Solucionario

CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Física

AUTOR
Jorge Barrio Gómez de Agüero

2

BACHILLERATO

Oxford

Índice

Cuestiones previas (página 6)

1. ¿Por qué las funciones trigonométricas son periódicas?

Porque se repiten los valores cada ciertos radianes. Por ejemplo, en el caso del seno y del coseno se repiten los valores cada 360°, y la tangente, cada 180°.

2. Cierto vector tiene por módulo 15 y ángulo 60° con el eje *X*. Determina sus coordenadas.

Componente *x*:

$$\vec{a_x} = 15 \cdot \cos 60° = 7{,}5\vec{i}$$

Componente *y*:

$$\vec{a_y} = 15 \cdot \operatorname{sen} 60° = 13\vec{j}$$

3. Calcula el producto escalar y vectorial de los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \cdot 3) + (2 \cdot 2) = 10$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k} = (6 - 6)\,\vec{k} = 0$$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

b) $f(x) = \cos x^2$

a) $f'(x) = 4x + 3$

b) $f'(x) = -2x \operatorname{sen} x^2$

Actividades (páginas 7/13)

1 Determina la equivalencia en radianes de un ángulo de 20°. Haciendo uso de la calculadora (en modo radián), verifica que los valores del seno y la tangente prácticamente coinciden con el valor del ángulo. Comprueba con otro ángulo menor que los valores son tanto más parecidos cuanto menor es el ángulo.

$$2\pi/360° = x/20° \rightarrow x = \pi/9 = 0{,}349 \text{ rad}$$

sen 20° = 0,342 y tg 20° = 0,356, valores parecidos al ángulo (expresado en radianes).

Si tomamos un ángulo menor, como 10° = 0,1745 rad

sen 10° = 0,1736 y tg 10° = 0,176, valores aún más parecidos al ángulo (expresado en radianes).

2 Demuestra que

$$2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

es igual a sen *a* + sen *b*.

Sugerencia:

$$\operatorname{sen} \frac{a+b}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

Desarrollando la primera expresión y utilizando propiedades matemáticas:

$$2 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} =$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right)$$

Agrupando el primer término con el cuarto y el segundo con el tercero, resulta:

$$2\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{b}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\right) =$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

3 Calcula qué ángulo forman los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Determinamos el producto escalar de ambos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 = -6 - 3 = -9$$

Para determinar el ángulo, hacemos uso de la expresión:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

$a = 3{,}742$ y $b = 3{,}606$, luego:

$$\cos \alpha = -9/13{,}49 = -0{,}667 \Rightarrow \alpha = 131{,}8°$$

4 Determina los coeficientes *a*, *b* y *c* para que los siguientes vectores sean mutuamente perpendiculares:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = a\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{C} = -\vec{i} + 2\vec{j} + c\vec{k}$$

Si los tres vectores son mutuamente perpendiculares, sus productos escalares son nulos.

Realizando algebraicamente los tres productos ($\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{b} \cdot \vec{c}$), resulta:

$$2a - b + 6 = 0$$

$$-2 + 2b + 2c = 0$$

$$-a - 2 + 3c = 0$$

Multiplicando la primera expresión y sumándole la segunda, resulta:

$$4a + 2c + 10 = 0$$

Multiplicando la tercera expresión por cuatro y sumándole esta última, resulta:

$$14c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1/7$$

De donde se extrae que $a = -17/7$.

Sustituyendo en la primera ecuación, resulta que $b = 78/7$.

5 Sean los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{C} = -3\vec{i} - 5\vec{j}$. Demuestra si existe alguna diferencia entre los productos $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$? ¿Y entre los productos $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$?

Nada nos asegura que ambas expresiones han de ser iguales. Comprobémoslo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 22\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = 7\vec{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (5\vec{i} - 2\vec{j}) \times 7\vec{k} = -14\vec{i} - 35\vec{j}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 22\vec{k} \times (-3\vec{i} - 5\vec{j}) = 110\vec{i} - 66\vec{j}$$

Luego ambos productos son diferentes.

Por otra parte, y como se ha visto, tanto $\vec{a} \times \vec{b}$ como $\vec{b} \times \vec{c}$ son vectores en la dirección del eje *Z* (vector $\vec{k}$).

Si multiplicamos escalarmente estos vectores por cualquiera de los vectores iniciales, que pertenecen al plano *XY*, el resultado será el mismo: 0.

6 **Determina el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ y $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j}$. ¿Cuál es el vector representativo de dicha superficie? ¿Qué ángulo forman ambos vectores?**

El área del paralelogramo que encierran dos vectores cualesquiera es $S = ab$ sen α, luego necesitamos conocer el ángulo que forman ambos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Determinando el producto escalar y calculando los módulos de ambos vectores, resulta:

$$\cos \alpha = \frac{5-8}{\sqrt{29 \cdot 17}} = -0{,}135 \rightarrow \alpha = 97{,}765°$$

$$S = \sqrt{29 \cdot 17}\,\text{sen}\,\alpha = 22$$

El vector representativo es perpendicular al plano formado por los dos vectores y de módulo el valor del área, es decir $22\vec{k}$.

7 **El vector $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ tiene por punto de aplicación P (4, 3, 3). Determina el momento de dicho vector respecto del punto O (1, 0, 1).**

El momento viene dado por la expresión $M = \vec{r} \times \vec{a}$, donde $\vec{r}$ es el vector que va de O a P, es decir:

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Realizamos el producto vectorial:

$$M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 0\vec{j} - 12\vec{k} = 8\vec{i} - 12\vec{k}$$

8 **¿Cuál es la aproximación de $(1 - x)^{1/2}$ para valores de x muy pequeños?**

Partiendo de la aproximación de $(1 + x)^n$, podemos concluir que:

$$(1 + (-x))^{1/2} \approx 1 + 1/2\,(-x) = 1 - x/2$$

9 **Haciendo uso de la definición de la derivada de una función, demuestra que la derivada de la función $y =$ sen x es $y' = \cos x$.**

$$y = \text{sen}\,x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x \cos \Delta x + \text{sen}\,\Delta x \cos x - \text{sen}\,x}{\Delta x} \cong$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x + \Delta x \cos x - \text{sen}\,x}{\Delta x}$$

Hemos aproximado $\cos \Delta x$ a 1 y sen Δx a Δx. En conclusión:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cos x}{\Delta x} = \cos x$$

10 **Halla las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $y(x) = \sqrt[4]{3x^3}$ ***b)*** $y(x) = \sqrt{2x^2}/\sqrt{x}$ ***c)*** $y(x) = \cos^2 x$

a) $y = \sqrt[4]{3} \cdot x^{3/4} \rightarrow y' = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{3}{4} x^{-1/4} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{3}{x}}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot x^{2/3 - 1/2} = \sqrt[3]{2} \cdot x^{1/6} \rightarrow y' = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{6} x^{-5/6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[6]{x^5}}$

c) $y = \cos^2 x \rightarrow y' = 2 \cos x\,(-\text{sen}\,x) = -2\,\text{sen}\,x \cos x$

11 **Calcula el gradiente de la función escalar $V(x, y, z) = 6x^2yz^3 + 3yz^2 - 4zx^3y^2$ y determina su valor en el punto (1,0,1).**

$$V(x, y, z) = 6x^2yz^3 + 3yz^2 - 4x^3y^2z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V(x, y, z) = (12xyz^3 - 12x^2y^2z)\vec{i} + (6x^2z^3 + 3z^2 - 8x^3yz)\vec{j} + (18x^2yz^2 + 6yz - 4x^3y^2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V(1, 0, 1) = 0\vec{i} + (6 + 3)\vec{j} + 0\vec{k} = 9\vec{j}$$

12 **Resuelve la siguiente integral definida:**

$$\int_1^3 \frac{3}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^3 \frac{3}{x^2}\,dx = 3\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = 3\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 3\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 2$$

Repaso de mecánica

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 14)

1. ¿Cómo determinarías la velocidad en cada instante a partir de la gráfica posición-tiempo de un movimiento rectilíneo con aceleración constante?

A través de la pendiente en este instante. Sería derivando la ecuación de posición.

2. ¿Cómo quedaría la expresión $v^2 = v_0^2 \pm 2as$ en un caso de caída libre?

En el caso del movimiento de caída libre, cuyas características son: $v_0 = 0$; $a = g$ y $s = y_0 - y$, nos quedaría:

$$v = \sqrt{2g\,(y_0 - y)}$$

3. ¿Puede darse el caso de que sobre un cuerpo actúe una única fuerza y, sin embargo, el módulo de su velocidad sea constante?

Sí, en el movimiento circular uniforme.

4. Las fuerzas grandes siempre producen un mayor impulso que las pequeñas. ¿Es este enunciado verdadero o falso? ¿Por qué?

Es falso. Porque el impulso no solo depende de la intensidad de la fuerza, sino también del intervalo de tiempo durante el que actúe la fuerza. El efecto de una fuerza de gran intensidad que actúe durante un breve intervalo de tiempo puede ser el mismo que el de una fuerza de poca intensidad que se prolongue durante más tiempo.

Actividades (páginas 15/33)

1 Si un cuerpo se mueve según la ecuación de trayectoria:

$$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 5t\vec{j} - \vec{k}\ \text{(m)}$$

***a)* ¿Cuál es el vector que describe el desplazamiento efectuado en los ocho segundos comprendidos entre $t = 2$ s y $t = 10$ s?**

***b)* ¿Cuál es el valor en metros de dicho desplazamiento?**

***c)* ¿Vale lo mismo dicho desplazamiento que el efectuado en los ocho segundos comprendidos entre $t = 4$ s y $t = 12$ s? ¿Por qué? ¿A qué potencia debería estar elevada la variable tiempo (t) para que el desplazamiento fuese el mismo en cualquier intervalo considerado de 8 s?**

a) Sustituyendo los valores dados de tiempo calculamos el vector desplazamiento:

$$\vec{r}\,(t = 2\text{ s}) = 12\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k}\ ;\ \vec{r}\,(t = 10\text{ s}) = 300\vec{i} + 50\vec{j} - \vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t = 10\text{ s}) - \vec{r}\,(t = 2\text{ s}) = 288\vec{i} + 40\vec{j}$$

b) Calculamos el módulo del vector desplazamiento:

$$|\Delta\vec{r}|^2 = 288^2 + 40^2 \rightarrow |\Delta\vec{r}| = 290{,}76\text{ m}$$

c) No puede valer lo mismo, pues x varía con la segunda potencia de t. Para que los desplazamientos fueran los mismos, x debería estar elevada a potencia 1.

2 Determina las componentes x, y, z de la velocidad de un cuerpo cuya ecuación de trayectoria es:

$$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 6t\vec{j} - 4\vec{k}\ \text{(m)}$$

***a)* ¿En qué plano se mueve dicho cuerpo?**

***b)* ¿Cuánto vale su velocidad inicial?**

***c)* ¿Y su velocidad a los 10 s?**

Derivamos el vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4t\vec{i} + 6\vec{j}$$

a) El cuerpo se mueve en un plano perpendicular al eje Z y situado a una altura de $z = -4$ m.

b) $\vec{v}\,(t = 0\text{ s}) = 6\vec{j}$ m/s

c) $\vec{v}\,(t = 10\text{ s}) = 40\vec{i} + 6\vec{j}$ m/s

3 Determina las componentes del vector aceleración del movimiento del cuerpo descrito en la actividad anterior. ¿Qué tipo de movimiento describe?

Derivamos el vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

El cuerpo describe un movimiento uniformemente acelerado en la dirección X, y uniforme en la dirección Y. En consecuencia, la trayectoria será parabólica.

4 PAU Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un cuerpo son:

$$x = R\,(kt + \text{sen}\,kt)$$
$$y = R\,(1 + \cos kt)$$

Donde R y k son constantes. Halla:

***a)* La expresión de la velocidad y de la aceleración y sus módulos.**

***b)* La expresión de la aceleración tangencial, de la aceleración centrípeta y del radio de curvatura del movimiento.**

a) Derivando las ecuaciones paramétricas con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$x' = dx/dt = Rk\,(1 + \cos kt) = ky$$
$$y' = dy/dt = -kR\text{sen}\,kt$$

El vector velocidad queda:

$$\vec{v} = Rk\,(1 + \cos kt)\,\vec{i} - kR\text{sen}\,kt\,\vec{j}$$

El modulo de la velocidad queda:

$$v^2 = R^2k^2\,(\cos^2 kt + 1 + 2\cos kt + \text{sen}^2 kt) =$$
$$= 2k^2R^2\,(1 + \cos kt) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2}Rk\sqrt{1 + \cos kt}$$

Para obtener el vector aceleración derivamos nuevamente la velocidad:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = -Rk^2\text{sen}\,kt\,\vec{i} - k^2R\cos kt\,\vec{j} =$$
$$= -Rk^2(\text{sen}\,kt\,\vec{i} + \cos kt\,\vec{j})$$

El modulo de la aceleración es:

$$a = Rk^2$$

b) Primero calculamos la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2Rk}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y' =$$

$$= k\sqrt{\frac{R}{2R(1 + \cos kt)}}(-kR\text{ sen}\,kt) =$$

$$= \frac{-k^2R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\text{sen}\,kt}{\sqrt{1 + \cos kt}}$$

Para determinar la aceleración centrípeta hacemos uso de la relación entre la aceleración centrípeta, la tangencial y la total:

$$a_c^2 = a^2 - a_t^2 = R^2k^4 - \frac{R^2k^4\text{sen}^2\,kt}{2\,(1 + \cos kt)} =$$

$$= R^2k^4\left(1 - \frac{1 + \cos^2 kt}{2\,(1 + \cos kt)}\right) = R^2k^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{R^2k^4}{2}\,(1 + \cos kt)$$

operando queda:

$$a_c = \frac{Rk^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos kt}$$

Ahora bien, puesto que $a_c = v^2/r$, ahora podemos determinar el radio de curvatura, que será $r = v^2/a_c$:

$$r = \frac{2R^2k^2(1 + \cos kt)}{\dfrac{Rk^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos kt}} = 2\sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos kt}$$

5 Al desplazarse de una ciudad a otra, un motorista viaja a una velocidad constante de 40 km/h durante el primer cuarto de hora. ¿A qué velocidad debe viajar el tiempo restante si desea que la velocidad media del viaje sea de 70 km/h?

El trayecto total dura una hora. Durante el primer cuarto de hora, el motorista circula a 40 km/h, luego recorre 10 km. Los tres cuartos de hora restantes los realiza a una velocidad que debe ser mayor, de modo que la velocidad media resulte ser de 70 km/h. La velocidad media es el trayecto total recorrido dividido por el tiempo total. El trayecto total es el realizado en el primer cuarto de hora más el realizado en los tres cuartos de hora restantes, luego:

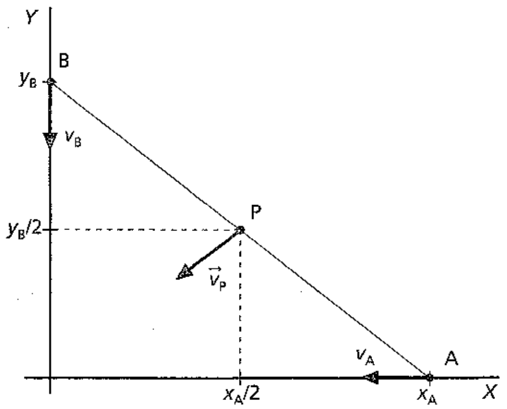
$$v_{media} = \frac{10 + \dfrac{3}{4}v_2}{1} = 70 \Rightarrow \frac{3}{4}v_2 = 70 - 10 = 60$$

$$v_2 = 80 \text{ km/h}$$

6 Dos cuerpos A y B se desplazan sobre los semiejes X^+ e Y^-, respectivamente, con velocidades v_A y v_B.

Inicialmente se encontraban a distancias x_0 e y_0 del origen y se dirigen hacia él. Halla la trayectoria del punto medio P entre A y B, así como la velocidad de dicho punto. ¿Qué tipo de movimiento describe P?

La siguiente figura representa la situación planteada en el enunciado del problema:



Sacamos las ecuaciones de posición de los puntos A y B:

$$x_A = x_0 + v_At$$
$$y_B = y_0 + v_Bt$$

Por otro lado relacionamos la posición del punto P con respecto A y B:

$$x_P = \frac{1}{2}x_A$$

$$y_P = \frac{1}{2}y_B$$

Luego la trayectoria de P vendrá dada por estas dos ecuaciones paramétricas:

$$x_P = \frac{x_0 + v_At}{2} \qquad y_P = \frac{y_0 + v_Bt}{2}$$

La velocidad del punto P se determinará derivando las anteriores expresiones:

$$v_{xP} = \frac{v_A}{2} \qquad v_{yP} = \frac{v_B}{2}$$

El punto P describe una trayectoria rectilínea, como puede observarse si combinamos las ecuaciones de x e y para hacer desaparecer la variable t:

$$2y = y_0 + v_Bt = y_0 + v_B\frac{2x - x_0}{v_A} = y_0 + \frac{v_B}{v_A}(2x - x_0)$$

despejando queda:

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{v_B}{v_A}x_0\right) + \frac{v_B}{v_A}x$$

7 Una trainera emplea 8 min en recorrer 1,5 millas náuticas navegando a favor de la corriente y 12 min en el trayecto de vuelta en contra de la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente en m/s?

Dato: 1 milla náutica = 1 852 m

La distancia que recorre la trainera en cada trayecto es de 1,5 millas = 2 778 m.

Cuando hace el recorrido a favor de la corriente, se cumple que:

$$v = v_{trainera} + v_{agua} = \frac{2\,778}{480} = 5{,}787\,5 \text{ m/s}$$

Mientras que cuando lo hace contra la corriente, se cumple lo siguiente:

$$v = v_{trainera} + v_{agua} = \frac{2\,778}{480} = 5{,}787\,5 \text{ m/s}$$

Sumando ambas expresiones, se obtiene:

$$2v_{trainera} = 9{,}645\,8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_{trainera} = 4{,}822\,9 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en una cualquiera de las ecuaciones, resulta que:

$$v_{agua} = 0{,}964\,6 \text{ m/s}$$

8 Dos corredores de atletismo se encuentran separados inicialmente una distancia de 10 m, y ambos salen simultáneamente al oír el pistoletazo de salida. El corredor más adelantado arranca con una aceleración de 0,27 m/s² que mantiene constante durante 30 s, al cabo de los cuales sigue corriendo uniformemente con la velocidad alcanzada. El segundo corredor arranca con una aceleración constante de 0,29 m/s² durante 30 s, transcurridos los cuales se mueve uniformemente con la velocidad lograda. Determina:

***a)* ¿Cuánto tarda el segundo corredor en dar alcance al primero?**

***b)* ¿A qué distancia de la línea más atrasada le da alcance?**

Sacaremos previamente las ecuaciones de posición de los dos corredores:

Si ponemos el origen de coordenadas en el corredor B, la distancia al origen del corredor A en el tramo acelerado de su carrera es:

$$x_{0A} = 10 + 1/2 \cdot 0{,}27 \cdot 30^2 = 131{,}5 \text{ m}$$

En este tramo, el corredor A alcanza la velocidad:

$$v_A = 0{,}27 \cdot 30 = 8{,}1 \text{ m/s}$$

A partir de los 30 s, la distancia al origen del corredor A vendrá dada por:

$$x_A = 131{,}5 + 8{,}1t$$

Por su parte, la distancia al origen del corredor B en el tramo acelerado de su carrera es:

$$x_{0B} = 1/2 \cdot 0{,}29 \cdot 30^2 = 130{,}5 \text{ m}$$

En este tramo, el corredor B alcanza la velocidad:

$$v_B = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \text{ m/s}$$

Vemos que en el tramo acelerado de la carrera, el corredor B no ha alcanzado al A; pero sabemos que lo hará, pues la velocidad de B en el tramo uniforme es mayor que la de A.

A partir de los 30 s, la distancia al origen del corredor B vendrá dada por:

$$x_B = 130{,}5 + 8{,}7t$$

a) Para saber cuándo B da alcance a A, igualamos ambas expresiones:

$$130{,}5 + 8{,}7\,t = 131{,}5 + 8{,}1t$$
$$0{,}6t = 1 \Rightarrow t = 1{,}67 \text{ s}$$

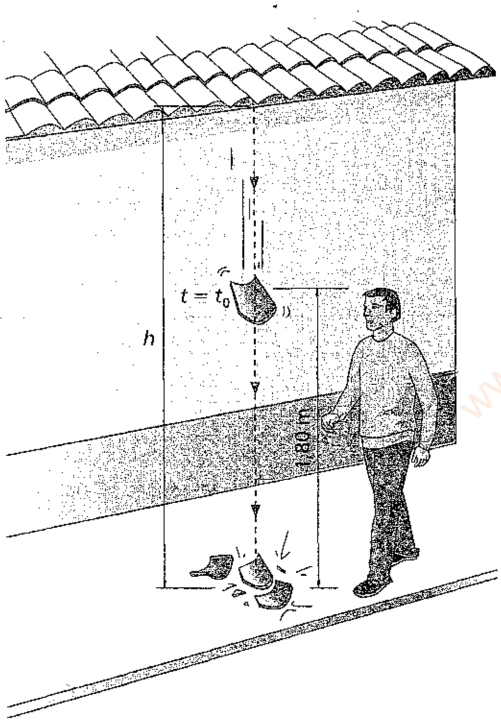
Luego el corredor B da alcance al corredor A al cabo de 31,67 s.

b) El cruce se produce a la siguiente distancia del origen:

$$x_{cruce} = 130{,}5 + 8{,}7 \cdot 1{,}67 = 145 \text{ m}$$

9 **PAU** **Una teja se desprende de un tejado y cae justo delante de un atónito viandante que salva su cabeza de milagro. La teja recorre los 1,80 m de altura de la persona en 0,2 s. ¿A qué altura está el tejado?**

La siguiente figura ilustra la situación descrita en el enunciado del problema:



Aplicando las ecuaciones de posición de caída libre de la teja en las dos situaciones que indica el dibujo:

$$y(t = t_0) = h - 1/2\, gt_0^2 = 1{,}8 \Rightarrow 2h = 3{,}6 + gt_0^2$$

y para la segunda posición:

$$y(t = t_0 + 0{,}2) = h - 1/2\, g(t_0 + 0{,}2)^2 = 0$$
$$2h = g(t_0 + 0{,}2)^2 = g(t_0^2 + 0{,}4t_0 + 0{,}04)$$

Igualando, resulta:

$$3{,}6 + gt_0^2 = g(t_0^2 + 0{,}4t_0 + 0{,}04)$$

operando:

$$3{,}6 = 0{,}4gt_0^2 + 0{,}04g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_0 = 0{,}818 \text{ s}$$

A partir de t_0 podemos determinar la altura de la pared:

$$h = \frac{3{,}6 + gt_0^2}{2} = 5{,}08 \text{ m}$$

10 **PAU** **Dos pelotas son lanzadas verticalmente con una velocidad de 30 m/s, con un intervalo de tiempo de 0,3 s entre el primer y segundo lanzamiento.**

***a)* ¿A qué altura se cruzan y en qué tiempo lo hacen desde que se lanzó la primera?**

***b)* ¿Qué altura máxima alcanzan?**

La ecuación de posición de la primera bola es:

$$y_1 = 30\,t - 1/2\, gt^2$$

Y la ecuación de la segunda bola considerando que es lanzada 0,3 segundos más tarde:

$$y_2 = 30\,(t - 0{,}3) - 1/2\, g(t - 0{,}3)^2 =$$
$$= -1/2\, gt^2 + (0{,}3g + 30)t - 8{,}559$$

a) Cuando las dos pelotas se cruzan, se cumple que:

$$30\,t - 1/2\, gt^2 = -1/2\, gt^2 + (0{,}3g + 30)t - 8{,}559$$
$$0 = 0{,}3gt - 8{,}559 \Rightarrow t = 2{,}91 \text{ s}$$

Para determinar la altura del cruce, se sustituye este tiempo en una cualquiera de las dos expresiones de y:

$$y_{cruce} = 45{,}81 \text{ m}$$

b) La altura máxima, por ejemplo de la pelota 1, se alcanza cuando la velocidad es 0, luego:

$$v = 30 - gt = 0 \Rightarrow t = 30/g = 3{,}06 \text{ s}$$

Sustituyendo en la expresión de y, resulta:

$$y_{máx} = 30 \cdot 3{,}06 - 1/2 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}06^2 = 45{,}92 \text{ m}$$

11 **PAU** **Un objeto es lanzado desde una altura inicial y_0 con una velocidad inicial v_0, y forma un ángulo de elevación α sobre la horizontal. Demuestra que la distancia horizontal que recorre el objeto hasta que toca suelo viene dada por:**

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left[v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 + 2gy_0}\right]$$

Analiza cómo quedaría la expresión cuando $y_0 = 0$ (lanzamiento desde el suelo). (No se considera fricción con el suelo)

La altura del objeto viene dada por la expresión:

$$y = y_0 + v_{0y}t - 1/2\, gt^2 = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, gt^2$$

Para determinar el alcance del objeto, debemos calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo, es decir, el tiempo para el que y se hace 0:

$$y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}t - \frac{2y_0}{g} = 0$$

resolviendo como una ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{\dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} + \sqrt{\dfrac{4v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g^2} + \dfrac{8y_0}{g}}}{2} =$$

$$= \frac{1}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2y_0 g}\right)$$

Hemos desechado el signo menos en la solución pues corresponde a un valor negativo del tiempo.

Despejando el valor obtenido en la expresión de la distancia horizontal, resulta:

$$x = v_{0x}t = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2y_0 g}\right)$$

Si $y_0 = 0$:

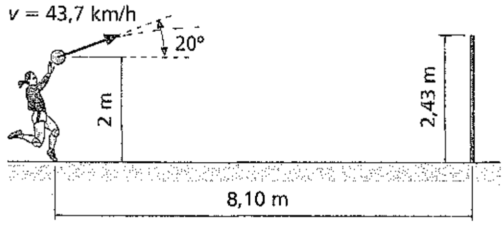
$$t = \frac{2v_0}{g} \operatorname{sen}\alpha$$

Y sustituyendo este valor en la expresión anterior:

$$x = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

12 **PAU** **En un partido de voleibol, un jugador hace un saque desde una distancia de 8,10 m de la red, de modo que la pelota sale desde una altura de 2 m con una velocidad de saque de 43,7 km/h y un ángulo de elevación de 20°. Si la altura reglamentaria de la red es de 2,43 m, ¿logra que la pelota pase al campo contrario?**

En la figura siguiente se observa la situación descrita:



En primer lugar, pasamos la velòcidad al sistema internacional, que resulta ser de 12,139 m/s. La distancia horizontal de la pelota vendrá dada por:

$$x_0 = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \; t$$

Despejamos el tiempo para estos datos:

$$t = \frac{8,10}{12,139 \cdot \cos 20°} = 0,71 \text{ s}$$

Debemos determinar la altura de la pelota cuando llega a la red. La altura vendrá dada por:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 =$$

$$= 2 + 12,139 \cdot \text{sen } 20° \cdot 0,71 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (0,71)^2$$

$$y = 2 + 2,948 - 2,47 = 2,478 \text{ m}$$

Esta altura es superior a la altura de la red, luego la pelota sí pasará al campo contrario.

13 **Halla la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración de un punto de la superficie terrestre situado a 40° de latitud.**

La velocidad angular es la misma para todos los puntos de la Tierra, y viene dada por la expresión:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3\,600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La velocidad lineal es el producto de la velocidad angular por la distancia al eje de rotación:

$$v = \omega \cdot r = \omega \cdot R_T \cdot \cos 40° =$$

$$= 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \cdot \cos 40° = 354,75 \text{ m/s}$$

Puesto que la velocidad lineal es constante, la única componente de la aceleración será la centrípeta, que viene dada por la expresión siguiente:

$$a = a_c = v^2/r = \omega^2 r =$$

$$= (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot \cos 40°$$

$$a_c = 0,026 \text{ m/s}^2$$

14 **PAU** **Una llanta de radio *R* rueda por el suelo sin deslizarse, con velocidad constante *v*. Demuestra que la posición del punto *P*, que inicialmente estaba en contacto con el suelo, viene dada al cabo de un tiempo *t* por las coordenadas:**

$$x = R(\omega t - \text{sen } \omega t)$$

$$y = R(1 - \cos \omega t)$$

donde $\omega = v/R$. (Dichas expresiones son las ecuaciones paramétricas de la cicloide).

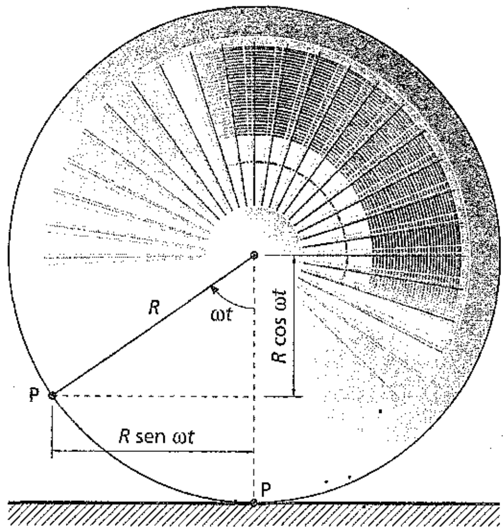
La rueda experimenta simultáneamente un movimiento de rotación y uno de traslación. Si la posición del origen es el punto P de contacto con el suelo, las coordenadas de dicho punto en el caso de que solo haya rotación vendrían dadas por las expresiones siguientes:

$$x = -R \text{ sen } \omega t$$

$$y = R(1 - \cos \omega t)$$

$$x_{máx} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \text{ sen } \alpha + \sqrt{v_0^2 \text{ sen}^2\alpha}\right) = \frac{v_0^2 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha}{g} =$$

$$= v_0^2 \frac{\text{sen } 2\alpha}{g}$$



A este movimiento hay que añadirle el desplazamiento horizontal debido a la traslación, que es *vt*. En consecuencia:

$$x_P = vt - R \text{ sen } \omega t = R\omega t - R \text{ sen } \omega t = R(\omega t - \text{sen } \omega t)$$

$$y_P = R(1 - \cos \omega t)$$

15 **¿Puede un cuerpo sobre el que actúa una única fuerza permanecer en reposo?**

No. Para que un cuerpo esté en reposo es preciso, o bien que no actúe sobre él ninguna fuerza, o bien que las que actúen sobre él se anulen mutuamente, algo imposible si solo hay presente una fuerza.

16 **¿Es correcto afirmar que un cuerpo siempre se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre él? ¿Por qué?**

No. La aceleración «empuja» al cuerpo a que se desplace en su dirección, pero dicho alineamiento no siempre se produce. Por ejemplo, si bien las fuerzas gravitatorias dan lugar a aceleraciones centrales, los astros describen movimientos circulares, que son perpendiculares a las aceleraciones que los producen.

17 **Tenemos dos bloques de plomo de 4 kg y 1 kg, respectivamente. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:**

a) **El primero tiene el cuádruple de inercia.**

b) **El primero tiene el cuádruple de volumen.**

c) **El primero adquiere el cuádruple de aceleración sometido a la misma fuerza.**

d) **Si dejan de actuar todas las fuerzas sobre ambos, el primero seguirá moviéndose durante más tiempo que el segundo.**

e) **¿Qué respuestas cambiarías si el bloque de 4 kg fuese de hielo?**

Razona la respuesta.

a) Sí, pues la inercia es una magnitud proporcional a la masa del cuerpo.

b) Sí, pues ambos bloques son del mismo material.

c) No. Adquiere la cuarta parte de aceleración.

d) No. Ambos seguirán moviéndose indefinidamente.

e) No cambia ninguna de las respuestas, pues son independientes del material de que estén hechas las dos bolas.

18 **Un objeto de 5 kg que se mueve a 20 m/s choca contra otro objeto de masa desconocida que estaba en reposo. Después del impacto, el primer objeto se mueve en el mismo sentido que antes, pero con una velocidad de 2 m/s, mientras que el segundo lo hace también en ese sentido, pero con una velocidad de 12 m/s. ¿Qué masa tenía el segundo objeto?**

En ausencia de fuerzas externas se conserva el momento lineal, es decir:

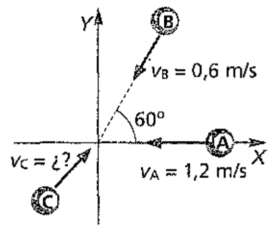
$$p_{\text{antes}} = p_{\text{después}}$$

$$5 \cdot 20 = 2 \cdot 5 + m \cdot 12 \Rightarrow 100 = 10 + 12\,m$$

$$12\,m = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 7{,}5 \text{ kg}$$

19 **PAU** **Las tres esferas A, B y C de la figura, de masas respectivas 0,1, 0,2 y 0,5 kg, llegan simultáneamente al origen, donde colisionan y quedan adheridas unas con otras. ¿Cuál es la velocidad de la esfera C si se quedan en reposo después de la colisión?**



En ausencia de fuerzas externas se conserva el momento lineal.

Podemos plantear dos ecuaciones, una para la coordenada *x* y otra para la coordenada *y*:

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} + m_c v_{Cx} = 0$$

$$m_A v_{Ay} + m_B v_{By} + m_c v_{Cy} = 0$$

Ambas expresiones se igualan a 0 pues sabemos que tras la colisión quedan en reposo.

Si llamamos α al ángulo de incidencia de la bola C:

$$-0{,}1 \cdot 1{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot \cos 60° + 0{,}5 \cdot v_C \cos\alpha = 0$$

$$-0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot \text{sen } 60° + 0{,}5 \cdot v_C \text{ sen } \alpha = 0$$

Operando las dos ecuaciones quedan:

$$-0{,}12 - 0{,}06 + 0{,}5 \cdot v_C \cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_C \cos\alpha = 0{,}36$$

$$v_C \text{ sen } \alpha = 0{,}24 \cdot \text{sen } 60°$$

Dividiendo ambas expresiones, resulta:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Despejando v_c en cualquiera de las dos ecuaciones, resulta:

$$v_c = 0{,}416 \text{ m/s}$$

20 **Un cuerpo de 10 kg que se movía a una velocidad de 20 m/s logra frenar en 10 m. ¿Cuánto vale la fuerza, supuesta constante, que ha actuado? ¿Cuánto vale el impulso que ha frenado el cuerpo?**

Para determinar la aceleración cuando disponemos de las velocidades inicial y final y del espacio recorrido, se hace uso de la siguiente ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

Despejamos la aceleración con los datos del problema:

$$a = \frac{-20^2}{2 \cdot 10} = -20 \text{ m/s}$$

- Conocida la aceleración, podemos determinar el tiempo de actuación de la fuerza:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-20}{-20} = 1 \text{ s}$$

La fuerza que ha frenado el cuerpo será:

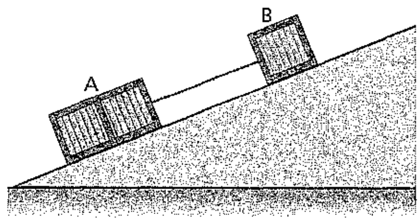
$$F = ma = -200 \text{ N}$$

Y el impulso será:

$$I = F\Delta t = -200 \text{ N s}$$

Obsérvese que esta cantidad coincide con la variación del momento lineal.

21 **PAU** **Los cuerpos A y B de la figura, de masas 5 y 3 kg, respectivamente, están unidos mediante una cuerda inextensible de masa despreciable sobre un plano inclinado 30°. El coeficiente de rozamiento de A con la superficie es de 0,2, y el de B es de 0,3. Determina la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.**



La ecuación de fuerzas para el cuerpo A es:

$$m_A g \text{ sen } 30° - T - F_{roz} = m_A a$$

$$m_A g \text{ sen } 30° - T - \mu_A m_A g \cos 30° = m_A a$$

Mientras que para el cuerpo B será:

$$T + m_B g \text{ sen } 30° - F_{roz} = m_B a$$

$$T + m_B g \text{ sen } 30° - \mu_B m_B g \cos 30° = m_B a$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$[(m_A + m_B) \text{ sen } 30° - (\mu_A m_A + \mu_B m_B) \cos 30°]g =$$

$$= (m_A + m_B)a$$

De donde resulta que la aceleración es:

$$a = 2{,}88 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en una cualquiera de las dos expresiones anteriores, podemos determinar la tensión:

$$T = m_B[a + g(\mu_B \cos 30° - \text{sen } 30°)]$$

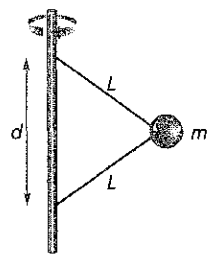
Introduciendo los correspondientes valores tenemos:

$$T = 1{,}578 \text{ N}$$

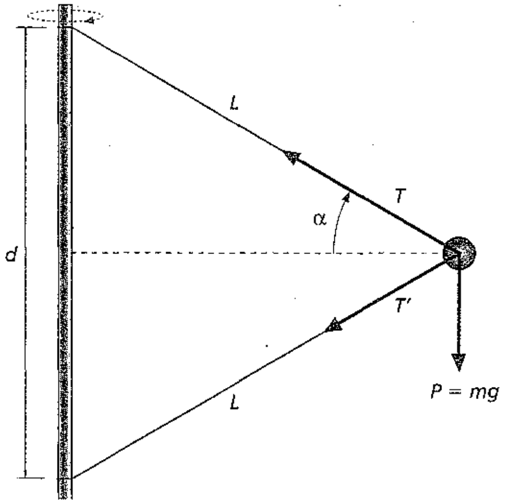
22 **PAU** **Una esfera de masa m está unida a una varilla vertical que gira con cierta velocidad angular, como se muestra en la figura. Si la tensión en el hilo superior es *T*, determina, en función de los parámetros ofrecidos:**

***a)* La tensión *T'* en el hilo inferior.**

***b)* La velocidad angular del sistema.**



En la figura siguiente se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa *m*:



El ángulo que forma cada uno de los hilos con la horizontal viene dado por la siguiente expresión:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{d}{2L} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{d^2}{4L^2}}$$

a) En el equilibrio dinámico, las componentes verticales de las tensiones y el peso del cuerpo deben igualarse:

$$T\ \text{sen}\ \alpha = T'\ \text{sen}\ \alpha + mg$$

Despejamos T' e incorporando el valor del sen α queda:

$$T' = \left(T\frac{d}{2L} - mg\right)\frac{2L}{d} = T - \frac{2Lmg}{d}$$

b) Las componentes horizontales de las tensiones son las responsables del movimiento circular de la bola, es decir:

$$F_c = T\cos\alpha + T'\cos\alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 L\cos\alpha$$

Como:

$$T + T' = m\omega^2 L$$

Entonces:

$$T + T - \frac{2Lmg}{d} = m\omega^2 L \Rightarrow 2\left(T - \frac{Lmg}{d}\right) = m\omega^2 L$$

Despejando la velocidad angular, tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{L}\left(\frac{T}{m} - \frac{L}{d}g\right)}$$

23 Determina el trabajo realizado por una fuerza del tipo $F = -k/x^2$ en un desplazamiento entre una posición inicial $x_0 = 20$ m y otra final $x = 10$ m.

El trabajo viene dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{-k}{x^2}\,dx = \left[\frac{k}{x}\right]_{20}^{10} = \frac{k}{10} - \frac{k}{20} = \frac{k}{20}$$

24 PAU Piensa en lo que ocurrirá en los siguientes casos de colisiones elásticas y verifícalo posteriormente a partir de las expresiones de las velocidades:

***a)* Las partículas tienen idéntica masa y colisionan frontalmente con velocidades iguales y opuestas.**

***b)* Las partículas colisionan frontalmente con el mismo valor de velocidad, siendo m_2 mucho mayor que m_1.**

a) Ambas partículas rebotan con las velocidades intercambiadas:

$$mv + m(-v) = 0 = mv_1' + mv_2' \Rightarrow v_1' = -v_2'$$

Además, sabemos que en una colisión elástica se cumple:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

Sustituyendo, resulta:

$$v_1 - (-v_1) = v_2' - (-2v_2') \Rightarrow v_2' = v_1$$

Luego:

$$v_1' = -v_1$$

b) El sentido común nos dice que la partícula de masa mucho mayor seguirá moviéndose con la misma velocidad, pero no está claro qué ocurre con la partícula de masa mucho menor. Veamos:

$$(m_1 - m_2)v = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Dividimos esta expresión por m_1:

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$$

Puesto que $m_2 << m_1$, se puede aproximar a:

$$v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$$

Por otro lado, sabemos que:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \Rightarrow 2v_1 = v_2' - v_1'$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$3v_1 = v_2'\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \cong v_2' \Rightarrow v_2' = 3v_1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta:

$$2v_1 = v_2' - v_1' \Rightarrow v_1' = 3v_1 - 2v_1 \Rightarrow v_1' = v_1$$

Visto el resultado, podríamos haber aproximado directamente la primera ecuación, con lo que habríamos obtenido directamente el valor de v_1'.

25 Dos masas iguales se mueven una al encuentro de la otra con velocidades iguales y de signos contrarios. ¿Qué ocurrirá si la colisión es inelástica?

Si las dos masas quedan adheridas, se detienen tras el choque. Esto puede verse si igualamos las cantidades de movimiento de antes y después del choque:

$$mv + m(-v) = 2mv_f \Rightarrow 0 = 2mv_f \Rightarrow v_f = 0$$

26 PAU ¿Qué fracción de energía cinética se disipa cuando dos masas iguales colisionan frontalmente de forma inelástica y una de ellas tenía doble velocidad que la otra? ¿Y si colisionan moviéndose las dos en el mismo sentido?

Igualamos los momentos lineales de antes y después de la colisión:

$$m \cdot 2v + m(-v) = 3mv_f \Rightarrow mv = 3mv_f$$

$$v_f = v/3$$

Las energías cinéticas de antes y después de la colisión son las siguientes:

$$E_{c\,\text{antes}} = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mv^2$$

$$E_{c\,\text{después}} = \frac{1}{2}3m\left(\frac{v}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}mv^2$$

Restando ambas expresiones obtenemos la energía cinética disipada:

$$E_{c\,\text{disipada}} = E_{c\,\text{antes}} - E_{c\,\text{después}} = \frac{14}{6}mv^2$$

Dividiendo el resultado anterior por la energía de antes de la colisión, obtenemos la fracción de energía disipada:

$$\%\,E_{c\,\text{disipada}} = 100 \cdot E_{c\,\text{disipada}}/E_{c\,\text{antes}} = 93{,}3\,\%$$

Si las dos masas se movían en el mismo sentido, la velocidad final será:

$$m \cdot 2v + mv = 3mv_f \Rightarrow v_f = v$$

Las energías cinéticas de antes y de después de la colisión son ahora las siguientes:

$$E_{c\,\text{antes}} = \frac{5}{2}mv^2;\ E_{c\,\text{después}} = \frac{3}{2}mv^2$$

Procediendo de la misma manera:

$$E_{c\,\text{disipada}} = E_{c\,\text{antes}} - E_{c\,\text{después}} = mv^2$$

$$\%\,E_{c\,\text{disipada}} = 100 \cdot E_{c\,\text{disipada}}/E_{c\,\text{antes}} = 40\,\%$$

27 PAU **Un cuerpo se desplaza desde el punto A (1, 1) hasta D (3, 3) bajo la acción de una fuerza que obedece a la expresión:**

$$\vec{F} = \frac{c}{x^2}\vec{i} + \frac{c}{y^2}\vec{j}\ \text{N}$$

donde *c* es una constante. Determina el trabajo efectuado por dicha fuerza a lo largo de las siguientes trayectorias:

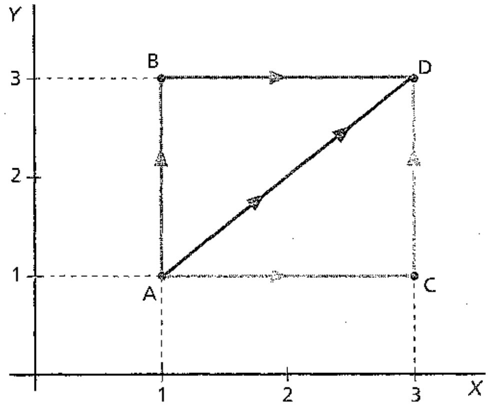
***a)* Trayectoria directa desde *A* hasta *D*.**

***b)* Trayectoria *A* (1, 1) → *B* (1, 3) → *D* (3, 3)**

***c)* Trayectoria *A* (1, 1) → *C* (3, 1) → *D* (3, 3)**

***d)* ¿Qué puede decirse acerca de dicha fuerza?**

En la figura siguiente se observan las tres trayectorias descritas:



a) El trabajo viene dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_A^D \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^D \left(\frac{c}{x^2}\,dx + \frac{c}{y^2}\,dy\right)$$

Puesto que la trayectoria viene definida por la expresión $y = x$, se concluye que $dy = dx$.

$$W = \int_1^3 \left(\frac{c}{x^2}\,dx + \frac{c}{x^2}\,dx\right) = 2c\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 2c\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4c}{3}$$

b) Para la trayectoria A (1, 1) → B (1, 3) → D (3, 3), el trabajo viene dado por:

$$W = W_{AB} + W_{BD}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \frac{c}{y^2}\,dy = c\left[-\frac{1}{y}\right]_1^3 = \frac{2c}{3}$$

$$W_{BD} = \int_B^D \vec{F}\,d\vec{r} = \int_B^D \frac{c}{x^2}\,dx = c\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{2c}{3}$$

$$W = \frac{4c}{3}$$

c) Para la trayectoria A (1, 1) → C (3, 1) → D (3, 3), el trabajo viene dado por:

$$W = W_{AC} + W_{CD}$$

Puede comprobarse del mismo modo que para el punto anterior que el trabajo es $4c/3$.

d) La fuerza es conservativa, pues el trabajo realizado tan solo depende de los puntos inicial y final, y no varía con la trayectoria que sigue el cuerpo.

