurrir que un mismo núcleo emitiera a la vez radiación alfa y beta? ¿Y alfa y gamma?

Evidentemente, un núcleo se transforma en otro de distinta naturaleza después de emitir una partícula alfa, por lo que nunca puede darse el caso de que el mismo núcleo emita radiación alfa y beta a la vez. Sí puede ocurrir esto en procesos independientes, es decir, en distintas series, como ocurre en el caso del Bi-214, que emite radiación alfa en una serie y beta en la otra. Por el mismo motivo, un núcleo tampoco puede emitir simultáneamente radiación alfa y gamma; la emisión gamma es consecuencia del proceso de estabilización del núcleo resultante, pero no del emisor. En este último caso, el proceso inverso sí es posible y, de hecho, frecuente.

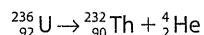
**50** ¿Qué diferencia existe entre un proceso radiactivo y uno químico?

En un proceso radiactivo se modifica la naturaleza del núcleo, mientras que en uno químico no.

**D.51 PAU** Halla la energía cinética y la velocidad de la partícula alfa emitida en el decaimiento alfa del uranio-236.

Datos: masa atómica del U-236 = 236,045 563 u; masa atómica del Th-232 = 232,038 054 u; masa de la partícula alfa = 4,002 603 u

El decaimiento alfa del U-236 es:



Procediendo como se expone en la aplicación de la página 383, obtenemos:

$$E_{c\alpha} = \frac{E}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Th}}}}$$

La energía transferida a los productos de la desintegración es:

$$E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 4,57 \text{ MeV} = 7,31 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{c\alpha} = 4,49 \text{ MeV} = 7,18 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Así pues, su velocidad será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{c\alpha}}{m_\alpha}} = 1,48 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

## Desintegración radiactiva

**52** ¿Por qué no puede utilizarse la prueba del C-14 para averiguar la edad de rocas o minerales?

No puede utilizarse la prueba del C-14 en este caso porque solo es válida para restos de seres vivos, durante la existencia de los cuales se ha producido un intercambio de materia con el medio.

**53** ¿Por qué no sufre variaciones la actividad de una sustancia aunque se encuentre en disolución o combinada con otras?

La combinación química o la disolución son procesos químicos en los que solo intervienen los electrones de las capas más externas, por lo que ni los núcleos ni su actividad resultan afectados.

**54** El número atómico de un núclido ha disminuido dos unidades, y su número másico, ocho unidades; por consiguiente, el núclido ha sufrido:

- Dos desintegraciones alfa y una beta.
- Tres desintegraciones beta y una alfa.

Ninguna de las dos respuestas es correcta. Ha sufrido dos desintegraciones alfa y dos beta.

**55** Una sustancia tiene un período de semidesintegración de 5 minutos. De aquí puede deducirse que, al aislar 100 átomos de la muestra:

- Quedan 50 átomos al cabo de 5 minutos.
- Pueden quedar los 100, un número indeterminado o ninguno.

La respuesta correcta es la **b)**. Como todo concepto estadístico, el período de semidesintegración solo es válido considerando un número muy grande de núcleos. Es obvio que 100 átomos no lo es.

**56 PAU** Una muestra de cierta sustancia radiactiva sufre 10 200 desintegraciones por segundo en su instante inicial. Al cabo de 10 días, presenta una tasa de 510 desintegraciones por segundo.

- ¿Cuál es su período de semidesintegración?
- ¿Y su vida media?

**a)** La muestra disponible, al cabo de 10 días se ha reducido a 1/20 de la muestra inicial, por lo que:

$$N = N_0 2^{-t/T} \Rightarrow \frac{1}{20} N_0 = N_0 2^{-t/T}$$

Despejando  $T$ , obtenemos:

$$T = 2,314 \text{ días}$$

**b)** Puesto que la vida media se define como:

$$\tau = \frac{T}{\ln 2}$$

entonces:

$$\tau = 3,338 \text{ días}$$

**57 PAU** La semivida del yodo-131 es 8,04 días. Calcula:

- Su constante de decaimiento.
  - Su vida media.
  - El porcentaje de muestra inicial que queda al cabo de 1 mes.
- a)** Su constante de decaimiento  $\lambda$  será:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0,086 \text{ días}^{-1}$$

**b)** Su vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 11,60 \text{ días} = 1,003 \cdot 10^6 \text{ s}$$

**c)** Puesto que:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

sustituyendo  $t$  (30 días) y  $T$  (8,04 días), obtenemos:

$$N = 0,075 \cdot N_0$$

Por tanto, queda un 7,5 % de la muestra inicial.

**58** La actividad radiactiva de una madera antigua es cuatro veces menor que la de otra madera de la misma clase y con igual masa. ¿Qué edad tiene la madera analizada?

Dato: semivida del C-14 = 5 730 años

La muestra actual es 1/4 de la inicial. Por tanto:

$$N = N_0 2^{-t/T} \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = N_0 2^{-t/T}$$

Operando para despejar  $t$ , y teniendo en cuenta que  $T = 5 730$  años, obtenemos:

$$t = 11 460 \text{ años}$$

**59 PAU** Una muestra radiactiva contenía  $10^9$  núcleos radiactivos hace 40 días y en la actualidad posee  $10^8$ . Calcula:

- La constante de desintegración.
- La vida media.
- La actividad de la muestra al cabo de una semana.

a) La muestra actual es  $1/10$  de la inicial.