28 PAU **Desde el punto más alto de una esfera de radio *R* se deja resbalar sin fricción una canica de masa *m*. Demuestra que la canica se despegará de la superficie en un punto *P* tal que el ángulo que forma con la vertical cumple la razón trigonométrica:**

$$\cos\theta = 2/3$$

Durante el movimiento de bajada por la rampa esférica, la canica realiza un movimiento circular. La fuerza centrípeta que lo causa vendrá dada por la componente radial del peso y por la fuerza normal que ejerce el suelo, es decir:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

$$N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$$

En el momento en que la canica despega de la superficie, la fuerza normal que ejerce el suelo se hace cero, luego:

$$mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = 0 \Rightarrow mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = Rg\cos\theta$$

Por otro lado, la energía mecánica del sistema se mantiene constante e igual a su valor inicial, que es $2mgR$. En el punto de «despegue», la expresión de la energía mecánica será:

$$E_{total} = 2mgR = 1/2\,mv^2 + mgh = 1/2\,mv^2 + mgR\,(1 + \cos\theta)$$

$$4gR = v^2 + 2gR\,(1 + \cos\theta)$$

Sustituyendo el valor antes obtenido para la velocidad en el punto de «despegue», resulta:

$$4gR = gR\cos\theta + 2gR\,(1 + \cos\theta)$$

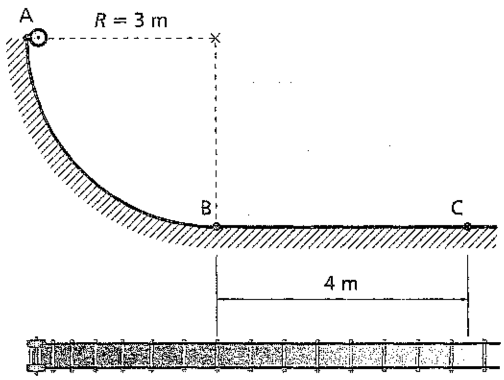
$$4 = \cos\theta + 2 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 2/3$$

29 PAU **Un pequeño bloque de 0,5 kg de masa se deja resbalar desde el punto A y se desliza por un riel enforma de cuadrante de círculo de radio *R* = 3 m, tal y como se aprecia en la figura, de modo que llega al punto B con una velocidad de 5,4 m/s. Finalmente, se para del todo en C, que se encuentra a una distancia de 4 m de *B*. Determina:**

***a)* El trabajo realizado por la fricción sobre el bloque entre A y B.**

***b)* El valor del coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie horizontal.**

La situación descrita en el enunciado puede observarse en el siguiente dibujo:



a) Las energías en el punto inicial A (el punto más alto de la trayectoria) y en el punto B son:

$$E_A = mgR = 14{,}7\ \text{J};\ E_B = 1/2\,mv^2 = 7{,}29\ \text{J}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será la energía disipada desde el punto A hasta el punto B:

$$W_{roz} = E_A - E_B = 7{,}41\ \text{J}$$

b) Desde el punto B al punto C, el cuerpo experimenta un movimiento uniformemente acelerado con aceleración negativa. Esta aceleración puede calcularse mediante la conocida expresión:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow a = \frac{-5{,}4^2}{2\cdot 4} = -3{,}645\ \text{m/s}^2$$

A partir de la aceleración podemos determinar la fuerza de rozamiento y el coeficiente de rozamiento:

$$F_{roz} = ma = 1{,}822\,5\ \text{N}$$

$$F_{roz} = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{1{,}822\,5}{0{,}5\cdot 9{,}8} = 0{,}372$$

1 Movimientos de los cuerpos celestes

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. El movimiento de los planetas a través de la historia**
  páginas 37/40
  - **1.1. Teorías geocéntricas**
    página 37
  - **1.2. Teorías heliocéntricas**
    páginas 38/39
  - **1.3. Las leyes de Kepler**
    página 40
- **2. Nociones actuales sobre el sistema solar**
  página 41
- **3. La traslación de los planetas**
  páginas 42/46
  - **3.1. Momento angular**
    páginas 42/43
  - **3.2. Conservación del momento angular**
    página 44
  - **3.3. Momento angular de traslación de los planetas**
    página 45
  - **3.4. Consecuencias de la constancia del momento angular planetario**
    página 46
- **4. El centro de masas**
  páginas 47/49
  - **4.1. Posición del centro de masas**
    página 47
  - **4.2. Movimiento del centro de masas**
    página 48
  - **4.3. Centro de masas y movimiento de los cuerpos celestes**
    página 49
- **5. La rotación de los cuerpos celestes**
  páginas 50/57
  - **5.1. Rotación de un sólido rígido**
    página 50
  - **5.2. Momento angular y momento de inercia de un sólido en rotación**
    páginas 51/54
  - **5.3. Conservación del momento angular en rotación**
    página 54
  - **5.4. Momento angular y rotación de los cuerpos celestes**
    página 55
  - **5.5. Energía cinética de un cuerpo en rotación**
    páginas 56/57

Cuestiones previas (página 36)

1. ¿Se mueve nuestro planeta a la misma velocidad en todos los puntos de su órbita alrededor del Sol?

No, porque según la segunda ley de Kepler cuanto mayor sea la distancia entre el Sol y la Tierra, menor será la velocidad. La Tierra se mueve más deprisa en el perihelio que en el afelio, pero barre áreas iguales en tiempos iguales.

2. ¿Por qué razón la mayoría de los cuerpos que componen el sistema solar orbitan en torno al Sol casi en el mismo plano?

Porque el momento angular de traslación de un planeta alrededor del Sol permanece constante en dirección.

3. ¿Por qué el eje de rotación terrestre se mantiene paralelo a sí mismo mientras la Tierra orbita en torno al Sol?

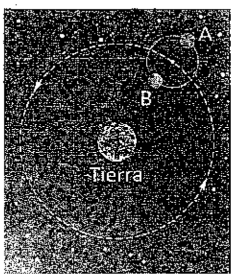
Por la ausencia de momentos de fuerza netos actuando sobre la Tierra. Esto explica la secuencia regular de las estaciones.

4. Se afirma que la fusión de los casquetes polares por un aumento de la temperatura planetaria produciría un ligero alargamiento de los días. ¿Sabes por qué?

La distribución de masa varía, y por tanto el momento de inercia. La conservación del momento angular exige que varíe la velocidad angular.

Actividades (páginas 37/57)

1 A la vista de la figura, ¿en qué punto del epiciclo se vería más brillante el planeta desde la Tierra? ¿En qué zona del epiciclo parecería retrogradar el planeta si el centro del epiciclo no se moviera?



Se vería más brillante en el punto B, y parecería retrogradar también cuando el planeta estuviera recorriendo el tramo de epiciclo próximo a B. Obsérvese que ambos giros se producen en sentido antihorario.

2 ¿Qué observaciones realizó Galileo para comprobar la ausencia de paralajes?

Galileo comprobó que las estrellas no parecían aumentar a través del telescopio, lo cual le hizo pensar que estaban muy lejos, tanto que no era posible detectar ningún paralaje.

3 Los seis meses transcurridos entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre tienen más días que los comprendidos entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo. ¿Se te ocurre alguna razón? ¿Entre qué fechas estará más próxima la Tierra al Sol?

En efecto, el tiempo comprendido entre el equinoccio de septiembre y el de marzo es menor que el que transcurre entre el equinoccio de marzo y el de septiembre. La razón es que ni la órbita terrestre es un círculo perfecto ni el Sol está en su centro. En consecuencia, y de acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad orbital de la Tierra es algo mayor cuanto más próxima está al Sol, cosa que ocurre durante el invierno boreal.

4 PAU A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol ($T = 365$ días y $r_{\text{Sol-Tierra}} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m), determina cuánto tarda Júpiter en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres) sabiendo que su distancia al Sol es de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m.

Dato: el valor de la constante de Kepler, *k*, es el mismo para todos los planetas que orbitan alrededor del Sol.

De la tercera ley de Kepler sabemos que:

$$T^2 = kR^3 \Rightarrow \frac{T^2_{\text{Júpiter}}}{R^3_{\text{Júpiter}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}}$$

Por tanto:

$$T^2_{\text{Júpiter}} = T^2_{\text{Tierra}}\left(\frac{R_{\text{Júpiter}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3 = 1{,}87 \cdot 10^7$$

$$T_{\text{Júpiter}} = 4\,328{,}77 \text{ días} = 11{,}86 \text{ años} = 3{,}74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

5 Si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿tendrá momento angular cero con respecto a un origen cualquiera elegido al azar? ¿Tendrá momento angular cero con respecto a algún origen específico? Razona tu respuesta.

Su momento angular no será cero, salvo que el origen elegido se encuentre en la recta del movimiento, en cuyo caso $\vec{r}$ y $\vec{p}$ serían paralelos.

6 Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una recta con una velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0, 0) cuando el cuerpo está en los puntos (2, 0), (2, 1) y (2, 2) de la misma recta. ¿Qué conclusión obtienes respecto del momento angular de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme?

Punto (2, 0): $\vec{r} = 2\vec{i}$ m

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Punto (2, 1): $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Punto (2, 2): $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

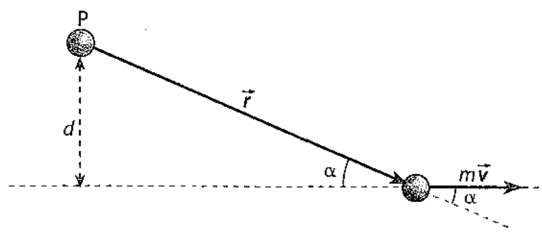
En consecuencia, el momento angular de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme es constante.

7 Demuestra que el momento angular de una partícula de masa *m*, que se mueve con velocidad *v* a lo largo de una recta cuya distancia mínima al origen es *d*, es constante y tiene por valor $L = mvd$ en cualquier punto de la trayectoria.

El módulo del momento angular viene dado por la expresión:

$$L = rmv \text{ sen } \alpha$$

donde α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Sin embargo, como puede comprobarse en la figura:



$$r \text{ sen } \alpha = d$$

Por lo que:

$$L = mvd = \text{constante}$$

8 **PAU** **¿Permanece constante el momento angular de un electrón en una órbita determinada según el modelo de Bohr? Explícalo.**

El segundo postulado de Bohr establece, efectivamente, la constancia de dicha magnitud como consecuencia del carácter central de la fuerza electrostática entre núcleo y electrón. De ahí también que el modelo de Bohr supusiera órbitas planas para el movimiento de los electrones.

9 **Teniendo en cuenta tu respuesta a la actividad anterior, ¿puede usarse el valor del momento angular para caracterizar una determinada órbita? ¿Conoces algún número cuántico referido al momento angular?**

Efectivamente, al tener valor constante para cada órbita, el momento angular sirve para caracterizar las órbitas del átomo de Bohr. El número cuántico referido al momento angular es n, el número cuántico principal.

10 **¿Qué significado físico tiene el postulado de Bohr según el cual $mvr = \dfrac{nh}{2\pi}$?**

La formulación del segundo postulado de Bohr es:

$$L = m_e vr = n\hbar$$

Luego el momento angular caracteriza las distintas órbitas de Bohr a través del número cuántico principal, n.

11 **PAU** **Una pelota unida a una cuerda se hace girar en círculos horizontales alrededor de un eje, permitiendo que la cuerda se vaya arrollando en torno a dicho eje. ¿Permanece constante, aumenta o disminuye la velocidad de la pelota a medida que la cuerda se arrolla? ¿Cómo lo explicarías en términos del momento angular?**

Suponiendo que el efecto del peso es pequeño en el lapso de tiempo considerado, puede afirmarse que el momento angular es constante, es decir:

$$L = mvr = \text{constante}$$

Puesto que el radio disminuye al ir enrollándose la cuerda, para mantener L constante es preciso que la velocidad vaya aumentando progresivamente.

12 **PAU** **Teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, que su distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y que su período orbital es de 365 días, determina:**

a) **El valor de su momento angular de traslación respecto al Sol.**

b) **La velocidad areolar del movimiento de traslación terrestre (expresando sus unidades).**

c) **A partir del valor anterior y dando por cierto que la distancia al Sol permanece invariable en el transcurso de un día, determina qué distancia recorre la Tierra en un día durante su movimiento orbital. Compáralo con el que se obtendría al dividir la longitud orbital entre los 365 días.**

a) El momento angular de traslación es:

$$L = mrv = mr^2\omega = 6 \cdot 10^{24} \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \cdot \frac{2\pi}{(365 \cdot 24 \cdot 3\,600)}$$

$$L = 2{,}675 \cdot 10^{40}\ \text{kg m/s}^2$$

b) La velocidad areolar del movimiento de traslación es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}(1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3\,600} = 2{,}23 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

c) A partir de la velocidad areolar podemos determinar el área que barre la Tierra en un día:

$$A_{\text{día}} = v_{\text{areolar}} \cdot 24 \cdot 3\,600 = 1{,}926 \cdot 10^{20}\ \text{m}^2$$

Para desplazamientos pequeños comparados con la órbita completa, como es el recorrido de un día, se puede aproximar el área barrida al área del triángulo (figura 1.21):

$$A = \frac{Rd}{2} = 1{,}926 \cdot 10^{20}\ \text{m}^2$$

De donde resulta que el desplazamiento d de un día es:

$$d = 2{,}575 \cdot 10^9\ \text{m} = 2{,}575 \cdot 10^6\ \text{km}$$

Por otro lado, sabemos que la Tierra describe aproximadamente una circunferencia, luego la distancia recorrida en un día será la longitud de dicha circunferencia dividida por 365:

$$d = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{365} = 2{,}575 \cdot 10^6\ \text{km}$$

13 **Demuestra que la constancia del momento angular orbital es coherente con la segunda ley de Kepler. Razona si dicha constancia es también coherente con la primera ley.**

Como sabemos, la velocidad areolar es equivalente a $L/2m$. Si el momento angular es constante, lo será la velocidad areolar. Esta constancia es la que establece la segunda ley de Kepler.

Por otro lado, si el momento angular es constante, la órbita debe quedar siempre forzosamente en el mismo plano, que es lo que afirma la primera ley de Kepler.

14 **Determina la posición del centro de masas del sistema constituido por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, y $m_3 = 6$ kg, situadas, respectivamente, en los puntos (0, 3, 1), (4, 1, 2) y (5, 0, 0). Expresa su posición en notación vectorial.**

Hacemos uso de la expresión **1.12**:

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{CM} = 2(0\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + 4(4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + 6(5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$$

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{CM} = 46\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{CM} = 3{,}83\vec{i} + 0{,}83\vec{j} + 0{,}83\vec{k}$$

15 **Una partícula de 4 kg se mueve en la dirección del eje X con una velocidad de 3 m/s, y otra de 2 kg lo hace en la misma dirección con una velocidad de −2 m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? ¿Y el momento lineal total del sistema?**

Aplicando la expresión **1.14**:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{4+2}\vec{i} = \frac{8}{6}\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i}\ \text{m/s}$$

Y, por tanto:

$$\vec{p}_{CM} = 8\vec{i}\ \text{kg m/s}$$

16 **Tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, y $m_3 = 1$ kg, se mueven según las trayectorias $\vec{r}_1 = t^2\vec{i} - 2t\vec{j}$ m, $\vec{r}_2 = 3t^3\vec{i} - t\vec{j} + t^2\vec{k}$ m y $\vec{r}_3 = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$ m, respectivamente. Calcula:**

a) **$\vec{r}_{CM}$ en función del tiempo y en $t = 1$ s.**

b) **El momento lineal del sistema en $t = 1$ s.**

c) **La fuerza neta que opera sobre el sistema.**

d) **La aceleración del centro de masas.**

a) Aplicando la expresión **1.12**, se obtiene:

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)\vec{i} - 2{,}5t\vec{j} + (0{,}5t^2 + t)\vec{k}}{3{,}5}$$

Por lo que:

$$\vec{r}_{CM}(1) = 1{,}57\vec{i} - 0{,}71\vec{j} + 0{,}43\vec{k}\ \text{m}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{p}_{CM} = m_{\text{total}}\vec{v}_{CM} = m_{\text{total}}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

se obtiene:

$$\vec{p}_{CM} = (4{,}5t^2 + 4t + 2)\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + (t+1)\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

Y, por tanto, en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 10{,}5\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + 2\vec{k} \text{ kg m/s}$$

c) Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

entonces:

$$\vec{F} = (9t + 4)\vec{i} + \vec{k} \text{ N}$$

d) La aceleración del centro de masas será:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m_{total}} = \frac{9t+4}{3{,}5}\vec{i} + \frac{1}{3{,}5}\vec{k} \text{ m/s}^2$$

17 ¿Crees que puede considerarse el momento de inercia una propiedad fundamental de la materia del mismo modo que la masa?

El momento de inercia **no** es una propiedad de la materia. La masa es una propiedad inherente a todo cuerpo material, y su valor es característico de cada cuerpo o partícula; es decir, a cada cuerpo le corresponde una **única masa.** Por el contrario, un mismo cuerpo puede tener **infinitos momentos de inercia** en función del eje elegido.

18 Con el propósito de calcular el momento de inercia de un cuerpo en rotación, ¿puede considerarse la masa del cuerpo como si estuviese concentrada en el centro de masas? ¿Por qué?

No, porque en la determinación del momento de inercia es esencial la forma del cuerpo; si el eje de rotación pasara por el centro de masas, el momento de inercia sería cero. Eso ocurriría, por ejemplo, en el caso de una esfera homogénea (maciza o hueca) que girase alrededor de un eje que pasa por su centro; no puede suponerse que la masa de la esfera está concentrada en el centro de masas. Este concepto, sin embargo, sí es aplicable en la dinámica de traslación.

Existe, sin embargo, un equivalente al centro de masas en rotación, que sería aquel punto donde podemos suponer concentrada la masa del sólido, girando a una distancia tal del eje (distancia denominada **radio de giro**) que su momento de inercia con respecto a ese eje fuese igual al de todo el sólido. La localización de dicho punto es muy sencilla. Por ejemplo, si consideramos el caso de una esfera sólida homogénea de masa m que está rotando alrededor de un diámetro, la distancia (radio de giro) a la que estaría dicho punto especial se hallaría igualando el momento de inercia de la esfera con el que tendría toda su masa concentrada en dicho punto:

$$\frac{2}{5}mr^2 = mR^2$$

donde R es el radio de giro. Resolviendo, obtenemos:

$$R = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot r$$

19 PAU Si dos discos del mismo peso y espesor se hacen de metales de diferentes densidades, ¿tendrán el mismo momento de inercia? Si no es así, demuestra cuál de ellos tiene mayor momento de inercia.

Los dos discos tienen la misma masa y diferente densidad, por lo que tendrán también distinto volumen. Dado que el volumen viene dado por $\pi r^2 h$, donde r es el radio del disco, y h, su espesor, y puesto que tienen el mismo espesor, la diferencia de volumen se manifestará en distinto radio, que será mayor cuanto mayor sea el volumen, es decir, cuanto menor sea la densidad.

En el enunciado no se indica el eje de rotación alrededor del cual giran los discos. Supongamos que se trata de un eje que pasa por el centro y tiene la dirección perpendicular al disco. Según la expresión **1.17**, el momento de inercia es tanto mayor cuanto más alejadas del eje están las distintas partículas que forman el disco. Esta observación cualitativa es suficiente para concluir que el disco con mayor radio (menor densidad) tiene mayor momento de inercia. Se obtiene la misma conclusión si consideramos que el momento de inercia de un disco alrededor del eje indicado es $I = mr^2/2$, que será tanto mayor cuanto mayor sea el radio.

20 ¿Existe algún momento de fuerza responsable de la rotación de los planetas y satélites? ¿Qué consecuencias se extraen de tu respuesta?

Sobre cualquier punto de un planeta o satélite actúa principalmente la fuerza gravitatoria del Sol o, en el caso de los satélites, la que ejerce el planeta más próximo, y podría pensarse que existe un momento de fuerza. Sin embargo, al ser los planetas esféricos y presentar una distribución simétrica de la masa, la resultante de la fuerza gravitatoria debe pasar por el centro de los planetas o satélites, con lo cual el momento de fuerza resultante es nulo. En consecuencia, el momento angular de rotación de los planetas permanece constante.

21 Sobre la polea de la figura 1.39 (a) se ejerce directamente una fuerza de 30 N. Si el radio de la polea es de 10 cm, su masa es de 1,5 kg, y su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 1/2\, mr^2$, ¿cuál será su velocidad angular al cabo de 10 s?

La fuerza $\vec{F}$ produce un momento que da lugar a la rotación de la polea. Como la fuerza es tangencial, el momento de fuerza vale $M = Fr$, donde r es el radio de la polea. Aplicando la expresión **1.19**, podemos obtener la aceleración angular y, de ese modo, la velocidad angular en función del tiempo:

$$F_r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

donde m es la masa de la polea. Resolviendo:

$$\alpha = \frac{2F}{mr} = 400 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega(t = 10 \text{ s}) = \alpha t = 4\,000 \text{ rad/s}$$

22 Fíjate en la figura 1.39 (b). ¿Se obtendría el mismo resultado si en lugar de ejercer directamente una fuerza de 30 N colgáramos un peso de 30 N?

El caso es, ahora, cualitativamente muy distinto, pues la fuerza tangencial cuyo momento produce la rotación de la polea es la tensión de la cuerda. Por una parte, tenemos la ecuación de traslación de la pesa:

$$P - T = m'a$$

y por otra, la de rotación de la polea:

$$Tr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

Puesto que $a = \alpha r$, sustituyendo en la primera ecuación y resolviendo el sistema resultante, se obtiene:

$$\alpha = \frac{P}{\left(\frac{1}{2}m + m'\right)r} = 78{,}7 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega = \alpha t = 787 \text{ rad/s}$$

Resultado muy diferente, por tanto, al del caso anterior.

23 PAU Dos cuerpos esféricos en rotación alrededor del eje que pasa por sus respectivos centros tienen la misma masa pero distinta densidad. Si el momento angular de rotación de ambos es idéntico, ¿es entonces también idéntica su energía cinética de rotación?

A igualdad de masas, si las densidades de ambas esferas son distintas, también lo serán los volúmenes y, en consecuencia, los radios. Por otro lado, la energía cinética de rotación es:

$$E_{c\ \text{rotación}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Ahora bien, $I = 2mR^2/5$, luego es diferente para ambas esferas. En consecuencia, la energía cinética de rotación también lo será.

24 **Resuelve el orden de llegada a la base de un plano inclinado de altura *h* de los siguientes cuerpos: una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo, un aro y un bloque rectangular de hielo.**

Para los cuatro primeros objetos trabajaremos en el supuesto de ausencia de deslizamiento. En tal caso, la fuerza de rozamiento no realiza trabajo y la energía mecánica se mantiene constante en todo el proceso, es decir:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base}} = E_{c\ \text{base traslación}} + E_{c\ \text{base rotación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mv^2\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{2gh}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}\right)$$

Para el bloque de hielo, supondremos que no existe rozamiento, luego:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base traslación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Por tanto, sin hacer ningún otro cálculo, vemos ya que el hielo es el cuerpo que llega antes, pues es el que alcanza la mayor velocidad. En cuanto a los cuatro cuerpos rodantes, vemos que cuanto mayor es su momento de inercia menor es su velocidad. En consecuencia, el orden de llegada será:

1. Bloque de hielo ($v^2 = 2gh$)
2. Esfera maciza ($v^2 = 10gh/7$)
3. Cilindro macizo ($v^2 = 4gh/3$)
4. Esfera hueca ($v^2 = 6gh/5$)
5. Aro ($v^2 = gh$)

25 **Teniendo en cuenta los valores de los momentos de inercia ofrecidos en la figura 1.35, compara las velocidades al llegar a la base de un plano inclinado de altura *h* de una esfera maciza que se desliza y rueda.**

a) Cuando la esfera se desliza, toda la energía potencial inicial se transforma en cinética traslacional, por lo que la velocidad del centro de masas en la base del plano será:

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) Cuando rueda, la energía potencial se transforma en traslacional del centro de masas y en rotacional de la esfera, de modo que:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\omega^2 \Rightarrow gh = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{5} r^2\omega^2$$

Teniendo en cuenta que $\omega = v/r$, y resolviendo v, se obtiene:

$$gh = \frac{7}{10} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

velocidad que es menor que la anterior.

26 **PAU** **Determina las aceleraciones de descenso de un cilindro macizo y de una esfera maciza, ambos de la misma masa y radio, que ruedan sin deslizarse por un plano inclinado de 30°.**

a) **Si la distancia que recorren en el plano es de 5 m, ¿con qué velocidad llega cada cuerpo a la base del plano?**

b) **¿Cuánto tarda cada uno en llegar a la base?**

a) Para cualquier cuerpo rodante que baja por un plano inclinado, la velocidad al llegar a la base viene dada por la expresión que vimos en la actividad 24:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}}$$

donde $h = d \operatorname{sen} \theta = 5 \operatorname{sen} 30° = 2{,}5$ m.

Así pues, para determinar la velocidad basta con sustituir el valor del momento de inercia y la altura recorrida. El momento de inercia del cilindro macizo es $mR^2/2$, mientras que el de la esfera maciza es $2mR^2/5$. Las velocidades de llegada de ambos cuerpos serán, por tanto:

$$v_{\text{cilindro}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = 5{,}72 \text{ m/s} \qquad v_{\text{esfera}} = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = 5{,}92 \text{ m/s}$$

b) Tanto el cilindro como la esfera tienen un movimiento uniformemente acelerado, por lo que:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Sustituyendo los valores de la velocidad final, resulta que $a_{\text{cilindro}} = 3{,}26$ m/s^2 y $a_{\text{esfera}} = 3{,}5$ m/s^2.

Por otro lado, sabemos que:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{10}{a}}$$

Sustituyendo los valores de la aceleración, resulta que:

$$t_{\text{cilindro}} = 1{,}75 \text{ s}; \; t_{\text{esfera}} = 1{,}69 \text{ s}$$

Cuestiones y problemas (páginas 60/61)

Guía de repaso

1 **¿Qué innovaciones introdujo Ptolomeo en la teoría geocéntrica? ¿Qué problemas parecían resolver?**

Véase el apartado «Teoría geocéntrica de Ptolomeo» (en el subepígrafe 1.1).

2 **¿Qué tipo de velocidad parece mantenerse constante en el transcurso del movimiento planetario?**

La velocidad areolar.

3 **Define la magnitud que se usa para describir el movimiento de traslación de los planetas. ¿Cuáles son sus características?**

El momento angular (véase el subepígrafe 3.1).

4 **¿Qué agente dinámico puede producir cambios en el momento angular de un cuerpo?**

El momento de una fuerza (consúltese el subepígrafe 3.2).

5 **¿En qué condiciones se mantiene constante el momento angular? Pon ejemplos de movimientos en los que permanece constante el momento angular.**

Véase el subepígrafe 3.2. Son ejemplos de este tipo de movimiento los del sistema solar, el de un tiovivo, los saltos de trampolín, etcétera.

6 **¿Cuáles son los correspondientes símiles en la dinámica rotacional para fuerza, masa y momento lineal?**

El momento de fuerza, el momento de inercia y el momento angular respectivamente.

7 **¿Qué es el centro de masas de un cuerpo? ¿Qué tiene de particular dicho punto?**

Véase el epígrafe 4.

8 **Completa el siguiente cuadro:**

Cualidad	Magnitud y expresión en movimientos lineales	Magnitud y expresión en movimientos de rotación
Posición del móvil	x	θ
Velocidad del móvil	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración tangencial	$a_t = \frac{dv}{dt}$	$a_t = \alpha r$
Aceleración centrípeta	$a_c = \frac{v^2}{r}$	$a_c = \omega^2 r$
Resistencia a modificar el estado de movimiento	m	I
Medida de la cantidad de movimiento	$\vec{p}$	$\vec{L}$
Agente capaz de variar la cantidad de movimiento	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Energía asociada al movimiento	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$

Leyes de Kepler

9 **PAU** **La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita a una altura media de 340 km sobre la superficie terrestre. Teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es de 380 000 km y que el período lunar es de $2,36 \cdot 10^6$ s, determina cuánto tarda la ISS en dar una vuelta completa a la Tierra.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

En el sistema gravitatorio formado por la Tierra y sus satélites se cumple la tercera ley de Kepler, es decir, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas:

$$T^2 = kR^3$$

Por tanto:

$$\frac{T^2_{Luna}}{R^3_{Luna}} = \frac{T^2_{ISS}}{R^3_{ISS}} \Rightarrow T^2_{ISS} = \left(\frac{R_{ISS}}{R_{Luna}}\right)^3 T^2_{Luna}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$T^2_{ISS} = \left(\frac{6\,370 + 340}{380\,000}\right)^3 (2,36 \cdot 10^6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{ISS} = 5\,537,38 \text{ s} = 92,3 \text{ min}$$

10 **Marte orbita a una distancia media de 1,517 UA alrededor del Sol. A partir de los datos orbitales terrestres, determina la duración del año marciano.**

Dato: 1 UA = distancia media Tierra-Sol

Sabemos que para el sistema gravitatorio formado por el Sol y sus satélites se debe cumplir la tercera ley de Kepler, es decir:

$$\frac{T^2_{Marte}}{R^3_{Marte}} = \frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}} \Rightarrow T_{Marte} = \sqrt{\left(\frac{R_{Marte}}{R_{Tierra}}\right)^3} T_{Tierra}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

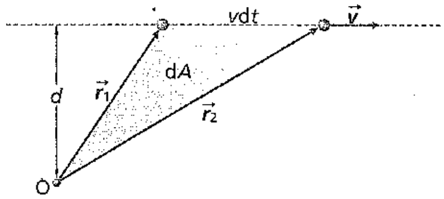
$$T_{Marte} = \sqrt{(1,517)^3} T_{Tierra} = 1,868 T_{Tierra} = 682 \text{ días}$$

Momento angular y su conservación en traslación

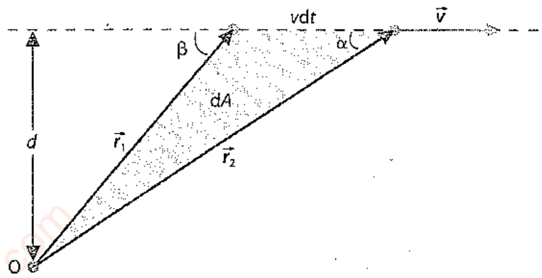
11 **Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información de que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero, respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?**

No puede concluirse que la velocidad de la partícula sea necesariamente constante. Si el origen se encuentra en la recta del movimiento y la fuerza que actúa sobre la partícula tiene también esa dirección, entonces el momento de fuerza es nulo, pero la partícula no se moverá con velocidad constante.

12 **PAU** **Una partícula se mueve con velocidad constante *v* a lo largo de una recta cuya distancia a un origen O es *d*. Si en un tiempo d*t* el vector de posición barre un área d*A*, demuestra que la velocidad areolar es constante en el tiempo e igual a *L*/2*m*, expresión en la que *L* es el momento angular de la partícula con respecto al origen citado.**



Como puede observarse en la figura, el área d*A* señalada es la diferencia entre el área del triángulo en el que $\vec{r}_2$ es la hipotenusa y la de aquel en que $\vec{r}_1$ es la hipotenusa.



Así pues:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 \cos\alpha \cdot d - \frac{1}{2} r_1 \cos\beta \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} d\,(r_2 \cos\alpha - r_1 \cos\beta) = \frac{1}{2} dv dt$$

Con lo que:

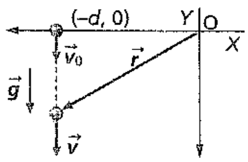
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m}$$

13 **PAU** **A una partícula de masa *m* se le imprime una velocidad $-v_0\vec{j}$ en el punto (−*d*, 0) y empieza a acelerarse en presencia de la gravedad terrestre.**

a) **Determina una expresión para el momento angular como función del tiempo, con respecto al origen.**

b) **Calcula el momento de fuerza que actúa sobre la partícula, en cualquier instante, con relación al origen.**

c) **Con los resultados obtenidos en *a)* y *b)*, comprueba que *M* = d*L*/d*t*.**



a) El momento angular viene dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde:

$$\vec{r} = -d\,\vec{i} + y\,\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = -mv\,\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Así pues:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mv & 0 \end{vmatrix} = mvd\,\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

donde $v = v_0 + gt$, por lo que:

$$\vec{L} = m(v_0 + gt)\, d\,\vec{k} = (mv_0 d + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Es decir:

$$\vec{L} = (L_0 + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento de fuerza es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

c) Puede verse que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L_0 + mgdt)\,\vec{k}}{dt} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

D14 **PAU** **Una pequeña esfera de 300 g de masa atada a una cuerda de masa despreciable de 1 m de longitud gira con una velocidad de 2 m/s alrededor de un punto O de un eje en el plano horizontal. En cierto momento, la cuerda empieza a arrollarse alrededor de dicho punto, de modo que su longitud libre va decreciendo. Determina:**

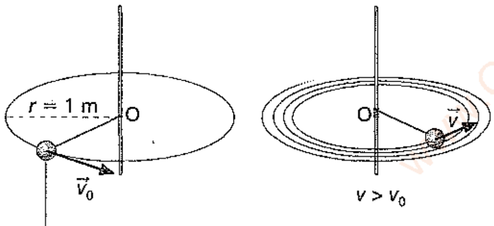
a) **El momento angular inicial alrededor del punto O.**

b) **El valor de la velocidad lineal de la pelota cuando se ha arrollado 0,75 m de cuerda.**

c) **Analiza la validez de la suposición que has hecho para resolver el apartado anterior.**

d) **Teniendo en cuenta que la variación en módulo de la velocidad lineal exige la existencia de una fuerza tangencial, realiza un diagrama de la situación y discute acerca de cómo aparece dicha fuerza tangencial y a qué se debe.**

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



a) Como se ve, el vector de posición es perpendicular en todo momento a la velocidad de la esfera, luego el momento angular inicial es:

$$L_0 = rmv = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento angular se mantiene constante, pues la fuerza centrípeta que actúa sobre la esfera es de tipo central, con lo que el momento de la fuerza es nulo. Por tanto:

$$L = \text{constante} = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Y, en consecuencia:

$$L_2 = r_2 m v_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot v_2 = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

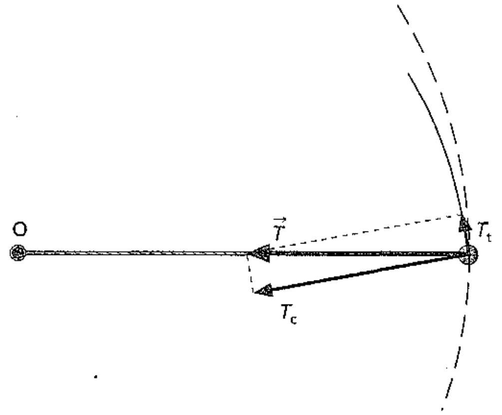
c) Hemos supuesto que no hay más fuerza que la centrípeta que ejerce la cuerda, pero también está el peso, que produce cierto momento de fuerza que imprime un movimiento de caída a la esfera. La aproximación puede valer si la velocidad de la esfera es suficientemente grande, de modo que la esfera se mantiene aproximadamente en posición horizontal en todo el proceso. También hemos supuesto despreciable la fricción de la esfera con el aire.

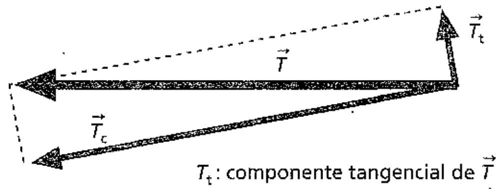
d) La tensión que ejerce la cuerda sobre la esfera es la responsable de su movimiento. Esta tensión viene dada por la siguiente expresión:

$$T = m\frac{v_2}{r} = m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{\text{constante}}{mr^3}$$

Es decir, la tensión aumenta proporcionalmente al cubo del radio a medida que este disminuye. En consecuencia, la velocidad será inversamente proporcional al radio. Ahora bien, la trayectoria que sigue la esfera no es un círculo perfecto sino una espiral.

En consecuencia, la tensión presentará una pequeña componente en dirección tangencial a la trayectoria, tal como se observa en el dibujo:





$\vec{T}_t$: componente tangencial de $\vec{T}$
$\vec{T}_c$: componente centrípeta de $\vec{T}$

Esa componente en la dirección tangencial es la responsable de la aceleración tangencial que experimenta la esfera.

Posición y movimiento del centro de masas

15 **Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, se mueven según trayectorias determinadas por:**

$$\vec{r}_1 = (3t^2 + 1)\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$
$$\vec{r}_2 = (2t^2 - t)\,\vec{i} - 5t^2\,\vec{j} \text{ m}$$
$$\vec{r}_3 = 4t^3\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k} \text{ m}$$

a) **Establece la posición del centro de masas del sistema en función del tiempo y en el instante en que $t = 1$ s.**

b) **Halla el momento lineal del sistema en función del tiempo y cuando $t = 1$ s.**

c) **¿Qué fuerza neta opera sobre el sistema?**

d) **¿Cuál ha sido el desplazamiento del centro de masas entre $t = 0$ y $t = 1$ s?**

e) **¿Cuál es el momento angular de la partícula 1 respecto del origen cuando $t = 1$ s?**

a) Aplicando la expresión **1.12**:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM}(t) = (0{,}8t^3 + 2{,}1t^2 - 0{,}3t + 0{,}5)\,\vec{i} +$$
$$+ (t^3 - 1{,}1t^2)\,\vec{j} + (0{,}4t^2 + 2)\,\vec{k} \text{ m}$$

que en el instante en que $t = 1$ s, vale:

$$\vec{r}_{CM}(1) = 3{,}1\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 2{,}4\vec{k} \text{ m}$$

b) El momento lineal del sistema será:

$$\vec{p}_{CM}(t) = m_{total}\vec{v}_{CM} = m_{total}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

Por tanto:

$$\vec{p}_{CM}(t) = 10 \text{ kg} \cdot [(2{,}4t^2 + 4{,}2t - 0{,}3)\vec{i} + (3t^2 - 2{,}2t)\vec{j} + 0{,}8t\,\vec{k} \text{ m/s}] = (24t^2 + 42t - 3)\vec{i} + (30t^2 - 22t)\vec{j} + 8t\,\vec{k} \text{ kg m/s}$$

Y en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 63\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k} \text{ kg m/s}$$

c) La fuerza neta que opera sobre el sistema será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{F} = (48t + 42)\vec{i} + (60t - 22)\vec{j} + 8\vec{k} \text{ N}$$

d) El desplazamiento del centro de masas entre 0 y 1 s es:

$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(1) - \vec{r}_{CM}(0)$$

Como $\vec{r}$ (1), mientras que $\vec{r}\,(0) = 0{,}5\vec{i} + 2\vec{k}$:

$$\Delta\vec{r} = 2{,}6\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 0{,}4\vec{k} \text{ m}$$

Es decir:

$$|\Delta\vec{r}_{CM}| = 2{,}63 \text{ m}$$

e) Para hallar el momento angular de la partícula 1 con respecto al origen cuando $t = 1$ s, hay que calcular previamente los vectores posición y velocidad de dicha partícula en ese tiempo:

$$\vec{r}_1(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m} \quad \text{y} \quad \vec{v}_1(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j} \text{ m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{L}(1) = \vec{r} \times m_1\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 30 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -120\vec{i} + 120\vec{j} + 60\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

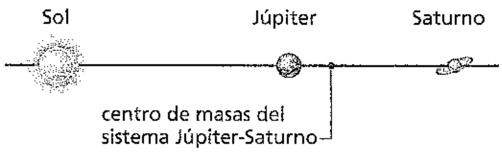
16 **En una buena aproximación, podemos suponer que Júpiter y Saturno concentran la mayor parte de la masa planetaria del sistema solar. Suponiéndolos alineados en conjunción con respecto al Sol y haciendo uso de la tabla de datos del sistema solar en las páginas finales del libro, determina:**

a) **La posición del centro de masas correspondiente a ambos planetas.**

b) **La posición del centro de masas (con respecto al centro solar) del sistema Sol-Júpiter-Saturno, suponiendo que estos últimos están en conjunción con respecto al Sol.**

c) **A la luz del anterior apartado, ¿podría inferir un hipotético astrónomo de un exoplaneta la presencia de planetas alrededor del Sol? ¿Sería capaz de distinguir de algún modo si se trata de uno o de dos planetas?**

En el siguiente dibujo se muestra la situación descrita en el enunciado. El sentido común nos dice que el centro de masas del sistema Júpiter-Saturno se encuentra entre ambos planetas, y que debe estar más próximo a Júpiter que a Saturno:



a) La posición del centro de masas del sistema Júpiter-Saturno respecto al origen, que es el centro del Sol, será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Júpiter}} \cdot 7{,}78 \cdot 10^{11} + m_{\text{Saturno}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{12}}{m_{\text{Júpiter}} + m_{\text{Saturno}}} = \frac{1{,}9 \cdot 10^{27} \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 14{,}3}{1{,}9 \cdot 10^{27} + 5{,}68 \cdot 10^{26}} \cdot 10^{11} =$$

$$r_{CM} = \frac{1{,}9 \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 14{,}3}{1{,}9 + 5{,}68 \cdot 10^{11}} = 9{,}27 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

b) Si incluimos el Sol en el sistema anterior, el centro de masa del sistema será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Sol}} \cdot 0 + m_{\text{Júpiter + Saturno}} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11}}{m_{\text{Sol}} + m_{\text{Júpiter + Saturno}}} = \frac{24{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11} \cdot 14{,}3}{1{,}98 \cdot 10^{30} + 24{,}68 \cdot 10^{26}} = 1{,}155 \cdot 10^{9} \text{ m} \cong 1{,}66\, R_{\text{Sol}}$$

c) Sí, pues el Sol orbita alrededor de un centro de masas que no coincide con su centro, y el hipotético astrónomo extraterrestre podría deducir, si dispusiera de una tecnología suficientemente desarrollada, la presencia de planetas orbitando en torno suyo. Asimismo, del tipo de movimiento del Sol (o de cualquier otra estrella) puede inferirse si es uno o si son varios los planetas que orbitan a su alrededor. De este modo se ha postulado la presencia de planetas orbitando alrededor de algunas estrellas cercanas al Sistema Solar, si bien se trata de medidas que requieren una altísima precisión y los resultados no han sido concluyentes hasta la fecha.

17 **PAU** **Eligiendo como origen de referencia el centro de la Tierra, y teniendo en cuenta que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra, determina a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Compárala con el radio de la Tierra y saca las conclusiones oportunas.**

Datos: $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; $r_T = 6\,370$ km

Aplicando la expresión general:

$$x_{CM} = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L} = \frac{m_T \cdot 0 + 0{,}012 \cdot m_T \cdot 384\,000}{1{,}012 \cdot m_T} = 4\,553{,}3 \text{ km}$$

Aquí hemos supuesto que $x_T = 0$, al considerar que el origen se encuentra en el centro de la Tierra. Así pues, el centro de masas del sistema Tierra-Luna está en el interior de la Tierra, a 4 553,3 km de su centro.

Si bien ambos astros se mueven en torno al centro de masas, la Tierra queda prácticamente inmóvil, y es la Luna la que gira en torno suyo.

Rotación del sólido rígido y conservación del momento angular

18 **¿Qué sentido tiene el acto instintivo de extender los brazos en cruz cuando tratamos de conservar el equilibrio? ¿Por qué los funambulistas hacen equilibrios en la cuerda ayudados de un palo largo?**

En esencia, se trata de aumentar nuestro momento de inercia para disminuir la posibilidad de «rotación» (con la consiguiente caída) alrededor de la línea de equilibrio.

Las pequeñas variaciones imprimidas en el momento de inercia con la barra permiten al funambulista compensar los desequilibrios puntuales y, con ello, evitar la caída.

19 **¿Por qué cuando caminamos no lo hacemos a «piñón fijo»; es decir, por qué no adelantamos simultáneamente el brazo y la pierna del mismo lado?**

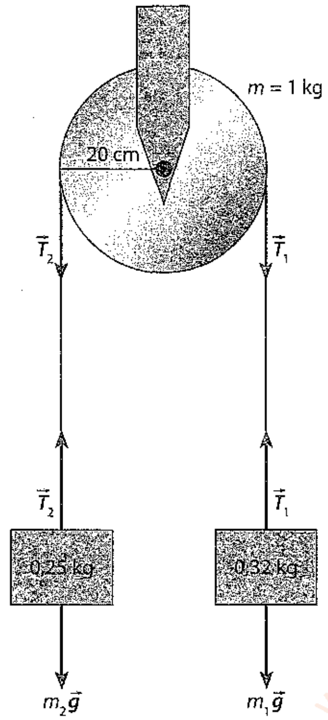
Si camináramos a «piñón fijo», el brazo y la pierna adelantados del mismo lado crearían un par de fuerzas con el brazo y la pierna que se quedan atrás, lo que produciría una pequeña rotación alrededor del eje vertical que pasa por nuestro centro, dando lugar a ese extraño andar de «robot».

20 **Una persona se encuentra en pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. En un momento dado, se siente mareada y trata de desplazarse hacia el eje con la intención de asirse a él. ¿Crees que ha tomado la decisión más acertada? ¿Por qué?**

Ha tomado la peor decisión. Al dirigirse hacia el eje, el momento de inercia del conjunto (plataforma + persona) disminuye, por lo que la velocidad angular de rotación aumenta y, con ella, el mareo de nuestro personaje.