Operando como en el ejercicio anterior, obtenemos:

$$T = 12,04 \text{ días}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0,05756 \text{ días}^{-1} = 6,66 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

b) Su vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ s} = 17,34 \text{ días}$$

c) La actividad al cabo de una semana vendrá dada por  $\lambda N$ , donde  $N$  es el número de núcleos sin desintegrar, y se obtiene de la expresión:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

Considerando  $N_0 = 10^9$  núclidos,  $t = 7$  días, y  $T = 12,04$  días, entonces:

$$N = 6,68 \cdot 10^8 \text{ núclidos}$$

En consecuencia, la actividad de la muestra al cabo de una semana es:

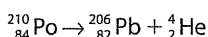
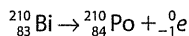
$$\text{actividad} = \lambda N = 6,66 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \cdot 6,68 \cdot 10^8 = 445 \text{ Bq}$$

**D60 PAU** El bismuto-210 ( $Z = 83$ ) emite una partícula beta y se transforma en polonio; este, a su vez, emite una partícula alfa y se transforma en un isótopo del plomo.

a) Escribe las reacciones de desintegración.

b) Si la semivida del bismuto-210 es de 5 días, ¿cuántos núcleos se han desintegrado en 10 días si inicialmente se tenía 1 mol de átomos de este elemento?

a) Las reacciones son, respectivamente, las siguientes:



b) Si  $N_0 = 6,022 \cdot 10^{23}$  núcleos/mol, al cabo de 10 días quedan sin desintegrar:

$$N = N_0 2^{-t/T} = N_0 2^{-10/5} = 0,25 \cdot N_0$$

Por tanto, se ha desintegrado el 75 % de los núcleos, es decir:

$$0,75 \cdot N_0 = 4,516 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}$$

**61 PAU** Una muestra contiene  $10^{20}$  núcleos radiactivos con un período de semidesintegración de 27 días. Halla:

a) La constante de desintegración.

b) El número de núcleos radiactivos al cabo de un año.

c) La actividad de la muestra al cabo de un año.

a) La constante de semidesintegración es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 2,96 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

b) Al cabo de 1 año (365 días):

$$N = N_0 2^{-t/T} = 8,52 \cdot 10^{15} \text{ núcleos}$$

c) Por tanto, la actividad de la muestra al cabo de un año es:

$$\lambda N = 2,52 \cdot 10^9 \text{ Bq}$$

**D62** ¿Qué masa de yodo-131, cuyo período de semidesintegración es de 8 días, quedará a los 15 días si se partió de una muestra inicial que contenía 200 g de dicho isótopo?

Si se parte de la expresión:

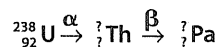
$$N = N_0 2^{-t/T}$$

y sustituyendo  $t$  (15 días) y  $T$  (8 días), se obtiene:

$$N = 0,2726 \cdot N_0$$

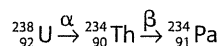
Por tanto, quedará una muestra de 54,52 g sin desintegrar al cabo de 15 días.

**63 PAU** Los dos primeros pasos de la cadena de desintegración del  ${}_{92}^{238}\text{U}$  son:



Completa las correspondientes ecuaciones de desintegración e indica el número másico y atómico de los núcleos que se obtienen durante y al final del proceso.

La ecuación de desintegración completa es:



Así, para el Th,  $Z = 90$ , y  $A = 234$ ; y para el Pa,  $Z = 91$ , y  $A = 234$ .

## Reacciones nucleares

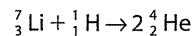
**64 PAU** Cuando se bombardea con un protón un núcleo de  ${}_{3}^7\text{Li}$  este se descompone en dos partículas alfa.

a) Escribe y ajusta la reacción nuclear del proceso.

b) Calcula la energía liberada en dicha desintegración.

Datos: masa atómica del litio = 7,01601 u; masa atómica del hidrógeno = 1,007276 u; masa atómica del helio = 4,002603 u

a) La reacción del proceso es:



b) La energía liberada procede del defecto de masa:

$$\Delta m = [(m_{\text{Li}} + m_{\text{H}}) - 2m_{\alpha}] = 0,01808 \text{ u}$$

Por tanto:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931,5 \text{ MeV/u} = 16,88 \text{ MeV}$$

## Partículas elementales

**65** A partir de la información dada en el texto, deduce qué tríos de quarks formarán los protones y los neutrones.

Puesto que la materia ordinaria está formada por los quarks  $u$  y  $d$ , y dado que la carga del protón es  $+1$  y la del neutrón es cero, entonces, los tríos de quarks que los compondrán serán  $u, u, d$ , para el caso del protón (los  $u$  son de distinto color), y  $u, d, d$ , para el del neutrón (los  $d$  son ahora de distinto color).

**66** Teniendo en cuenta que los mesones  $\pi$  están formados por los sabores  $u$  y  $d$ , ¿cuáles serán los pares quark-antiquark constituyentes del mesón  $\pi^+$ , del mesón  $\pi^-$  y del mesón  $\pi^0$  neutro?

El mesón  $\pi^+$  estará constituido por  $u, \bar{d}$  (antiquark  $d$ ); el mesón  $\pi^-$ , por  $\bar{u}, d$ , y  $\pi^0$ , por  $u, \bar{u}$ , o por  $d, \bar{d}$ .