21 **La polea de una máquina de Atwood tiene una masa de 1 kg y un radio de 20 cm. A ambos lados de la polea cuelgan dos pesas de 250 g y 320 g, respectivamente. Determina la aceleración que adquieren las masas, así como los valores de la tensión a ambos lados de la polea. ¿Qué porcentaje de error cometemos al no tener en cuenta el movimiento de la polea? (Considera la polea como un pequeño cilindro homogéneo.)**

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:



Hay dos ecuaciones de traslación de m_1 y m_2, y una de rotación de la polea:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 (g - a)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 (g + a)$$

$$(T_1 - T_2)\, r = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\, r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m a$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para T_1 y T_2, resulta:

$$m_1 (g - a) - m_2 (g + a) = \frac{1}{2} m a$$

$$(m_1 - m_2)\, g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m\right) \cdot a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + 1/2\, m} = 0{,}64 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 2{,}93 \text{ N};\ T_2 = 2{,}61 \text{ N}$$

Operando en la máquina de Atwood, obtendríamos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2} = 1{,}2035 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, se comete un error del 88 %.

22 PAU **El radio solar es de unos $6{,}96 \cdot 10^8$ m, y su período de rotación es de 25,3 días. ¿Cuál sería su período de rotación si se colapsara formando una enana blanca de 4 000 km de radio, sin variación apreciable de masa?**

En ese hipotético proceso se conservaría el momento angular, por lo que:

$$I\omega = I'\omega' \Rightarrow \frac{2}{5} m r^2 \omega = \frac{2}{5} m (r')^2 \omega'$$

Como $\omega = 2\pi/T$, llegamos a:

$$r^2 \frac{2\pi}{T} = (r')^2 \frac{2\pi}{T'} \Rightarrow \frac{r^2}{T} = \frac{(r')^2}{T'}$$

De donde:

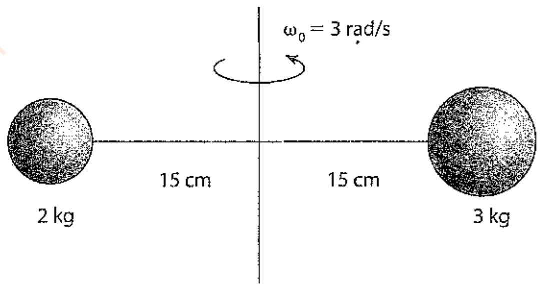
$$T' = \left(\frac{r'}{r}\right) = 0{,}000\,835 \text{ días} = 1 \text{ min } 12 \text{ s}$$

D23 PAU **Dos masas de 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran en los extremos de una varilla rígida horizontal de 30 cm de longitud y de masa despreciable. El sistema comienza a girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la varilla a razón de 3 rad/s. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema? Si en un momento dado las dos partículas empiezan a desplazarse una hacia la otra con velocidades respectivas de 0,8 cm/s y 0,5 cm/s:**

a) **Determina una expresión para el momento de inercia del sistema en función del tiempo.**

b) **Halla la velocidad angular del sistema al cabo de 10 s.**

c) **Si para que las partículas comiencen a moverse, ha sido necesario impulsarlas en la dirección radial, ¿es lícito pensar que el momento angular no sufre variaciones?**



El momento de inercia inicial es:

$$I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Y sustituyendo los datos:

$$I_0 = 2 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 = 0{,}1125 \text{ kg m}^2$$

Por lo que el valor de su momento angular será:

$$L_{\text{inicial}} = I_0 \omega_0 = 0{,}3375 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

a) El momento de inercia en función del tiempo es:

$$I(t) = m_1 (d_1 - v_1 t)^2 + m_2 (d_1 - v_2 t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = 2 \cdot (0{,}15 - 0{,}008t)^2 + 3 \cdot (0{,}15 - 0{,}005t)^2 =$$

$$= 2{,}03 \cdot 10^{-4} t^2 - 9{,}3 \cdot 10^{-3} t + 0{,}1125 \text{ kg m}^2$$

b) El momento de inercia a los 10 s valdrá:

$$I\,(10) = 0{,}0398 \text{ kg m}^2$$

Y como el momento angular se conserva:

$$I_0 \omega_0 = I' \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_0 \omega_0}{I'} = 8{,}48 \text{ rad/s}$$

c) Sí, pues al ser las fuerzas radiales, resulta que $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, lo que implica que el momento angular es constante.

D24 PAU **Una partícula de 10 g de masa que se mueve con una rapidez v_0 = 15 m/s choca tangencialmente contra la periferia de una esfera sólida de 1 kg de masa y 20 cm de radio que estaba en reposo. Si la partícula queda adherida a la esfera y esta puede comenzar a girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro, determina:**

a) **La velocidad angular con la que girará el sistema.**

b) **La energía se disipa en la colisión.**

a) El momento angular inicial del sistema es el de la partícula con respecto al centro de la esfera:

$$L_0 = mv_0 r = 0{,}01\ \text{kg} \cdot 15\ \text{m/s} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}03\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Después de la colisión, el momento angular es:

$$L' = I'\omega' = \left(\frac{2}{5}mr^2 + m'r^2\right)\omega' = \left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2\omega'$$

En ausencia de fuerzas externas momento angular se conserva es decir, $L_0 = L'$ por tanto:

$$L' = I'\omega' = 0{,}3 \Rightarrow \omega' = \frac{0{,}03\ \text{kg m}^2/\text{s}}{\left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2} = 1{,}83\ \text{rad/s}$$

b) La energía disipada en la colisión viene dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I'(\omega')^2 = 1{,}125\ \text{J} - 0{,}027\ \text{J} = 1{,}098\ \text{J}$$

por lo que se disipa el 97,6 %.

El problema de los cuerpos rodantes

25 **PAU** **Una esfera maciza rueda por dos planos inclinados que tienen la misma altura, pero diferente inclinación. ¿Llegará la esfera al final con la misma velocidad en ambos casos? ¿Tardará lo mismo en llegar al final?**

La velocidad al final de ambos planos es la misma si la altura de partida era idéntica, pues la ecuación general referida a la energía mecánica es la misma: $E_{c\ \text{final}} = E_{p\ \text{inicial}}$.

Sin embargo, no tardan lo mismo en llegar en un caso y en otro. La razón es la diferente aceleración lineal del centro de masas en cada caso. La fuerza de fricción, F_r, produce el momento de fuerza necesario que incrementa la velocidad angular a medida que la esfera desciende. Entonces, podemos aplicar a la esfera que rueda sin deslizarse dos ecuaciones:

- Ecuación de rotación:

$$F_r r = I\alpha \Rightarrow F_r r = \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{a_{CM}}{r}\right) \Rightarrow F_r = \frac{2}{5}ma_{CM}$$

- Ecuación de traslación:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_r = ma_{CM}$$

donde a_{CM} es la aceleración del centro de masas.

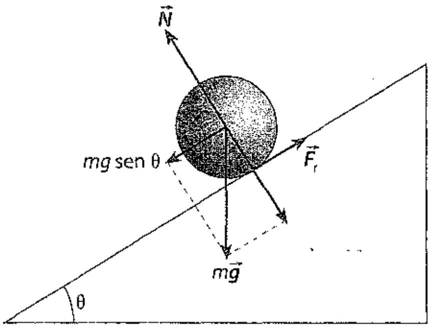
Resolviendo el sistema, observamos que la aceleración del centro de masas es:

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g\ \text{sen}\ \theta$$

Por tanto, puede concluirse que, cuanto menor sea el ángulo, la aceleración es menor y, por tanto, será menor el tiempo que emplea la esfera en llegar a la base del plano.

26 **PAU** **Una esfera sólida de masa *m* y radio *r* rueda sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo θ. Demuestra que el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático necesario para garantizar la rodadura sin deslizamiento vale $\mu = 2/7\ \text{tg}\ \theta$.**

Consideremos un cuerpo que baja rodando por un plano inclinado, tal como se observa en el dibujo:



Podemos plantear una ecuación para el movimiento de traslación y otra para el movimiento de rotación, suponiendo que el cuerpo no se desliza:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_{roz} = ma$$

$$F_{roz} \cdot R = I\alpha = \frac{Ia}{R} \Rightarrow F_{roz} = \frac{Ia}{R^2}$$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$g\ \text{sen}\ \theta = \left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)a \Rightarrow a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Pero, por otro lado, sabemos que la fuerza de rozamiento viene dada por la expresión:

$$F_{roz} = \mu mg\cos\theta$$

Si introducimos este valor en la ecuación de rotación, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \mu mg\cos\theta = ma \Rightarrow a = g(\text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la aceleración, resulta:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta$$

Ahora podemos introducir el valor del momento de inercia, que para la esfera es $2mR^2/5$:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\text{sen}\ \theta}{\frac{7}{5}} = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}\text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta$$

$$-\frac{2}{7}\text{sen}\ \theta = -\mu\cos\theta \Rightarrow \mu = \frac{2}{7}\text{tg}\ \theta$$

27 **¿Podrían diferenciarse dos esferas idénticas, de la misma masa y radio, que fueran una hueca y otra maciza? ¿Cómo?**

Los momentos de inercia de una esfera maciza y una hueca son, respectivamente:

$$I_{maciza} = \frac{2}{5}mR^2 \qquad I_{hueca} = \frac{2}{3}mR^2$$

Las esferas podrían distinguirse dejándolas rodar por un plano inclinado. Como se ha visto en la actividad 22, la aceleración de caída para un cuerpo que rueda por un plano inclinado viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Al tener un momento de inercia menor, la esfera maciza caerá con mayor aceleración y llegará antes a la base del plano.

28 **Dos esferas de la misma masa pero de distinta densidad se dejan caer rodando por un plano inclinado. ¿Llegan a la vez a la base del plano?**

Como hemos visto en actividades anteriores, la aceleración de caída de la esfera viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Ahora bien, si se trata de dos esferas de la misma masa pero distinta densidad, la expresión I/mR^2 es idéntica para ambas, e igual a 2/5. En consecuencia, podemos asegurar que las dos esferas llegarán a la vez.

2 Gravitación universal

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Precedentes de la ley de gravitación** páginas 63/64
  - **1.1. Las fuerzas centrípetas y el inverso del cuadrado de la distancia** página 64
- **2. La ley de gravitación universal** páginas 65/67
  - **2.1. Fuerzas gravitatorias en un conjunto de masas** página 67
- **3. Consecuencias de la ley de gravitación universal** páginas 68/69
  - **3.1. Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies planetarias** página 68
  - **3.2. Significado físico de la constante *k* en la tercera ley de Kepler** página 69
- **4. Análisis de los factores que intervienen en la ley de gravitación universal** páginas 70/73
  - **4.1. La constante de gravitación universal *G*** página 70
  - **4.2. Masa inercial y masa gravitacional** página 71
  - **4.3. El inverso del cuadrado de la distancia** páginas 72/73
- **5. Las mareas: el poderoso influjo de la Luna** páginas 74/77
  - **5.1. Mareas altas o de flujo** páginas 74/75
  - **5.2. Mareas bajas o de reflujo** página 75
  - **5.3. ¿Cada cuánto tiempo se producen las mareas?** página 76
  - **5.4. Mareas «vivas» y mareas «muertas»** página 76
  - **5.5. Las fuerzas de marea y su dependencia con la distancia** página 77

Cuestiones previas (página 62)

1. ¿Qué atrae con más fuerza a qué: la Tierra a la Luna o la Luna a la Tierra? ¿Y en el caso de una piedra y la Tierra?

Se atraen con la misma fuerza en magnitud pero sentidos opuestos.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?

a) **Un cuerpo más pesado siempre caerá más deprisa que otro más ligero.**

b) **La Tierra atrae a todos los cuerpos en su superficie con la misma fuerza.**

a) Falso. Caen con la misma aceleración siempre que despreciemos el rozamiento de los cuerpos con el aire.

b) Falso. La Tierra atrae a todos los cuerpos que se encuentran en la superficie con la misma aceleración pero distinta fuerza.

3. Imagina que te encuentras dentro de una nave espacial sin referencias visuales con respecto al exterior. ¿Podrías discernir de alguna manera si en un momento dado te hallas en órbita alrededor de la Tierra o, estás precipitándote hacia ella?

Si estás en ingravidez es cuándo estás en órbita, lo puedes comprobar si sueltas un objeto y observas que se mueve a la velocidad de la nave.

4. ¿A qué se deben las mareas? ¿Cuántas se producen en un día? ¿Qué son las mareas vivas? ¿Y las muertas?

Las mareas se deben fundamentalmente a la acción de la Luna sobre la Tierra. Se producen dos mareas altas y dos mareas bajas.

Las mareas vivas se deben a la influencia de la Luna y del Sol sobre la Tierra. Cuando los dos efectos se suman dan lugar a las mareas de flujo máximas.

Al igual que las mareas vivas, las mareas muertas también se deben a la influencia de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Sin embargo, al contrario de las mareas vivas, cuando ambas contribuciones se contrarrestan dan lugar a las mareas muertas.

Actividades (páginas 63/77)

1 Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre. Con los datos que se ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura 2.2, contesta a las siguientes preguntas.

a) **¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en 1 hora?**

b) **¿Qué altura *h* ha «caído» la Luna en esa hora?**

c) **¿Qué valor de aceleración g_L de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?**

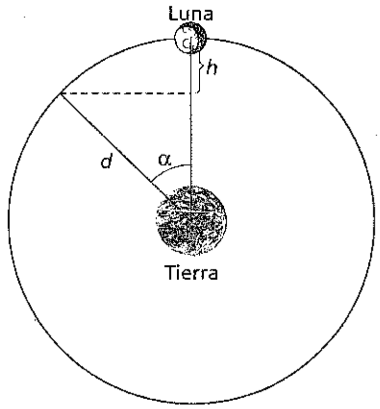
d) **¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_T = 9,8$ m/s², que corresponde a la superficie terrestre?**

e) **¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?**

f) **¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?**

Datos: radio terrestre = 6 370 km; distancia Tierra-Luna = 384 000 km; período sidéreo lunar = 27,31 días

La situación descrita en el enunciado es la siguiente:



a) El período sidéreo lunar, expresado en horas, es de 655,44 h. En este tiempo, la Luna ha descrito 360°, por lo que, en 1 hora, el ángulo α es de:

$$\alpha = \frac{360°}{655{,}44} = 0{,}549°$$

b) La altura *h* (véase la figura 2.2) que la Luna ha «caído» en esa hora es:

$$h = d - d\cos\alpha = d\,(1 - \cos\alpha) = 17\,627{,}75 \text{ m}$$

c) El valor de aceleración de caída que se correspondería con esa distancia en 1 h (3 600 s) se obtendría de la siguiente manera:

$$h = \frac{1}{2} g_L t^2 \Rightarrow g_L = \frac{2h}{t^2} = 0{,}002\,7 \text{ m/s}^2$$

d) Dividiendo el valor de g_T en la superficie terrestre entre g_L, se obtiene:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong 3\,600$$

e) Al dividir ambas distancias, resulta:

$$\frac{d}{r_T} \cong 60$$

f) Queda claro que, al aumentar la distancia 60 veces, la aceleración gravitatoria ha disminuido 3 600 veces, es decir, 60^2 veces. Así pues:

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

2 PAU Determina el valor de «la fuerza requerida para mantener a la Luna en su órbita» (en palabras de Newton) haciendo uso de los datos de masas de la Tierra y de la Luna, así como de la distancia entre ambos. ¿Qué aceleración comunica dicha fuerza a cada uno de los cuerpos celestes?

La fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna es:

$$F = G\frac{m_T m_L}{d^2_{T\text{-}L}}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 1{,}95 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Dicha fuerza comunica a la Tierra una aceleración de valor:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} = 3{,}34 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Y a la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{7{,}34 \cdot 10^{22}} = 2{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

3 ¿Qué le sucede al peso de un objeto si su masa se triplica a la vez que también se triplica su distancia al centro terrestre?

La expresión de la fuerza gravitatoria es:

$$F = G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2}$$

Si se triplica tanto la masa m como la distancia r al centro de la Tierra, resulta:

$$F' = G\frac{M_{\text{Tierra}}3m}{9r^2}$$

Operando queda:

$$F' = \frac{1}{3}G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2} = \frac{1}{3}F$$

Luego la fuerza queda dividida por tres.

4 PAU Dos esferas idénticas de radio r y densidad ρ están en contacto. Expresa la fuerza de atracción gravitatoria entre ambas como función de r, ρ y G.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho \cdot 4/3\ \pi r^3$ y que la distancia entre los centros de las esferas es 2r, entonces:

$$F = G\frac{mm}{(2r)^2} = G\,(2/3\ \rho\pi r^2)^2 = 4/9G\rho^2\pi^2 r^4$$

5 ¿A qué distancia del centro lunar es atraída con una fuerza de 1 N una masa de 1 kg?

La fuerza con que la Luna atrae a una masa de 1 kg será:

$$F = G\frac{m_L m}{r^2} =$$

$$= 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{7{,}20\cdot 10^{22}\ \text{kg}\cdot 1\ \text{kg}}{r^2} = 1\ \text{N}$$

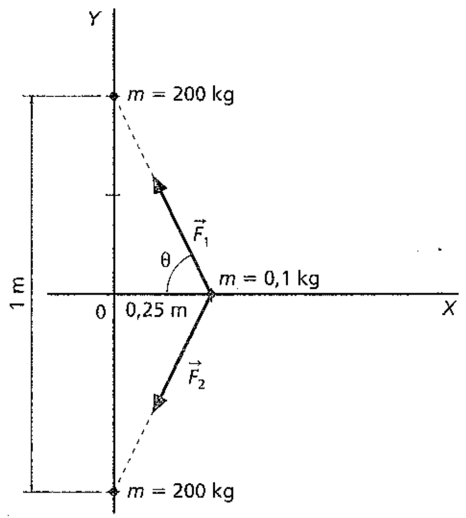
Despejando r, resulta:

$$r = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2\cdot 7{,}20\cdot 10^{22}\ \text{kg}\cdot 1\ \text{kg}/1\ \text{N}} =$$

$$= 2{,}19\cdot 10^6\ \text{m} = 2\,190\ \text{km}$$

6 PAU Dos esferas de 200 kg se encuentran separadas 1 m a lo largo del eje Y. Halla la fuerza neta que ejercen sobre una pequeña masa de 0,1 kg situada sobre el eje X a 0,25 m del punto medio de las esferas. (Expresar el resultado en notación vectorial y calcular el módulo de la fuerza neta).

El diagrama de las fuerzas originadas por las dos masas se observa en el siguiente dibujo:



El valor de la fuerza que cada masa m ejerce sobre m' es:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

Siendo $r^2 = 0{,}5^2 + 0{,}25^2 = 0{,}312\,5$, por lo que sustituyendo:

$$F = 4{,}27\cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

Como se desprende de la figura, las fuerzas F_1 y F_2 son iguales en valor y pueden descomponerse en las componentes x e y, siendo:

$$F_{1x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{1y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$
$$F_{2x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{2y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$

Donde sen $\alpha = 0{,}5/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}89$ y cos $\alpha = 0{,}25/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}45$

Por lo que:

$$\vec{F}_1 = -1{,}92\cdot 10^{-9}\vec{i} + 3{,}8\cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$
$$\vec{F}_2 = -1{,}92\cdot 10^{-9}\vec{i} - 3{,}8\cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Así pues, la fuerza neta es:

$$\vec{F} = -3{,}84\cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Siendo su valor $3{,}84\cdot 10^{-9}$ N.

7 Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, y su radio es aproximadamente 1/4 del terrestre, da un valor aproximado de la aceleración de caída de los objetos en la superficie lunar.

Utilizando los datos ofrecidos, tendremos:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{(0{,}012\cdot m_T)}{\left(\frac{1}{4}r_T\right)^2} =$$

$$= 0{,}192\cdot g_T = 1{,}88\ \text{m/s}^2$$

8 PAU A partir de la expresión de la aceleración de caída libre, demuestra que, si consideramos los planetas como cuerpos esféricos, puede escribirse:

$$a = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

donde ρ es la densidad media del planeta.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio del planeta, se obtiene la expresión pedida, al sustituir esta igualdad en la expresión 2.8:

$$a = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

Obsérvese que la expresión obtenida nos da únicamente la aceleración en la superficie del planeta (o para alturas muy pequeñas comparadas con ella).

9 PAU El diámetro de Venus es de 12 120 km y su densidad media es de 5 200 kg/m^3. ¿Hasta qué altura ascendería un objeto lanzado desde su superficie con una velocidad inicial de 30 m/s?

La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por la siguiente expresión:

$$g_{\text{Venus}} = G\frac{M_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} = G\frac{\rho_{\text{Venus}}V_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} =$$

$$= \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Venus}}R_{\text{Venus}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una gravedad de 8,8 m/s^2.

Puesto que el objeto lanzado hacia arriba experimenta un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la ecuación que relaciona velocidades con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy_{\text{máx}}$$

En nuestro caso, la aceleración es negativa y la velocidad final es la del punto más alto, esto es, cero:

$$0 = 30^2 - 2\cdot 8{,}8\cdot y_{\text{máx}} \Rightarrow 51{,}14\ \text{m}$$

10 **Teniendo en cuenta que la masa del Sol es de unos $2 \cdot 10^{30}$ kg, calcula el valor de k para los planetas del sistema solar y exprésalo con sus correspondientes unidades del SI.**

Sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión **2.9**, se obtiene:

$$k = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}} = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

11 **El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?**

A partir de la tercera ley de Kepler, y sustituyendo los valores ofrecidos, se calcula el valor de la constante k en el caso de Júpiter:

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(152\,940)^2}{(4{,}22 \cdot 10^8)^3} = 3{,}112 \cdot 10^{-16}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

Después se halla la masa de Júpiter a partir de la expresión **2.9:**

$$m_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{kG} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

12 **Marte se encuentra a una distancia media del Sol de 227 900 000 km. ¿Cuántos días dura el año marciano?**

Se trata de determinar, a partir de la tercera ley de Kepler, el período de Marte usando el valor de la constante k obtenido en la actividad 10.

$$T^2 = kr^3 = 2{,}96 \cdot 10^{-19} \cdot (2{,}279 \cdot 10^{11})^3 = 3{,}5 \cdot 10^{15}$$

$$T = 5{,}92 \cdot 10^7\ \text{s} = 685\ \text{días}$$

13 **Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por $T = 2\rho\sqrt{l/g}$:**

a) **¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?**

b) **¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a su frecuencia de oscilación?**

a) Al duplicar la distancia, el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la cuarta parte; es decir:

$$g' = \frac{g}{4}$$

Al sustituir este nuevo valor en la expresión del período, observamos que este se duplica:

$$T = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g/4}} = 4\rho\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Si se duplica el período, la frecuencia se reduce a la mitad.

14 **Haz una estimación del valor de la aceleración de marea en la zona más próxima a la Luna. ¿Qué elevación de marea produciría dicha aceleración, en condiciones ideales, actuando durante media hora?**

Dato: La masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra.

La aceleración de la marea en el punto más cercano a la Luna viene dada por la expresión **2.14**. Sustituyendo $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_T$ por sus respectivas expresiones matemáticas, resulta:

$$a_{\text{marea}} = Gm_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{(r - r_T)^2} - \frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= 0{,}012 \cdot G \cdot m_T \cdot \frac{2rr_T - r_T^2}{r^2(r - r_T)^2}$$

Ahora bien, como veremos en el epígrafe siguiente, el radio de la Tierra es mucho menor que la distancia Tierra-Luna, luego la expresión anterior se puede aproximar a:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot Gm_T \cdot \frac{2rr_T}{r^2r^2} = 0{,}012 \cdot Gm_T \frac{2r_T}{r^3}$$

Sustituyendo, resulta:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2$$

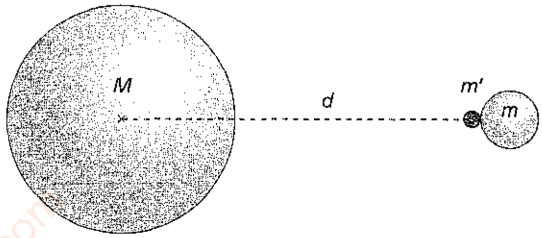
Si consideramos que el valor de la aceleración de marea se mantiene aproximadamente constante durante media hora, la elevación que se producirá será:

$$y = \frac{1}{2}at^2 = 1{,}75\ \text{m}$$

Debe hacerse notar que este ejercicio no es más que una mera aproximación.

15 **PAU** **Supongamos una masa m' sobre la superficie de un satélite de masa m y radio r que orbita a una distancia d alrededor de un planeta masivo de masa M. Teniendo en cuenta que el límite de Roche sería la distancia crítica d en la que la fuerza de marea sobre m' originada por el planeta se iguala a la fuerza de atracción gravitatoria que el satélite ejerce sobre m', demuestra que el límite de Roche viene dado por la expresión:**

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$



La fuerza de marea que ejerce el planeta masivo sobre el pequeño satélite será:

$$F_{\text{marea}} = G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m'$$

Mientras que la fuerza gravitatoria que ejerce el satélite sobre la masa m' es:

$$F_{\text{gravitatoria}} = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

En el límite de Roche, ambas fuerzas se igualan, es decir:

$$G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m' = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

Despejando la distancia:

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

16 **Demuestra que si en la anterior fórmula expresamos las masas en función de las densidades y volúmenes del planeta y satélite, se obtiene la siguiente expresión más útil para el límite de Roche, que solo depende del radio del planeta y de las densidades de ambos cuerpos:**

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Si expresamos las masas en función de la densidad y el volumen de los planetas:

$$M = \frac{4}{3}\rho R^3 \cdot \rho_{\text{planeta}};\ m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{satélite}}$$

$$\frac{2M}{m} = \frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

Si sustituimos este cociente en la expresión hallada en la actividad anterior, resulta:

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Cuestiones y problemas (páginas 80/81)

Guía de repaso

1 ¿De qué tipo llegó a imaginar Kepler que podía ser la fuerza responsable del movimiento de los planetas? ¿A qué asociaba la causa de dicha fuerza?

Kepler situaba la causa del movimiento de los planetas en el Sol. La razón que daba era que la fuerza con que el Sol movía a los planetas disminuía con la distancia, del mismo modo que lo hacía su propia luz. Por ello, dicha fuerza debía ser algo inherente a la sustancia solar. Seducido por los estudios de Gilbert sobre magnetismo terrestre, Kepler llegó a suponer que la fuerza que dimanaba del Sol era magnética.

2 ¿Cuál parece ser el origen de la idea contenida en el libro III de los *Principia* de Newton, según la cual la caída de los cuerpos y los movimientos planetarios obedecen a un mismo tipo de fuerza?

Los cálculos que Newton realizó en 1666, en los que supuso que la Luna «caía» hacia la Tierra de forma continua, de igual modo que un proyectil se precipita parabólicamente a tierra.

Así, halló que la aceleración con que caía cumplía con la regla del inverso del cuadrado de la distancia.

3 ¿Cuál es el origen de la insistente suposición de que la fuerza responsable del movimiento de los planetas debía cumplir la ley del inverso del cuadrado de la distancia?

La suposición de que la fuerza era centrípeta, junto con el cumplimiento de la tercera ley de Kepler.

4 ¿Por qué no aparece la constante de gravitación *G* en los Principia? ¿Qué impedía a Newton conocer su valor?

Porque no se conocía la masa de la Tierra.

5 ¿Qué precauciones considerarías necesario tomar si te vieses en la tesitura de tener que reproducir el experimento de Cavendish? ¿Por qué es tan difícil su reproducción?

Habría que evitar, por ejemplo, las posibles perturbaciones producidas por corrientes de aire. Debe, pues, reproducirse el experimento en condiciones de vacío.

Según el material que se emplee, ha de procurarse también que no se produzcan interacciones de naturaleza electrostática.

6 ¿Cómo se llega a la conclusión de que la masa inercial y la gravitacional son la misma magnitud?

Se llega a esa conclusión a partir de la observación experimental de que la aceleración de la gravedad es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su masa.

7 ¿Qué razones llevaron a suponer que la fuerza gravitatoria entre masas varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia?

La respuesta a esta cuestión es la misma que se dio para la cuestión 3.

8 ¿Te parece lícito considerar que *G* es una constante verdaderamente «universal»? ¿Qué otras constantes universales conoces?

Sí es lícito, mientras no se demuestre lo contrario. Existen otras constantes universales, como la de Avogadro, la de Boltzmann, la masa y la carga del electrón, la velocidad de la luz en el vacío, la constante de Planck, las masas y cargas de partículas elementales o la constante de Hubble.

9 ¿Cómo podría incidir en el fenómeno de las mareas un calentamiento global del planeta? ¿Qué consecuencias podría tener dicha incidencia?

Un calentamiento global del planeta que provocase la fusión de los casquetes polares conllevaría un aumento de la masa acuosa del planeta y, por tanto, problemas de anegación de zonas hoy habitadas debido a un ligero incremento de las mareas.

10 ¿Por qué el efecto de marea de la Luna sobre la Tierra es mayor si la fuerza gravitatoria del Sol supera a la ejercida por la Luna?

Porque, como ya se ha comentado y puede observarse en el ejercicio resuelto número 6 de la página 77, las fuerzas y aceleraciones de marea varían conforme al inverso del cubo de la distancia.

11 ¿Cuántas mareas se producen al día en una localidad costera? ¿Cada cuánto tiempo?

Al día se producen dos mareas altas y dos mareas bajas. Las mareas altas se producen cada 12 h y 26 min y el tiempo que transcurre entre una marea alta y una marea baja es de 6 h y 13 min.

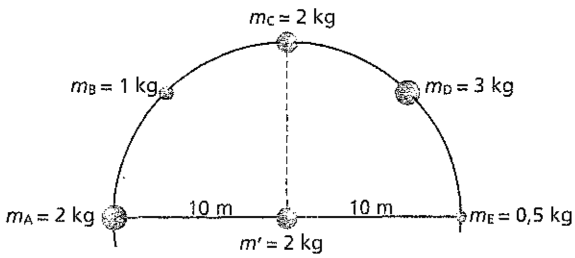
Ley de gravitación universal

12 Dos masas aisladas se atraen gravitacionalmente. Si una es el doble que la otra, ¿cómo serán, en comparación, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas? ¿Qué pasará a las fuerzas si la distancia entre las masas se reduce a la mitad? ¿Cómo serán, en comparación, las aceleraciones que adquirirán las masas?

Las fuerzas, según se desprende de la formulación de la ley de gravitación y de la tercera ley de Newton, serán iguales y de sentidos opuestos. Si la distancia se reduce a la mitad, el valor de la fuerza se cuadruplica.

En cuanto a las aceleraciones que adquirirán ambos cuerpos, el de doble masa tendrá la mitad de la aceleración que el otro.

13 PAU Determina la fuerza que actúa sobre la masa *m'* de la distribución que se aprecia en la figura.



La fuerza total resultante en la dirección del eje *X* viene dada por:

$$F'_x = G\,\frac{m'}{r^2}\,(-m_A - m_B \cos 45° + m_D \cos 45° + m_E)$$

de donde:

$$F'_x = -0{,}021\,72 \cdot G$$

De manera análoga, la fuerza total resultante en la dirección del eje *Y* es:

$$F'_y = G\,\frac{m'}{r^2}\,(m_B \operatorname{sen} 45° + m_C + m_D \operatorname{sen} 45°)$$

de donde:

$$F'_y = 0{,}096\,56 \cdot G$$

Por lo que:

$$\vec{F}' = -0{,}021\,72 \cdot G\vec{i} + 0{,}096\,56 \cdot G\vec{j}\ \text{N}$$

cuyo valor es:

$$F' = G\,\sqrt{(-0{,}021\,72)^2 + (0{,}096\,56)^2} = 6{,}60 \cdot 10^{-12}\ \text{N}$$

14 **PAU** **Dos masas puntuales iguales de 5 kg se encuentran situadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero de 40 cm de lado.**

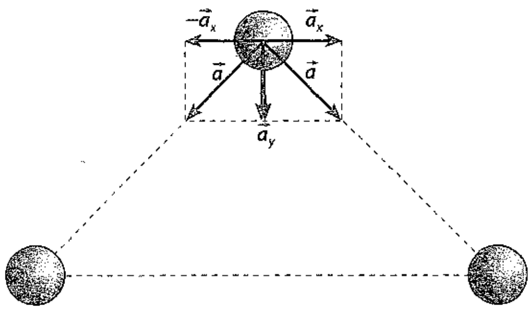
Si se coloca en el vértice superior una tercera masa m':

a) **¿Qué aceleración adquiere esta última masa en ese punto (exprésala en notación vectorial)?**

b) **¿Descenderá con aceleración constante?**

c) **¿Qué aceleración tendrá en el momento de llegar a la base del triángulo?**

La representación vectorial del problema se aprecia en la siguiente figura:



a) Puesto que las masas en los vértices inferiores son iguales, las componentes x de la aceleración que cada una de ellas comunica a m' se cancelan, de modo que la aceleración total que adquiere m' será:

$$\vec{a}_{total} = -2a_y\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

donde:

$$a_y = G\frac{m}{d^2}\cos 30°$$

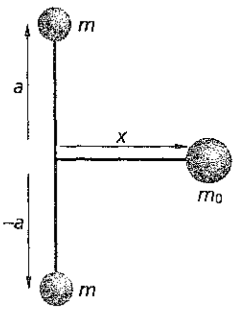
Sustituyendo $m = 5$ kg y $d = 0{,}4$ m, se obtiene:

$$\vec{a}_{total} = -3{,}6 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

b) No lo hará con aceleración constante, pues a medida que desciende las componentes y de la aceleración disminuyen.

c) Puesto que se mueve en la dirección del eje Y, su aceleración total será 0, al estar en el punto medio de las dos masas iguales.

D15 **PAU** **Dos masas puntuales de valor m se encuentran situadas sobre el eje Y en las posiciones $y = +a$ e $y = -a$, mientras que una tercera, m_0, se encuentra situada en el eje X a una distancia $-x$ del origen, como se indica en la figura.**

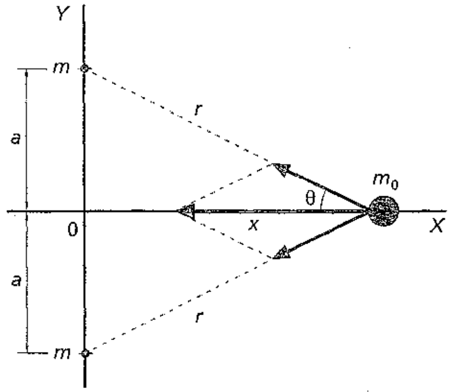


a) **Demuestra, detallando todos los pasos y argumentando la respuesta, que la fuerza que las dos masas idénticas ejercen sobre m_0, es:**

$$\vec{F} = \frac{2G\,mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) **¿Qué expresión se obtendrá si situamos la masa m_0 a una distancia mucho mayor que a?**

El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) El valor de la fuerza que cada masa ejerce sobre m_0 es:

$$F = G\frac{mm_0}{r^2} = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}$$

Al descomponer ambas fuerzas en sus componentes x e y, vemos que las componentes y se anulan entre sí, de modo que la fuerza neta resultante sobre m_0 es, como se aprecia en la figura:

$$\vec{F} = -2F_x\vec{i}$$

Aplicando la ley de gravitación universal:

$$F_x = F\cos\alpha = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} = G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Así pues, en forma vectorial:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) Si $x >> a$, entonces $(x^2+a^2)^{3/2} \approx x^3$, quedando la anterior expresión de la manera:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{x^2}\vec{i}$$

Que será la que resultará de suponer la masa m_0 atraída por una única masa puntual de valor $2m$ situada a la distancia x.

16 **¿Dónde será mayor el período de un péndulo, en el ecuador o en los polos?**

Según la expresión utilizada en la actividad 13, el período de un péndulo será mayor en el ecuador, donde el valor de g es ligeramente menor. Este hecho era conocido por Newton, ya que Richter había llevado a cabo mediciones del período de un péndulo en la Guayana francesa en 1672 y observado que el péndulo oscilaba más lentamente. A raíz de ello, Newton concluyó que la Tierra debía estar abultada en su zona ecuatorial y achatada por los polos.

17 **Imagínate que la ESA (Agencia Espacial Europea) organiza un concurso de ideas en los centros de enseñanza sobre posibles experimentos para llevar a cabo en un satélite que se halle en órbita alrededor de la Tierra. Alguien propone analizar el movimiento de un péndulo en el interior del satélite. ¿Qué te parece la idea?**

La idea no resultaría en absoluto, pues el péndulo no oscilaría. En realidad, todos los objetos en el interior de la estación orbital estarían cayendo libremente, lo que les conferiría esa situación de «ingravidez», que no significa ausencia de gravedad.

18 **¿Qué le ocurriría a un péndulo si, de repente, la Tierra aumentara su velocidad de rotación? ¿Se vería afectado el péndulo si se encontrara en los polos?**

Como se tendrá ocasión de analizar en detalle en la siguiente unidad, la aceleración gravitatoria efectiva que actuaría sobre los cuerpos en latitudes no polares sería ligeramente menor, al aumentar la aceleración centrífuga.

En consecuencia, el período del péndulo aumentaría, con lo que oscilaría más lentamente. Por el contrario, en los polos no se vería afectado el valor de g, aunque aumentara la velocidad de rotación.

19 **Imagínate que un planeta aumentara de tamaño sin alterar su densidad. ¿Se elevaría o disminuiría el peso de los cuerpos en su superficie?**

Tal y como se desprende de la actividad 8 de la página 66, es posible expresar la aceleración de la gravedad superficial en función de la densidad del siguiente modo:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

Al aumentar el tamaño el planeta, se incrementa r y, si no varía la densidad, el valor de g se elevaría, por lo que el peso de los cuerpos en la superficie se incrementa linealmente con la distancia o radio.

20 **Unos astronautas, al llegar a un planeta desconocido de gran tamaño, ponen su nave a orbitar a baja altura del planeta y con los motores desconectados. ¿Cómo podrían estimar la densidad del planeta usando solo un reloj?**

Si los astronautas sitúan la nave en una órbita baja a la velocidad orbital adecuada, lo único que tienen que tener en cuenta es el tiempo que tardan en efectuar una órbita completa (período T). Con esto ya pueden estimar la densidad del planeta del modo que sigue. En primer lugar, como la aceleración centrípeta de la nave es la aceleración gravitatoria, ambas expresiones se igualan:

$$g = \omega^2 r$$

Puesto que la órbita es de baja altura, cabe suponer que r es el radio del planeta. Expresando la aceleración de la gravedad en función de la densidad del planeta (véase la actividad 8), y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/T$, se obtiene:

$$\frac{4}{3} G\pi r\rho = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

Despejando la densidad, se concluye que:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

Así pues, como puede observarse, todo lo que necesitamos la densidad del planeta es un reloj para medir T.

21 **¿Qué pasaría si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?**

Permanecería orbitando en posición paralela a la nave, pues tanto esta como el objeto se encontrarían en caída libre. Lo veríamos, pues, en reposo relativo con respecto a la nave.

22 **PAU** **En la superficie de un planeta cuyo radio es 1/3 del de la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 5,8 m/s². Halla:**

a) **La relación entre las masas de ambos planetas.**

b) **La altura desde la que debería caer un objeto en el planeta para que llegara a su superficie con la misma velocidad con que lo haría en la Tierra un cuerpo que se precipita desde 50 m de altura.**

a) La aceleración gravitatoria de la Tierra:

$$G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

mientras que en el otro planeta:

$$G\frac{m_P}{r_P^2} = 5{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_T r_P^2}{m_P r_T^2} = 1{,}69$$

como $r_P = r_T/3$ se tiene que:

$$\frac{m_T r_T^2}{m_P r_T^2} \cdot \frac{1}{9} = 1{,}69$$

de donde:

$$\frac{m_T}{m_P} = 15{,}21$$

o bien, a la inversa:

$$\frac{m_P}{m_T} = 6{,}57 \cdot 10^{-2}$$

b) Las velocidades con que llegan al suelo los objetos que caen libremente son:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Puesto que en ambos casos la velocidad debe ser la misma:

$$\sqrt{2g_T y_T} = \sqrt{2g_P y_P} \Rightarrow g_T y_T = g_P y_P$$

Despejando el valor de y_P:

$$y_P = \frac{g_T}{g_P} \cdot y_T = 84{,}45 \text{ m}$$

23 **Considerando que la densidad media de la Tierra es de 5 500 kg/m³, y teniendo en cuenta el valor de su radio, haz una estimación del valor de la constante *G*.**

Expresando el valor de g en función de la densidad y despejando G, resulta:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho \Rightarrow G = \frac{3g}{4\pi r\rho}$$

Sustituyendo los valores:

$$G = \frac{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 5\,500 \text{ kg/m}^3} =$$

$$= 6{,}68 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

24 **PAU** **Una masa cae con una aceleración de 3,7 m/s² sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,4 veces el terrestre.**

a) **¿Cómo es la masa de este planeta en relación con la terrestre?**

b) **¿Qué velocidad debería llevar una nave para orbitar a 500 km sobre la superficie del planeta?**

c) **¿Cuánto tardaría en efectuar una órbita completa a esa altura?**

a) La aceleración superficial en el planeta es:

$$g_P = G\frac{m_P}{r_P^2} = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

Y en la Tierra:

$$g_T = G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_P r_T^2}{m_T r_P^2} = \frac{3{,}7}{9{,}8}$$

de donde:

$$\frac{m_P}{m_T} = 0{,}06$$

b) Teniendo en cuenta que la aceleración gravitatoria es centrípeta, se obtiene:

$$G\frac{m_P}{d^2} = \frac{v^2}{d}$$

Despejando el valor de v:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_P}{d}}$$

donde:

$$d = r_p + 500\ \text{km} = 0{,}4 \cdot 6\,370\ \text{km} + 500\ \text{km} = 3\,048\ \text{km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$v = 2\,806,7\ \text{m/s}$$

c) Como:

$$v = \frac{2\pi d}{T}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi d}{v} = 6\,823\ \text{s} \cong 0{,}08\ \text{días}$$

25 PAU **Supongamos que la Tierra tiene una densidad media ρ. Determina cuál sería el valor de g sobre su superficie si:**

***a)* El diámetro fuese la mitad y la densidad fuese la misma.**

***b)* El diámetro fuese el doble sin variar la densidad.**

Usando la expresión de g en función de la densidad:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

se observa que:

a) Si el radio se reduce a la mitad, entonces:

$$g' = \frac{1}{2} \cdot g$$

b) Si el radio se duplica, entonces:

$$g' = 2 \cdot g$$

26 PAU **La masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre. Calcula:**

***a)* La distancia que recorrería un cuerpo en 3 s cayendo libremente.**

***b)* La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si con la misma velocidad se elevara en Tierra hasta 30 m.**

La aceleración de la gravedad en la superficie lunar viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Luna}} = G\frac{M_{\text{Luna}}}{R^2_{\text{Luna}}} = G\frac{0{,}012 \cdot M_{\text{Tierra}}}{0{,}27^2 \cdot R^2_{\text{Tierra}}} = 0{,}164\,6 g_{\text{Tierra}} = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

a) Para hallar la distancia recorrida en la caída, hacemos uso de la ecuación del movimiento de caída libre:

$$y = 1/2\, g_L t^2 = 7{,}2\ \text{m}$$

b) La altura a la que se elevaría en un lanzamiento vertical vendrá dada por la expresión:

$$h_L = \frac{v_0^2}{2g_L}$$

Comparando las alturas que alcanzarían en la luna y en la Tierra, lanzados con la misma velocidad, se obtendría:

$$\frac{h_L}{h_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2g_L}}{} = \frac{v_0^2/2g_L}{v_0^2/2g_T} \Rightarrow h_L = h_T\frac{g_T}{g_L} = 30 \cdot \frac{9{,}8}{1{,}6} = 183{,}7\ \text{m}$$

27 PAU **Dos planetas extrasolares A y B presentan la misma densidad, pero el radio de A es el doble que el de B. Demuestra cómo serán en comparación los pesos de una misma masa m en sus respectivas superficies.**

El peso de una masa m en la superficie de un planeta de masa M y radio R puede expresarse en función del radio y la densidad del planeta:

$$P = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho m$$

Si la densidad de ambos planetas es la misma, la relación entre el peso en el planeta A y en el planeta B será:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{R_A}{R_B} = 2 \Rightarrow P_A = 2P_B$$

D28 PAU **La densidad de Marte es 0,71 veces la de la Tierra, mientras que su diámetro es 0,53 veces el terrestre. Deduce y explica cómo serán, en comparación, los pesos de una misma masa m en Marte y en la Tierra. ¿Cuál es el valor de g en la superficie de Marte si en la Tierra es de 9,8 m/s²?**

Haciendo uso de la expresión $g = \frac{4}{3} G\pi\rho r$, se obtiene:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{4/3\ G\pi \cdot 0{,}71\rho_T \cdot 0{,}53 r_T}{4/3\ G\pi\rho_T r_T} = 0{,}38$$

Puesto que $P = mg$, resulta claro que el peso de una misma masa en Marte es 0,38 veces el correspondiente en la Tierra. Y teniendo en cuenta que $g_T = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, por tanto:

$$\frac{P_{\text{Marte}}}{P_{\text{Tierra}}} = \frac{g_{\text{Marte}}}{g_{\text{Tierra}}}$$

despejando queda:

$$g_{\text{Marte}} = 0{,}38 \cdot g_{\text{Tierra}} = 3{,}7\ \text{m/s}^2$$

Gravitación y tercera ley de Kepler

29 **¿Qué condición cumplen los satélites que emiten señales de TV? ¿A qué distancia deben orbitar?**

Deben ser geoestacionarios, es decir, orbitar con el mismo período que el de rotación terrestre (véase el problema resuelto número 4 de la página 76).

30 **¿Sería posible situar un satélite estacionario sobre nuestro país?**

No sería posible situar un satélite permanentemente sobre nuestro país, porque el centro o foco orbital de este satélite debe ser el centro terrestre, por donde pasa la dirección de acción de la fuerza gravitatoria.

31 **Calcula la masa de Marte sabiendo que Fobos, uno de sus dos satélites, completa una órbita de 9 300 km de radio cada 0,32 días.**

La aceleración centrípeta de Fobos es la gravitatoria, de modo que:

$$G\frac{m}{r^2} = \omega^2 r$$

Despejando la masa, tenemos que:

$$m = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituyendo los datos correspondientes, llegamos a:

$$m = 6{,}23 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

Para obtener este resultado, T se ha expresado en segundos, y r, en metros.

32 **Halla cuántas veces es mayor la masa solar que la terrestre a partir de los datos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol.**

Aplicando la tercera ley de Kepler al movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra y conociendo el valor de la constante k para un satélite alrededor de la Tierra (subepígrafe 3.2), se obtiene:

$$T_L^2 = k' d^3_{TL} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3_{TL}$$

Haciendo lo propio en el caso del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene:

$$T_T^2 = k d^3_{TS} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \cdot d^3_{TS}$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{T_L^2}{T_T^2} = \frac{m_S d^3_{TL}}{m_T d^3_{TS}}$$

Es decir:

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{T_L^2 d_{TS}^3}{T_T^2 d_{TL}^3}$$

Considerando los siguientes datos:

$$T_L = 27{,}31 \text{ días}; \quad d_{TS} = 149\,600\,000 \text{ km}$$
$$T_T = 365{,}25 \text{ días}; \quad d_{TL} = 384\,000 \text{ km}$$

cabe concluir que:

$$\frac{m_S}{m_T} = 3{,}3 \cdot 10^5$$

Es decir, la masa solar es $3{,}3 \cdot 10^5$ veces la terrestre.

33 **¿Cuál sería la masa de la Tierra, comparada con la real, para que la Luna girase en torno a nuestro planeta con el período actual, pero a una distancia dos veces mayor?**

Aplicando la tercera ley de Kepler para el caso real:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3$$

Por otro lado, si $d' = 2 \cdot d$ y se mantiene el periodo, tendremos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T'} \cdot (2 \cdot d)^3$$

Igualando ambas expresiones, se llega a que:

$$m_T' = 8 \cdot m_T$$

Es decir, la masa ficticia debería ser 8 veces la real.

34 **PAU** **El satélite de Júpiter llamado Ío orbita a una distancia del centro planetario de 422 000 km, con un período de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su período de revolución es de 3,55 días.**

Teniendo en cuenta que el valor de la constante k es el mismo para ambos casos, e igualando a partir de la tercera ley de Kepler, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{T_{Io}^2}{d_{Io}^3} = \frac{T_{Europa}^2}{d_{Europa}^3}$$

Despejando la distancia a que se encuentra Europa, se obtiene:

$$d_{Europa} = d_{Io} \cdot \left(\frac{T_{Europa}}{T_{Io}}\right)^{2/3}$$

Sustituyendo los datos correspondientes que nos facilita el problema, concluimos que:

$$d_{Europa} = 1{,}59 \cdot d_{Io} = 671\,144 \text{ km}$$

35 **PAU** **La masa de Saturno es 95,2 veces la de la Tierra. Encélado y Titán, dos de sus satélites, tienen períodos de revolución de 1,37 días y 15,95 días, respectivamente. Determina a qué distancia media del planeta orbitan estos satélites.**

En ambos casos se aplica la tercera ley de Kepler:

$$d^3 = \frac{T^2}{k} = \frac{Gm_{Saturno}T^2}{4\pi^2}$$

donde:

$$d = \left(\frac{Gm_{Saturno}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Como $m_{Saturno} = 95{,}2 \cdot m_T = 5{,}71 \cdot 10^{26}$ kg, al sustituir en la anterior expresión, se obtiene:

$$d_{Encélado} = 237\,520 \text{ km}$$
$$d_{Titán} = 1\,223\,161 \text{ km}$$

36 **PAU** **El Apolo VIII orbitó en torno a la Luna a una altura de su superficie de 113 km. Si la masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre, calcula:**

a) **El período de su órbita.**

b) **Su velocidad orbital y su velocidad angular.**

a) Puesto que la aceleración centrípeta de su órbita es la gravitatoria, al igualar, se obtiene:

$$G\frac{m_L}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

de donde:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_L}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r = r_L + h = 1\,833 \text{ km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 7\,113 \text{ s}$$

b) Su velocidad orbital será:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1\,618 \text{ m/s}$$

Y su velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = 8{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

37 **PAU** **Con los datos ofrecidos en el ejercicio anterior, halla:**

a) **La distancia que recorrería un cuerpo en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar.**

b) **La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente si con esa velocidad se eleva en la Tierra hasta 20 m.**

Para resolver ambos apartados, debemos calcular la aceleración gravitatoria en la superficie lunar, que será, aproximadamente:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(0{,}27 \cdot r_T)^2}$$
$$g_L = 0{,}164 \cdot g_T = 1{,}60 \text{ m/s}^2$$

a) Así pues, la distancia que un cuerpo recorrería en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar sería:

$$y = \frac{1}{2} g_L t^2 = 0{,}81 \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que la altura máxima que alcanza un objeto al ser lanzado verticalmente es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

y si las velocidades de lanzamiento son iguales desde la Tierra y desde la Luna, entonces:

$$2g_T y_T = 2g_L y_L$$

donde:

$$y_L = \frac{g_T}{g_L} \cdot y_T = 121 \text{ m}$$

38 **La masa del planeta Saturno es 95,2 veces la de la Tierra, su radio es 9,4 veces el terrestre, y su distancia media al Sol es de 1 427 000 000 km. Calcula:**

a) **La duración de su año en días terrestres.**

b) **El valor de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre.**

a) Por aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{kd^3}$$

donde k es igual a $2{,}96 \cdot 10^{-19}$ s^2 m^{-3} (véase la actividad 10 de la página 67).

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 9{,}274 \cdot 10^8 \text{ s} = 10\,734 \text{ días}$$

b) El valor de la gravedad superficial de Saturno es:

$$g_S = G\frac{m_S}{r_S^2}$$

Como $m_S = 95{,}2 \cdot m_T$, y $r_S = 9{,}4 \cdot r_T$, podemos concluir que:

$$g_S = G\frac{95{,}2 \cdot m_T}{(9{,}4 \cdot r_T)^2} = 1{,}08 \cdot g_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_T} = 1{,}08$$

39 **Marte se encuentra un 52 % más alejado del Sol que la Tierra. Con este dato, determina la duración del año marciano en días terrestres. Dato: año terrestre = 365 días**

Según la tercera ley de Kepler, $T^2 = kR^3$. Es decir, T^2/R^3 es constante. Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow \left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3$$

Ahora bien, sabemos que $R_{\text{Marte}} = 1{,}52R_{\text{Tierra}}$, y que el periodo de la órbita terrestre es de 365 días, luego:

$$\left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = 1{,}52^3 = 3{,}511\,8$$

$$T_{\text{Marte}} = 1{,}874 \cdot T_{\text{Tierra}} = 684 \text{ días terrestres}$$

D.40 **PAU** **Júpiter tiene una masa 320 veces mayor que la terrestre y un volumen 1 320 veces superior al correspondiente a la Tierra. Determina:**

a) **A qué altura *h* sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite en órbita circular, para que su período de revolución fuese de 9 h y 50 minutos.**

b) **¿Qué velocidad tendrá el satélite en dicha órbita?**

Datos: $R_{\text{Tierra}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

a) En el sistema gravitatorio creado por Júpiter, la constante de la tercera ley de Kepler será:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Júpiter}}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Tierra}} \cdot 320}$$

Por otro lado, sabemos que la aceleración de la gravedad terrestre viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Tierra}} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}} \Rightarrow GM_{\text{Tierra}} = g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}}$$

Ahora ya podemos expresar la constante de Kepler para Júpiter en función de datos conocidos:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}} \cdot 320} = 3{,}10 \cdot 10^{-16}$$

Conocida $k_{\text{Júpiter}}$, podemos aplicar la tercera ley de Kepler para determinar el radio de la órbita del satélite, convirtiendo previamente el periodo a segundos:

$$R^3_{\text{satélite}} = \frac{T^2_{\text{satélite}}}{k_{\text{Júpiter}}} = \frac{35\,400^2}{3{,}10 \cdot 10^{-16}} = 4{,}04 \cdot 10^{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{satélite}} = 1{,}59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Para determinar la altura, calculamos el radio de Júpiter. Los volúmenes son proporcionales a los radios al cubo:

$$R^3_{\text{Júpiter}} = 1\,320 \cdot R^3_{\text{Tierra}} \Rightarrow R_{\text{Júpiter}} = 10{,}97 \cdot R_{\text{Tierra}} = 7{,}0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La altura del satélite sobre la superficie de Júpiter se obtiene restando al radio de la órbita el radio de Júpiter, de donde resulta que $h = 8{,}95 \cdot 10^7$ m, es decir, 89 527 km.

b) Igualando la fuerza gravitatoria y la centrípeta:

$$G\frac{m_J m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Se obtiene la velocidad orbital del satélite a la distancia r:

$$v = \sqrt{gm_J/r} = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

El fenómeno de las mareas

41 **Compara el efecto de marea que la Tierra produce sobre la Luna con el que la Luna ejerce sobre la Tierra. ¿Aclara el resultado por qué la Tierra no muestra siempre la misma cara a la Luna y, sin embargo, esta sí lo hace?**

Según hemos visto en el epígrafe 5 de esta unidad, la aceleración de marea que la Tierra ejerce sobre la Luna es, aproximadamente:

$$a_{TL} = G\frac{m_T 2r_L}{d^3}$$

Mientras que la aceleración de marea que nuestro satélite ejerce sobre la Tierra es:

$$a_{LT} = G\frac{m_L 2r_T}{d^3}$$

Al dividir ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{a_{TL}}{a_{LT}} = \frac{m_T r_L}{m_L r_T}$$

Teniendo en cuenta que el radio lunar es de 1 873 km y que la masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre, puede comprobarse que la aceleración de marea de la Tierra sobre la Luna es unas 24,5 veces mayor que la producida por la Luna en nuestro planeta.

Esa es la razón de que haya sido la Luna la que disminuyó más rápidamente su rotación hasta acoplar sus movimientos de rotación y traslación.

42 **PAU** **En el apogeo (punto de la órbita más lejano de la Tierra) la Luna está 1/9 más lejos de la Tierra que en el perigeo. Calcula en qué porcentaje disminuye la fuerza de marea cuando la Luna está en el apogeo.**

La aceleración de marea y, por tanto, la fuerza de marea, es proporcional al inverso del cubo de la distancia Tierra-Luna, es decir:

$$F_{\text{marea}} \propto r^{-3}$$

Donde *r* es la distancia Tierra-Luna. La relación entre la fuerza de marea en el apogeo y en el perigeo será:

$$\frac{F_{\text{apogeo}}}{F_{\text{perigeo}}} = \frac{r^3_{\text{perigeo}}}{r^3_{\text{apogeo}}} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729$$

Es decir, la fuerza de marea en el apogeo es, aproximadamente, un 73 % menor que en el perigeo; por lo que, disminuye en un 27 %.

43 **¿En qué estación del año y bajo qué condiciones lunares se producirían las máximas elevaciones de marea?**

Teniendo en cuenta que las máximas elevaciones (mareas vivas) se producen cuando se suman las contribuciones de la Luna y el Sol, es decir en períodos lunares de plenilunio o novilunio y considerando las dependencias con el inverso del cubo de la distancia a cada uno, es fácil entender que la circunstancia de máxima elevación de marea requiere:

- Mínima distancia lunar: luna en perigeo.
- Mínima distancia solar: invierno boreal o verano austral.
- Luna nueva o luna llena.

Por tanto, las condiciones más favorables tendrán lugar en nuestro invierno y dándose la coincidencia de que en el momento de luna llena o nueva, esta se encuentra en el perigeo o en sus proximidades.

3 El concepto de campo en la gravitación

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

Cuestiones previas (página 82)

1. ¿Qué interacciones se describen mediante el concepto de campo?

Interacción gravitatoria entre masas, interacción eléctrica entre cargas…

2. ¿Qué diferencia conceptual crees que existe entre la idea de campo y la de acción a distancia?

Acción a distancia

- Se requiere la existencia de, al menos, **dos cuerpos.** Un solo cuerpo no genera acción alguna.
- El espacio es el marco absoluto e invariable en el que sucede la interacción.
- La **interacción es instantánea,** de modo que las leyes newtonianas no se modifican (por ejemplo, el principio de acción y reacción).

Concepto de campo

- Se requiere la existencia de **un solo cuerpo** para originar un campo. El segundo cuerpo tan solo atestigua la existencia del campo.
- Son las distorsiones de las propiedades asociadas al espacio-tiempo las responsables de la interacción.
- Las **interacciones se propagan a la velocidad de la luz,** lo que modifica aspectos esenciales de las leyes de Newton (por ejemplo, el principio de acción-reacción).

3. ¿Crees que sería necesaria la misma velocidad para hacer escapar un cohete de la Tierra que para hacerlo de la Luna? ¿Por qué?

No, porque es característica del cuerpo celeste depende de su y de su radio la Tierra.

4. ¿Qué conoces de los agujeros negros? ¿Por qué se denominan así?

Los agujeros negros son como una masa muy grande concentrada en un punto que crea un gran campo gravitatorio, es decir, que tiene una gran fuerza de gravedad. Se denominan así porque absorben muchísima energía (igual que el color negro), son como sumideros de energía.

Esta fuerza de gravedad es tal que impide que la luz salga del campo de atracción, resultando por ello invisible.

5. ¿Tienen los satélites en órbita que usar permanente motores para mantenerse en la misma?

No, porque la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria.

Actividades (páginas 85/97)

1 ¿A qué distancia de un cuerpo de masa 3*m* tiene el campo gravitatorio el mismo valor que a una distancia *r* de un cuerpo de masa *m*?

Puesto que $g = Gm/r^2$, si la intensidad de los campos creados por m y por $3m$ es la misma, se cumple que:

$$G = \frac{3m}{d^2} = \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{3}{d^2} = \frac{1}{r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{3}r$$

2 Si el campo gravitatorio debido a una masa vale *g* a una distancia *r*, ¿a qué distancia de la masa valdrá la mitad?

El módulo del campo gravitatorio creado por una masa m es:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

A cierta distancia, d, el campo vale la mitad, es decir:

$$g' = G\frac{m}{r^2} = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}G\frac{m}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{2}r$$

3 Si la Tierra fuese una corteza esférica y se practicase en ella un orificio, ¿qué movimiento describiría una pelota que fuera lanzada al interior de dicho orificio?

Puesto que el campo en el interior de una corteza esférica es nulo, la pelota no estaría sometida a ningún tipo de aceleración y describiría un movimiento rectilíneo uniforme.

4 Si cavaras un hipotético túnel que se extendiese desde el lugar en el que te encuentras hasta los antípodas (suponiendo que la Tierra tiene densidad constante), ¿qué tipo de movimiento describiría una pelota que se dejara caer por dicho túnel? Explícalo con todo detalle.

Como el campo en el interior de una esfera sólida viene dado por la ecuación **3.3**, el peso de la pelota en el interior del hipotético túnel variaría conforme a la expresión:

$$\vec{P} = -G\frac{mm'}{r^3}r'\vec{u}_r$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre la pelota responde a la expresión típica de una fuerza restauradora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio ($r' = 0$) y que varía proporcionalmente con la distancia y en sentido opuesto. En consecuencia, la pelota oscilaría continuamente de un extremo al otro del hipotético túnel.

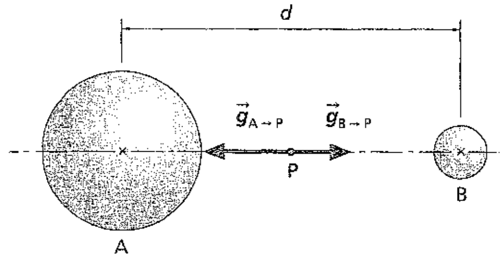
Nota: como ejercicio de ampliación, en la UNIDAD 7, dedicada al estudio del movimiento oscilatorio, puede sugerirse a los alumnos que demuestren que el período de dichas oscilaciones es igual al período orbital que tendría un cuerpo a una distancia equivalente al radio terrestre.

5 PAU Dos esferas A y B tienen la misma densidad, pero el radio de A es el triple del radio de B.

***a)* ¿Qué relación guardan los respectivos valores del campo en un punto P equidistante de los centros de las esferas?**

***b)* Si la separación entre los centros de las esferas es *d*, ¿a qué distancia de la esfera A se encuentra el punto en el que el campo resultante es nulo?**

La situación descrita en el enunciado se observa en el siguiente dibujo:



a) El campo creado por la esfera A en el punto P será:

$$g_{A\to P} = G\frac{m_A}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2}$$

En la expresión anterior, hemos puesto la masa como producto del volumen por la densidad.

Por su parte, el campo creado por la esfera B en el punto P será:

$$g_{B\to P} = G\,\frac{m_B}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{(R/3)^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27r^2}$$

Por tanto, la relación entre los dos campos será:

$$\frac{g_{A\to P}}{g_{B\to P}} = 27$$

b) A cierta distancia del centro de la esfera A, los campos creados por ambas esferas son idénticos, si bien con sentidos opuestos. En ese punto, por tanto, $g_{A\to P} = g_{B\to P}$. Si llamamos r a dicha distancia:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27(d-r)^2}$$

Simplificando términos y tomando las inversas, resulta:

$$27(d-r)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d - r = \frac{r}{3\sqrt{3}}$$

Agrupando términos y despejando, obtenemos:

$$r = 0{,}839d$$

6 **Haz una estimación del valor de g en la cima del Everest, teniendo en cuenta el valor de 9,8 m/s² al nivel del mar. ¿Crees que es correcto utilizar 9,8 m/s² como valor general para toda la superficie terrestre?**

Dato: altura del Everest: 8,9 km

Aplicando la expresión **3.4**, en la que $h = 8\,900$ m, obtendremos:

$$g'_{Everest} = 9{,}77\ \text{m/s}^2$$

Como puede comprobarse, la generalización del valor aproximado de 9,8 m/s² para toda la corteza terrestre es válida para la mayor parte de las situaciones.

7 **Considerando que en la superficie de Marte g es 3,72 m/s², calcula cuál sería el valor de la gravedad en la cima del monte Olimpo, que, con sus 25 km de altura, es el monte conocido más alto del sistema solar.**

Aplicando de nuevo la expresión **3.4**, y tomando como radio promedio para Marte $3{,}38 \cdot 10^6$ m, el valor de g' en la cima del monte Olimpo de Marte será:

$$g' = 3{,}66\ \text{m/s}^2$$

Es decir, ha disminuido en un 2 %.

8 **Dibuja una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, g, en función de la distancia r al centro de la Tierra. ¿A qué profundidad, x, por debajo de la superficie terrestre hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre la misma?**

La gráfica pedida es idéntica a la zona de la izquierda de la figura 3.12.

La segunda parte de la pregunta se refiere, en consonancia con el epígrafe, a alturas pequeñas. En consecuencia, la condición que debe cumplirse es:

$$G\,\frac{m_T}{r_T^3}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{r_T}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$$

De donde se obtiene:

$$r' = r_T - 2h$$

Puesto que r' es la distancia desde el centro terrestre hasta el punto considerado, la profundidad pedida será: $x = 2h$.

9 **¿Por qué produce la rotación terrestre un abultamiento ecuatorial y un achatamiento por los polos en nuestro planeta?**

En la zona ecuatorial, la aceleración centrífuga alcanza su máximo valor, al ser también máxima la distancia al eje de rotación. Al actuar, en este caso, en la misma dirección que $\vec{g}$, el valor de $\vec{g}_{efectiva}$ es algo menor. Por esta razón, la Tierra presenta un abultamiento en la zona ecuatorial. Por el contrario, en las zonas polares, la aceleración centrífuga es nula, y $\vec{g}_{efectiva} = \vec{g}$, por lo que su valor es mayor. De ahí que la Tierra presente un achatamiento en las zonas polares.

10 **Determina qué ángulo separa la vertical de la dirección radial en una latitud de 40°.**

La relación que existe entre la componente horizontal y la radial de $\vec{g}_{efectiva}$ nos da la tangente del ángulo α, que separa la vertical de la dirección radial y es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 r_T \cos\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi}{g - \omega^2 r_T \cos^2\varphi} = 0{,}0017$$

Por lo que $\alpha = 0{,}097°$.

Para obtener este valor, se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi/86\,400$ rad/s. Obsérvese que la desviación de la vertical con respecto a la dirección radial es sumamente pequeña.

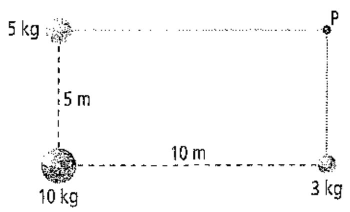
11 **Calcula los valores de la gravedad efectiva en las latitudes canarias (aprox. 28°) y cantábricas (aprox. 43°). Considera $g = 9{,}81$ N/kg.**

La gravedad efectiva viene dada por la expresión **3.5**, en la que se observa la variación con la latitud del lugar, φ. La velocidad angular de la Tierra puede ponerse en función del periodo de rotación: $\omega = 2\pi/T$. Sabemos que el periodo es de 24 horas, es decir, de 86 400 s. Por tanto:

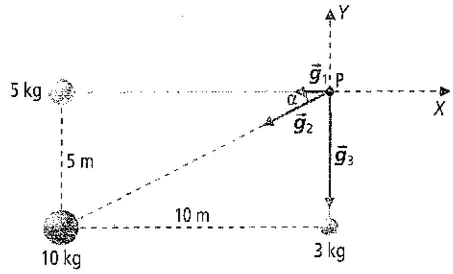
$$g_{Canarias} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 28 = 9{,}7837\ \text{m/s}^2$$

$$g_{Cantabria} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 43 = 9{,}7920\ \text{m/s}^2$$

12 **Determina el campo producido en el punto P por la distribución de masas de la siguiente figura.**



Representemos primero los vectores de campo producidos por la distribución de masas en el punto P.



El campo total será la suma vectorial de los campos originados por las distintas masas:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Para la masa m_1, el campo creado será:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m_1}{r_1^2}\,\vec{i} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5\ \text{kg}}{(10\ \text{m})^2}\,\vec{i} =$$

$$= -3{,}335 \cdot 10^{-12}\,\vec{i}\ \text{N/kg}$$

Así, para la masa m_2, tendremos que:

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\cos\alpha\,\vec{i} - G\frac{m_2}{r_2^2}\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{10\ \text{kg}}{(\sqrt{125\ \text{m}})^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{125}}\vec{j}\right) =$$

$$= (-4{,}772\cdot 10^{-12}\vec{i} - 2{,}386\cdot 10^{-12}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y, para m_3:

$$\vec{g}_3 = -G\frac{m_3}{r_3^2}\vec{j} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2\cdot\frac{3\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\vec{j} =$$

$$= -8{,}004\cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

Entonces, el campo total será:

$$\vec{g}_{\text{total}} = (-8{,}107\cdot 10^{-12}\vec{i} - 1{,}039\cdot 10^{-11}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y su módulo será:

$$g = 1{,}317\cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

13 ¿Cuánto trabajo se realiza al desplazar una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio de la Tierra?

El trabajo será igual a la variación negativa de la energía potencial, por lo que:

$$W = -G\frac{m_T m}{r_T} - \left(-G\frac{m_T m}{3r_T}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}G\frac{m_T m}{r_T} = -4{,}19\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El signo negativo del trabajo significa que se realiza contra la atracción gravitatoria.

14 Un sistema consta de cuatro partículas de 10 g situadas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?

La energía potencial del sistema será:

$$E_{p\,\text{total}} = E_{p\,12} + E_{p\,13} + E_{p\,14} + E_{p\,23} + E_{p\,24} + E_{p\,34}$$

Las distancias r_{13} y r_{24} son las diagonales del cuadrado y valen 0,28 m. Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{p\,\text{total}} = -G\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2}\right) = -G\cdot 10^{-4}\left(\frac{4}{0{,}2} + \frac{2}{0{,}28}\right) =$$

$$= -1{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

15 PAU Cuatro masas de 2, 4, 3 y 0,4 kg, respectivamente, se encuentran en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado? ¿Qué energía potencial adquirirá una masa de 10 kg colocada en dicho punto?

La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es igual a $\sqrt{2}$ m. Así pues:

$$V = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)$$

Sustituyendo los datos queda:

$$V = -4{,}43\cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Por su parte, la energía potencial que adquiriría una masa $m' = 10$ kg situada en dicho punto será:

$$E_p = m'V = -4{,}43\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

16 PAU El potencial gravitatorio debido a cierta masa varía a lo largo de la dirección X según la expresión:

$$V(x) = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x}\ \text{J/kg}$$

Determina:

a) **El valor de la masa, considerada puntual, que origina dicho potencial.**

b) **La expresión vectorial del campo gravitatorio en $x = 10$ m y en $x = 20$ m.**

a) Sabemos que el potencial creado por una masa puntual viene dado por la expresión:

$$V(x) = -G\frac{m}{x}$$

b) El campo es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{g} = -\frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x^2}\vec{i}$$

Por tanto:

$$\vec{g}(x=10) = -2\cdot 10^{-9}\vec{i}$$

$$\vec{g}(x=20) = -5\cdot 10^{-10}\vec{i}$$

17 ¿Qué valor tiene el campo gravitatorio en el punto A de la figura 3.23? Razona tu respuesta.

En dicho punto, los campos gravitatorios lunar y terrestre son iguales y de sentidos opuestos, por ello el campo neto es nulo.

18 ¿Cuánto vale la velocidad de escape del Sol a una distancia igual al radio orbital terrestre? ¿Qué te sugiere el resultado?

La velocidad de escape de la atracción gravitatoria solar a esa distancia (149 600 000 km) es:

$$v = \sqrt{\frac{2Gms}{r}} = 42\,230\ \text{m/s} = 42{,}23\ \text{km/s}$$

La conclusión que se extrae de este resultado es que la velocidad de escape terrestre no es suficiente para abandonar el campo gravitatorio solar. Como se comenta en el texto, las sondas que han abandonado el sistema solar han tenido que adquirir la velocidad necesaria haciendo uso de la llamada «asistencia gravitacional».

Cuestiones y problemas (páginas 102/103)

Guía de repaso

1 ¿Qué importante diferencia se establece a partir de los trabajos de Maxwell en el tratamiento de la interacción a larga distancia y que marca una significativa diferencia entre el concepto de campo y el de acción a distancia?

Las interacciones entre cuerpos a distancia no son instantáneas, sino que se propagan a la velocidad límite de la luz.

2 ¿Qué se entiende por campo gravitatorio?

Campo gravitatorio es aquella región del espacio cuyas propiedades son perturbadas por la presencia de una masa m.

3 ¿Qué magnitudes se utilizan como inherentes o propias del campo gravitatorio? ¿Y cuáles se usan para describir la interacción del campo con una partícula testigo?

Las magnitudes que definen el campo son la intensidad del campo en un punto y el potencial del campo.

Las magnitudes que se utilizan para describir la interacción del campo con una partícula testigo son la fuerza que actúa sobre la partícula como medida de la interacción, y la energía potencial de la partícula asociada a su posición relativa en el campo.

4 ¿Cuál es la expresión para la intensidad del campo debido a una masa puntual en un punto P distante?

$$\vec{g} = -Gm/r^2\vec{u}_r,\ \text{o bien}\ g = F/m'$$

donde m es la masa que origina el campo y m', la testigo.

5 **¿Cómo es el campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior? ¿Y en uno interior? ¿Podrías demostrar tu respuesta a esta última cuestión desde un punto de vista cualitativo?**

El campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior es idéntico al que se obtendría si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en su centro. En un punto interior el campo es nulo. Véase la demostración dada en la página 87.

6 **¿Bajo qué aproximaciones equivale el campo creado por una esfera sólida en un punto exterior de esta al de esa misma masa considerada puntual y concentrada en el centro de la esfera?**

Hay que suponer que la densidad de la esfera es uniforme o varía solo con la distancia al centro, o decir, de modo isotrópico.

7 **¿De qué forma varía el campo en el interior de una esfera sólida? ¿Bajo qué suposiciones?**

Varía linealmente con la distancia al centro hasta hacerse cero en dicho punto. La suposición que hay que hacer es que la densidad de la esfera es uniforme.

8 **¿Cómo se modifica la aceleración gravitatoria efectiva en la superficie en función de la altitud? ¿Y en función de la latitud?**

En función de la altitud: $g_{\text{efectiva}} = g\left(1 - \dfrac{2h}{r_T}\right)$

En función de la latitud: $g_{\text{efectiva}} = g - \omega^2 r_T \cos^2 \varphi$

9 **¿En qué condiciones es lícito utilizar el término *mgh*, en el que *g* es constante?**

En pequeñas alturas (véase la página 93).

10 **¿Qué significado físico tiene hablar de energía potencial de un conjunto de partículas?**

La medida del trabajo que debería realizarse para separar el sistema hasta hacer infinita la distancia entre las partículas.

11 **¿Cuál es el significado físico de la energía de amarre o de ligadura?**

Es la energía que debe transferirse por unidad de masa para que un cuerpo abandone completamente un campo gravitatorio.

12 **¿Qué le ocurriría a un cuerpo lanzado desde la Tierra a una velocidad de 11,2 km/s si tenemos presente su situación en el sistema solar?**

Que no llegaría a abandonar el sistema solar.

El campo gravitatorio

13 PAU **Dos cortezas esféricas de distinto radio tienen la misma masa. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto situado a la misma distancia de sus respectivos centros?**

Sí, siempre y cuando el punto considerado sea exterior a ambas cortezas.

14 **Dos cortezas esféricas de la misma densidad tienen distinto radio. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto equidistante de sus respectivos centros?**

A igualdad de densidad, la corteza de mayor radio (mayor superficie) tendrá mayor masa, por lo que el campo originado por ella en un punto equidistante será también mayor. Si consideramos la densidad como superficial, la masa de cada esfera vendrá dada por $\rho 4\pi r^2$, con lo que queda clara la interdependencia entre la masa y el radio de la corteza.

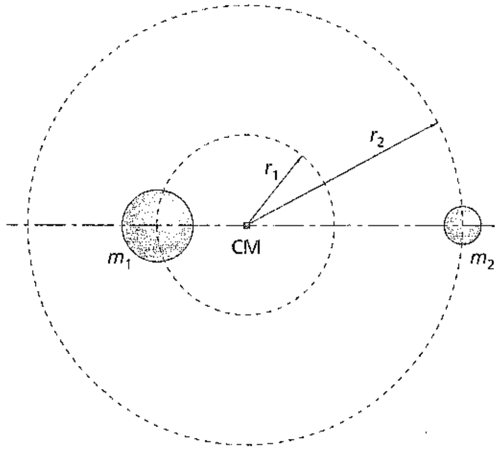
15 PAU **Observa que la variación de $\vec{g}$ con respecto a *r* en el interior de una esfera sólida puede expresarse mediante la igualdad $\vec{g} = -kr\vec{u}_r$. En consecuencia, ¿cómo varía la fuerza gravitatoria con la distancia en el interior de dicha esfera? ¿Qué fuerzas de las que estudiaste en 1.° de Bachillerato variaban de igual manera con la distancia?**

Varía del modo en que lo hacen las fuerzas restauradoras, como las elásticas, estudiadas en 1.° de Bachillerato. En este caso, la posición de equilibrio sería el centro de la esfera (suponiendo constante la densidad).

16 PAU **Sean dos masas m_1 y m_2 orbitando alrededor del centro de masas del sistema con idéntico período *T*, a distancias respectivas r_1 y r_2. Dado que es la interacción gravitatoria mutua la que proporciona la fuerza centrípeta necesaria a cada una, demuestra que debe cumplirse que:**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



La fuerza gravitatoria que ejerce la masa m_1 sobre m_2 es igual y de sentido contrario a la que ejerce m_2 sobre m_1. Estas dos fuerzas son las responsables de los respectivos movimientos giratorios en torno al centro de masas, es decir:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2 r_1}{r_1^2} = \frac{m_1 v_2^2 r_2}{r_2^2}$$

Ahora bien, el cociente entre la velocidad lineal y la distancia al centro de masas es la velocidad angular, idéntica para ambas masas. Por tanto, podemos simplificar la anterior igualdad:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Es decir, cuanto más grande sea una masa respecto a la otra, menor será el radio de su órbita respecto al radio de la otra masa.

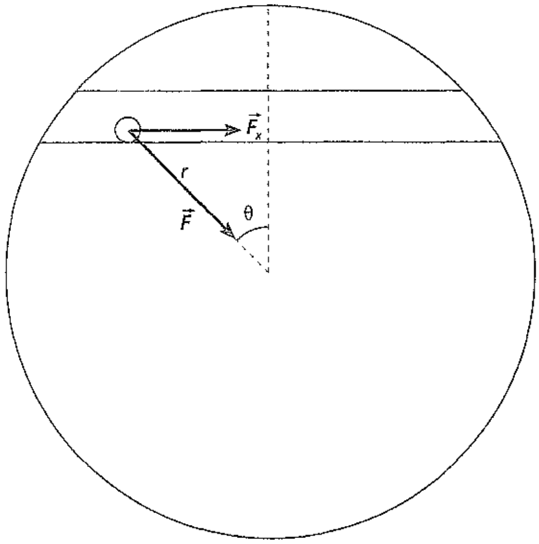
17 **¿Qué tipo de movimiento describiría una partícula en el interior de un hipotético túnel que se cavara desde un punto de latitud 60° N-longitud 0° hasta otro de latitud 60° N-longitud 180°, si la partícula se abandonara en la entrada del túnel?**

Describirá un movimiento oscilatorio bajo la acción de una fuerza variable con la distancia.

Como puede observarse en el dibujo, en este caso es la componente *x* de la fuerza gravitatoria la que varía con la distancia (la componente *y* es compensada por la reacción normal de la pared del túnel), con lo que:

$$F_x = F \operatorname{sen}\theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} r \operatorname{sen}\theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} x$$

Es decir, se trata de una fuerza restauradora del tipo $F = -kx$.



18 **Si se mantuviera constante la densidad de la Tierra:**

a) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su radio se duplicara?**

b) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su diámetro fuera la mitad?**

a) Puesto que podemos expresar el campo gravitatorio superficial en función de la densidad como:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

si el planeta aumenta de tamaño sin variar la densidad, el peso de los cuerpos en la superficie se incrementaría linealmente con r. Concretamente, el radio (o el diámetro) se duplica, el peso también se duplicaría.

b) Haciendo uso de la misma expresión que en el apartado anterior, si el diámetro se reduce a la mitad, g también lo hará en la misma proporción, luego el peso se reducirá también a la mitad.

19 **Considerando que el período de un péndulo en la superficie terrestre viene dado por $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$, donde l es la longitud del péndulo, analiza si un reloj de péndulo que funcionase bien en nuestras latitudes se atrasaría o se adelantaría en las siguientes situaciones:**

a) **El reloj es trasladado al polo Norte.**

b) **El reloj es trasladado al ecuador.**

c) **El reloj asciende a gran altura en un globo aerostático.**

d) **El reloj desciende a gran profundidad en el interior terrestre.**

e) **El reloj viaja en el interior de una estación orbital.**

a) El período disminuye y, en consecuencia, el reloj se adelantaría, pues g aumenta.

b) Ahora g disminuye y el período aumenta, por lo que el reloj se atrasaría.

c) Sucede lo mismo que en ***b)***.

d) En este caso, g disminuye con respecto al valor superficial y el reloj se atrasaría al aumentar el período.

e) El reloj no funcionaría al estar en situación de caída libre.

20 **¿En qué lugar pesa más un cuerpo: en la superficie de nuestro planeta, a 2 000 m de altura o a una profundidad de 2 000 m?**

El mayor valor de g corresponde a la superficie de nuestro planeta, por lo que será ahí donde pese más.

21 **En un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, la aceleración superficial es de 5,4 m/s². Determina cuánto vale comparativamente la densidad (suponiendo que sea constante) del planeta en relación con la densidad terrestre, ρ_T (considerándola también constante).**

El valor de la aceleración gravitatoria de la Tierra es:

$$g_T = \frac{4}{3} G\pi r_T \rho_T = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

En el caso del planeta:

$$g_P = \frac{4}{3} G\pi r_P \rho_P = 5{,}4 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{r_P \rho_P}{r_T \rho_T} = 0{,}55$$

Como $r_P = r_T/3$, entonces:

$$\frac{\rho_P}{3 \cdot \rho_T} = 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_P = 1{,}65 \cdot \rho_T$$

22 **PAU** **Halla la altura sobre la superficie terrestre a la que debe colocarse un satélite artificial para que su peso se reduzca en un 20 %.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

El satélite deberá situarse en un punto tal que la intensidad del campo valga:

$$0{,}8 \cdot g = 7{,}84 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, a partir de la expresión:

$$g' = G\frac{m_T}{r^2}$$

se puede obtener r:

$$r = \sqrt{\frac{Gm_T}{g'}} = 744\,642{,}6 \text{ m} = 7\,144,\,64 \text{ km}$$

Como $r = r_T + h$, la altura a la que debe colocarse el satélite será:

$$h = r - r_T = 774{,}64 \text{ km}$$

23 **PAU** **Halla el valor que tiene el campo gravitatorio en la superficie del planeta Júpiter, teniendo en cuenta que su masa es 300 veces la de la Tierra, y su radio, 11 veces mayor que el terrestre.**

El valor del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter será:

$$g_J = G\frac{m_J}{r_J^2} = G\frac{300 \cdot m_T}{(11 \cdot r_T)^2} = 2{,}48 \cdot g_T$$

Es decir:

$$g_J = 24{,}3 \text{ m/s}^2$$

El campo gravitatorio desde un enfoque energético

24 **Si entendemos que la energía potencial es algo así como la capacidad de realizar un trabajo en función de la posición, ¿consideras acertado el criterio de que la energía potencial es cero en el infinito?**

Como la intensidad del campo, por definición, tiende a cero en el infinito, lo más lógico sería considerar el valor cero de energía potencial a distancia infinita, entendiendo que, al tender el campo a cero, también lo hace la fuerza gravitatoria capaz de realizar el trabajo, por lo que el cuerpo, a distancia infinita, perdería dicha capacidad.

25 **Si elegimos como criterio que la energía potencial es cero en la superficie terrestre, ¿cuánto valdría en el infinito?**

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar un cuerpo de masa m desde el infinito hasta la superficie de nuestro planeta viene dado, en todos los casos, por:

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -Gmm' \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$= -Gmm' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r} = G\,\frac{mm'}{r}$$

Y puesto que el trabajo equivale a la variación negativa de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

llegamos a:

$$-\Delta E_p = E_{p\infty} - E_{p\,r} = G\,\frac{mm'}{r}$$

Así pues, queda claro que si elegimos como valor cero el de la energía potencial en la superficie, el valor de la energía potencial en el infinito será:

$$E_{p\infty} = G\,\frac{mm'}{r}$$

donde r es el radio terrestre. Debe entenderse que, sea cual sea el criterio de energía potencial cero elegido, el resultado del cálculo del trabajo efectuado debe ser el mismo.

26 PAU **a) Determina la velocidad con que llega a la superficie terrestre un cuerpo que se deja caer desde una altura h no despreciable medida desde la superficie. Demuestra, asimismo, que si h es despreciable comparada con el radio terrestre se obtiene la expresión:**

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) Determina la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto que es abandonado en reposo a una altura de 5 000 km sobre ella.

a) Para efectuar el cálculo, consideraremos que la energía mecánica del cuerpo se conserva en la caída. Es decir:

$$(E_p)_r = (E_c + E_p)_{r_T}$$

Sustituyendo llegamos a:

$$-G\,\frac{m_T m}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\,\frac{m_T m}{r_T}\right)$$

Si despejamos v y desarrollamos la expresión teniendo en cuenta que $r = r_T + h$, obtenemos:

$$v = \sqrt{2Gm_T\,\frac{h}{r_T^2 + r_T h}}$$

Esta es la expresión general de la velocidad de un objeto que cae desde cualquier altura, por grande que sea, cuando llega al suelo. Observemos que, si consideramos que la altura h es pequeña comparada con el radio terrestre, podemos despreciar en el denominador $r_T h$ frente a r_T^2, con lo que nos queda la conocida expresión (válida sólo para alturas pequeñas):

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) La expresión general de la velocidad puede simplificarse del siguiente modo:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T^2}\cdot\frac{h}{1 + h/r_T}} = \sqrt{2g\,\frac{h}{1 + h/r_T}}$$

Sustituyendo el valor de la altura h, resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{5 \cdot 10^6}{1 + \dfrac{5 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6}}} = 7\,409{,}7 \text{ m/s}$$

En este cálculo no se ha tenido en cuenta la fricción del aire, que frena a todo cuerpo en su caída.

27 Si el campo en el interior de una esfera sólida homogénea varía conforme a r, ¿cómo lo hará el potencial en función de r en el interior de dicha esfera?

El potencial en el interior de la esfera variará conforme a r^2. La razón es que, si consideramos los puntos situados a lo largo de una dirección en el interior de la esfera, la relación que existe entre el campo y el potencial en los puntos de dicha recta viene dada por la expresión $g = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, por lo que V debe depender de r^2 para obtener la correspondiente variación lineal de g con r.

28 ¿Qué puede decirse del potencial gravitatorio en el interior de una corteza esférica?

Puede decirse que será constante. Usando la relación entre g y V ($g = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$), dado que $g = 0$ en el interior de una corteza esférica, el potencial ha de ser constante.

29 PAU **Tres partículas cuyas masas son 2, 4 y 0,3 kg se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 8,66 m de altura. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_p = -\frac{G}{l}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$$

donde:

$$l = \frac{h}{\text{sen } 60°} = 10 \text{ m}$$

Por tanto:

$$E_p = -6{,}53 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

30 PAU **¿A qué altura de la superficie terrestre ascendería un objeto lanzado verticalmente desde dicha superficie con una velocidad de 5 km/s?**

El objeto lanzado verticalmente alcanzará la altura máxima cuando $E_{c\,\text{final}} = 0$, por lo que:

$$E_{c\,\text{inicial}} + E_{p\,\text{inicial}} = E_{p\,\text{final}}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\,\frac{mm_T}{r_T} = -G\,\frac{mm_T}{r_T + h}$$

Simplificando, cambiando de signo e invirtiendo términos se obtiene:

$$h = \frac{v_0^2 r_T^2}{2Gm_T - v_0^2 r_T}$$

Sustituyendo los valores:

$$h = 1\,590\,460 \text{ m} = 1\,590{,}46 \text{ km}$$

Luego:

$$\frac{1}{\dfrac{2Gm_T}{r_T} - v_0^2} = \frac{r_T + h}{2Gm_T}$$

Despejando h y simplificando, resulta la siguiente expresión, que permite obtener la altura:

$$\frac{2Gm_T - r_T}{2Gm_T - v_0^2 r_T} = r_T + h$$

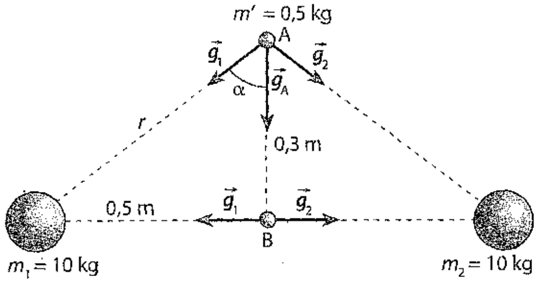
31 PAU **Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran fijas en dos puntos separados por una distancia de 1 m. Una tercera masa de 0,5 kg se abandona en un punto A equidistante de ambas y situado a 30 cm por encima del punto medio B del segmento que las une. Calcula:**

a) La aceleración de la tercera masa en los puntos A y B.

b) La velocidad que llevará cuando pase por el punto B.

c) El tipo de movimiento que describe.

La figura siguiente ilustra el enunciado del problema:



a) Según se desprende de la figura:

$$r = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,58 \text{ m}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{0,5}{0,58}$$

El ángulo α es:

$$\alpha = 59°$$

La intensidad del campo debido a m_1 en el punto A es:

$$\vec{g}_1 = G\frac{m_1}{r^2}(-\text{sen } 59° \vec{i} - \cos 59° \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

y la del originado por m_2 es:

$$\vec{g}_2 = G\frac{m_2}{r^2}(\text{sen } 59° \vec{i} - \cos 59° \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

Así pues, la intensidad del campo en el punto A, teniendo en cuenta que $m_1 = m_2$, es:

$$\vec{g}_A = -2G\frac{m_1}{r^2} \cdot \cos 59° \vec{j} = -2 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Es decir, la aceleración gravitatoria debida a m_1 y m_2 en el punto A es $2 \cdot 10^{-9}$ m/s^2.

Sin embargo, en el punto B, la aceleración gravitatoria total es cero, pues los dos campos se anulan mutuamente.

b) Por el principio de conservación de la energía mecánica, se cumplirá que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

es decir:

$$E_{c\,B} - E_{c\,A} = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

donde $E_{c\,A} = 0$.

Por supuesto, la energía potencial en A es:

$$E_{p\,A} = m'V_A = m'\left(-2G\frac{m}{r}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,A} = -1,15 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

mientras que la energía potencial en B es:

$$E_{p\,B} = m'V_B = m'\left(-2G\frac{m}{x}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,B} = -1,335 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Así pues:

$$\frac{1}{2}m'v^2 = E_{p\,A} - E_{p\,B} = 1,85 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Despejando la velocidad, se obtiene:

$$v = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

c) Las condiciones del movimiento en el que la v_0 es igual a cero en el punto A y distinta de cero en el punto B, y la aceleración es distinta de cero en el punto A y cero en el punto B, para, a continuación, invertir su sentido.

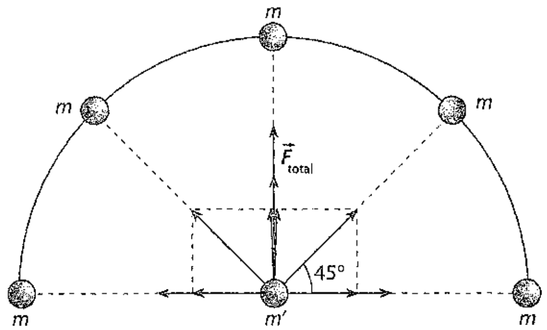
Estas condiciones, permiten predecir que el movimiento de la partícula será oscilatorio y que tendrá como punto de equilibrio el punto B.

32 **PAU** **Cinco masas de 4 kg cada una están en posiciones equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de 80 cm de radio. Una masa de 0,5 kg se sitúa en el centro de curvatura de dicho arco. Determina:**

a) **La fuerza que actúa sobre dicha masa.**

b) **La energía potencial de dicha masa en ese punto.**

a) La siguiente figura ilustra el enunciado de este problema:



Al ser iguales las cinco masas, la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F}_{total} = (F + 2 \cdot F \text{ sen } 45°)\vec{j} \text{ N}$$

Es decir:

$$\vec{F}_{total} = \left[G\frac{mm'}{r^2}(1 + \sqrt{2})\right]\vec{j} \text{ N}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$\vec{F}_{total} = 5,02 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N}$$

b) La energía potencial de la masa m' en el punto indicado es:

$$E_p = m'V = m'\left(-G\frac{5 \cdot m}{r}\right) = -8,34 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Movimiento de cuerpos en campos gravitatorios

33 **Un satélite artificial en movimiento circular alrededor del planeta O es acelerado cuando pasa por el punto P. Razona cuál de las siguientes figuras refleja la nueva órbita en la que se moverá el satélite.**

A la vista de las posibles órbitas, el satélite sigue teniendo energía total negativa tras pasar por P, es decir, describe una elipse. Si suponemos que, tras la aceleración, el satélite sigue sujeto exclusivamente a la atracción gravitatoria que ejerce el planeta O, este deberá estar situado en uno de los focos de la elipse que describe la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria válida será la ***a***.

34 **Un objeto celeste que proviene del exterior del sistema solar pasa muy cerca de la atmósfera terrestre con una velocidad de 15 km/s. ¿Quedará fijado en una órbita alrededor de la Tierra? ¿Quedará capturado en el sistema solar?**

El objeto no quedará fijado en ninguna órbita alrededor de la Tierra, dado que su velocidad es superior a la de escape terrestre. Sin embargo, sí quedará atrapado en el sistema solar, pues su velocidad es inferior a la que se requiere para escapar del sistema solar. No se consideran aquí posibles asistencias gravitatorias que podrían catapultarlo fuera del sistema.

35 **Si el radio lunar es 0,27 veces el terrestre y la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, ¿cuál es la velocidad de escape de la superficie lunar? ¿Cuánto valdrá la energía de ligadura lunar por kilogramo de masa?**

Considerando en la expresión **3.12** la masa y el radio lunar en comparación con los datos terrestres, podemos concluir que:

$$v_{\text{escape lunar}} = 0,21 \cdot v_{\text{escape terrestre}} = 2,35 \text{ km/s}$$

Por otra parte, sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión de la energía de ligadura, comprobamos que en el caso lunar vale:

$$E_{\text{ligadura lunar}}/\text{kg} = 0{,}044 \cdot E_{\text{ligadura terrestre}} = 2{,}76 \cdot 10^6 \text{ J}$$

36 **¿Puede orbitar un satélite en torno a la Tierra sin que su plano orbital contenga en su interior el centro terrestre?**

No puede orbitar en esas condiciones. La fuerza central que mantiene al satélite en órbita ha de estar dirigida hacia el centro terrestre, lo que obliga a que la Tierra esté contenida en el plan orbital.

D37 **PAU** **Desde la superficie terrestre se lanza un satélite; al llegar a la máxima altura *r* medida desde el centro terrestre, se le comunica una velocidad horizontal. ¿Qué ocurrirá en cada uno de los siguientes casos?**

a) **La velocidad comunicada es** $v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$.

b) **La velocidad comunicada está comprendida entre v_1 y $\sqrt{2}v_1$.**

c) **La velocidad comunicada es mayor o igual a $\sqrt{2}v_1$.**

a) La energía mecánica del satélite tras proporcionarle la velocidad horizontal es:

$$E = \frac{Gm_Tm}{r} + \frac{1}{2}m\frac{Gm_T}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Gm_Tm}{r}$$

Se trata de una velocidad negativa, luego el satélite describirá una órbita cerrada. Además, según se ha visto en el subepígrafe 5.3, la velocidad suministrada es la que da lugar a una órbita circular.

b) En este caso, la energía sigue siendo negativa, pero mayor que la requerida para una órbita circular. Por tanto, la órbita será elíptica.

c) En ese caso, el cuerpo abandona el campo gravitatorio terrestre, siguiendo una trayectoria parabólica (si $v = \sqrt{2}v_1$) o hiperbólica (si $v > \sqrt{2}v_1$).

38 **PAU** **La distancia de la Tierra al Sol es de 152 100 000 km en el afelio, mientras que en el perihelio es de 147 100 000 km. Si la velocidad orbital de la Tierra es de 30 270 m/s en el perihelio, determina, por conservación de la energía mecánica, cuál será su velocidad orbital en el afelio.**

La energía mecánica en el perihelio es:

$$E_{ph} = E_{c\,ph} + E_{p\,ph} = \frac{1}{2}m_Tv_{ph}^2 + \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{ph}}\right)$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{ph} = -2{,}69 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

La energía mecánica se conserva, luego:

$$E_{c\,af} + E_{p\,af} = E_{ph}$$

Por tanto:

$$E_{c\,af} = E_{ph} - E_{p\,af} = E_{ph} - \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{af}}\right)$$

Sustituyendo los datos, se obtiene:

$$E_{c\,af} = 2{,}57 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

Como:

$$v_{af} = \sqrt{\frac{2E_{c\,af}}{m_T}}$$

El resultado será:

$$v_{af} = 29\,247{,}5 \text{ m/s}$$

39 **Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que su acción gravitatoria sea tan intensa que ni la luz tiene suficiente velocidad de escape para salir de él. A la distancia crítica en la que este hecho sucede (medida desde el centro del agujero) se la denomina «radio de Schwarzchild». ¿Cuál sería este radio para un agujero de diez masas solares?**

En el límite del radio de Schwarzchild, la velocidad de escape es *c*, por lo que:

$$c = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \Rightarrow r = \frac{2Gm}{c^2}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$r = 29\,644 \text{ m} = 29{,}64 \text{ km}$$

40 **PAU** **Determina la velocidad de escape de la superficie de un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, y cuya aceleración gravitatoria en la superficie es de 5,4 m/s².**

Datos: $R = 6\,370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg²; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg

La velocidad de escape será:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2Gm}{r^2}\cdot r} = \sqrt{2g'r}$$

donde $r = r_T/3$, por lo que:

$$v = \sqrt{2/3\, g'r_T} = 4\,800 \text{ m/s}$$

Para ello, se ha considerado que $r_T = 6\,400$ km.

D41 **PAU** **Una sonda espacial de 1 000 kg se halla en una órbita circular de radio 2*R* alrededor de la Tierra. ¿Cuánta energía se requiere para transferir la sonda hasta otra órbita circular de radio 3*R*? Analiza los cambios en la energía cinética, potencial y total.**

La energía potencial viene dada por la expresión general:

$$E_p = -\frac{Gm_Tm}{r}$$

Si las órbitas son circulares, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_Tm}{r^2}$$

Por tanto, la energía cinética valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_Tm}{2r}$$

En ambas expresiones, *r* es el radio de la órbita. Para la primera órbita, obtenemos:

$$E_{p1} = -\frac{Gm_Tm}{2R}; E_{c1} = \frac{Gm_Tm}{4R} \Rightarrow E_{\text{total 1}} = -\frac{Gm_Tm}{4R}$$

Mientras que para la segunda órbita:

$$E_{p2} = -\frac{Gm_Tm}{3R}; E_{c2} = \frac{Gm_Tm}{6R} \Rightarrow E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_Tm}{6R}$$

La energía necesaria para transferir la sonda de una órbita a otra será la diferencia entre estas dos energías totales:

$$\Delta E = E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_Tm}{R}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Gm_Tm}{12R}$$

Sustituyendo los valores, esta energía resulta ser de $5{,}24 \cdot 10^9$ J.

Tanto la energía potencial como la cinética en la segunda órbita tienen valores que resultan de multiplicar por 2/3 los de la primera órbita. Sin embargo, en el caso de la energía potencial, esta aparente reducción es en realidad un aumento, al tratarse de una energía negativa. Del mismo modo, la energía total de la segunda órbita es 2/3 de la energía total de la primera órbita. Sin embargo, al tratarse de una energía negativa, en realidad se ha producido un aumento de energía, como puede verse en el signo de ΔE, positivo.

42 **PAU Un satélite artificial de 1 200 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 2 300 km sobre la superficie terrestre. Determina su momento angular con respecto al centro terrestre.**

El momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Luego su módulo será $L = mrv$, donde r es el radio de la órbita: $r = R + h = 8{,}67 \cdot 10^6$ m. Sabemos que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_Tm}{r^2} = v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = 6\,794 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo del momento angular, resulta:

$$L = mrv = 7{,}07 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Lo calculado es el módulo del momento angular. La dirección del vector $\vec{L}$ será perpendicular al plano de la órbita, mientras que el sentido viene determinado por la regla de la mano derecha.

D.43 **PAU Las grandes estrellas (de masas superiores a 1,4 veces la solar) acaban el ciclo de sus vidas colapsándose o aplastándose gravitacionalmente, formando diminutas estrellas de neutrones de unos 40 km de diámetro. Supón que eso pudiera sucederle al Sol, que tiene 1,39 · 10⁹ m de diámetro y que gira una vez cada 27 días.**

a) **¿Cuál sería la nueva velocidad angular de «Sol neutrónico», expresada en vueltas o revoluciones por segundo?**

b) **¿Cuál sería la gravedad superficial en la estrella de neutrones formada?**

c) **¿Cuál sería la velocidad de escape de su superficie?**

Nota: considera que la masa del Sol sigue siendo la misma durante el proceso.

a) En el proceso de colapso de las estrellas de gran tamaño, el momento angular se mantiene constante al no existir fuerzas externas capaces de modificarlo. Sabemos que $L = I\omega$.

El momento de inercia para una esfera maciza que gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Puesto que el momento angular se conserva:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

En esta expresión, conocemos R_1, R_2 y la velocidad angular ω_1, que podemos expresar como $2\pi/27$ rad/día.

Sustituyendo los datos, resulta que $\omega_2 = 2{,}81 \cdot 10^8$ rad/día, lo cual corresponde a un período $T = 2{,}236 \cdot 10^{-8}$ días $\approx$ $\approx 0{,}002$ s.

Es decir, el período de rotación resulta ser de unas dos milésimas de segundo.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella colapsada será:

$$g = G\frac{M_{Sol}}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{1{,}98 \cdot 10^{30}}{(2 \cdot 10^4)} = 3{,}3 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$$

c) La velocidad de escape viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R_{Sol\ neutrónico}}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una velocidad de escape de $1{,}15 \cdot 10^8$ m/s.

4 El campo eléctrico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 106)

1. ¿Cuáles son las características de la interacción electrostática? ¿Qué similitudes y diferencias existen entre esta interacción y la gravitatoria?

La interacción electrostática es la que se ejerce entre cargas en reposo. Puede ser atractiva o repulsiva, si la interacción es entre cargas de distinto signo o del mismo signo, respectivamente.

Igual que la interacción gravitatoria, la electrostática varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia entre cargas.

La fuerza que describe tal interacción es central y conservativa. Pero al contrario que la interacción gravitatoria, el valor de la fuerza electrostática depende del medio.

La interacción gravitatoria solo es atractiva entre dos masas.

2. ¿Qué propiedades tiene la carga eléctrica? ¿Por qué razón se habla de dos tipos de carga eléctrica?

- La carga eléctrica está cuantificada y su unidad más elemental es la carga del electrón.
- La carga eléctrica se conserva en cualquier proceso dado en un sistema aislado.
- La fuerza entre dos cargas varía con el inverso del cuadrado.

Se habla de dos tipos de carga eléctrica (positiva y negativa) porque hay dos clases de electrización (atractiva y repulsiva).

3. ¿Puede una partícula cargada permanecer en reposo en el seno de un campo eléctrico?

Si la carga está sometida a la acción exclusiva de un campo eléctrico, nunca podrá permanecer en reposo.

4. Una carga de un culombio, ¿es una unidad grande o pequeña?

El culombio es una unidad muy grande, por lo cual se suelen utilizar frecuentemente submúltiplos y corresponde a $6{,}24 \cdot 10^{18}$ electrones.

5. Al alejar dos cargas eléctricas, ¿aumenta siempre la energía potencial del sistema?

Depende del signo de las cargas, de forma que si son de signo contrario estamos disminuyendo la energía potencial del sistema, sin embargo si son del mismo signo lo estamos aumentando.

Actividades (páginas 107/126)

1 Determina la carga correspondiente a 1 mol de electrones. Dicha carga se conoce comúnmente como la unidad de Faraday.

La carga correspondiente a un mol de electrones (N electrones) es:

$$Q = Ne = 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) = -96\ 352\ \text{C}$$

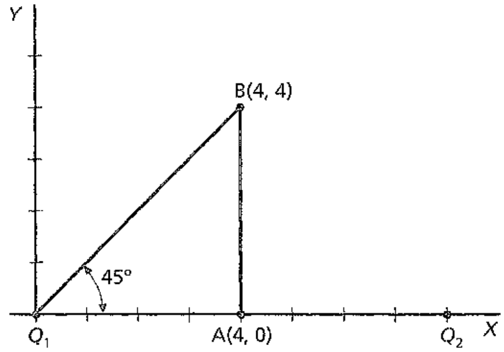
2 Determina la carga correspondiente a un mol de los siguientes iones: ion cloruro, ion sodio, ion hierro(III) e ion carbonato.

La carga de 1 mol de iones cloruro es $-96\ 352$ C; la correspondiente a un mol de iones sodio vale $+96\ 352$ C; la de 1 mol de iones hierro (III), $+289\ 056$ C (es decir, le corresponden $3 \cdot 96\ 352$ C), mientras que la de 1 mol de iones carbonato es $-192\ 704$ C ($2 \cdot 96\ 352$ C).

3 PAU Dos cargas, Q_1 y Q_2, de $+10$ nC se encuentran en los puntos (0, 0) y (8, 0) de un sistema de referencia XY medido en metros. Determina la fuerza neta que ambas cargas ejercen sobre una tercera, Q_3, de $+5$ nC cuando esta se encuentra situada en los puntos:

a) **A (4, 0)** ***b)*** **B (4, 4)**

La situación descrita se muestra en el siguiente dibujo:



a) El punto A es el punto central del segmento que une Q_1 y Q_2. Al ser iguales ambas cargas, por simetría se concluye que el campo en dicho punto será nulo.

b) Por otro lado, el punto B pertenece a la mediatriz del segmento que une Q_1 y Q_2. Por simetría se concluye que la componente X de la fuerza neta será nula, pues se compensan las fuerzas ejercidas por las dos cargas.

Por su parte, la componente Y de la fuerza ejercida por ambas cargas será la misma, y la resultante será, por tanto, el doble:

$$\vec{F}_{1+2} = 2k\frac{Q_1Q_3}{r^2}\,\text{sen}\,45°\,\vec{j} = 18 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{32}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j} =$$
$$= 1{,}99 \cdot 10^{-8}\,\vec{j}\ \text{N}$$

4 PAU Se aplica un campo de 500 N/C a una disolución de cloruro de sodio. Compara las aceleraciones que adquieren los iones cloruro y los iones sodio. Ten en cuenta que la masa atómica relativa del cloro es 35,5, y la del sodio, 23.

Puesto que la fuerza que actúa sobre los iones es la debida al campo, se cumplirá que:

$$ma = QE \Rightarrow a = \frac{QE}{m}$$

Así pues, el valor y el sentido de la aceleración dependen de la relación Q/m y del signo de Q. Si consideramos 1 mol de iones cloruro y sodio, sus masas serán, respectivamente:

$$m_{Cl^-} = 0{,}0355\ \text{kg/mol}$$
$$m_{Na^+} = 0{,}023\ \text{kg/mol}$$

Sus cargas son $-96\,352$ C, en el primero de los casos, y $+96\,352$ C, en el segundo; por tanto:

$$a_{Cl^-} = \frac{-96\,352\ \text{C}}{0{,}0355\ \text{kg}} \cdot 500\ \text{N/C} = -1{,}357 \cdot 10^9\ \text{m/s}^2$$
$$a_{Na^+} = \frac{+96\,352\ \text{C}}{0{,}023\ \text{kg}} \cdot 500\ \text{N/C} = 2{,}094 \cdot 10^9\ \text{m/s}^2$$

5 PAU Un electrón y un protón son abandonados en reposo en una región donde el campo eléctrico es $\vec{E} = 200\vec{i}$ N/C. Determina:

a) **La fuerza (en notación vectorial) que actúa sobre cada partícula.**

b) **La aceleración que adquieren.**

c) **La distancia que habrán recorrido en 1 s.**

a) La fuerza que actúa sobre cada partícula es:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Sustituyendo los valores, en el caso del protón es:

$$\vec{F}_p = +3{,}2 \cdot 10^{-17}\,\vec{i}\ \text{N}$$

y en el del electrón:

$$\vec{F}_e = -3{,}2 \cdot 10^{-17}\,\vec{i}\ \text{N}$$

b) Las aceleraciones que adquieren estas partículas, dadas por $a = F/m$, serán:

$$\vec{a}_p = +1{,}91 \cdot 10^{10}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$
$$\vec{a}_e = -3{,}5 \cdot 10^{13}\,\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

c) Aplicando la expresión $x = 1/2\ at^2$, se obtiene para $t = 10^{-6}$ s:

$$x_p = 0{,}009\,55\ \text{m}$$
$$x_e = 17{,}5\ \text{m (en sentido opuesto)}$$

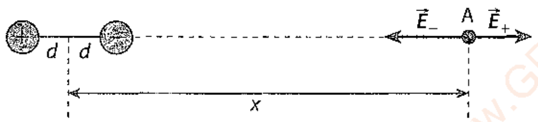
6 **Determina el campo eléctrico total en el punto P de la figura 4.11 de la página 112 del *Libro del alumno*.**

El campo total será:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_0 + \vec{E}_3 + \vec{E}_6 =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{+20 \cdot 10^{-6}}{0{,}09^2} - \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}06^2} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}03^2}\right)\vec{i} = -3{,}53 \cdot 10^7\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

7 **PAU** **Determina el valor y el sentido del campo creado por el dipolo de la aplicación anterior en un punto A que se halla a una distancia x del origen en el semieje X^+. Aplica la aproximación $x >> d$.**

La siguiente representación gráfica ilustra la situación planteada:



Como puede observarse:

$$E_+ = k\frac{Q}{(x+d)^2};\ E_- = k\frac{-Q}{(x-d)^2}$$

Por tanto, el campo total en el punto A es:

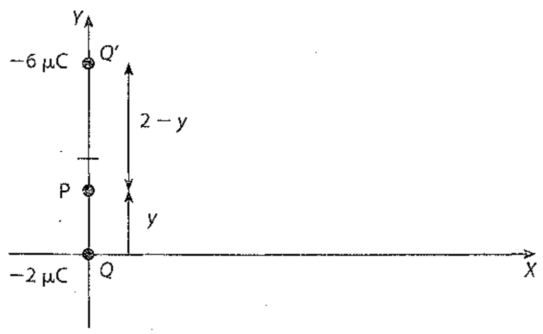
$$E_{total} = kQ\left(\frac{1}{(x+d)^2} - \frac{1}{(x-d)^2}\right) \cong$$
$$\cong -kQ\frac{4xd}{x^4} = -kQ\frac{4d}{x^3}$$

Como $2dQ = \mu$, podemos escribir:

$$E_{total} = -k\frac{2\mu}{x^3}$$

8 **PAU** **Una carga de $-2\ \mu$C se encuentra en el origen, mientras que otra de $-6\ \mu$C se halla en el punto (0, 2). ¿En qué punto es nulo el campo eléctrico? ¿Y si las cargas fuesen de distinto signo?**

Representemos gráficamente el enunciado:



Como se observa en la figura, el campo será nulo en un punto P donde se cumpla que:

$$k\frac{Q}{y^2} = k\frac{Q'}{(2-y)^2}$$

Es decir:

$$\frac{2}{y^2} = \frac{6}{(2-y)^2}$$

Resolviendo *y*, obtenemos que $y = 0{,}73$, luego las coordenadas del punto P son (0, 0,73).

Si las cargas fuesen de signos opuestos, el punto P estaría en el semieje negativo de las *Y*.

En él se cumplirá que:

$$\frac{2}{y^2} = \frac{6}{(2+y)^2}$$

Resolviendo *y*, obtenemos que las coordenadas del punto P son (0, −0,73).

9 **¿Podría una partícula cargada permanecer en reposo en algún punto del campo originado por dos cargas iguales del mismo signo? ¿Y si las cargas iguales fuesen de distinto signo?**

Como se desprende de las representaciones gráficas del campo, una partícula podría permanecer en reposo justo en el punto medio entre dos cargas iguales del mismo signo, donde $\vec{E}_{total} = 0$.

Por el contrario, si las cargas son de distinto signo, no hay ningún punto a distancia finita donde el campo sea nulo, por lo que la partícula no puede estar en reposo.

10 **¿Pueden cortarse dos líneas de fuerza del campo eléctrico? ¿Por qué?**

No. Las líneas de fuerza son tangentes en cada punto al vector campo $\vec{E}$, y este vector es único para cada punto del espacio. Si dos líneas de fuerza se cortaran, en el punto de corte habría dos posibles valores del campo, lo cual es imposible.

11 **Al acercar dos cargas de distinto signo, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? ¿Por qué?**

La energía potencial asociada a dos cargas de distinto signo es negativa y viene dada por la expresión:

$$E_p(r) = -k\frac{QQ'}{r}$$

Como se ve, la energía potencial se hace cada vez más negativo cuando las cargas se aproximan, pues la distancia entre ambas se reduce. Por consiguiente, la energía potencial disminuye.

12 **Tenemos dos cargas de $+3\ \mu$C y $-2\ \mu$C inicialmente separadas 30 cm. Calcula el trabajo para acercarlas 15 cm. Explica el significado del signo del trabajo.**

El trabajo para acercar dos cargas de distinto signo viene dado por la expresión:

$$W = -\Delta E_p = E_p(r = 0{,}3m) - E_p(r = 0{,}15m)$$

Calculamos por separado las energías potenciales del sistema cuando están separados 30 cm y cuando están separados 15 cm tenemos:

$$E_p(r = 0{,}3m) = k\frac{QQ'}{r} = 9 \cdot 10^9\frac{+3\mu C \cdot -2\mu C}{0{,}30} = -0{,}18J$$
$$E_p(r = 0{,}15m) = k\frac{QQ'}{r} = 9 \cdot 10^9\frac{+3\mu C \cdot -2\mu C}{0{,}15} = -0{,}36J$$
$$W = -\Delta E_p = -0{,}18J - (-0{,}36J) = 0{,}18J$$

El signo del trabajo que nos ha dado el resultado es positivo y esto explica que es el campo el que realiza el trabajo a costa de su energía potencial almacenada debido al carácter atractivo de la interacción.

13 **¿Podría ser cero la energía potencial de un sistema de partículas que se encontraran a distancias finitas?**

Dado que el signo de la energía potencial electrostática depende del signo de las cargas, sí podría ser cero la energía potencial total del sistema. Este sería el caso, por ejemplo, de una disposición de cargas $+Q$, $-xQ$, $+yQ$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero, siempre que se cumpla que:

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Es decir, la energía potencial de un sistema de cargas $+Q$, $-0{,}5 \cdot Q$, $+Q$, o bien $+Q$, $-3 \cdot Q$, $-1{,}5 \cdot Q$, dispuestas en los vértices de un triángulo equilátero sería nula.

14 **PAU** **¿Cuánto vale la energía potencial del sistema de la figura 4.16? Razona el significado físico que se deriva del signo del resultado.**

La E_p del sistema será:

$$E_p = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} - \frac{Q_1Q_4}{r_{14}} - \frac{Q_2Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_2Q_4}{r_{24}} - \frac{Q_3Q_4}{r_{34}}\right)$$

Resumiendo, obtenemos:

$$E_p = k\left(-\frac{4}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \cdot 4 \cdot 10^{-12} = -0{,}093 \text{ J}$$

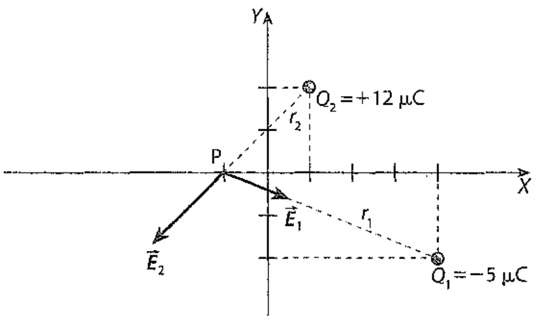
Al ser negativo el signo, es el campo eléctrico el que realiza el trabajo.

15 **Que el potencial en un punto es cero, ¿significa que no existen cargas en las proximidades de dicho punto?**

Como consecuencia del principio de superposición, el potencial en un punto puede ser cero si es debido a dos cargas de distinto signo. Por tanto, no hay necesariamente ausencia de cargas.

16 **PAU** **Una carga puntual de $-5 \cdot 10^{-6}$ C está localizada en el punto de coordenadas ($x = 4$ m, $y = -2$ m), mientras que una segunda partícula de $12 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en el punto ($x = 1$ m, $y = 2$ m). Calcula el potencial en el punto ($x = -1$ m, $y = 0$), así como la magnitud y dirección del campo eléctrico en dicho punto.**

Representamos el enunciado gráficamente:



Como puede observarse:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \text{ m}$$

Por tanto, el potencial total en el punto P será:

$$V = V_1 + V_2 =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{29}} + \frac{12 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{8}}\right) = 29\,827{,}5 \text{ V}$$

El valor del campo en el punto P debido a Q_1 es:

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2} = 1\,551{,}7 \text{ N/C}$$

Su dirección, como se desprende de la figura, es de $-21{,}8°$ bajo el eje X. Así pues:

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j} = 1\,440{,}7\vec{i} - 576{,}2\vec{j} \text{ N/C}$$

El valor de E_2 en el punto P es:

$$E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^2} = 13\,500 \text{ N/C}$$

y su dirección es de 225° con el semieje OX^+; por lo que:

$$\vec{E}_2 = -9\,546\vec{i} - 9\,546\vec{j} \text{ N/C}$$

De este modo, el campo total será:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -8\,105{,}3\vec{i} - 10\,122{,}2\vec{j} \text{ N/C}$$

donde $\text{tg}\ \theta = E_y/E_x$ y forma, pues, un ángulo de 231,3° con respecto a OX^+.

17 **Utiliza la expresión 4.18 para deducir las ecuaciones del potencial en los puntos A y B si el campo es originado por una carga puntual positiva.**

Si partimos de la expresión **4.18**, obtenemos lo siguiente:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B k\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

$$= -kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = k\frac{Q}{r_B} - k\frac{Q}{r_A}$$

Por tanto:

$$V_B = k\frac{Q}{r_B} \quad \text{y} \quad V_A = k\frac{Q}{r_A}$$

18 **Tres puntos (A, B y C) están situados en la misma recta y tienen un potencial de 10, 20 y 30 V, respectivamente. Si dejamos en libertad un electrón en el punto B, ¿a dónde se desplazará, hacia el punto A o hacia el C? ¿Por qué?**

El electrón se acelerará hacia el punto de mayor potencial, pues:

$$W = \Delta E_c = -e\,(V_1 - V_2)$$

Así, V_1 debe estar a menor potencial que el punto 2, hacia donde se dirige. Por consiguiente, se moverá hacia C.

Se llega a la misma conclusión si estudiamos la energía potencial. Al tener el electrón una carga negativa, la energía potencial en los tres puntos (A, B y C) será también negativa. Siempre que se suelta una partícula en el seno de un campo, dicha partícula tiende a desplazarse por efecto del campo en la dirección en que disminuye la energía potencial. En este caso, la energía potencial disminuye si la partícula se aproxima a C, luego esa será la dirección que tome el electrón.

19 **Dos cargas testigo ($+Q'$ y $-Q'$) son lanzadas desde un punto A con velocidad $v_0\vec{i}$ en el seno de un campo eléctrico $E\vec{i}$. Expón lo que ocurrirá con su energía cinética a medida que se mueven en el campo.**

El trabajo que realiza el campo para desplazar las dos cargas una distancia d es:

$$W = \Delta E_c = Q'Ed$$

Por tanto, si la carga es negativa, su energía cinética disminuirá, mientras que aumentará si es positiva.

20 **¿Cómo son las superficies equipotenciales en el campo eléctrico entre dos placas planas paralelas de signo opuesto?**

Las superficies equipotenciales son planas y paralelas a las placas, pues todos los puntos situados a una misma distancia, d, de las placas se encuentran al mismo potencial.

21 **PAU** **Una carga puntual Q cuyo valor es 10 μC se encuentra situada en el punto (1), de coordenadas ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$), en el seno de un campo eléctrico uniforme de valor 500 V/m. Esta carga ha sido desplazada, a velocidad constante, desde el punto (1) al punto (2), de coordenadas (x_2 = 4 cm, y_2 = 2 cm), y desde aquí al punto (3), de coordenadas (x_3 = 6 cm, y_3 = −1 cm), como se ilustra en la figura 4.20. Calcula el trabajo realizado por el campo eléctrico en cada uno de los dos desplazamientos.**

Puesto que el campo tiene la dirección del eje X, no realiza trabajo en los desplazamientos en la dirección del eje Y. Por tanto:

$$W_{12} = QE\,(x_2 - x_1) = 0{,}02\ \text{J}$$
$$W_{23} = QE\,(x_3 - x_2) = 0{,}01\ \text{J}$$

de donde:

$$W_{total} = 0{,}03\ \text{J}$$

22 **Deduce la expresión del campo eléctrico originado por una carga puntual a partir de la expresión de su potencial en un punto y comprueba que el resultado coincide con el obtenido en el epígrafe 3.1.**

Si consideramos un punto del eje X y la carga situada en el origen:

$$V = k\frac{Q}{x}$$

Por tanto:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = k\frac{Q}{x^2}\vec{i}$$

Esta expresión puede extenderse a cualquier dirección del espacio, pues la elección del eje X es arbitraria. De aquí se concluye que la fórmula vectorial del campo es de carácter radial, con lo que se llega a la expresión **4.3**.

23 **Si el potencial en cierta región es constante, ¿qué podemos decir del campo eléctrico en esa región?**

El campo eléctrico en una región donde el potencial es constante es nulo, pues la derivada de una constante es cero y $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

24 **PAU** **El potencial a lo largo del eje X varía según la expresión $V(x) = x^2 + 2x - 8$ V.**

a) **Representa la gráfica del potencial.**

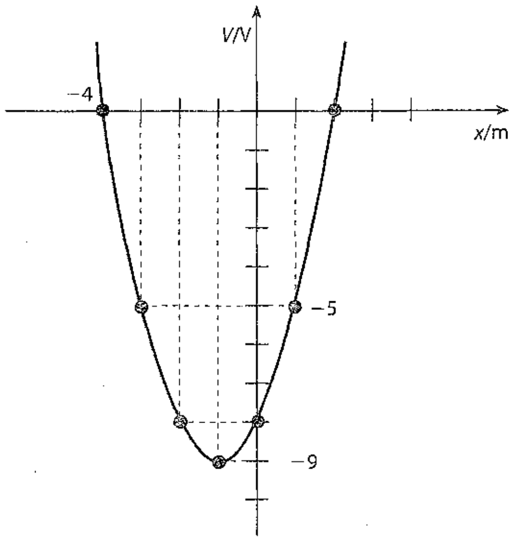
b) **Deduce la expresión del campo eléctrico en cualquier punto.**

c) **Calcula y representa el vector $\vec{E}$ en los puntos $(-4, 0)$ y $(0, 0)$.**

a) Dando valores a x, obtenemos los de V:

x/m	−4	−3	−2	−1	0	1	2
V/V	0	−5	−8	−9	−8	−5	0

Luego la representación gráfica es:



b) Puesto que V solo depende de x:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = -(2x + 2)\vec{i}\ \text{N/C}$$

c) El valor del campo en los puntos $(-4, 0)$ y $(0, 0)$ es, respectivamente:

$$\vec{E}(-4, 0) = 6\vec{i}\ \text{N/C}$$
$$\vec{E}(0, 0) = -2\vec{i}\ \text{N/C}$$

Como se ve, se trata de sendos vectores en la dirección del eje X, positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Esto se debe a que el campo eléctrico es positivo cuando el potencial decrece y negativo cuando crece, como se deduce de la expresión matemática que relaciona ambas magnitudes.

25 **PAU** **Un protón es abandonado en reposo en una región donde existe un campo eléctrico uniforme de 400 V/m. ¿Cuál será su velocidad después de recorrer 30 cm?**

La aceleración que experimentará el protón es $a = QE/m$. Puesto que se trata de un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la expresión que relaciona velocidad con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

En nuestro caso, la velocidad inicial es nula. Sustituyendo el valor de la aceleración, tenemos:

$$v^2 = 2\frac{QE}{m}s \Rightarrow \sqrt{2\frac{QE}{m}s}$$

Sustituyendo los datos del enunciado, se obtiene que $v = 1{,}52 \cdot 10^5$ m/s.

26 **PAU** **Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -2\,000\ \vec{j}$ N/C con una velocidad $\vec{v}_0 = 10^6\,\vec{i}$ m/s.**

a) **Compara la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él.**

b) **Determina la desviación que sufre el electrón después de haber recorrido 5 cm en la dirección X, indicando la dirección y el sentido de dicha desviación.**

Datos: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) El módulo de la fuerza eléctrica que experimenta el electrón es $F_{eléctrica} = QE$, mientras que el módulo de la fuerza gravitatoria es $F_{gravitatoria} = mg$. Veamos el valor de cada una de ellas:

$$F_{eléctrica} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000 = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$
$$F_{gravitatoria} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8 = 8{,}9 \cdot 10^{-30}\ \text{N}$$

Como se ve, el valor de la fuerza gravitatoria es despreciable frente al de la fuerza eléctrica.

b) Al entrar en el campo eléctrico, el electrón sufre una desviación parabólica tal como se observa en la figura 4.25. La componente X de la velocidad se mantiene constante e igual al valor inicial, mientras que en la dirección Y el electrón se ve impulsado por una fuerza vertical y hacia arriba:

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-2\,000\vec{j}) = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\vec{j}\ \text{N}$$

Puesto que la velocidad horizontal es constante, podemos determinar el tiempo que tarda el electrón en recorrer los 5 cm:

$$t = x/v_0 = 0{,}05/10^6 = 5 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

En este tiempo, el electrón se ha desviado una distancia y que viene dada por la conocida expresión de movimiento uniformemente acelerado:

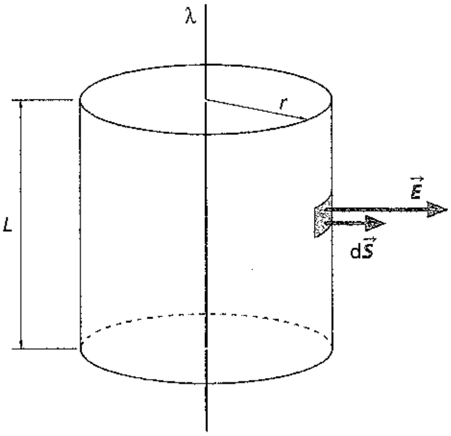
$$y = \frac{1}{2}at^2$$

La aceleración que experimenta dicho electrón es $a = F_{eléctrica}/m = 3{,}52 \cdot 10^{14}$ m/s². Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3{,}52 \cdot 10^{14} \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2 = 0{,}44\ \text{m} = 44\ \text{cm}$$

27 **Un hilo conductor rectilíneo y muy largo tiene una densidad lineal de carga uniforme λ. Determina el valor del campo eléctrico que origina en un punto P (alejado de los extremos) que se encuentra a una distancia *r* del hilo. (Sugerencia: considera como superficie gaussiana un cilindro de radio *r* y altura *L* cuyo eje principal sea el hilo conductor.)**

Para aplicar el teorema de Gauss, debemos construir una superficie imaginaria, que en este caso, por simetría, se trata de un cilindro:



Por simetría, sabemos que el campo eléctrico debe tener dirección radial perpendicular al hilo conductor.

El flujo del campo a través de la superficie cerrada del dibujo será la suma del flujo a través de la superficie lateral más el flujo a través de la «tapa» y el «fondo»:

$$\Phi = \Phi_{\text{lateral}} + \Phi_{\text{tapa y fondo}}$$

El flujo a través de la tapa y el fondo es nulo, pues el vector superficie en esas caras es perpendicular al campo, con lo que su producto vectorial es nulo; es decir:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\text{tapa/fondo}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

En la cara lateral cilíndrica, el vector campo es paralelo al vector $d\vec{S}$ en todo punto.

Además, el campo es idéntico en todos los puntos de dicha cara, pues todos están a la misma distancia del hilo.

Teniendo esto en cuenta, podemos simplificar la expresión del flujo:

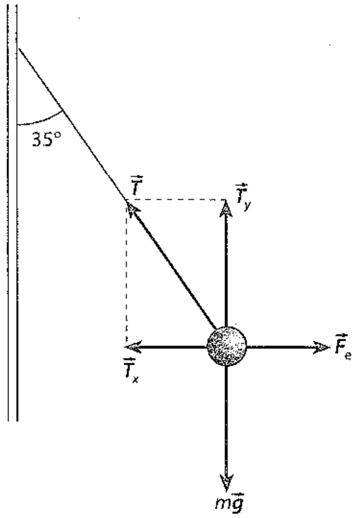
$$\Phi = E\oint d\vec{S} = E\cdot S_{\text{lateral}} = E\cdot 2\pi rL$$

Por el teorema de Gauss sabemos que el flujo eléctrico es el cociente entre la carga encerrada en el cilindro y la constante ε_o. La carga encerrada es el producto de la densidad lineal de carga por la longitud del cilindro, *L*, luego:

$$\Phi = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} = 2\pi rLE \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

28 PAU **Si se coloca de forma vertical una superficie plana cargada uniformemente y se cuelga de ella, mediante un hilo de seda de masa despreciable, una esfera de 2 g con una carga de 4 nC, observamos que el ángulo que forma el hilo es de 35°. ¿Cuál es la densidad superficial de carga de dicha superficie?**

La representación gráfica de esta cuestión es la siguiente:



Como se observa en la figura:

$$T \operatorname{sen} 35° = Q'E$$
$$T \cos 35° = mg$$

de donde:

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{Q'E}{mg}$$

Como, a su vez, el campo eléctrico uniforme debido a una superficie plana cargada uniformemente es:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

entonces:

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{Q'\sigma}{2\varepsilon_o mg}$$

Despejando σ, obtenemos:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_o mg \operatorname{tg} 35°}{Q'}$$

y sustituyendo los datos:

$$\sigma = 6\cdot 10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

Actividades finales (páginas 130/131)

Guía de repaso

1 **Elabora un esquema con las analogías y las diferencias existentes entre el campo eléctrico y el campo gravitatorio.**

Analogías:

- Ambos campos son conservativos.
- Las dos interacciones varían conforme al inverso del cuadrado de la distancia.
- En ambos casos puede definirse el potencial en un punto.
- Las expresiones de la intensidad y el potencial, del mismo modo que la relación entre ambas magnitudes, son similares.
- En los dos casos puede asociarse una energía potencial al sistema de masas o cargas en función de sus posiciones.

Diferencias:

- La interacción gravitatoria es siempre atractiva, mientras que la electrostática puede ser atractiva o repulsiva.
- La constante de gravitación, *G*, es universal y no depende del medio; por el contrario, la constante *k* de la ley de Coulomb y, en consecuencia, la intensidad de la interacción, dependen del medio.
- Considerando como valor cero de energía potencial el correspondiente a una distancia infinita, la energía potencial

gravitatoria es siempre negativa, mientras que la energía potencial electrostática puede ser negativa (cargas de signo opuesto) o positiva (cargas de igual signo).

2 **¿Cuáles son las propiedades de las cargas eléctricas?**

- La carga eléctrica está cuantizada y su unidad más elemental es la carga del electrón.
- Existen dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa.
- La carga eléctrica se conserva en cualquier proceso que tenga lugar en un sistema aislado.

3 **Señala analogías y diferencias entre la ley de Coulomb y la de gravitación de Newton.**

La expresión de ambas es similar: la fuerza eléctrica y la gravitatoria dependen del inverso del cuadrado de la distancia y son directamente proporcionales al producto de la correspondiente propiedad de la materia (cargas o masas). La fuerza electrostática puede ser atractiva o repulsiva, y su valor depende del medio, mientras que la gravitatoria es atractiva e independiente del medio.

4 **Define las magnitudes propias del campo y las magnitudes que se refieren a la interacción campo-carga testigo.**

Las magnitudes propias del campo son la intensidad (subepígrafe 3.1) y el potencial (subepígrafe 4.2), y las referidas a la interacción campo-carga testigo, la fuerza (subepígrafe 1.2) y la energía potencial del sistema (subepígrafe 4.1).

5 **¿Qué signo tiene la energía potencial electrostática en el caso de dos cargas de distinto signo? ¿Y tratándose de cargas del mismo signo? ¿Qué significado físico tiene ese signo?**

Signo negativo en el caso de cargas opuestas y positivo si se trata de cargas iguales. En el primer caso, nos indica el carácter atractivo de la interacción y disminuye su energía potencial con el acercamiento de las cargas. En el segundo caso, nos indica el carácter repulsivo de la interacción y aumenta con el acercamiento.

6 **¿Qué representa la energía potencial de un sistema de varias cargas? ¿Conoces algún caso de interés en el que se aplique esta idea?**

Para la primera pregunta véase el subepígrafe 4.1. La energía reticular de un compuesto iónico es un caso de interés relativo a este punto.

7 **¿Qué significado físico tiene la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico?**

Equivale al trabajo que debe realizarse contra el campo para desplazar la unidad de carga testigo desde un punto a otro.

8 **¿Qué dos formas de representación gráfica del campo eléctrico existen? ¿Qué reglas se siguen en ambos casos?**

El campo eléctrico se representa mediante líneas de fuerza y superficies equipotenciales, cuyas reglas pueden consultarse en los subepígrafes 3.2 y 4.3.

9 **¿Qué ocurre si una carga se mueve a lo largo de una superficie equipotencial?**

El campo eléctrico no realiza trabajo alguno sobre ella (véase el subepígrafe 4.3).

10 **¿Cómo puede obtenerse el valor del potencial en función de la intensidad?**

Mediante la expresión:

$$V_B - V_A = -Ed$$

donde d es la distancia entre el punto A y el punto B medida en la dirección del campo.

11 **¿Cómo hallar la intensidad en un punto si se conoce el modo en que varía el potencial?**

Mediante la expresión:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

12 **Las partículas cargadas se mueven de modo espontáneo en un campo eléctrico, ¿cómo lo hacen: en el sentido de aumentar o en el de disminuir su energía potencial?**

Puesto que es el campo eléctrico el que realiza el trabajo, el sentido será siempre el de disminuir la energía potencial del sistema. El trabajo realizado por el campo es positivo e igual a la disminución de energía potencial.

13 **¿Qué es el flujo del campo eléctrico? ¿Cómo se expresa matemáticamente?**

El flujo del campo magnético es una medida del número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie dada. Se expresa matemáticamente para cualquier superficie con la expresión **4.20** del *Libro del alumno*.

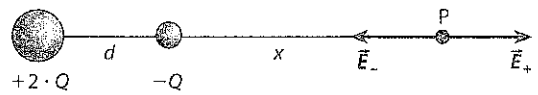
14 **Enuncia el teorema de Gauss y sus principales aplicaciones.**

El teorema de Gauss afirma que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es independiente de la forma de la superficie e igual a la carga neta contenida dividida por ε_0. Una de las aplicaciones más importantes es la de protegernos frente a cargas externas.

Campo eléctrico desde un enfoque dinámico

15 **PAU** **Dos partículas cargadas con $+2 \cdot Q$ y $-Q$ culombios, respectivamente, están separadas entre sí una distancia d. Determina un punto del espacio en el que el campo eléctrico sea nulo. Justifica la respuesta.**

En dicho punto habrá de cumplirse que los valores de la intensidad debidos a una y otra carga sean iguales y de signo contrario.



Así pues, si denominamos x a la distancia existente desde la carga a $-Q$ al punto P, en el que el campo es nulo, tendremos:

$$k\frac{2Q}{(d+x)^2} = k\frac{Q}{x^2}$$

Resolviendo x, obtenemos:

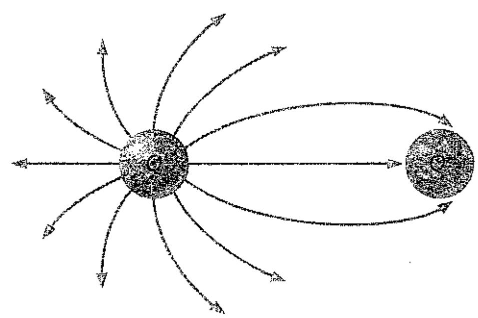
$$x = \left(1 \pm \sqrt{2}\right) d$$

El punto P representado en la figura corresponde al valor:

$$x = \left(1 + \sqrt{2}\right)\ d = 2{,}41 \cdot d$$

El signo negativo indica un punto entre ambas cargas donde el módulo de los dos campos es igual, aunque no se cancelan, al tener el mismo sentido.

16 **Deduce los signos de las cargas de la figura, así como la relación Q/Q'.**



La carga Q es positiva, pues las líneas son salientes, mientras que Q' es negativa, al ser entrantes. Puesto que de Q salen 12 líneas y a Q' van a parar 3, la primera carga es cuatro veces mayor que la segunda, es decir: $Q = 4 \cdot Q'$.

17 **¿Qué movimiento describirá una partícula cargada negativamente que es abandonada en un punto P distante del eje de simetría de un anillo cargado de modo uniforme con carga positiva? Razona y demuestra tu respuesta.**

Como puede verse en el problema resuelto número 3 (páginas 128 y 129), el campo resultante en cualquier punto del eje del anillo (salvo en su centro) es saliente y está dirigido en el sentido del eje. Dado que la fuerza que actuará sobre la carga negativa es $\vec{F} = -QE\vec{u}_e$ (donde $\vec{u}_e$ es el vector unitario en la dirección del eje y tiene sentido saliente), la partícula se acelerará hacia el centro del anillo.

Si bien no hemos hecho el estudio matemático de la función campo obtenida en la página 129, puede demostrarse que dicha función presenta un máximo para cierta distancia al centro del anillo. Para valores menores de x, el campo disminuye, hasta llegar a 0 cuando $x = 0$. Rebasado este punto, el campo y, en consecuencia, la fuerza, invierten su sentido, si bien sus valores son idénticos en valor absoluto a los de los puntos situados a la derecha del anillo.

Así pues, la partícula efectuará un movimiento oscilatorio sobre la posición de equilibrio (centro del anillo) a lo largo del eje.

18 **Si cuatro cargas están situadas como se muestra en la figura, entonces el campo resultante es cero en:**

a) **Todos los puntos medios de los cuatro lados.**

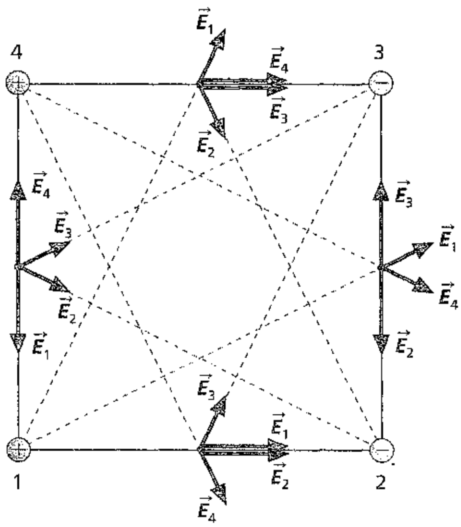
b) **El centro del cuadrado.**

c) **Los puntos medios de los lados superior en inferior.**

d) **Todos los casos anteriores.**

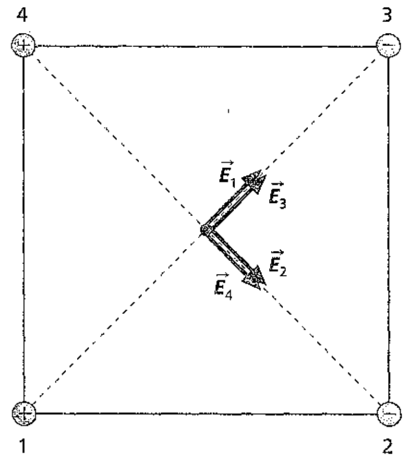
e) **Ninguno de los casos anteriores.**

a) No es cierto. Como se ve en el siguiente dibujo, en los puntos medios de los lados el campo no es nulo, pues no se anula en ningún caso: en el punto medio de los lados verticales se anula el campo producido por las cargas más cercanas, pero no el producido por las más lejanas; por su parte, en el punto medio de los lados horizontales, solo se anula la componente vertical del campo generado por las cargas más lejanas, pero el campo resultante no es nulo.



En los cuatro puntos, la resultante del campo tendrá por tanto dirección horizontal y estará dirigido hacia la derecha.

b) No es cierto. Como se ve en la siguiente figura, el campo generado por las cargas positivas se suma al producido por las cargas negativas. El campo resultante también será horizontal y estará dirigido hacia la derecha.



c) Esta opción tampoco es cierta, como hemos visto en ***a)***.

d) Tal como hemos visto, no es cierto.

e) Esta es la única opción correcta.

19 **PAU** **¿Qué le ocurre a una partícula con carga negativa si es abandonada en el punto B de la figura? ¿Y si es abandonada en el punto A?**

De modo análogo a lo que ocurría en la cuestión anterior, el campo resultante en B tiene la dirección positiva del eje Y, es decir, $\vec{E} = E\vec{j}$. Por tanto, la fuerza que actúa sobre la carga negativa será $\vec{F} = -QE\vec{j}$, de modo que se moverá a lo largo del eje Y hacia A. La función campo a lo largo del eje Y es similar a la obtenida en la actividad resuelta 3 (página 129). Es decir, el campo tiene un máximo para cierto valor de y, y para distancias menores comienza a decrecer hasta hacerse nulo cuando $y = 0$. Rebasado este punto (semieje negativo Y), los valores del campo se invierten.

Así pues, al igual que en el caso anterior, si la carga es abandonada en B, experimentará un movimiento oscilatorio a lo largo del eje Y, alrededor de la posición de equilibrio A. Si la carga se abandona en A, permanecería en reposo, al ser nulo el campo en dicho punto.

20 **Sobre una carga de -2 μC situada en el origen actúa una fuerza de $0{,}002\vec{j}$ N. Calcula:**

a) **El campo eléctrico en dicho origen.**

b) **La fuerza que actuaría sobre una carga de $+10$ μC.**

a) Puesto que el campo eléctrico en un punto se define como la fuerza por unidad de carga situada en dicho punto, su valor es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = -1\,000\vec{j}\ \text{N/C}$$

b) La fuerza que actuaría sobre una carga de $+10$ μC situada en dicho punto sería:

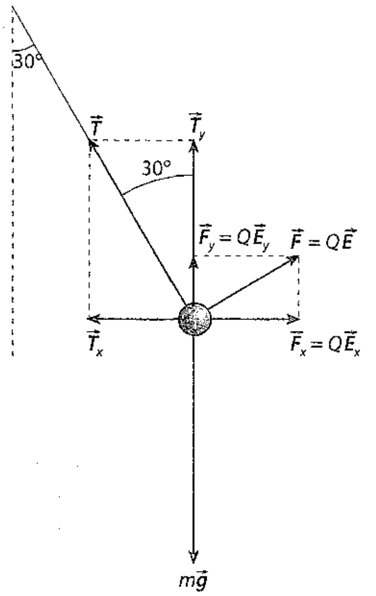
$$\vec{F} = Q\vec{E} = -0{,}01\vec{j}\ \text{N}$$

21 **Una bolita de corcho de 2 g de masa pende de un hilo ligero que se halla en el seno de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot 10^5$ N/C. En esa situación, el ángulo que forma el hilo con la vertical es de 30°. Determina:**

a) **La carga de la bolita.**

b) **La tensión del hilo.**

Representamos el enunciado gráficamente:



a) La condición de equilibrio estático de la bola exige que las fuerzas que sobre ella actúan se anulen.

Esto requiere que:

- Eje *X*:

$$T_x = QE_x$$

- Eje *Y*:

$$T_y + QE_y = mg$$

Es decir:

$$T \operatorname{sen} 30° = QE_x$$
$$T \cos 30° + QE_y = mg$$

Resolviendo *Q*, se obtiene:

$$Q = \frac{mg \operatorname{tg} 30°}{E_x + E_y \operatorname{tg} 30°}$$

y sustituyendo los datos, se llega a:

$$Q = 1{,}97 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

b) Conocido el valor de *Q*, podemos obtener la tensión del hilo a partir de:

$$T \operatorname{sen} 30° = QE_x$$

Despejando *T*:

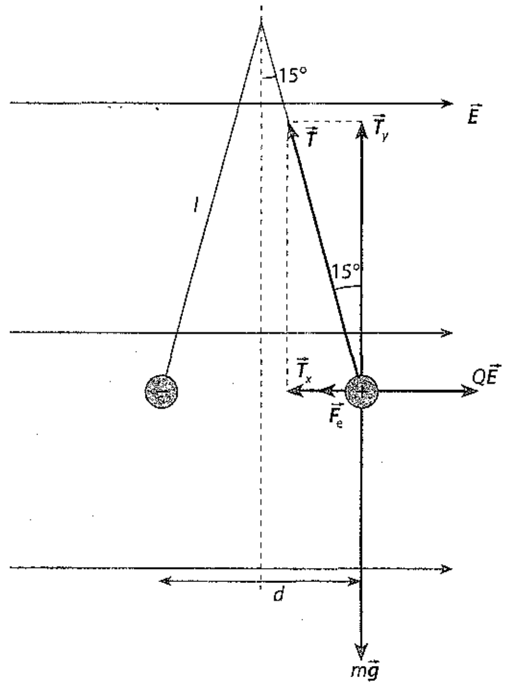
$$T = \frac{QE_x}{\operatorname{sen} 30°}$$

Se obtiene:

$$T = 0{,}016\ \mathrm{N}$$

22 PAU **Dos esferas de 5 g están suspendidas de sendos hilos de 20 cm de longitud. Si las esferas tienen cargas de $+3 \cdot 10^{-8}$ C y $-3 \cdot 10^{-8}$ C, respectivamente, y se hallan en el seno de un campo eléctrico uniforme en la dirección del semieje X^+, determina la intensidad del campo eléctrico cuando el sistema queda en equilibrio y los hilos forman un ángulo de 15° con la vertical.**

La representación gráfica de la cuestión planteada es:



Como puede observarse en la figura, donde se han dibujado las fuerzas que actúan sobre la carga positiva, la situación de equilibrio requiere que:

- Eje *X*:

$$T \operatorname{sen} 15° + k\frac{QQ'}{d^2} = QE$$

- Eje *Y*:

$$T \cos 15° = mg$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$E = \frac{mg \operatorname{tg} 15° + k\dfrac{QQ'}{d^2}}{Q} = 462\,817\ \mathrm{N/C}$$

donde:

$$d = 2l \operatorname{sen} 15° = 0{,}103\ \mathrm{m}$$

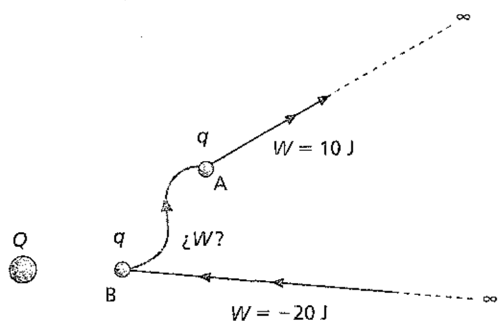
Campo eléctrico desde un enfoque energético

23 PAU **Una carga puntual *Q* crea un campo electrostático. Al trasladar una carga testigo *q* desde un punto A hasta el infinito, se realiza un trabajo de 10 J. Si se traslada desde el infinito hasta otro punto B, el trabajo resulta ser de −20 J.**

***a)* ¿Qué trabajo se realiza cuando la carga se traslada desde el punto B hasta A? ¿En qué propiedad del campo electrostático se basa tu respuesta?**

***b)* Si $q = -2$ C, ¿cuánto vale el potencial en los puntos A y B? Si el punto B es el más próximo a la carga *Q*, ¿cuál es el signo de *Q*? ¿Por qué?**

a) La disposición de cargas descrita en el enunciado es:



Siguiendo el criterio de signos visto en la unidad, el trabajo realizado por el campo para trasladar una carga desde cierto punto hasta el infinito es $W = E_p(r)$, mientras que si se traslada la carga desde el infinito hasta dicho punto, el trabajo es $W = -E_p(r)$. Por tanto, conocemos la energía potencial en los puntos A y B:

$$E_p(A) = 10 \text{ J}; E_p(B) = 20 \text{ J}$$

De donde se puede concluir que ambas cargas tienen el mismo signo. Si ahora queremos trasladar la carga q desde B hasta A, el trabajo realizado por el campo será:

$$W_{B \to A} = E_p(B) - E_p(A) = 10 \text{ J}$$

Para llegar a este resultado, nos hemos basado en el hecho de que el campo eléctrico es conservativo, con lo que el trabajo no depende de la trayectoria, sino solo de los puntos inicial y final.

b) Puesto que q es negativa, Q también lo será, pues, según hemos visto, ambas cargas han de tener el mismo signo. Conocemos la relación entre el potencial y la energía potencial:

$$E_p = qV \Rightarrow V_A = \frac{10}{-2} = -5 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{20}{-2} = -10 \text{ V}$$

24 ¿Hacia dónde tienden a moverse espontáneamente los electrones: hacia regiones de mayor o de menor potencial?

Los electrones tienden a moverse espontáneamente desde puntos de menor potencial hacia puntos de mayor potencial, pues:

$$\Delta E_c = Q(V_1 - V_2) = -e(V_1 - V_2)$$

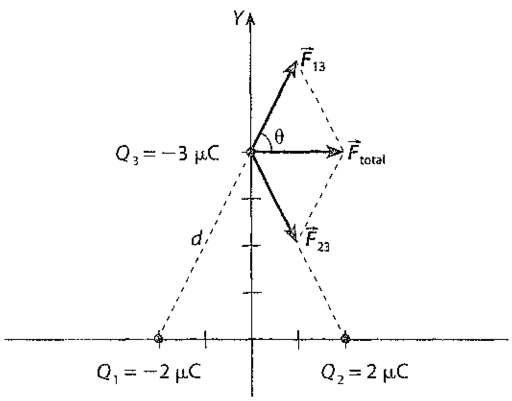
Por tanto, para que el electrón se acelere de modo espontáneo (para que aumente su energía cinética), el resultado de la diferencia del paréntesis ha de ser negativo, es decir, $V_1 < V_2$. Así pues, se moverá de manera espontánea hacia puntos de mayor potencial (acercándose hacia una carga positiva, por ejemplo).

25 En los puntos (−2, 0) y (2, 0) de un sistema cartesiano plano cuyas dimensiones se expresan en metros existen dos cargas fijas de −2 μC y +2 μC respectivamente. Determina:

a) **La fuerza ejercida por estas dos cargas sobre una tercera de −3 μC situada en el punto (0,4).**

b) **El trabajo realizado para trasladar dicha carga desde el punto (0, 4) hasta el punto (4, 4).**

a) La siguiente figura ilustra la cuestión planteada:



Por simetría, podemos concluir que la componente Y de la fuerza ejercida sobre Q en A será nula, mientras que la componente X será la suma de las dos componentes generadas por las dos cargas inferiores, que son idénticas. Es decir:

$$F_{x\,total} = 2\,F_x = 2k\frac{Q_1 Q_3}{d^2}$$

Como se puede observar, la distancia de Q_1 y Q_2 a Q_3 puede expresarse mediante la expresión:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20} \text{ m}$$

Por tanto:

$$F_{x\,total} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{20} \cos\theta$$

Puesto que $\cos\theta = 2/d$, podemos calcular $F_{x\,total}$:

$$F_{x\,total} = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{10}\frac{2}{\sqrt{20}} = 2{,}41 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

b) El trabajo que piden será:

$$W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

Ahora bien, por simetría resulta que la energía potencial en A debida a Q_1 es idéntica y de sentido contrario a la debida a Q_2. Por tanto:

$$W_{A \to B} = -E_p(B)$$

La energía potencial en B será la debida a la carga Q_1 más la debida a Q_2:

$$W_{A \to B} = -kQ\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2}\right) =$$

$$= -9 \cdot 10^9 \cdot (-3 \cdot 10^{-6}) \cdot \left(\frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{52}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{20}}\right)$$

$$W_{A \to B} = 27 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 4{,}59 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Como se ve este trabajo es positivo. Es fácil llegar cualitativamente a esta conclusión, pues, por simetría, la energía potencial debida a Q_2 es idéntica en A y en B, luego el trabajo vendrá determinado por la carga Q_1. Al tener Q_1 y Q el mismo signo, las cargas se repelen, luego el campo realiza un trabajo positivo al alejar ambas cargas.

26 Un campo eléctrico uniforme de valor 200 N/C tiene la dirección del eje X. Si se deja en libertad una carga de −2 μC que se encuentra inicialmente en reposo en el origen de coordenadas:

a) **¿Cuál será la variación de energía potencial cuando la carga se encuentre en el punto (4, 0)?**

b) **¿Cuál será su energía cinética en ese punto?**

c) **¿Y la diferencia de potencial entre el origen y el punto (4, 0)?**

a) Como se desprende de la expresión 4.20:

$$E_{p\,B} - E_{p\,A} = -QEd = -0{,}0016 \text{ J} = -1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

donde B es (4, 0) y A es (0, 0).

b) Por un lado, sabemos que:

$$W = -\Delta E_p = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Además, se cumple que:

$$W = \Delta E_c = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Dado que la energía cinética inicial en A es cero, entonces:

$$E_{c\,B} = 0{,}0016 \text{ J} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

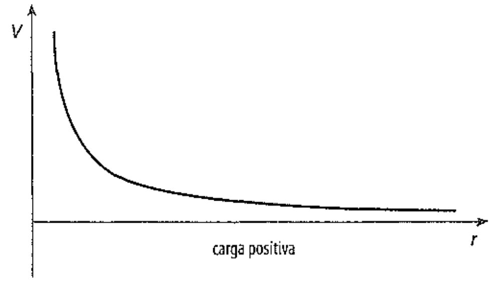
c) La diferencia de potencial entre A y B será:

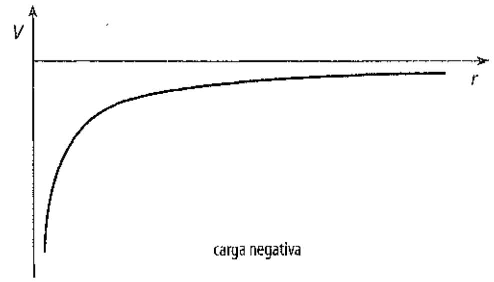
$$V_A - V_B = Ed = 800 \text{ V}$$

Concepto de potencial y relación con el campo eléctrico

27 Ilustra mediante una gráfica cómo varía el potencial eléctrico creado por una carga puntual Q positiva si nos alejamos de ella. ¿Y si la carga es negativa?

En el caso de la carga positiva, el potencial disminuye conforme a $1/r$ a medida que nos alejamos, hasta hacerse cero en el infinito, mientras que, en el caso de la carga negativa, aumenta desde valores negativos conforme a $1/r$, hasta hacerse también cero en el infinito.





28 **¿Pueden cortarse las superficies equipotenciales?**

No pueden cortarse, pues, según las normas de trazado de las superficies equipotenciales, estas son perpendiculares al vector $\vec{E}$ en cada punto. Dado que en un punto solo puede haber un valor del campo, tal y como se desprende del principio de superposición, no pueden existir dos superficies equipotenciales que se corten, ya que esto supondría la existencia de dos vectores $\vec{E}$ distintos en un mismo punto.

29 **PAU** **El potencial en el interior de una corteza esférica cargada es constante. ¿Cómo es el campo eléctrico en el interior de la corteza?**

Puesto que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, si el potencial es constante, el campo en el interior de la corteza es nulo, lo que es congruente con el teorema de Gauss.

30 **En una región del espacio, el campo eléctrico es nulo. ¿Será también nulo el potencial eléctrico? Razona tu respuesta.**

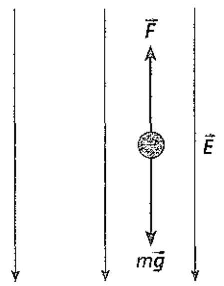
El potencial será constante en dicha región, como se desprende de la expresión **4.18**.

31 **PAU** **Una esfera de 5 g de masa tiene una carga de -4 μC.**

a) **¿Cuál debe ser el campo eléctrico que habríamos de aplicar para que la esfera permanezca en reposo sin caer al suelo?**

b) **Si dicho campo ha de ser suministrado mediante una diferencia de potencial establecida entre dos placas metálicas planas y paralelas separadas 5 cm, ¿cuál debe ser la diferencia de potencial que debe establecerse?**

El enunciado del problema puede ilustrarse del siguiente modo:



a) La condición de equilibrio se cumplirá cuando:

$$mg = QE$$

Por tanto, el campo eléctrico será:

$$E = 12\,250 \text{ N/C}$$

Como la carga es negativa, el campo debe estar dirigio hacia abajo; por lo que:

$$\vec{E} = -12\,250\vec{j} \text{ N/C}$$

b) La relación entre la diferencia de potencial entre dos placas planas paralelas y el campo en su interior es $V_B - V_A = Ed$, luego:

$$V_B - V_A = 12\,250 \cdot 0{,}05 = 612{,}5 \text{ V}$$

32 **PAU** **Dos esferas conductoras tienen por radios 90 cm y 45 cm, respectivamente, y se hallan cargadas de modo que sus superficies están a un potencial respecto del infinito de $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V. Si se encuentran en una zona del espacio vacío y entre sus centros existe una separación de 10 m, calcula:**

a) **La fuerza que ejercen entre sí ambas esferas.**

b) **El campo eléctrico en el punto medio de la recta que une sus centros.**

c) **La carga que quedará en cada esfera si ambas se unen con un cable conductor de capacidad despreciable.**

Para puntos exteriores a las esferas, el potencial es:

$$V = k\frac{Q}{r}$$

Podemos hallar la carga de cada esfera aplicando dicha expresión cuando $r = r_1$ y cuando $r = r_2$:

$$Q_1 = \frac{V_1 r_1}{k} = 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{V_2 r_2}{k} = 10^{-9} \text{ C}$$

Para las preguntas ***a)*** y ***b)***, se puede suponer que la carga está concentrada puntualmente en el centro de cada esfera:

a) Según esto, la fuerza existente entre ambas esferas (repulsiva, pues las cargas son positivas) será:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

b) Puesto que las cargas son iguales, el campo en el punto medio es nulo.

c) Si las dos cargas se unen por un conductor, sus potenciales se igualarán; de modo que:

$$k\frac{Q_1'}{r_1} = k\frac{Q_2'}{r_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{r_1} = \frac{Q_2'}{r_2}$$

Por otra parte, si el conductor tiene una capacidad despreciable, la suma de las cargas $(Q_1' + Q_2')$ ha de ser igual a la carga total inicial $(Q_1 + Q_2)$ por el principio de conservación de la carga; de modo que:

$$Q_1' + Q_2' = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

de donde:

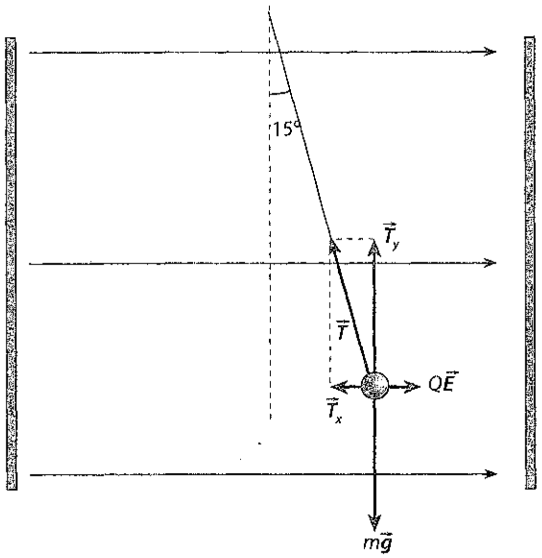
$$Q_1' = 2 \cdot 10^{-9} - Q_2'$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior y resolviendo, obtenemos:

$$Q_1' = 1{,}33 \cdot 10^{-9} \text{ C y } Q_2' = 0{,}66 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

33 **PAU** **Una pequeña esfera de 0,5 g y con una carga de 6 nC cuelga de un hilo. Cuando el sistema se introduce entre dos placas planas verticales y cargadas, separadas entre sí 10 cm, se observa que el hilo forma un ángulo de 15° con la vertical. ¿Cuál es la diferencia de potencial existente entre las placas?**

El enunciado puede ilustrarse mediante la siguiente figura:



Cuando la bola está en equilibrio, se cumple que:

$$T_x = QE \Rightarrow T \operatorname{sen} 15° = QE \text{ y } T_y = mg \Rightarrow T \cos 15° = mg$$

Dividiendo ambas magnitudes y despejando E, obtenemos:

$$E = \frac{mg \operatorname{tg} 15°}{Q}$$

Como:

$$V_A - V_B = Ed$$

entonces:

$$V_A - V_B = \frac{mgd \operatorname{tg} 15°}{Q}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$V_A - V_B = 21\,882{,}5 \text{ V}$$

Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos

34 Analiza el movimiento de una partícula cargada que incide de forma oblicua en un campo uniforme si:

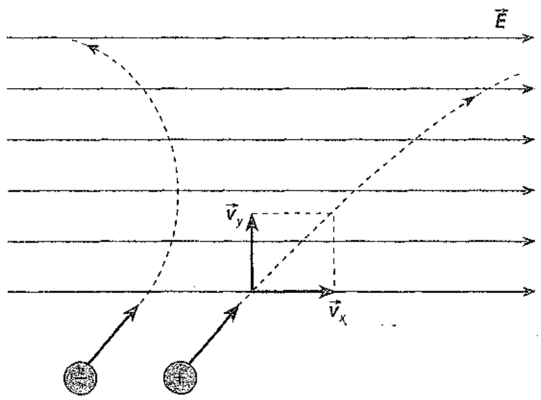
a) Su carga es positiva.

b) Su carga es negativa.

Suponemos que el campo tiene dirección X positiva. En los dos casos, la carga describirá un movimiento parabólico, si bien el sentido de dicho movimiento dependerá del signo de la carga. La componente de la velocidad normal al campo no sufrirá variación, mientras que la componente de la velocidad en la dirección del campo se verá afectada, de modo que:

$$v_x = v_{0x} + \frac{QE}{m} t$$

Por tanto, si la carga es negativa, dicha componente disminuye hasta invertir su sentido, mientras que si es positiva, su valor aumenta. Así pues, las trayectorias serían similares a las indicadas en la figura:



D35 PAU Entre dos placas planas y paralelas, separadas 40 cm entre sí, con cargas iguales y de signo opuesto, existe un campo eléctrico uniforme de 4 000 N/C. Si un electrón se libera de la placa negativa:

***a)* ¿Cuánto tarda en chocar contra la placa positiva?**

***b)* ¿Qué velocidad llevará al impactar?**

a) El movimiento del electrón será acelerado desde el reposo, de modo que:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Por otra parte:

$$eE = ma \Rightarrow a = \frac{eE}{m}$$

Por tanto:

$$t = \sqrt{\frac{2xm}{eE}} = 3{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

b) El trabajo realizado al pasar de una placa a otra es:

$$W = eEd = \Delta E_c$$

Como la energía cinética inicial es nula:

$$E_{c\,f} = eEd = 2{,}56 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Para este valor de energía, el aumento de masa relativista $\Delta m = E_c/c^2$ es despreciable, por lo que podemos suponer que la masa del electrón permanece invariable. En consecuencia:

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 2{,}3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

D36 PAU Un electrón entra con una velocidad de $2 \cdot 10^6$ m/s en una región con un campo eléctrico uniforme de 10 000 N/C. Determina:

***a)* La aceleración que adquiere el electrón.**

***b)* El tiempo que tarda y la distancia que recorre en el seno del campo hasta quedar en reposo.**

***c)* La diferencia de potencial existente entre el punto de entrada y el punto donde su velocidad se hace cero.**

a) La aceleración viene dada por la expresión $a = eE/m$, luego:

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

b) Sabemos que el electrón se va frenando una vez que entra en el campo, pues llega un momento en que está en reposo. Por tanto, la aceleración será negativa.

Podemos aplicar las ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado: $v = v_0 - at$.

Cuando el electrón alcanza el reposo, se cumple:

$$0 = 2 \cdot 10^6 - 1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot t \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 10^6}{1{,}76 \cdot 10^{15}} = 1{,}14 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Para determinar esta distancia, hacemos uso de otra ecuación del movimiento uniformemente acelerado:

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

Sustituyendo en el momento en que el electrón queda en reposo:

$$0 = (2 \cdot 10^6)^2 - 2 \cdot 1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{4 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 1{,}76 \cdot 10^{15}} = 1{,}14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Es decir, el electrón recorre poco más de un milímetro.

c) Si llamamos A al punto de entrada y B al punto donde el electrón queda momentáneamente en reposo, se cumple:

$$V_A - V_B = Ed = 10^4 \cdot 1{,}14 \cdot 10^{-3} = 11{,}4 \text{ V}$$

Teorema de Gauss para campo eléctrico

37 **Si el flujo neto del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana tiene valor cero, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?**

a) **No existen cargas en el interior de la superficie.**

b) **La carga neta en el interior de la superficie es nula.**

c) **El número de líneas de fuerza entrantes en la superficie es igual al número de líneas salientes.**

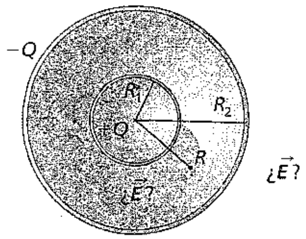
Puesto que el flujo neto del campo eléctrico es $\Phi = Q/\varepsilon_0$ y dicho flujo es cero, la carga neta en el interior de la superficie gaussiana debe ser forzosamente nula, luego la afirmación ***b)*** es cierta. Además, el hecho de que el flujo neto es cero significa que el flujo entrante es igual al saliente, por lo que la proposición ***c)*** también es correcta.

D38 **PAU** **Una esfera conductora hueca de pequeño tamaño está cargada uniformemente con una carga $+Q$. Concéntrica a ella y separada por vacío la rodea otra esfera conductora hueca de mayor tamaño y cargada uniformemente con carga $-Q$. Haciendo uso del teorema de Gauss, determina el campo eléctrico:**

a) **En un punto entre ambas esferas a una distancia R del centro común de ambas.**

b) **En un punto exterior a ambas esferas a una distancia r del centro común de ambas.**

La disposición descrita en el enunciado puede verse en el siguiente dibujo:



a) Aplicando el teorema de Gauss para una superficie de Gauss imaginaria de radio R mayor que R_1 pero menor que R_2, y considerando la simetría de ambas esferas, resulta:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \cdot dS = E \oint dS = E \cdot 4\pi R^2$$

Por otro lado, sabemos que el flujo es el cociente entre la carga y la constante ε_0, luego:

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

El campo queda:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

b) Siguiendo el mismo procedimiento, se llega a la conclusión de que el campo en un punto situado a una distancia $r > R_2$ es nulo, pues la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es nula.

El montaje descrito es un condensador esférico, cuyo campo es no nulo en los puntos situados entre ambas esferas, y nulo en el resto del espacio.

D39 **PAU** **Se tiene un plano de grandes dimensiones con una densidad superficial de carga de $+3 \cdot 10^{-9}$ C/m^2; calcula:**

a) **El campo eléctrico uniforme que genera.**

b) **El trabajo que se realiza al desplazar una carga de -2 μC desde el punto A, a 2 cm de la placa, hasta el punto B, a 8 cm de la misma.**

a) Como puede observarse en la página 127, deducida mediante el teorema de Gauss, el campo que genera una placa plana es uniforme y de valor:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 169{,}6 \text{ N/C}$$

b) El trabajo viene dado por:

$$W = Q'Ed = Q'E\,(x_B - x_A) = -2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

El signo negativo implica que el trabajo debe realizarse en contra de la fuerza eléctrica y se traduce en un aumento de la energía potencial del sistema al alejar la carga negativa.

5 Campo magnético y principios del electromagnetismo

E S Q U E M A D E L A U N I D A D

Cuestiones previas (página 132)

1. Si la masa es el agente asociado a la gravitación, y la carga, la causa ligada a los fenómenos eléctricos, ¿sabrías decir cuál es el agente responsable del magnetismo?

Hay dos agentes causantes del magnetismo; los imanes y las corrientes eléctricas (partículas cargadas en movimiento).

2. ¿Cuál es la razón de que un imán distorsione la imagen de un televisor?

La pantalla de un televisor está formada por tubos que generan haces de electrones, estos electrones realizan un barrido de la pantalla, excitando el material fosforescente. Si acercamos un imán a la pantalla, su campo magnético desvía la trayectoria de los electrones, que impactan en zonas donde no deberían hacerlo. El resultado es una imagen distorsionada.

3. ¿Por qué una línea de metro no debe pasar por debajo de un hospital?

Porque las líneas de metro generan campos electromagnéticos que podrían interferir negativamente en el hospital.

4. ¿Podrías indicar algunas diferencias entre la interacción electrostática y la magnética?

- Tienen direcciones diferentes con respecto a sus campos generados.
- En la interacción eléctrica es independiente la fuerza eléctrica de la velocidad de la carga, en cambio en la interacción magnética son directamente proporcionales.
- En la interacción eléctrica realiza trabajo al desplazar un cuerpo cargado en cambio en la magnética no realiza ningún trabajo al ser perpendicular al desplazamiento.

5. ¿Es peligroso vivir cerca de una línea de alta tensión?

Los estudios sobre posibles efectos perniciosos para la salud de la exposición a campos electromagnéticos se suceden desde los años sesenta, sin que hasta el momento se haya demostrado una relación causa efecto definitiva. En general, la comunidad científica internacional está de acuerdo en que la exposición a los campos eléctricos y magnéticos generados por las instalaciones eléctricas de alta tensión no supone un riesgo para la salud pública.

Actividades (páginas 134/151)

1 ¿Cómo sabrías, con ayuda de una brújula, cuál es el polo norte de un imán? ¡Cuidado! No te fíes de los colores que tienen los imanes del laboratorio.

Si al acercar el imán por un extremo, el polo norte de la brújula (es decir, el que se orienta hacia el norte) es repelido, podemos deducir que el extremo del imán que se ha aproximado es su polo norte. Por el contrario, si el polo norte de la brújula resulta atraído, el extremo del imán será su polo sur.

2 ¿Qué diferencia fundamental existe entre las líneas de fuerza de un campo magnético y las de un campo eléctrico? ¿A qué se debe dicha diferencia?

Las líneas de fuerza de un campo eléctrico son abiertas, mientras que las de un campo magnético son siempre cerradas. Esto se debe a que el campo eléctrico puede ser creado por cargas individuales, mientras que el campo magnético es generado en los polos, que siempre se presentan por pares: las líneas del campo magnético salen del polo norte y entran por el polo sur.

3 PAU Un protón se mueve con una velocidad de $3 \cdot 10^7$ m/s a través de un campo magnético de 1,2 T. Si la fuerza que experimenta es de $2 \cdot 10^{-12}$ N, ¿qué ángulo formaba su velocidad con el campo cuando entró en él?

A partir de la expresión:

$$F = QvB \text{ sen } \theta \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{F}{QvB}$$

y sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\text{sen } \theta = 0{,}347 \Rightarrow \theta = 20{,}3°$$

4 Un electrón penetra en un campo $B\vec{k}$ con una velocidad $v\vec{j}$. ¿En qué dirección actúa la fuerza?

Aplicando la regla de la mano derecha, podemos deducir que la fuerza actúa en el sentido positivo del eje X, es decir:

$$\vec{F} = -F\vec{i}$$

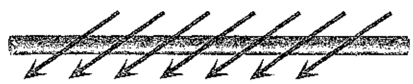
Se llega al mismo resultado si realizamos el producto vectorial que permite obtener la fuerza:

$$\vec{F} = Q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = QvB\vec{i}$$

5 Un haz de protones y otro de electrones son lanzados en la misma dirección y sentido. En ambos casos, se observa que las partículas se desplazan con movimiento rectilíneo y uniforme. ¿Podemos asegurar que en dicha región no existe campo magnético? ¿Y campo eléctrico?

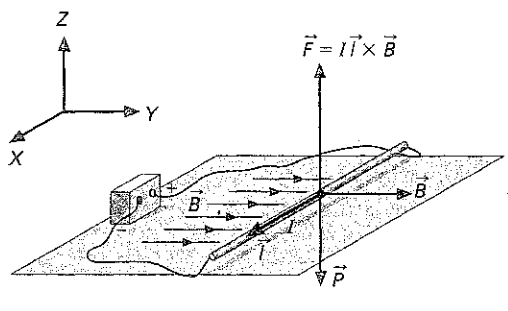
No podemos asegurar la inexistencia de un campo magnético, pues podría suceder que las partículas incidiesen en la dirección del campo magnético, en cuyo caso $\vec{F} = 0$ y el movimiento sería con velocidad constante. Lo que sí puede asegurarse es que no existe campo eléctrico, pues afectaría al movimiento de las partículas cargadas independientemente de la orientación.

6 PAU Un hilo conductor de 10 g de masa y 20 cm de longitud conectado a un generador de corriente continua mediante hilos flexibles se encuentra inmerso en un campo magnético de 0,04 T que lo atraviesa perpendicularmente, paralelo al suelo, como se indica en la figura. Determina qué intensidad de corriente debe hacerse circular y en qué sentido para que el conductor levite y no se caiga al suelo.



La fuerza que experimenta el hilo conductor a consecuencia del campo magnético es: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$.

Esta fuerza será vertical, pero hay dos sentidos posibles, hacia arriba y hacia abajo. Debemos escoger el sentido de corriente capaz de compensar la fuerza de la gravedad. En el caso de la figura del enunciado, la corriente deberá ir hacia la izquierda. En el siguiente dibujo, el hilo se ha orientado en la dirección X, y el campo tiene dirección Y positiva. En este caso, la corriente deberá circular en la dirección X positiva:



La fuerza que experimenta el hilo será $F = IlB$, y tendrá dirección vertical hacia arriba.

El equilibrio entre esta fuerza y la de la gravedad viene dado por la siguiente expresión:

$$mg = IlB \rightarrow I = mg/lB = 12{,}25 \text{ A}$$

7 Al accionar el paso de corriente por un circuito rectilíneo no se observa efecto alguno. ¿Podemos afirmar que no existe campo magnético en dicha región?

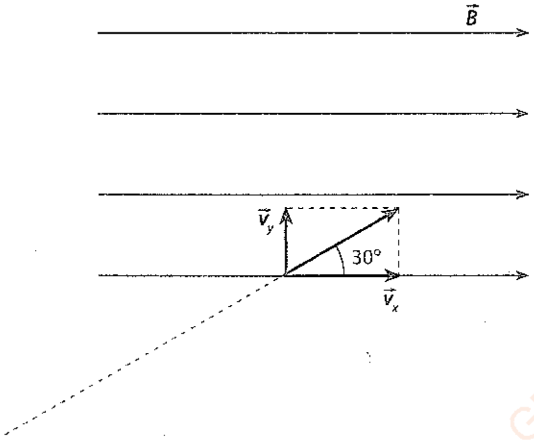
No necesariamente, pues el circuito rectilíneo puede estar orientado en la dirección del campo magnético, en cuyo caso este no ejercerá fuerza alguna sobre el circuito y, en consecuencia, no se detectará ninguna fuerza.

8 PAU Un electrón incide en un campo magnético de $12\vec{i}$ T con una velocidad de $1{,}6 \cdot 10^7$ m/s, formando un ángulo de 30° con las líneas de dicho campo.

***a)* ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón?**

***b)* ¿Cuál es su velocidad de avance en el campo?**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



De ella se desprende que las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v \cos 30° = 1{,}38 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_y = v \operatorname{sen} 30° = 8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

a) El radio de la órbita que describirá viene dado por la expresión **5.12**, donde $v = v_y$, ya que la componente x es paralela al campo y por ello no ejerce fuerza alguna:

$$r = \frac{mv_y}{QB} = 3{,}79 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3{,}79 \text{ μm}$$

b) Su velocidad de avance en el campo es:

$$v_x = 1{,}38 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

9 PAU Dos partículas de masas m y $4m$ y cargas Q y $3Q$, respectivamente, inciden perpendicularmente, con la misma velocidad, v, en un campo magnético de valor B. Demuestra cómo son, en cada caso, los radios de los círculos que describen, así como sus respectivos períodos de revolución.

Al incidir perpendicularmente al campo magnético, ambas partículas describirán un movimiento circular. Según la expresión **5.12**, el radio de las dos órbitas será:

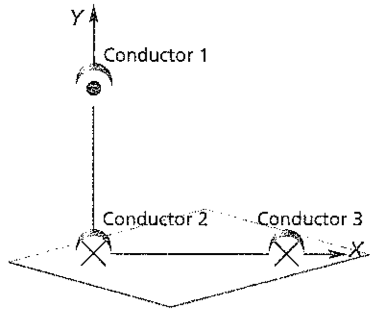
$$r_1 = \frac{mv}{QB} \qquad r_2 = \frac{4mv}{3QB} = \frac{4}{3} r_1$$

Por su parte, el periodo de revolución viene dado por la expresión **5.14**, es decir:

$$T_1 = \frac{2\pi m}{QB} \qquad T_2 = \frac{2\pi 4m}{3QB} = \frac{4}{3} T_1$$

Es decir, tanto el radio como el periodo de revolución de la segunda partícula son 4/3 de los valores correspondientes a la primera partícula.

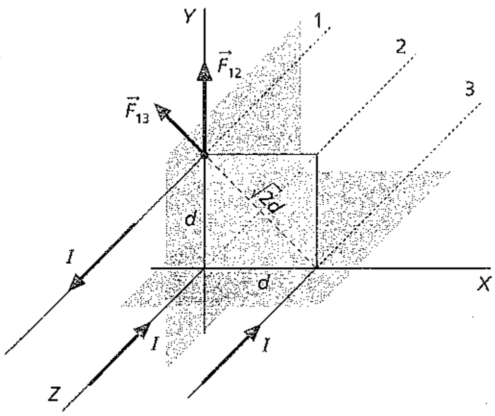
10 PAU Tres hilos conductores largos, rectilíneos y paralelos entre sí están situados en tres vértices de un cuadrado de 10 cm de lado, como se indica en la figura. Por los tres circula una intensidad de 20 A, dirigida hacia fuera del papel en el conductor 1, y hacia dentro en el caso de los conductores 2 y 3. Determina, usando el sistema de referencia XY centrado en el conductor 2, la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el conductor 1, así como su valor.



La fuerza total ejercida sobre el hilo 1 será la suma de las fuerzas que ejercen sobre el mismo los otros dos hilos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

El hilo 2 ejerce sobre el 1 una fuerza repulsiva, luego tendrá dirección Y positiva. El hilo 3 ejerce sobre el hilo 1 una fuerza igualmente repulsiva, pero en este caso la fuerza tendrá tanto componente X como componente Y:



Utilizando la expresión de la fuerza que ejerce un hilo sobre otro por unidad de longitud:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\vec{j} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\vec{j}$$

$$\frac{\vec{F}_{13}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sqrt{2}d}(-\cos 45°\,\vec{i} + \operatorname{sen} 45°\,\vec{j}) =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$\frac{\vec{F}_1}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}(-\vec{i} + 3\vec{j}) = -4 \cdot 10^{-4}\,\vec{i} + 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\vec{j} \text{ N}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{l} = 1{,}26 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

11 PAU Halla el campo magnético en el centro de una espira circular de 80 cm² de superficie por la que circula una corriente de 2 A.

El campo magnético en el centro de una espira circular tiene la dirección del eje de la espira y el sentido que marca la regla de la mano derecha, tal como se observa en la figura 5.33. El módulo de dicho campo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

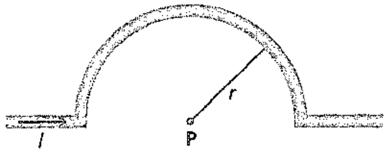
A partir del valor de la superficie podemos averiguar el radio:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cong 0{,}05 \text{ m}$$

Por tanto:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot 0{,}05} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,\text{T}$$

12 PAU **Por una espira semicircular de radio $r = 30$ cm circula una corriente de intensidad $I = 20$ A. Calcula el campo en el punto P de la siguiente figura.**



Aplicando la ley de Biot y Savart, el campo producido por un elemento de corriente $I\,d\vec{l}$ es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

El campo producido por los dos tramos horizontales será nulo, pues el producto vectorial del elemento de corriente por el vector $\vec{u}_r$ es nulo en toda su longitud.

Así pues, el campo será el provocado por el tramo semicircular. Integrando en toda su longitud:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Ahora bien, r, es decir, la distancia del elemento de corriente al punto P, es constante, luego podemos sacarla de la integral. Además, el producto vectorial es también constante, pues $d\vec{l}$ y $\vec{u}_r$ son perpendiculares en todo momento.

Dicho producto será un vector de módulo dl, con dirección perpendicular a la espira y hacia el fondo.

Es decir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}\left(\oint dl\right)\vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\pi r\,\vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{4r}\vec{k}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{4 \cdot 0{,}3} = 2{,}1 \cdot 10^{-5}\,\text{T}$$

13 PAU **Imagina que disponemos un número grande N de conductores rectilíneos muy largos de forma adyacente, de modo que parezcan una lámina. Si por todos ellos circula la misma corriente I en el mismo sentido:**

a) **Deduce cómo serán las líneas del campo magnético del dispositivo en una superficie perpendicular a los conductores.**

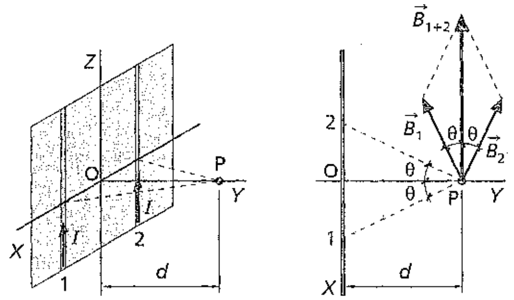
b) **Demuestra por aplicación del teorema de Ampère que el valor del campo en un punto enfrente de la lámina obtenida viene dado por:**

$$B = 1/2\,\mu_o\,n\,I$$

donde n es el número de conductores por unidad de longitud $\left(n = \frac{N}{L}\right)$.

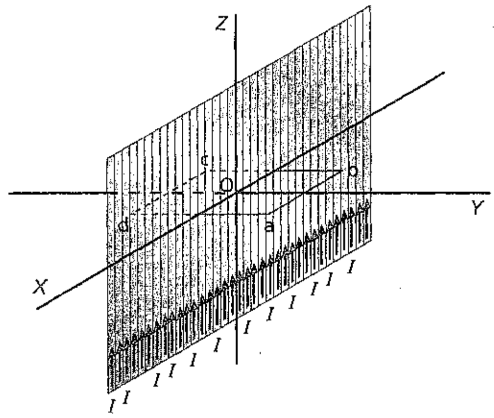
a) Suponemos que los conductores rectilíneos que constituyen la placa son suficientemente largos como para considerarlos indefinidos. También consideramos indefinido el número de conductores.

Imaginemos un punto P situado a una distancia d de la lámina, tal como se observa en la siguiente figura:



Para un conductor rectilíneo **1**, siempre podremos encontrar otro conductor simétrico, **2**, de modo que la componente Y de los dos campos magnéticos se anula. En consecuencia, el campo será paralelo a la lámina y tendrá la dirección que marque la regla de la mano derecha. En nuestro ejemplo, el campo tiene la dirección X negativa.

b) Aplicaremos el teorema de Ampère a la curva rectangular abcd del dibujo:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Ahora bien, las integrales segunda y cuarta de esta expresión valen cero, pues en ellas $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son perpendiculares. Además, por simetría, las integrales primera y tercera son idénticas. Aplicando el teorema de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2Bl = \mu_o I_{\text{interior}}$$

En esa expresión, I_{interior} representa la intensidad total encerrada por la curva abcd, que será el producto de I por el número de conductores que hay en la longitud l, esto es, nl. Por tanto:

$$2Bl = \mu_0 Inl \rightarrow B = \mu_o In/2$$

14 **¿Cuánto vale el campo magnético en el centro de un solenoide de 500 espiras que tiene una longitud de 30 cm y un radio de 1 cm y por el que circula una intensidad de 2 A?**

El campo eléctrico en el interior de un solenoide es paralelo a su eje y su módulo viene dado por la expresión **5.20**, es decir, es independiente del radio del solenoide. Sustituyendo los datos:

$$B = \mu_o N\frac{I}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500 \cdot 2}{0{,}3} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$$

Actividades finales (páginas 154/155)

Guía de repaso

1 **¿De dónde viene la terminología «polo norte» y «polo sur» aplicada al magnetismo?**

Pierre de Maricourt en el año 1269.

2 **¿Qué magnitud representa al campo magnético? ¿Qué particularidades tiene?**

El campo magnético se representa por la magnitud $\vec{B}$ y se denomina inducción magnética. Se representa mediante líneas de fuerza cerradas y su intensidad varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

3 **¿Cómo varía con la distancia la fuerza con que se atraen o repelen dos polos?**

La fuerza con que se atraen o repelen dos polos varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

4 **¿Qué ocurre cuando rompemos un imán por la mitad?**

Cuando rompemos un imán por la mitad se generan inmediatamente dos polos en cada fragmento.

5 **¿Qué es lo que produce, en última instancia, un campo magnético?**

Partículas cargadas en movimiento, es decir, una corriente eléctrica.

6 **¿Cómo es la fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento? ¿Qué expresión tiene dicha fuerza?**

Su expresión es: $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$, de forma que es proporcional a la carga y velocidad con que entra en el campo magnético. Además depende de la dirección con que la partícula entra en el campo.

7 **¿Cuál es la unidad de inducción magnética en el Sistema Internacional? ¿Cómo se define?**

En el SI, el campo magnético se mide en teslas. Se define una tesla como la intensidad de un campo magnético tal que, cuando incide perpendicularmente en él una carga de 1 C a una velocidad de 1 m/s, ejerce sobre la misma una fuerza de 1 N.

8 **¿Ejerce un campo magnético uniforme algún tipo de acción sobre una espira o circuito cerrado? ¿En qué condiciones lo hace?**

No ejerce fuerza neta, pero, dependiendo de la orientación de la espira en el seno del campo magnético, puede ejercer un par de fuerzas que orienten la espira. Véase el subepígrafe 2.3.

9 **¿Qué es el momento magnético? ¿Guarda alguna semejanza con el momento dipolar de un dipolo eléctrico?**

Véase el subepígrafe 2.3. Es interesante comparar los campos producidos por un dipolo eléctrico (dos cargas próximas idénticas y de signo opuesto) y uno magnético (una pequeña espira por la que circula corriente). Para puntos alejados, el campo magnético producido por un dipolo magnético tiene la misma forma que el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico. Sin embargo, el campo magnético cercano a una espira es completamente diferente al que existe en las proximidades de un dipolo eléctrico. Baste pensar que hay líneas del campo eléctrico que salen de una carga y entran en la otra, cosa que no existe en un dipolo magnético, donde todas las líneas de campo se cierran sobre sí mismas.

10 **Resume lo que le ocurre a una partícula con carga positiva que penetra perpendicular u oblicuamente en un campo magnético uniforme.**

En el primer caso describe un movimiento circular uniforme y en el segundo caso un movimiento helicoidal.

11 **¿Cómo funciona un ciclotrón?**

Véase el apartado correspondiente en la página 143.

12 **¿Qué podemos decir de las corrientes que circulan por dos conductores paralelos que se repelen?**

Que circulan en sentidos opuestos.

13 **¿Cómo son las líneas del campo magnético producido por una corriente rectilínea e indefinida? ¿Cuál es la expresión que representa dicho campo?**

Las líneas de campo son circunferencias concéntricas donde el vector campo es tangente a dichas líneas. Mediante la expresión **5.17** (página 147 del *Libro del alumno*).

Acción del campo magnético sobre cargas y corrientes

14 **En cierta región hay un campo magnético y otro eléctrico que tienen la misma dirección y sentido. Razona lo que ocurre cuando incide en la dirección y sentido de los campos:**

a) **Un haz de protones.** ***b)*** **Un haz de electrones.**

a) El campo magnético no ejerce acción alguna sobre los protones, pues $\vec{v}$ es paralela a $\vec{B}$. Sí lo hace, sin embargo, el campo eléctrico, que los acelera en la dirección del campo.

b) El campo magnético tampoco tiene efecto sobre los electrones, por la misma razón que en el caso anterior. El campo eléctrico, por su parte, los frena e invierte el sentido de su movimiento.

15 **Un haz de protones incide en dirección perpendicular en los campos de la cuestión anterior. ¿Es posible, bajo alguna circunstancia, que el haz no sufra desviación alguna?**

En absoluto; siempre sufrirán desviación, pues las fuerzas magnéticas y eléctricas no se compensan nunca en esas circunstancias, al actuar en direcciones perpendiculares.

16 **En un instante dado, un electrón se mueve en la dirección $-Z$ en una región donde hay un campo magnético en la dirección $+X$. ¿Cuál es la dirección de la fuerza que actúa?**

La fuerza que experimenta el electrón vendrá dada por el producto vectorial:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si realizamos dicho producto vectorial y tenemos en cuenta el signo menos de la carga del electrón, resulta una fuerza en la dirección Y positiva.

17 **PAU** **Una espira se sitúa de modo que su momento magnético tiene la misma dirección que el campo externo $\vec{B}$ y sentido opuesto. ¿Cuál es el momento del par que actúa sobre ella? ¿Se encontrará en equilibrio estable o inestable? Razona tu respuesta.**

El momento del par es 0, pues $M = mB$ sen 180°. Sin embargo, su equilibrio será inestable, ya que cualquier pequeña perturbación producirá el giro de la espira y hará que su momento magnético se oriente a favor del campo. El equilibrio estable se consigue cuando $\vec{m}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y sentido.

18 **¿Marcará lo mismo un galvanómetro si eliminamos algunas espiras de su bobina o cuadro?**

El momento del par que actúa sobre la bobina es $\vec{M} = NI\vec{S} \times \vec{B}$, momento que es compensado por el resorte espiral. A igualdad de intensidad, si reducimos el número de espiras, el momento del par de la bobina será menor, por lo que su tendencia a orientarse a favor del campo magnético disminuirá. La consecuencia de ello es que el galvanómetro marcará un valor menor que el real, es decir, marcará por defecto (véase la figura 5.16).

19 **PAU** **Con una velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ m/s, un electrón se mueve en una región del espacio en la que el campo magnético viene dado por $\vec{B} = 0{,}3\vec{i} - 0{,}02\vec{j}$ T. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre él? ¿Y su módulo?**

La fuerza que actúa sobre el electrón es:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

Sustituyendo los datos:

$$\vec{F} = (-1{,}6\cdot10^{-19})\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0{,}3 & -0{,}02 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 9{,}6\cdot10^{-21}\vec{i} + 1{,}4\cdot10^{-19}\vec{j} + 5{,}4\cdot10^{-20}\vec{k}\ \mathrm{N}$$

Y, por tanto, su módulo valdrá:

$$F = \sqrt{(9{,}6\cdot10^{-21})^2 + (1{,}4\cdot10^{-19})^2 + (5{,}4\cdot10^{-20})^2}$$

Es decir:

$$F = 1{,}5\cdot10^{-19}\ \mathrm{N}$$

20 PAU Una bobina rectangular formada por 30 espiras de 10 cm × 8 cm conduce una corriente de 1,5 A. Se introduce dicha bobina en un campo magnético uniforme de 0,8 T, de modo que la normal al plano de la bobina forma 60° con las líneas del campo.

***a)* ¿Cuál es el valor del momento magnético de la bobina?**

***b)* ¿Cuánto vale el momento del par de fuerzas que actúa sobre la bobina?**

a) El momento magnético de la bobina es:

$$m = NIS = 0{,}36\ \mathrm{A\ m^2}$$

b) Teniendo en cuenta que el momento de fuerzas actuante es $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$, el valor de dicho momento del par será:

$$M = mB\ \mathrm{sen}\ 60° = 0{,}249\ \mathrm{N\ m}$$

Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos

21 PAU ¿Cómo hemos de aplicar dos campos uniformes, uno eléctrico y otro magnético, para que sus respectivas fuerzas sobre una partícula con velocidad *v* se cancelen? ¿Cuál ha de ser la relación entre sus módulos?

Deben estar cruzados, es decir, ser mutuamente perpendiculares, como se ilustra en la figura 5.23, por ejemplo, y tal y como se ha expuesto al hablar del selector de velocidades.

La relación entre sus módulos ha de ser igual a la velocidad de incidencia de las partículas ($v = E/B$).

22 ¿Se podría detener una partícula cargada en un campo magnético uniforme?

No podría detenerse nunca. Si se moviera en la dirección del campo, lo haría con velocidad constante, pues $\vec{F} = 0$, pero si lo hiciera en cualquier otra dirección, llevaría un movimiento helicoidal de avance o un movimiento circular (en caso de que incidiese perpendicularmente).

23 ¿Cómo puede usarse el movimiento de una partícula cargada para distinguir un campo eléctrico de uno magnético?

Si la partícula cargada incide en la dirección del campo desconocido y se acelera o decelera, se tratará de un campo eléctrico; por el contrario, si se mueve con velocidad constante, será un campo magnético.

Si incide en dirección perpendicular y sufre una desviación parabólica en la dirección del campo, se tratará de un campo eléctrico, mientras que si sigue una trayectoria circular en dirección perpendicular al campo, estaremos ante un campo magnético.

24 ¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre una partícula cargada?

El trabajo es nulo, al ser una fuerza centrípeta, perpendicular a la velocidad. De hecho, el campo magnético no modifica la energía cinética de las cargas, tan solo imprime a estas un movimiento circular.

25 PAU Dos iones (Fe^{2+} y Fe^{3+}) penetran en dirección perpendicular a un campo uniforme con la misma velocidad. ¿Cómo son en comparación los períodos de sus revoluciones en el seno del campo? ¿Y los radios de las circunferencias que describen?

El período de revolución viene dado por la expresión:

$$T = \frac{2\pi m}{QB}$$

mientras que el radio que describen es:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

En el caso del ion Fe^{2+}, su carga, Q, es igual a $2e$, mientras que en el caso del ion Fe^{3+} la carga Q vale $3e$.

Puesto que todos los demás factores son iguales, la relación entre períodos es:

$$T(Fe^{2+}) = \frac{3}{2}\,T(Fe^{3+})$$

E, igualmente:

$$r(Fe^{2+}) = \frac{3}{2}\,r(Fe^{3+})$$

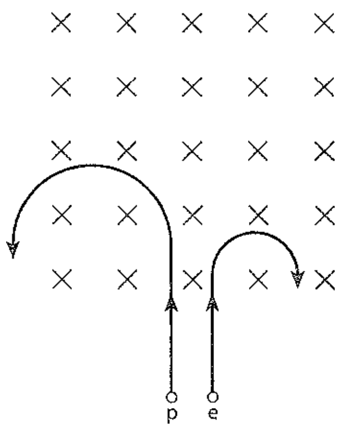
26 PAU Un protón incide en dirección perpendicular a un campo de 3 T. ¿Con qué velocidad debe hacerlo para que el radio de su trayectoria sea de 2 cm?

Si incide perpendicularmente, el radio de su trayectoria vendrá dado por:

$$r = \frac{mv}{QB} \Rightarrow v = \frac{QBr}{m} = 6\cdot10^6\ \mathrm{m/s}$$

27 PAU Un protón y un electrón penetran en dirección perpendicular a un campo magnético entrante hacia el papel. Representa de modo aproximado las trayectorias que describirán, así como la razón entre sus radios. ¿Cuánto tarda cada partícula en completar un círculo si el campo es de 10 T?

Si la velocidad con la que penetran es la misma, el radio del círculo descrito por el protón es mayor que el correspondiente al electrón.



Dichos radios vienen dados por la expresión:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Por tanto, la relación entre ellos será:

$$\frac{r_p}{r_e} = \frac{m_p v_p}{m_e v_e} \cong 1\,840\,\frac{v_p}{v_e}$$

Puesto que la frecuencia del ciclotrón responde a la expresión:

$$\omega = \frac{Q}{m}B$$

entonces, el tiempo que tarda cada partícula en completar una vuelta viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{QB}$$

Sustituyendo los valores correspondientes al protón y al electrón, se obtiene:

$$T_p = 6{,}56 \cdot 10^{-9}\ \text{s}$$
$$T_e = 3{,}57 \cdot 10^{-12}\ \text{s}$$

28 PAU **Un ciclotrón ha sido diseñado para acelerar protones. El campo magnético con el que opera es de 1,4 T, y el radio es de 0,5 m. ¿Cada cuánto tiempo tenemos que alternar el voltaje entre las des si no consideramos efectos relativistas? ¿Cuál es la máxima energía en MeV que podría alcanzarse en este ciclotrón?**

Debe alternarse el voltaje cada semiperíodo de revolución, es decir:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{QB} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

La energía cinética máxima del ciclotrón será:

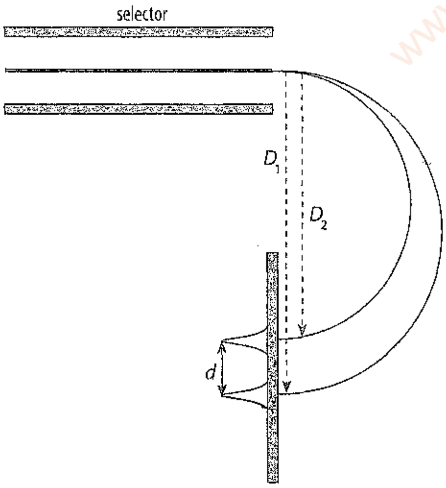
$$E_{c\,\text{máx}} = \frac{Q^2B^2r^2}{2m} = 24{,}5\ \text{MeV}$$

29 PAU **Un espectrógrafo de masas utiliza un selector de velocidades consistente en dos placas paralelas separadas 5 mm, entre las que se aplica una diferencia de potencial de 250 V. El campo magnético cruzado en la región de las placas vale 0,5 T. Calcula:**

a) **La velocidad de los iones que entran en el espectrógrafo.**

b) **La distancia entre los picos del registro correspondientes al $^{232}Th^+$ y al $^{228}Th^+$ si el campo magnético con el que opera el espectrógrafo en su interior es de 1 T.**

La siguiente figura refleja la situación planteada en el enunciado del problema:



a) El selector de velocidades selecciona aquellas partículas que, independientemente de su masa, lo atraviesen con una velocidad: $v = E/B$.

donde el campo eléctrico entre las placas es:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = 50\,000\ \text{V/m}$$

Así pues:

$$v = \frac{E}{B} = 10^5\ \text{m/s}$$

b) Cuando penetran en el campo de 1 T, los isótopos describen círculos cuyo radio será:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Puesto que v/QB es igual para los dos isótopos mencionados, el radio dependerá de la masa.

Sin embargo, como puede observarse en la figura, la distancia entre los picos es igual a la diferencia entre los diámetros.

Dado que 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, los radios y diámetros de cada isótopo del torio serán:

$$r(^{232}\text{Th}^+) = 0{,}240\,7\ \text{m} \Rightarrow \text{diámetro} = 0{,}481\,4\ \text{m}$$
$$r(^{228}\text{Th}^+) = 0{,}236\,5\ \text{m} \Rightarrow \text{diámetro} = 0{,}473\,0\ \text{m}$$

Así pues, la distancia entre los picos será:

$$d = 0{,}481\,4\ \text{m} - 0{,}473\,0\ \text{m} = 0{,}008\,4\ \text{m} = 8{,}4\ \text{mm}$$

D30 PAU **Un ion positivo de carga +1 tiene una masa de $3{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg. Si se acelera a través de una diferencia de potencial de 300 V para después entrar en dirección perpendicular a un campo magnético de 0,7 T, ¿cuál será el radio de la trayectoria que describirá? ¿Cuál sería el radio si hubiese entrado en el campo formando un ángulo de 60° con él?**

La energía cinética que adquiere el ion acelerado es:

$$E_c = Q\Delta V = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

Por lo que su velocidad de entrada será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 53\,934\ \text{m/s}$$

de modo que el radio de la trayectoria descrita es:

$$r = \frac{mv}{QB} = 0{,}015\ \text{m}$$

Si incidiera con dicha velocidad formando un ángulo de 60° con el campo, sería la componente perpendicular de la velocidad la que determinaría el valor del radio.

$$r' = \frac{mv_{\text{perp}}}{QB} = \frac{mv\,\text{sen}\,60°}{QB} = 0{,}013\ \text{m}$$

Campos magnéticos producidos por corrientes

31 PAU **Si deseamos que el campo en un punto cualquiera entre dos conductores rectilíneos paralelos sea más intenso que el que correspondería a un único conductor, ¿en qué sentido relativo deberían circular las corrientes?**

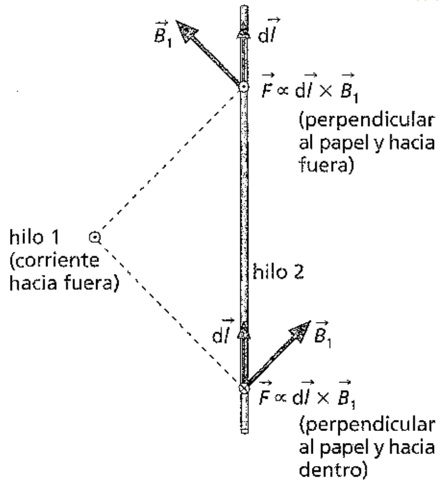
En sentidos opuestos; de ese modo, el sentido de los campos magnéticos producidos por ambos conductores en los puntos intermedios sería el mismo, como puede comprobarse con la regla del pulgar derecho.

32 **¿Qué le ocurrirá a un muelle hecho de material conductor si hacemos circular por él una corriente intensa?**

El muelle se encogerá, pues cada dos espiras consecutivas portarían corrientes paralelas del mismo sentido, de modo que aparecerán fuerzas atractivas. Sin embargo, en dos puntos diametralmente opuestos de una misma espira, las corrientes circularán en sentidos opuestos, por lo que las fuerzas entre ambos puntos serán repulsivas y tenderán a abrir la espira y aumentar su diámetro. En resumen, las espiras aumentan de diámetro a la vez que se juntan. Podemos decir, pues, que el muelle se comprime y aumenta de diámetro.

33 **Por dos conductores rectilíneos y perpendiculares se hacen pasar corrientes I_1 e I_2. ¿Qué efecto producirán?**

El campo magnético que genera un conductor produce en el otro fuerzas perpendiculares en cada punto tanto al hilo conductor como a dicho campo. Además, cobra especial relevancia el producto vectorial $d\vec{l} \times \vec{B}$, pues hace que dichas fuerzas tengan distinto sentido a un lado que al otro, tal como se observa en el siguiente dibujo:



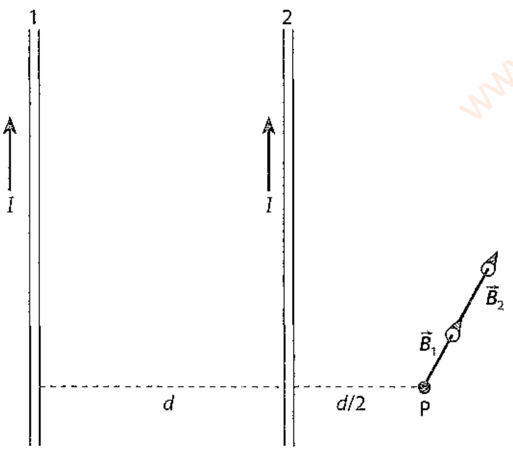
En consecuencia, se genera un par de fuerzas que tiende a orientar ambos conductores.

34 **¿Qué ocurrirá si dirigimos un haz de electrones hacia el interior de un solenoide por el que circula una corriente, de manera que aquellos penetren en la dirección del eje principal?**

Los electrones se moverán con velocidad constante, sin desviarse, pues el campo en el interior del solenoide es uniforme y tiene la dirección del eje principal.

35 **PAU** **Por dos conductores rectilíneos y paralelos circula una corriente de intensidad *I* con el mismo sentido. Si la separación entre ambos es *d*, calcula el valor del campo magnético en un punto P exterior situado a una distancia *d*/2 de uno de ellos.**

La siguiente figura representa la situación planteada en el enunciado del problema:



Los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen la misma dirección y sentido (entrante hacia el papel) y son tangentes a las líneas de fuerza circulares.

Así pues, el campo total será:

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2$$

donde:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + d/2)} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, d/2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

Por tanto:

$$B_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} + \frac{\mu_0 I}{\pi d} = \frac{4\mu_0 I}{3\pi d}$$

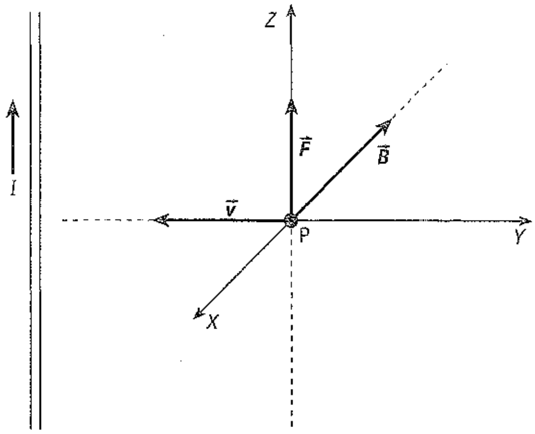
D36 **PAU** **Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 30 A. Un electrón pasa con una velocidad de $2 \cdot 10^7$ m/s a 2 cm del alambre. Indica qué fuerza actúa sobre él si:**

a) **Se mueve hacia el conductor en dirección perpendicular a este.**

b) **Se mueve paralelamente al conductor.**

c) **Se mueve en dirección perpendicular a las dos direcciones anteriores.**

a) La siguiente figura ilustra la situación descrita en el enunciado del problema:



La fuerza que experimente el electrón será la debida al campo originado por la corriente que circula por el conductor. El valor de dicho campo en el punto P, que se encuentra a 2 cm del conductor, es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

Y según el sistema de referencia elegido:

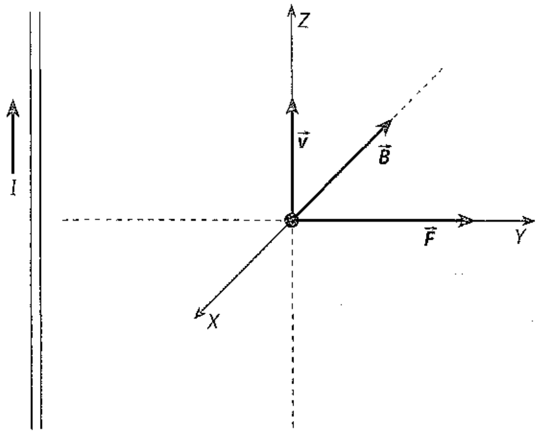
$$\vec{B} = -3 \cdot 10^{-4} \vec{i}\ \text{T}$$

Luego, la fuerza que actúa sobre el electrón cuando este incide en el punto P con una velocidad $\vec{v} = -2 \cdot 10^7 \vec{j}$ m/s es:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 9{,}6 \cdot 10^{-16} \vec{k}\ \text{N}$$

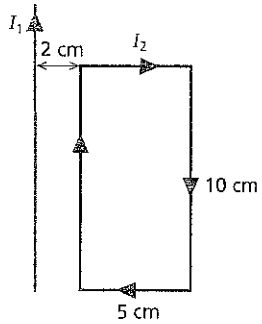
b) En este caso, si $\vec{v} = 2 \cdot 10^7 \vec{k}$ m/s, la fuerza será:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 9{,}6 \cdot 10^{-16} \vec{j}\ \text{N}$$



c) En este tercer caso, se movería en la dirección del campo magnético, por lo que la fuerza que actuaría sería nula.

37 **PAU** **Una espira rectangular de 10 cm × 5 cm se sitúa paralela a un conductor rectilíneo de gran longitud a una distancia de 2 cm, como se indica en la figura. Si la corriente que circula por el conductor es de 15 A, y la que circula por la espira en el sentido indicado es de 10 A, ¿cuál es la fuerza neta que obra sobre la espira?**



La fuerza neta será la resultante de la fuerza atractiva ($\vec{F}_1$) sobre el segmento paralelo de la izquierda y la fuerza repulsiva ($\vec{F}_2$) sobre el segmento paralelo más alejado:

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{d} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{N (de atracción)}$$

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{d'} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{N (de repulsión)}$$

Así pues:

$$F_{\text{total}} = F_1 - F_2 = 1{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{N (de atracción)}$$

38 PAU **Una corriente de 30 A recorre un hilo rectilíneo de gran longitud. Una corriente de 10 A circula por un rectángulo, ABCD, cuyos lados BC y AD son paralelos al conductor rectilíneo. Calcula la fuerza ejercida sobre cada lado del rectángulo por el campo magnético creado por el conductor.**

Datos: distancia del conductor al lado AD = 10 cm; al lado BC = 20 cm; longitud de AD = 20 cm

En general, la fuerza que el campo magnético creado por la corriente I_1 ejerce sobre cada lado de la espira vendrá dada por:

$$\vec{F} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}$$

- Fuerza sobre el lado AD:

$$B_{AD} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

Así pues:

$$\vec{B}_{AD} = -6 \cdot 10^{-5} \vec{i}\ \text{T}$$
$$\vec{l}_{AD} = 0{,}2 \vec{k}\ \text{m}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{AD} = I_2 \vec{l}_{AD} \times \vec{B}_{AD} = -1{,}2 \cdot 10^{-4} \vec{j}\ \text{N}$$

Es decir, se trata de una fuerza atractiva cuyo módulo es $12 \cdot 10^{-5}$ N.

- Fuerza sobre el lado BC:

$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

Así pues:

$$\vec{B}_{BC} = -3 \cdot 10^{-5} \vec{i}\ \text{T}$$
$$\vec{l}_{BC} = -0{,}2 \vec{k}\ \text{m}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{BC} = I_2 \vec{l}_{BC} \times \vec{B}_{BC} = 6 \cdot 10^{-5} \vec{j}\ \text{N}$$

Es decir, se trata de una fuerza repulsiva cuyo módulo es $6 \cdot 10^{-5}$ N.

- Fuerza sobre el lado AB:

Consideremos un punto de dicho lado situado a una distancia x del conductor rectilíneo.

El campo magnético vale en él:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

y la fuerza que actúa sobre un elemento de longitud dx de este lado conductor es:

$$dF_{AB} = I_2 B dx = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx$$

Luego, para obtener la fuerza correspondiente a todo el lado AB, hay que integrar la expresión anterior entre $x = 0{,}1$ m y $x = 0{,}2$ m, esto es:

$$F_{AB} = \int_{0,1}^{0,2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [\ln x]_{0,1}^{0,2} =$$
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{0{,}2}{0{,}1} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

Esta fuerza está dirigida hacia arriba y es idéntica a la que actúa sobre el lado CD, solo que en este caso está dirigida hacia abajo.

39 PAU **¿Cuántas espiras circulares estrechamente arrolladas deberá tener una bobina de 12,56 mm de radio por la que circula una intensidad de 0,25 A, para que el campo magnético en su centro valga 10^{-4} T?**

El campo en el centro de una bobina formada por N espiras circulares viene dado por la expresión:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2r} \vec{u}_e$$

Es decir, tiene la dirección del eje principal de la bobina; por tanto:

$$N = \frac{2rB}{\mu_0 I} = \frac{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot 10^{-4}\ \text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 0{,}25\ \text{A}} = 8$$

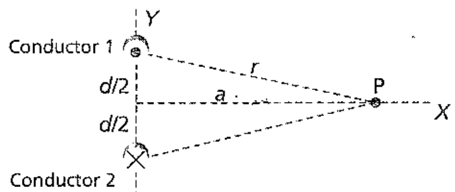
Es decir, la bobina debe tener ocho espiras.

D40 PAU **Dos conductores largos y paralelos por los que circulan corrientes de intensidad I en sentidos opuestos están separados una distancia d, tal como se aprecia en la figura.**

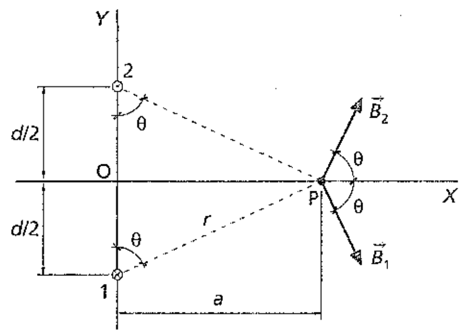
a) **Demuestra que el campo en un punto P cualquiera equidistante de ambos conductores viene dado por la expresión:**

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(d^2 + 4a^2)} \vec{u}_x$$

b) **Determina, como consecuencia de la anterior expresión general, el valor del campo magnético en el punto medio entre ambos conductores.**



a) En el siguiente dibujo se muestran los campos creados por los dos hilos en el punto P:



El campo magnético total será la suma de los campos creados por ambos hilos conductores. Por simetría, se observa que las componentes Y de los dos campos magnéticos se anulan mutuamente, mientras que las componentes X se suman. Es decir:

$$B_y = 0$$
$$B_x = 2B_{1x}$$

donde B_{1x} es el campo magnético creado por el conductor 1 en la dirección X. Ahora bien,

$$B_{1x} = B_1 \cos\theta$$

Aplicando la expresión **5.17** y teniendo en cuenta que $\cos\theta = d/2r$, resulta:

$$B_x = 2B_{1x} = \frac{2\mu_o I}{2\pi r}\frac{d}{2r} = \frac{\mu_o I d}{4\pi r^2}$$

Ahora bien, $r^2 = d^2/4 + a^2$, luego:

$$B_x = 2B_{1x} = \frac{2\mu_o I}{4\pi\left(\frac{d^2}{4} + a^2\right)} = \frac{2\mu_o I d}{\pi(d^2 + 4a^2)}$$

b) En el punto medio de ambos conductores, $a = 0$, luego:

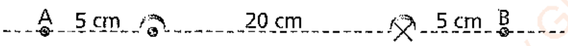
$$B_x(a = 0) = \frac{2\mu_o I}{\pi d}$$

41 **PAU** **Dos hilos conductores, 1 y 2, rectilíneos, paralelos y muy largos, están separados por una distancia de 20 cm. Por el hilo 1 circula una corriente de intensidad $I = 2$ A dirigida hacia fuera del papel.**

a) **¿Qué intensidad y en qué sentido debe circular por el conductor 2 para que el campo magnético en el punto A de la figura sea nulo?**

b) **¿Cuánto valdrá, entonces, el campo magnético en el punto B?**

c) **¿Qué fuerza actúa en esas condiciones sobre la unidad de longitud de conductor y qué carácter tiene (atractiva o repulsiva)?**



a) Los campos magnéticos generados por los hilos 1 y 2 sobre cualquier punto de la recta horizontal que los une serán verticales, si bien pueden estar orientados hacia arriba o hacia abajo. El campo magnético creado por el hilo 1 en el punto A será, aplicando la regla de la mano derecha, hacia abajo, y su módulo vendrá dado por:

$$B_{A1} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r d_1} = \frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}05}$$

Por su parte, el campo creado por el hilo 2 en dicho punto será:

$$B_{A2} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi r d_2} = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi \cdot 0{,}25}$$

Para que ambos campos se compensen y den un campo resultante nulo, el sentido de corriente en el hilo 2 debe ser opuesto al del hilo 1, es decir, debe ir hacia el fondo del papel. Para determinar el valor de dicha corriente, igualamos ambas expresiones:

$$\frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}05} = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi \cdot 0{,}25} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \cdot 0{,}25}{0{,}05} = 10 \text{ A}$$

b) El campo magnético en el punto B será $\vec{B}_B = \vec{B}_{B1} + \vec{B}_{B2}$, donde:

$$B_{B1} = \frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}3} \text{ y } B_{B2} = \frac{\mu_o \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05}$$

Ahora bien, $\vec{B}_{B1}$ está dirigido en este caso hacia arriba, y $\vec{B}_{B2}$, hacia abajo. El campo resultante en B será por tanto:

$$B_B = \frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{2}{0{,}3} - \frac{10}{0{,}05}\right) = -3{,}87 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

El signo menos indica que el campo resultante está dirigido hacia abajo.

c) Sabemos que la fuerza es repulsiva, pues las corrientes circulan en sentidos contrarios. Su valor viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{l} = \frac{\vec{F}_{21}}{l} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 10}{0{,}2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$

6 Inducción electromagnética

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 156)

1. ¿Puede conseguirse corriente eléctrica a partir de un imán? ¿Cómo?

Sí, se puede producir corriente eléctrica mediante el fenómeno llamado inducción electromagnética. Haciendo que varíe el campo magnético, como en las experiencias de Faraday, moviendo un imán con rapidez en el interior de una bobina.

2. ¿Podría circular corriente eléctrica por un circuito que no estuviese conectado a un generador?

Sí, induciendo una corriente eléctrica mediante un solenoide y un imán. Si acercamos y alejamos rápidamente el imán a la bobina generamos la corriente.

3. ¿Qué es una corriente alterna? ¿Cuál es su fundamento?

Es una corriente que cambia cíclicamente de valor y sentido. Su fundamento se debe a su generación mediante alternadores que al girar sus espiras en el seno de un campo magnético hace variar el flujo magnético.

4. ¿Es lo mismo un generador que un motor?

No es lo mismo, el motor al contrario que un generador, transforma energía eléctrica en mecánica observado en el movimiento de rotación del motor.

5. ¿En qué fenómeno se basa el funcionamiento de un transformador?

Su funcionamiento se basa en el fenómeno de la inducción electromagnética que se encarga de transformar voltajes de mayor a menor intensidad, o viceversa.

Actividades (páginas 159/177)

1 PAU Una espira circular de 5 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,4 T. Calcula:

***a)* El flujo magnético que atraviesa la espira en esa situación.**

***b)* El flujo magnético que atraviesa la espira si esta se gira 30° alrededor de un eje que pase por su centro y sea perpendicular a $\vec{B}$.**

El área de la espira circular es:

$$S = \pi r^2 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

a) Dado que la espira se sitúa perpendicularmente al campo, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tienen la misma dirección, luego:

$$\Phi_1 = BS \cos 0° = BS = 3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

b) En la segunda situación, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo de 30°, luego:

$$\Phi_2 = BS \cos 30° = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

2 PAU Colocamos una espira circular de 2 cm de radio en el seno de un campo magnético uniforme de 0,2 T, de modo que el plano de la espira sea paralelo al campo. ¿Cuánto vale el flujo magnético a través de la espira? ¿Y si el plano de la espira forma 45° con el campo? ¿Y si forma 90°? ¿Qué ocurrirá si hacemos girar la espira?

La superficie correspondiente a la espira es:

$$S = \pi r^2 = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

En el primer caso, el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es de 90°, por lo que:

$$\Phi_0 = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos 90° = 0$$

Si forman 45°, el flujo será:

$$\Phi_1 = BS \cos 45° = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Si la superficie se sitúa perpendicularmente al campo, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tienen la misma dirección:

$$\Phi_2 = BS \cos 0° = 2{,}51 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Como puede comprobarse, una forma de variar el flujo magnético que atraviesa una superficie consiste en girar la propia superficie (espira) en el seno de un campo magnético.

3 PAU Acercamos un electroimán a una espira rectangular cuyas dimensiones son 3 cm × 4 cm, de modo que el campo magnético pase de 0 a 0,8 T en una décima de segundo. ¿Cuál es el valor de la fuerza electromotriz inducida?

La superficie de la espira es:

$$S = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

El flujo inicial es:

$$\Phi_0 = B_0 S = 0$$

Y el final es:

$$\Phi_f = B_f S = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Por tanto, la fem inducida será:

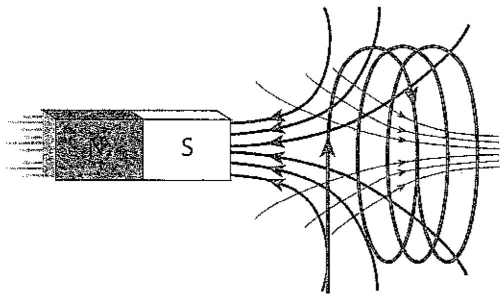
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

4 Razona cuál será el sentido de la corriente inducida en el caso de que:

***a)* Acerquemos un imán a la espira por el polo sur.**

***b)* Alejemos el imán en la misma posición.**

a) Al acercar un imán por el polo sur, aumenta el flujo saliente de la espira, por lo que la corriente inducida se opondrá a dicha variación, produciendo un campo con flujo entrante. Por tanto, el sentido es el que se indica en la siguiente figura:



b) Por el contrario, al alejar el imán, disminuye el flujo saliente, por lo que la corriente inducida tendrá ahora el sentido contrario al caso anterior.

5 La figura 6.10 muestra dos bobinados de hilo conductor alrededor de un cilindro de plástico. Si la corriente en la bobina de la izquierda aumenta, explica cuál será el sentido de la corriente inducida en la bobina de la derecha e indícalo en la figura.

Al aumentar la corriente, aumenta el campo y, en consecuencia, el flujo magnético.

Las líneas del campo se dirigen hacia la izquierda, por lo que la corriente inducida tenderá a generar un campo magnético cuyas líneas se dirijan hacia la derecha en el interior de la bobina, oponiéndose así al aumento del flujo de líneas hacia la izquierda.

En consecuencia, la corriente inducida en la segunda bobina circulará en sentido contrario a la de la bobina de la izquierda.

6 **PAU** **Una bobina de 100 espiras circulares de 2 cm de radio se sitúa con sus espiras perpendiculares a un campo magnético cuyo valor varía según $B = 1{,}5 \cdot e^{0{,}2t}$ T.**

a) **¿Cómo varía la fuerza electromotriz inducida con el tiempo?**

b) **¿Cuál será el valor de dicha fuerza electromotriz inducida a los 10 segundos?**

a) La superficie de la espira es:

$$S = \pi r^2 = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

La fuerza electromotriz se debe, en este caso, a la variación del campo magnético, y viene dada por:

$$\varepsilon = -NS\frac{dB}{dt}$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -100 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2t}\ \text{V} = $$
$$= -3{,}77 \cdot 10^{-2} \cdot e^{0{,}2t}\ \text{V}$$

b) La fem a los 10 s será:

$$\varepsilon = -0{,}28\ \text{V}$$

7 **PAU** **Una bobina de 500 espiras cuadradas de 4 cm de lado se encuentra inmersa en un campo magnético con sus espiras perpendiculares a las líneas de campo. Si el valor del campo magnético cambia de 0,2 T a 0,9 T en 0,01 s:**

a) **¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida?**

b) **¿Qué dimensiones deberán tener las espiras para triplicar la fuerza electromotriz en las mismas condiciones?**

a) La fem inducida será:

$$\varepsilon = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

donde:

$$S = (0{,}04\ \text{m})^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

Así:

$$\varepsilon = -500 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cdot \frac{0{,}9\ \text{T} - 0{,}2\ \text{T}}{0{,}01\ \text{s}}$$

$$\varepsilon = -56\ \text{V}$$

b) Para triplicar la fuerza electromotriz, ha de triplicarse el valor de la superficie, que deberá ser de $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ m^2, lo que corresponde a un lado de aproximadamente 6,9 cm si la espira es cuadrada, o a unas dimensiones de 6 cm × 8 cm, si es rectangular.

8 **¿Se induce corriente si una espira rectangular cuyo plano es perpendicular a un campo magnético uniforme entrante en el papel se desplaza hacia arriba o hacia abajo sin cambiar su orientación? Da una explicación desde un punto de vista energético.**

No se induce corriente, pues ni el campo ni la superficie son modificados. Por tanto, no hay variación de flujo.

La razón es que, al desplazar verticalmente la espira, la fuerza ejercida actúa en la dirección del campo, por lo que no da lugar al establecimiento de corriente.

9 **PAU** **Teniendo en cuenta que la fem inducida es igual a *IR* (donde *R* es la resistencia del circuito), halla una expresión para la intensidad que circula en una espira, si dispone de un lado móvil que se desplaza perpendicularmente a un campo magnético uniforme sin salir de él.**

Puesto que $|\varepsilon| = IR$, y además $\varepsilon = -Blv$, entonces:

$$IR = Blv \Rightarrow I = \frac{Blv}{R}$$

El signo negativo carece de sentido en el valor de la intensidad de corriente.

10 **PAU** **Una bobina de 150 espiras cuadradas de 3 cm de lado gira en un campo magnético de 0,6 T:**

a) **¿Cuál debería ser su frecuencia para inducir una fuerza electromotriz máxima de 12 V?**

b) **Si la bobina girase a 60 Hz, ¿cuál sería su fuerza electromotriz máxima?**

a) La fem máxima inducida vale:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega = NBS2\pi f$$

Por lo que:

$$f = \frac{\varepsilon_0}{NBS2\pi} = 23{,}6\ \text{Hz}$$

b) Si la bobina girase a 60 Hz, aplicando la expresión anterior, obtendríamos:

$$\varepsilon_0' = NBS2\pi f = 30{,}5\ \text{V}$$

11 **PAU** **La bobina de un generador de corriente alterna induce una fuerza electromotriz máxima de 50 V a una frecuencia de 60 Hz. Determina el número de espiras de la bobina si las dimensiones de las espiras son de 4 cm × 6 cm y la bobina gira en un campo magnético de 0,92 T.**

Usando la expresión de la fuerza electromotriz máxima:

$$\varepsilon_0 = NBS2\pi f$$

obtenemos:

$$N = \frac{\varepsilon_0}{BS2\pi f} = 60\ \text{espiras}$$

12 **Con 50 m de hilo conductor se construye una bobina de 100 espiras circulares. La bobina así construida se hace girar a 50 Hz en un campo magnético uniforme. ¿Cuánto debe valer el campo magnético para que genere una fuerza electromotriz máxima de 12 V?**

A partir de la expresión de la fem inducida máxima, ε_0, se puede obtener el valor del campo magnético necesario para cumplir las condiciones del enunciado:

$$B = \frac{\varepsilon_0}{S \cdot 2\pi f}$$

Para determinar el área de las espiras, sabemos que la longitud total de todas ellas es de 50 m, es decir:

$$L = 2\pi r N$$

Despejamos *r*:

$$r = L/2\pi N$$

Sustituyendo en la primera expresión, se obtiene:

$$B = \frac{\varepsilon_0}{\pi \dfrac{L^2}{4\pi^2 N^2} \cdot 2\pi f}$$

$$B = \frac{2N^2\varepsilon_0}{L^2 f} = \frac{2 \cdot 100^2 \cdot 12}{50^2 \cdot 50} = 1{,}92\ \text{T}$$

13 **PAU** **Traza la gráfica ε-*t* correspondiente a un período completo para el caso *b)* de la actividad 10. Sobre la misma gráfica, dibuja ahora la que ilustra el caso de una frecuencia de 30 Hz. ¿Qué conclusiones obtienes?**

El período para una frecuencia de 60 Hz es:

$$T = 1/60\ \text{s}$$

La fem máxima, ε_0, es, en este caso, 30,5 V.

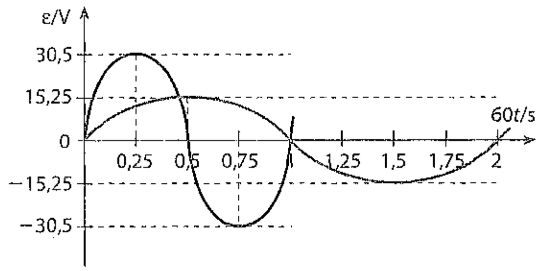
Si la frecuencia se reduce a la mitad, también lo hace la fem máxima, como se desprende de su expresión, por lo que, para una frecuencia de 30 Hz:

$$T' = 1/30\ \text{s} = 2/60\ \text{s y } \varepsilon_0' = 15{,}25\ \text{V}$$

La representación gráfica corresponderá a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\ \text{sen}\ 2\pi f t$$

Las gráficas de ambas fem serán las siguientes:



Como se deduce, al reducir la frecuencia a la mitad, disminuye también a la mitad la fem máxima y se duplica el período.

14 **Razona el sentido de la corriente autoinducida en el solenoide del circuito de la figura 6.23 al abrir el interruptor. ¿Qué ocurre con el brillo de la bombilla?**

La corriente tendrá el sentido que se indica en la figura, puesto que la corriente autoinducida tratará de contrarrestar la disminución del campo en el interior del solenoide.

La consecuencia es que la bombilla no dejará de lucir de forma instantánea.

15 **PAU** **Un solenoide de 500 espiras apretadas tiene una longitud de 30 cm y un radio de 1 cm. Por él circula una corriente de 4 A. Determina:**

a) **El valor del campo magnético en un punto de la región central de su eje.**

b) **El flujo magnético a través del solenoide, si B es constante en su interior.**

c) **La inductancia del solenoide.**

d) **La fuerza electromotriz autoinducida en el solenoide cuando la intensidad varía a razón de 180 A/s.**

a) El valor del campo en cualquier punto de la región central de su eje es:

$$B = \mu_o I \frac{N}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2 \cdot 4\,\text{A} \cdot \frac{500}{0{,}3\,\text{m}} =$$
$$= 8{,}37 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$$

b) Por tanto, el flujo valdrá:

$$\Phi = NBS = 1{,}31 \cdot 10^{-3}\,\text{Wb}$$

donde:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

c) La inductancia del solenoide es:

$$L = \frac{\Phi}{I} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{H}$$

d) La fem autoinducida será:

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -3{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{H} \cdot 180\,\text{A/s} = -0{,}059\,\text{V}$$

16 **PAU** **Una bobina rectangular de 100 vueltas y cuyas dimensiones son 10 cm × 15 cm gira a 2 000 rpm alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,8 T. ¿Qué voltaje máximo es capaz de suministrar?**

El voltaje máximo que es capaz de suministrar responde a la expresión:

$$\varepsilon_o = NBS\omega$$

donde:

$$S = 0{,}015\,\text{m}^2 \text{ y } \omega = 2\,000 \cdot 2\pi/60\,\text{rad/s} =$$
$$= 66{,}67\pi\,\text{rad/s}$$

Por tanto:

$$\varepsilon_o = 251\,\text{V}$$

17 **PAU** **Un generador de corriente alterna (AC) está formado por una bobina de 23 espiras de 0,05 m² de área que giran en un campo magnético de 0,6 T con una frecuencia de 50 Hz. Si la resistencia total de la bobina es de 20 Ω, determinar:**

a) **La fuerza electromotriz máxima inducida.**

b) **La intensidad máxima inducida.**

a) La fem inducida máxima es:

$$\varepsilon_o = 2\pi\, NSBf = 2\pi \cdot 23 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 50 = 217\,\text{V}$$

b) A partir de la ley de Ohm, se obtiene:

$$I_{máx.} = \frac{\varepsilon_o}{R} = \frac{217\,\text{V}}{20\,\Omega} = 10{,}85\,\text{A}$$

18 **PAU** **Un aparato funciona a 9 V y con 0,5 A mediante un transformador cuya bobina primaria tiene 3 000 espiras. Si la tensión de entrada es de 220 V:**

a) **¿Cuántas espiras debe tener la bobina secundaria?**

b) **¿Cuál es la intensidad, en mA, que circula por la primaria?**

a) Aplicando la expresión **6.21**, tenemos que:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} \Rightarrow N_2 = N_1\frac{V_2}{V_1} = 123 \text{ espiras}$$

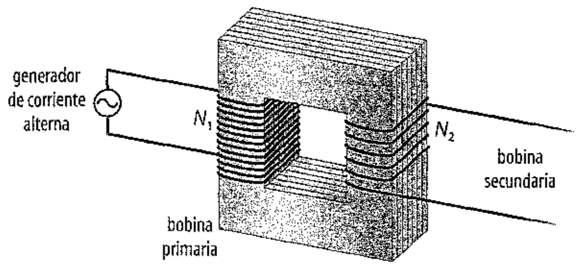
b) A partir de la expresión **6.21**:

$$I_1 = I_2\frac{N_2}{N_1} = 20{,}5\,\text{mA}$$

19 **Un adaptador de corriente para pequeños electrodomésticos se conecta a un enchufe de 220 V de corriente alterna. Dispone de un selector que proporciona tensiones en la salida que van de 3 V a 12 V. Razona cuál puede ser el mecanismo de esta fuente de alimentación.**

Mediante un conector de salida se selecciona el número de espiras adecuadas del secundario que produzcan el voltaje de salida requerido.

El selector variará desde un número de espiras de 1/73 N_1 para obtener la salida de 3 V, hasta 1/18 N_1 para la salida de 12 V.



20 **PAU** **Si se aplica una tensión de entrada de 220 V a un transformador que consta de una bobina de entrada de 200 espiras y de una bobina de salida de 5 espiras, ¿cuál es la tensión de salida?**

La tensión de salida será:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} = 5{,}5\,\text{V}$$

21 **¿Por qué un imán puede perder su capacidad de imantación al ser calentado?**

Porque la agitación térmica produce la desorganización y desorientación de los momentos magnéticos atómicos.

Cuestiones y problemas (páginas 180/181)

Guía de repaso

1 **¿Qué es la inducción electromagnética?**

Es la generación de corriente eléctrica inducida por un campo magnético.

2 **Resume las experiencias de Faraday que condujeron al descubrimiento de la inducción.**

Las experiencias de Faraday consistía en un dispositivo formado por dos bobinas independientes superpuestas pero aisladas la una con respecto a la otra. Solo una de ellas la conectó a una potente batería. Manteniendo esta conectada la movió desplazándola en el interior de la segunda bobina. Luego, desconectó la bobina de la batería y se limitó a mover un imán en el interior de la segunda bobina.

3 **Explica y expresa matemáticamente la ley de Faraday.**

La fem que da lugar a la corriente eléctrica inducida en un circuito es igual a la rapidez con que varía el flujo magnético a través del mismo. La expresión de esta fem es:

$$\varepsilon = -\Delta\Phi/\Delta t$$

4 **¿Qué otros fenómenos de la física o la química tienen un fundamento similar a la ley de Lenz?**

El principio de acción y reacción o la ley de Le Chatelier del equilibrio químico.

5 **¿Cómo se puede inducir una corriente eléctrica?**

Variando el campo magnético, variando el tamaño de la superficie atravesada por las líneas de campo y variando la orientación de la espira en el campo al hacerla girar.

6 **¿Cómo es la corriente que se induce al hacer girar una espira en el seno de un campo magnético uniforme? ¿Qué expresión tiene la intensidad de dicha corriente?**

La corriente inducida es alterna. Su expresión es:

$$I = I_o \text{sen } \omega t$$

7 **¿En qué consiste la autoinducción?**

La autoinducción se produce cuando circula una corriente de intensidad variable por un conductor y se genera una fem en el propio conductor que se opone a la variación que la produce.

8 **¿En qué casos se manifiesta la autoinducción? ¿Cómo puede aumentarse?**

La autoinducción se manifiesta, por ejemplo, al cerrar o abrir un circuito. Puede aumentarse intercalando un solenoide de gran arrollamiento y con un núcleo de hierro en su interior.

9 **¿Conoces algún fenómeno mecánico equivalente a la autoinducción?**

La inercia (véase el texto del margen que aparece en la página 168 del *Libro del alumno*).

10 **¿Qué es la inductancia de un circuito? ¿Qué unidades tiene?**

La inductancia es el factor de proporcionalidad entre el flujo del campo magnético y la intensidad de corriente que lo origina. Se mide en henrios (H).

11 **¿Puede usarse el fenómeno de la inducción con objeto de producir corriente continua? ¿Es exactamente continua la corriente producida? ¿Qué se hace para conseguir que la corriente sea casi continua?**

Sí mediante los generadores de corriente continua. No es totalmente continua porque se produce una pequeña variación que se resuelve haciendo que giren numerosas bobinas y utilizando un conmutador de muchos segmentos.

12 **¿De dónde proviene la energía eléctrica que suministra un generador?**

Proviene de la energía mecánica del agente que hace girar la bobina.

13 **¿Qué diferencia existe entre un motor y un generador?**

Estos dispositivos transforman la energía de modo inverso: un generador convierte energía mecánica en eléctrica, mientras que el motor transforma energía eléctrica en mecánica.

14 **¿Cómo funciona un transformador?**

Los transformadores son una aplicación del fenómeno de la inducción y está compuesto por dos bobinas (primaria y secundaria) enrolladas en un núcleo de hierro. Conectando la bobina primaria a un generador de corriente alterna esta inducirá una corriente en el secundario.

15 **¿En qué consiste la unificación que promueve Maxwell?**

Consiste en la unificación de la electricidad y el magnetismo en lo que se conoce como electromagnetismo.

16 **¿Cómo se clasifican las sustancias según su respuesta ante un campo magnético?**

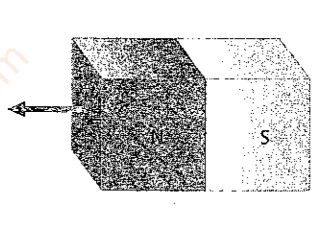
En ferromagnéticos, paramagnéticos y diamagnéticos.

Inducción electromagnética

17 **Explica por qué apenas luce el faro de una bicicleta si vamos muy despacio.**

Al girar despacio, el rotor que contacta con la rueda y hace girar la bobina que finalmente produce la corriente, genera una pequeña fem máxima, como se deduce de la expresión $\varepsilon_o = NBS\omega$. En consecuencia, disminuye la intensidad que circula será pequeña y el foco lucirá poco.

18 **Si alejamos un imán de una espira como se observa en la figura, ¿cuál será el sentido de la corriente inducida?**



Al disminuir el flujo saliente (hacia la izquierda de la espira), la corriente inducida circulará en sentido antihorario en la espira.

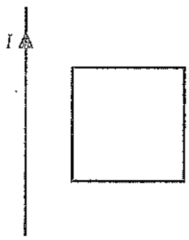
19 **Una espira cuadrada de alambre conductor está próxima a un cable recto, indefinido, recorrido por una corriente I, como indica la figura. Explica, razonadamente, en qué sentido circulará la corriente inducida en la espira:**

a) **Si se aumenta la corriente *I*.**

b) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira hacia la derecha, manteniéndola en el mismo plano.**

c) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira hacia la izquierda, manteniéndola en el mismo plano.**

d) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira paralelamente al conductor.**



Hablaremos de flujo entrante si este entra hacia el papel, y saliente, si sale del papel.

a) Si se aumenta la corriente, se incrementa el flujo entrante, por lo que la corriente inducida tratará de contrarrestar dicho incremento, circulando en sentido antihorario y creando un campo con flujo saliente.

b) Puesto que el campo magnético del conductor rectilíneo disminuye con la distancia, al hacer esto, se producirá una disminución del flujo entrante, por lo que la corriente inducida tenderá a contrarrestar dicha disminución, circulando en sentido horario.

c) Al contrario que en el caso anterior, aumentará el flujo entrante. En consecuencia, la corriente circulará en la espira en sentido antihorario.

d) No se induce corriente, pues no se produce variación de flujo.

20 **¿Es correcto afirmar que siempre que movemos una espira en el seno de un campo magnético uniforme se induce una corriente?**

No es correcto. Para que se induzca corriente, debe variar el flujo magnético, esto es, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie de la espira. Si la espira se mueve de modo que no cambia la orientación relativa entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$, no se induce corriente.

21 **¿Se puede afirmar que cuando gira una espira en el seno de un campo magnético uniforme se induce una corriente?**

No es correcto. Debe añadirse que el eje de giro tiene que ser perpendicular a $\vec{B}$. Si la espira gira alrededor de un eje que tenga la orientación del campo, no se produce variación de flujo y, consecuentemente no se induce corriente.

22 **PAU** **Un solenoide formado por 800 espiras circulares de 2 cm de diámetro y 15 Ω de resistencia se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme de 0,5 T en la dirección del eje del solenoide. Si el campo magnético disminuye uniformemente hasta hacerse nulo en 0,2 s.**

***a)* Determina la fem inducida.**

***b)* Calcula la intensidad recorrida por el solenoide y la carga transportada en ese intervalo de tiempo.**

a) El flujo inicial que atraviesa el solenoide es:

$$\Phi_0 = NB_0S\cos 0° = 800 \cdot 0{,}5 \cdot \pi\,(0{,}01)^2 = 0{,}12\text{ Wb}$$

Dado que el flujo final es cero, la fem inducida resulta ser:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6\text{ V}$$

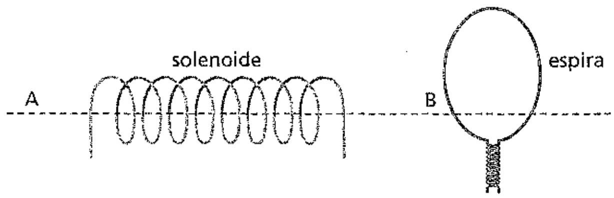
b) La intensidad recorrida por el solenoide en ese tiempo es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 0{,}04\text{ A}$$

Puesto que $Q = It$, la carga transportada en ese intervalo de tiempo será:

$$Q = It = 8 \cdot 10^{-3}\text{ C}$$

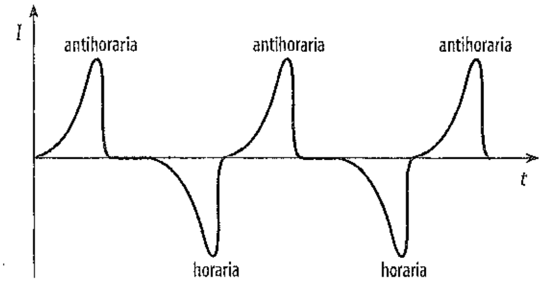
23 **PAU** **Razona qué es lo que ocurriría si se hace oscilar una espira o bobina de espiras entre los puntos A y B a lo largo del eje de un solenoide, como se indica en la figura.**



Supongamos que por el solenoide circula una corriente en sentido horario; en ese caso, las líneas del campo serían salientes hacia la derecha del solenoide y entrantes por su izquierda. Imaginemos, por simplificar el problema, que el diámetro de la espira es similar al del solenoide. Al mover la espira hacia la izquierda, aumentará el flujo que entra en ella por su izquierda, por lo que se inducirá una corriente antihoraria, que cesará cuando el solenoide discurra por el interior de la espira, donde podemos suponer que el flujo se mantiene constante. Cuando la espira sale por la parte izquierda del solenoide, disminuye el flujo entrante por ese mismo lado, por lo que la corriente inducida circulará ahora en sentido horario, contrarrestando dicha disminución. Al oscilar, a continuación, desde A hacia B, el efecto se invierte: al principio aumenta el flujo entrante por la izquierda, por lo que la corriente inducida circulará en sentido antihorario. No circulará corriente mientras la espira discurra por el solenoide, y, al salir por la derecha, la corriente inducida circulará en sentido horario. Así pues, conseguiremos que por la espira circule una corriente alterna al hacerla oscilar entre A y B.

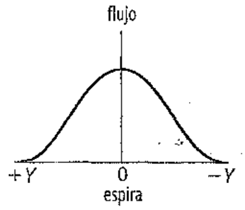
24 **PAU** **Representa cualitativamente la gráfica intensidad-tiempo que se obtendría en el caso sugerido de la cuestión anterior.**

La gráfica intensidad-tiempo tendría la forma representada en la siguiente figura:

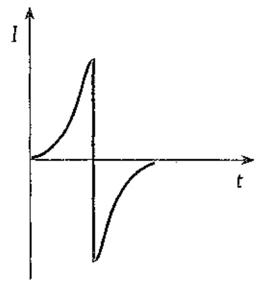


25 **PAU** **Un imán cae verticalmente a través de una bobina de espiras dispuesta horizontalmente. Representa de forma cualitativa las gráficas flujo-tiempo e intensidad inducida-tiempo que se obtendrían.**

A medida que el imán cae y se introduce en la espira, aumentaría el flujo (entrante hacia la espira si es el polo norte el que se acerca, o saliente de la espira si se aproxima el polo sur). Una vez que el imán atraviesa la espira, el flujo vuelve a disminuir, por lo que la gráfica sería la siguiente:



En cuanto a la intensidad, la gráfica solo representa cualitativamente la circulación en un sentido cuando el imán se acerca, y en el contrario, cuando el imán se aleja después de atravesar la espira. Para saber el sentido real, deberían informarnos acerca del polo con el que se aproxima el imán a la espira. Nótese el brusco cambio en el sentido de la corriente que se aprecia en la gráfica.



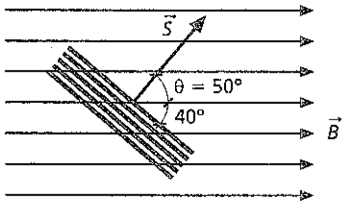
26 **PAU** **Una bobina de 100 vueltas de 2 cm de radio está orientada en el seno de un campo magnético uniforme de 0,5 T de modo que el plano de las espiras forma un ángulo de 40° con las líneas de fuerza del campo. Si el campo magnético aumenta a razón de 0,8 T/s manteniendo constante la dirección, determina:**

***a)* La expresión del flujo magnético en función del tiempo.**

***b)* La fem inducida en los diez primeros segundos.**

***c)* La intensidad de la corriente inducida si la resistencia de la bobina es de 50 Ω.**

a) Como se aprecia en el siguiente dibujo, si el plano de las espiras forma un ángulo de 40° con el campo, el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{S}$ será de 50°:



Por tanto, la expresión para el flujo magnético en función del tiempo será:

$$\Phi(t) = NB(t)S\cos\theta$$

$$\Phi(t) = 100 \cdot (0{,}5 + 0{,}8t) \cdot \pi \cdot (0{,}02)^2 \cdot \cos 50°$$

$$\Phi(t) = 0{,}04 + 0{,}064t \text{ Wb}$$

b) La ε inducida en los diez primeros segundos es:

$$\varepsilon = \frac{\Phi(10) - \Phi(0)}{\Delta t} = \frac{0{,}68 - 0{,}04}{10} = -0{,}064 \text{ V}$$

c) La intensidad de la corriente inducida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 1{,}28 \text{ mA}$$

27 PAU Dos espiras rectangulares se hallan enfrentadas con sus planos paralelos. Por la espira A comienza a circular una corriente en sentido antihorario. ¿En qué sentido circulará la corriente inducida en la espira B? ¿Se atraerán o se repelerán las espiras cuando aumente la corriente en A? ¿Y cuando disminuya?

Circulará en sentido horario. Al aumentar la corriente en A, se producirá una corriente la inducida en B, pero en sentido contrario, por lo que, al tratarse de corrientes paralelas y de sentidos contrarios, ambas espiras se repelerán. Por el contrario, al disminuir la corriente que circula por A, la inducida en B tendrá el mismo sentido que en A; se tratará ahora de corrientes paralelas que circulan en el mismo sentido, por lo que las espiras se atraerán.

28 PAU Una bobina de 200 espiras cuadradas de 3 cm de lado se dispone perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,8 T. ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida si la bobina gira 90° en una centésima de segundo?

El flujo inicial vale:

$$\Phi_0 = NBS\cos 0° = 0{,}144 \text{ Wb}$$

mientras que el flujo final será:

$$\Phi_f = NBS\cos 90° = 0$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 0{,}144 \text{ Wb}}{0{,}01 \text{ s}} = 14{,}4 \text{ V}$$

29 PAU Una espira de 100 cm² de superficie se encuentra orientada de forma perpendicular a un campo magnético cuya magnitud aumenta uniformemente desde 0,2 T hasta 1,4 T en 0,25 s. Determina:

a) ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida en la espira?

b) ¿Cuál será la intensidad de la corriente si la resistencia total de la espira es de 3 Ω?

a) En este caso, la variación del flujo se debe a la del campo magnético, de modo que:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -0{,}01 \text{ m}^2 \cdot \frac{1{,}4 \text{ T} - 0{,}2 \text{ T}}{0{,}25 \text{ s}} = -0{,}048 \text{ V}$$

b) La intensidad de la corriente que circulará será:

$$I = \frac{|V|}{R} = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}016 \text{ A}$$

30 PAU Una bobina de 50 espiras circulares de 3 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético unidireccional cuyo valor varía según $B = 0{,}2 + 0{,}005t^2$ T. ¿Cuánto valdrá la fem inducida al cabo de 10 s? Si la resistencia total de la bobina es de 2 Ω, ¿cuál es la intensidad que circula al cabo de ese tiempo?

La fem inducida debida a la variación de $\vec{B}$ será:

$$\varepsilon = -NS\frac{dB}{dt} = -50\pi\,(0{,}03)^2 \cdot 0{,}01t$$

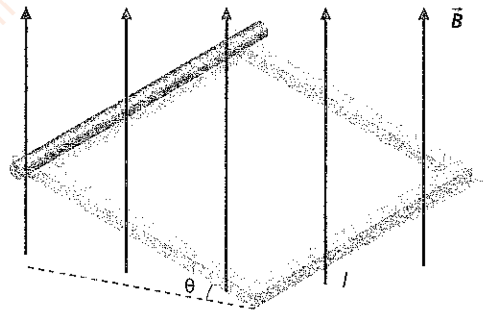
que a los 10 s valdrá:

$$\varepsilon = -0{,}014 \text{ V}$$

Por otro lado, la intensidad que circulará al cabo de ese tiempo será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}007 \text{ A}$$

D31 PAU Un hilo conductor rectilíneo puede deslizarse sin fricción sobre dos rieles inclinados un ángulo θ y conectados en su parte inferior como se indica en la figura. Sobre la región actúa un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido verticalmente hacia arriba. Si el hilo tiene una masa *m* y una resistencia *R*, y la longitud entre los rieles es *l*, deduce una expresión para la velocidad límite a la que se deslizará el hilo en su descenso sobre los rieles.



La varilla comienza a descender por acción de la componente tangencial de su peso (*mg* sen θ). Debido a ese desplazamiento, las cargas adquieren una velocidad *v* en el sentido del descenso, lo que provoca la aparición de una fuerza magnética sobre ellas en la dirección del conductor móvil. En resumen, se induce una fem en la varilla, dada por:

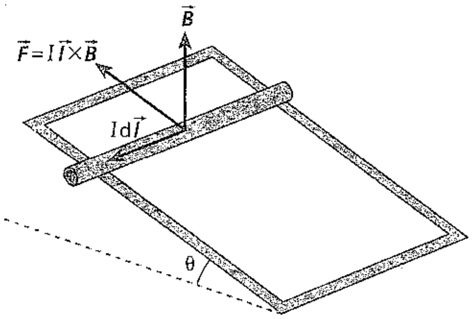
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\vec{B}\cdot\vec{S})}{\Delta t} = -B\frac{\Delta S}{\Delta t}\cos\theta = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\theta =$$

$$= -Blv\cos\theta$$

En consecuencia, se establece una intensidad de corriente:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv\cos\theta}{R}$$

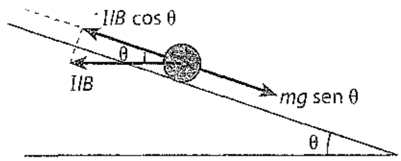
Al circular la intensidad (en el sentido del movimiento de las cargas positivas, esto es, hacia la izquierda de la varilla) en el seno del campo magnético, surge una fuerza de valor *IlB* cuyo sentido aparece indicado en la figura:



Esta fuerza provoca la aparición de una componente en la dirección del movimiento cuyo valor viene dado por la expresión:

$$F_t = IlB \cos \theta$$

como puede apreciarse en el siguiente diagrama de fuerzas:



En consecuencia, la ecuación de movimiento de la varilla será:

$$mg \text{ sen } \theta - IlB \cos \theta = ma$$

Ahora bien, como I aumenta a medida que lo hace v (según la expresión deducida anteriormente), también lo hará en la misma proporción la fuerza que se opone al descenso. Por tanto, la velocidad tendrá un valor límite, que se alcanzará en el momento en que ambas fuerzas igualen sus valores (y en el que $a = 0$). En ese instante, se cumplirá que:

$$mg \text{ sen } \theta = IlB \cos \theta$$

Sustituyendo aquí la expresión de I deducida anteriormente, obtenemos:

$$mg \text{ sen } \theta = \frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{R} v_{\text{máx}}$$

Y, por tanto:

$$v_{\text{máx}} = \frac{mgR}{B^2 l^2} \cdot \frac{\text{tg } \theta}{\cos \theta}$$

32 **PAU Una bobina circular de 50 espiras de 5 cm de radio se sitúa en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de 1,2 T. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la bobina si se gira esta bruscamente 180° en 0,2 s. ¿Qué intensidad de corriente inducida circula si la resistencia en la bobina es de 20 Ω?**

El flujo magnético inicial vale:

$$\Phi_0 = NBS \cos 0° = 0{,}471 \text{ Wb}$$

mientras que el flujo final, una vez que la bobina ha girado 180°, es:

$$\Phi_f = NBS \cos 180° = -0{,}471 \text{ Wb}$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{-0{,}471 \text{ Wb} - 0{,}471 \text{ Wb}}{0{,}2 \text{ s}} = 4{,}71 \text{ V}$$

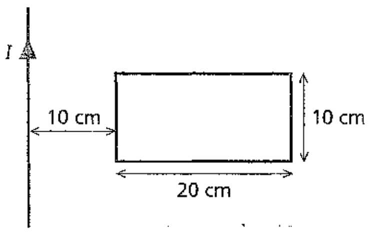
La intensidad de la corriente indicida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}235 \text{ A}$$

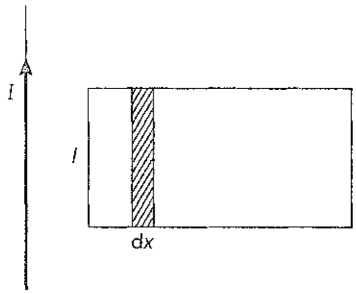
33 **PAU Una corriente de 10 A recorre un hilo conductor de gran longitud situado cerca de una espira rectangular, como se indica en la figura.**

a) **Calcula el flujo del campo magnético a través de la espira.**

b) **Determina la fuerza electromotriz media y el sentido de la corriente inducida en la espira si se interrumpe la corriente al cabo de 0,02 s.**



a) El campo que atraviesa la espira no es uniforme, ya que su valor varía con el inverso de la distancia al hilo. Debemos, pues, calcular el flujo por integración. Supondremos la superficie dividida en elementos diferenciales de altura l y base dx.



De ese modo, el flujo a través de la espira será:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{0,1}^{0,3} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \int_{0,1}^{0,3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi} [\ln x]_{0,1}^{0,3} = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

b) La fem inducida al interrumpirse la corriente en 0,02 s será:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}}{0{,}02 \text{ s}} = 1{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

Puesto que el flujo inicial era entrante hacia el plano del papel, al disminuir, la corriente inducida tenderá a mantener ese flujo entrante, por lo que circulará en sentido horario.

El fenómeno de la autoinducción

34 **Con dos hilos iguales de longitud x, construimos sendos solenoides de la misma longitud, l, pero de distinto radio. ¿Cuál de ellos tendrá mayor inductancia?**

Al arrollar la misma longitud x de hilo haciendo espiras de distinto radio, variará el número de espiras, pues $x = 2\pi r N$. De esta manera, en cada uno de los solenoides, tendremos que:

$$N = \frac{x}{2\pi r}$$

Y como la inductancia viene dada por la expresión:

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}$$

Podemos expresar la inductancia de los solenoides de la siguiente manera:

$$L = \frac{\mu_0 \pi r^2 \dfrac{x^2}{4\pi^2 r^2}}{l} = \frac{\mu_0 x^2}{4\pi l}$$

Así pues, como en ambos casos x y l tienen el mismo valor, la inductancia, (que no depende del radio), valdrá lo mismo.

35 **PAU Con dos hilos de la misma longitud, se construyen dos solenoides del mismo radio. Si la longitud de uno es el doble que la del otro, ¿cómo son en comparación sus inductancias?**

Dadas las condiciones de la cuestión, $N = N'$ y $S = S'$. Si llamamos L a la inductancia del solenoide de longitud l, y L', a la del solenoide de longitud l', y consideramos que $l' = 2l$, entonces, al dividir las expresiones que corresponden a la inductancia de los solenoides, obtenemos:

$$\frac{L}{L'} = \frac{l'}{l}$$

Por lo que puede concluirse que:

$$L = 2L'$$

Es decir, el de mitad de longitud tiene el doble de inductancia.

36 **PAU** **Calcula la inductancia de un solenoide de 40 cm de longitud constituido por 400 espiras de 5 cm² de sección. ¿Cuál será la fuerza electromotriz autoinducida si la intensidad disminuye a razón de 30 A/s?**

La inductancia del solenoide viene dada por la siguiente expresión:

$$L = \frac{\mu_o S N^2}{l}$$

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 400^2}{0{,}4\ \text{m}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{H}$$

En consecuencia, si la corriente disminuye a razón de 30 A/s, la fem autoinducida será:

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{H} \cdot (-30\ \text{A/s}) = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

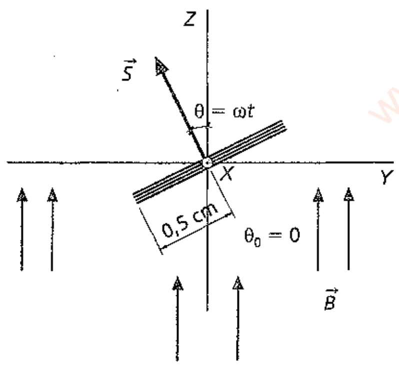
Aplicaciones: fundamentos de corriente alterna y transformadores

37 **PAU** **Una bobina de 10 espiras circulares de cobre de 0,5 cm de radio y resistencia 0,2 Ω gira en torno a un eje diametral en la dirección *X* con una velocidad angular de 3π rad/s. La bobina se encuentra inmersa en una región donde existe un campo magnético $\vec{B} = 0{,}6\,\vec{k}$ T. Considerando que en $t = 0$ las espiras estaban orientadas en el plano *XY*, determina:**

a) **La expresión para la fem inducida en función del tiempo.**

b) **La intensidad máxima de la corriente que circula por la espira y el tipo de corriente que se obtiene.**

La disposición descrita en el enunciado se muestra en la siguiente figura, con una perspectiva según la cual el eje *X* es perpendicular al papel y va hacia el observador:



a) A la vista de la figura, la expresión del flujo magnético en función del tiempo será:

$$\Phi(t) = N\vec{B}\vec{S} = NBS \cos \omega t$$

Por lo que la fem inducida en función del tiempo es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \text{ sen } \omega t$$

Sustituyendo los datos del enunciado, resulta:

$$\varepsilon(t) = 4{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ sen } 3\pi t$$

b) El valor máximo de la corriente inducida viene dado por la expresión:

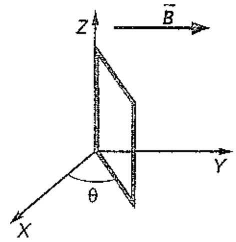
$$I_o = \frac{\varepsilon_o}{R} = \frac{NBS\omega}{R} = 22\ \text{mA}$$

Se obtiene una corriente alterna.

D 38 **PAU** **Una espira cuadrada de 5 cm de lado y 2 Ω de resistencia está inmersa en un campo magnético $\vec{B} = 0{,}08\,\vec{j}$ T. La espira forma un ángulo θ variable con el plano *XZ* como se muestra en la figura, y dicho ángulo es de π/2 en el instante $t = 0$.**

a) **Obtén la expresión de la fem inducida en función del tiempo si se hace girar la espira con una frecuencia de 50 Hz alrededor del eje *Z*.**

b) **¿A qué velocidad angular debería girar para que la corriente máxima que circula por ella sea de 5 mA?**



a) El flujo viene dado por el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{S}$, con la particularidad de que en este caso hay un ángulo inicial, $\theta_0 = \pi/2$ rad; luego:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\omega t + \theta_0) = BS \cos(\omega t + \pi/2) = -BS \text{ sen } \omega t$$

La fem inducida será:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \cos \omega t = 2 \cdot 10^{-4}\omega \cos \omega t$$

b) Para alcanzar esa corriente máxima, la fem máxima debe valer:

$$\varepsilon_0 = I_0 R = 0{,}01\ \text{V}$$

Puesto que $\varepsilon_0 = BS\omega$, podemos despejar la velocidad angular:

$$\omega = \frac{\varepsilon_0}{BS} = 50\ \text{rad/s}$$

39 **PAU** **La bobina rectangular de un generador simple de corriente alterna alcanza una fuerza electromotriz de 65,3 V a una frecuencia de 50 Hz en un campo de 1,3 T. Si las dimensiones de las espiras son 8 cm × 5 cm, ¿cuántas espiras tiene la bobina?**

La fem máxima de la bobina viene dada por:

$$\varepsilon_o = NBS\omega$$

donde $S = 0{,}08\ \text{m} \cdot 0{,}05\ \text{m} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$; $B = 1{,}3$ T, y $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s. Así pues:

$$N = \frac{\varepsilon_o}{BS\omega} = 40 \text{ espiras}$$

40 **PAU** **Una bobina de 300 espiras de 300 cm² gira alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de 0,2 T. ¿A qué frecuencia debe hacerlo para generar una tensión máxima de 250 V?**

Igual que en el problema anterior, la fem máxima viene dada por:

$$\varepsilon_o = NBS\omega = NBS2\pi f$$

Así pues:

$$f = \frac{\varepsilon_o}{NBS2\pi} = 22{,}11\ \text{Hz}$$

41 **PAU** **Un transformador consta de una bobina primaria de 200 espiras y de una bobina secundaria de 50 espiras.**

a) **¿Cuál será su función: elevar o reducir el voltaje?**

b) **Si la tensión de entrada es de 125 V, ¿cuál será la de salida?**

c) **Si la corriente en la bobina primaria es de 50 mA, ¿cuánto valdrá en la secundaria?**

a) Puesto que el número de espiras de la bobina secundaria es inferior, su función consistirá en reducir el voltaje.

b) La tensión de salida viene dada por la expresión:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} = 31{,}25\ \text{V}$$

c) La corriente en la bobina secundaria será:

$$I_2 = I_1\frac{N_1}{N_2} = 200\ \text{mA}$$

7 Movimientos oscilatorios. El oscilador armónico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Oscilaciones o vibraciones armónicas** páginas 185/186
  - **1.1. ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios?** páginas 185/186
  - **1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento oscilatorio es armónico?** página 186
- **2. El movimiento armónico simple** páginas 187/192
  - **2.1. Formas de escribir la ecuación de un movimiento armónico simple** páginas 188/189
  - **2.2. Velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple** páginas 190/192
  - **2.3. Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple** página 192
- **3. Consideraciones dinámicas en el movimiento armónico simple** página 193
  - **3.1. Relación del período y la frecuencia con las características dinámicas del oscilador** página 193
- **4. Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple** páginas 194/195
- **5. Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme** páginas 196/197
- **6. Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple** páginas 198/199
- **7. Oscilaciones forzadas y fenómeno de resonancia** páginas 200/201

Cuestiones previas (página 184)

1. ¿Qué casos conoces de movimientos oscilatorios?

Hay numerosos ejemplos de movimientos oscilatorios en la naturaleza; los latidos del corazón, la traslación de la tierra, el movimiento de las olas del mar, un átomo en una red cristalina a una temperatura dada o el movimiento de los planetas. También tenemos aplicaciones técnicas en casos como el péndulo de un reloj, el cigüeñal de un automóvil, las cuerdas de un instrumento musical, etcétera.

2. ¿Qué tiene que suceder para que un cuerpo oscile?

El cuerpo deberá estar apartado de su posición de equilibrio estable y bajo la acción de una fuerza restauradora recupera la posición de equilibrio.

3. ¿Es constante la aceleración en los movimientos oscilatorios?

No es constante porque varía sinusoidalmente con el tiempo, por tanto, tendrá valores máximos y mínimos.

4. ¿Qué fuerza hace que oscile un cuerpo unido a un muelle horizontal? ¿Qué fuerza hace que oscile un péndulo simple?

En el caso de un muelle horizontal la fuerza restauradora del muelle $-kx$ que tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. En el caso de un péndulo simple la fuerza restauradora será la componente tangencial del peso.

5. ¿De qué factores crees que puede depender el período de oscilación de un cuerpo unido a un muelle? ¿Y el de un péndulo?

En el caso de un muelle depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del muelle. En el caso de un péndulo depende de la longitud del péndulo pero es independiente de la masa.

Actividades (páginas 189/199)

1 Se hace oscilar desde la posición de equilibrio un cuerpo unido a un muelle horizontal, de modo que la separación máxima de dicha posición es de 3 cm. Si se han contado 20 oscilaciones en 5 segundos, ¿cuál es la ecuación representativa de dicho movimiento?

La amplitud o máxima elongación es $A = 3$ cm, mientras que el período vale:

$$T = \frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 8\pi \text{ rad/s}$$

Si deseamos representar la ecuación en función del seno, será:

$$x = 3 \text{ sen } 8\pi t \text{ cm}$$

Si lo hacemos en función del coseno, puede escribirse del siguiente modo:

$$x = 3 \cos (8\pi t \pm \pi/2) \text{ cm}$$

2 Indica cómo convendría escribir la ecuación del movimiento anterior si el cuerpo comienza a oscilar hacia la izquierda. ¿Y si lo hiciera hacia la derecha?

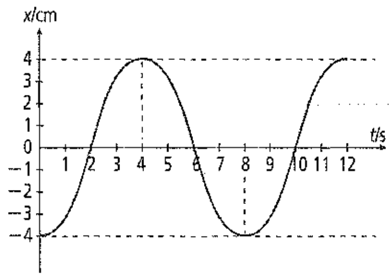
Si queremos dar la información completa, incluyendo el sentido inicial del movimiento, es conveniente usar la ecuación en forma de coseno. Si el cuerpo comienza a moverse hacia la izquierda (x negativas), la ecuación es:

$$x = 3 \cos (8\pi t + \pi/2) \text{ cm}$$

Y si lo hace hacia la derecha (x positivas):

$$x = 3 \cos (8\pi t - \pi/2) \text{ cm}$$

3 ¿Cuál es la ecuación del MAS representado en la siguiente gráfica?

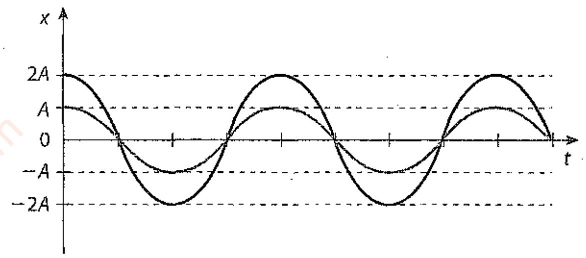


Puesto que $A = 4$ cm, $T = 8$ s y $\omega = \pi/4$ rad/s, la ecuación puede escribirse como:

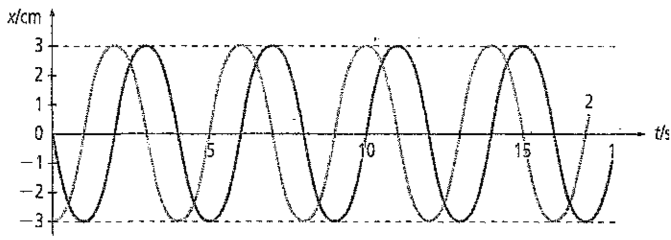
$$x = 4 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}$$

4 Representa en una misma gráfica los movimientos de dos osciladores del mismo período, uno con doble amplitud que otro, que comienzan a oscilar desde el extremo positivo.

La representación gráfica pedida se puede observar en la siguiente figura:



5 PAU ¿Qué ecuaciones representan los movimientos 1 y 2 de la figura 7.14? ¿Cuál es el desfase, o diferencia de fase, entre ambos movimientos?



En ambos movimientos, $A = 3$ cm y $T = 4$ s, por lo que:

$$\omega = \pi/2 \text{ rad/s}$$

en consecuencia, la ecuación que representa el movimiento 1 es:

$$x_1 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}$$

mientras que el movimiento 2 se representaría por:

$$x_2 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t - \pi \right) \text{ cm}$$

El desfase entre ambos es, por tanto, de $\pi/2$ rad.

6 Comprueba la validez de las ecuaciones de posición de los cuatro casos expuestos en la página anterior, teniendo en cuenta los tiempos que se indican y sustituyendo ω por $2\pi/T$ en cada una de las expresiones dadas.

Si partimos de la posición de equilibrio hacia la derecha, la oscilación viene dada por la siguiente expresión:

$$x = A \text{ sen} \frac{2\pi}{T} t$$

Sustituimos los distintos valores de t:

- Cuando $t = 0$, $x = 0$.
- Cuando $t = T/4$, $x = A \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{4} = A$.
- Cuando $t = T/2$, $x = A \text{ sen } \pi = 0$.
- Cuando $t = 3T/4$, $x = A \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{3T}{4} = -A$.

En el resto de los casos se procede de igual modo, a partir de la ecuación representativa de cada situación inicial.

7 **PAU** **Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a 4 cm de la posición de equilibrio, con un período de 0,3 s.**

a) **Determina su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.**

b) **Halla su velocidad cuando $x = 2$ cm.**

Con los datos ofrecidos, podemos deducir que $A = 4$ cm y $\omega = 2\pi/T = 20{,}9$ rad/s.

a) La velocidad del cuerpo al pasar por la posición de equilibrio es máxima y vale:

$$v = \omega A = 83{,}6 \text{ cm/s}$$

b) Cuando pasa por $x = 2$ cm, la velocidad será:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 72{,}4 \text{ cm/s}$$

8 **PAU** **Determina la aceleración en los extremos, en $x = 2$ cm, y en $x = -1$ cm, de un oscilador armónico que tenga las características expuestas en la actividad anterior.**

En los extremos, la aceleración es máxima y vale:

$$a = -\omega^2 A = \pm 17{,}48 \text{ m/s}^2$$

En $x = 2$ cm $= 0{,}02$ m valdrá:

$$a = -\omega^2 x = -8{,}74 \text{ m/s}^2$$

Mientras que en $x = -1$ cm $= -0{,}01$ m será:

$$a = -\omega^2 x = 4{,}37 \text{ m/s}^2$$

9 **Consideremos la velocidad y la aceleración máximas de un oscilador:**

a) **¿Cómo varían si se duplica la amplitud sin modificar el período?**

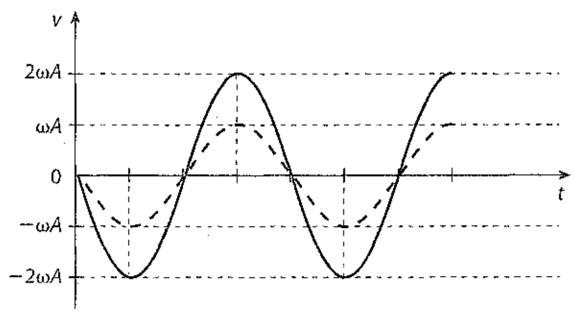
b) **¿Cómo varían si se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud?**

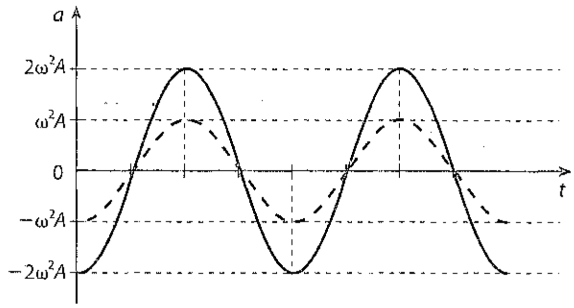
Haz las gráficas comparativas de ambos casos con la oscilación normal.

Las expresiones de la velocidad y de la aceleración máximas son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A$$
$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$$

a) Al ser $\omega = 2\pi/T$, este factor se mantendrá constante si T no cambia. Teniendo esto en cuenta, al duplicar A, se duplicarán $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$; las nuevas gráficas quedan representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).





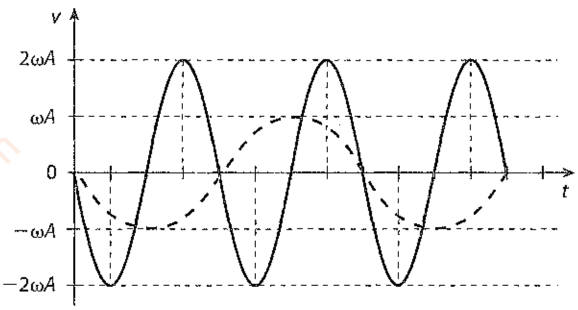
b) Escribiendo las expresiones en función de la frecuencia, tenemos:

$$v_{\text{máx}} = 2\pi f A$$
$$a_{\text{máx}} = -4\pi^2 f^2 A$$

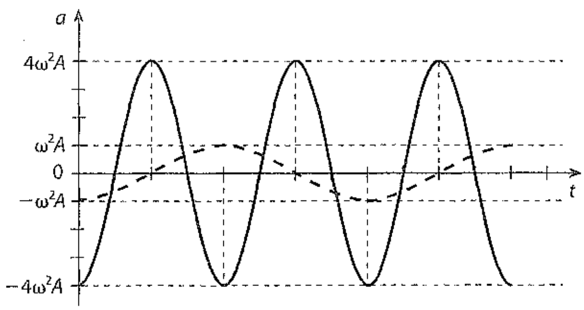
Por tanto, al duplicar f sin variar A, $v_{\text{máx}}$ se duplica y $a_{\text{máx}}$ se cuadruplica.

Por otro lado, al duplicar f, T se reduce a la mitad; las nuevas gráficas son las que aparecen representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).

La gráfica correspondiente a la velocidad será:



La gráfica correspondiente a la aceleración será:



10 **Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a 5 cm de la posición de equilibrio con una frecuencia de 5 Hz.**

La ecuación de posición para $\omega = 2\pi f = 10\pi$ rad/s y $A = 5$ cm, será:

$$x = 5 \cos 10\pi t \text{ cm}$$

Por tanto:

$$v = \frac{dx}{dt} = -50\pi \text{ sen } 10\pi t \text{ cm/s}$$

mientras que:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -500\pi^2 \cos 10\pi t \text{ cm/s}^2$$

donde:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A = \pm 50\pi \text{ cm/s} = \pm 1{,}57 \text{ m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = \pm\omega^2 A = \pm 500\pi^2 \text{ cm/s}^2 = \pm 49{,}3 \text{ m/s}^2$$