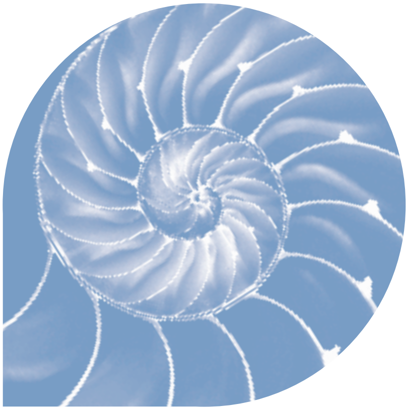


Matemáticas I 1 BACHILLERATO

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Matemáticas**
para 1.º de Bachillerato es una obra colectiva
concebida, diseñada y creada en el departamento
de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L.,
dirigido por **Enrique Juan Redal**.

En su realización han intervenido:

M.ª José Rey
César Santamaría

EDICIÓN
Angélica Escoredo
José Miguel Escoredo
Mercedes de Lucas
Carlos Pérez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

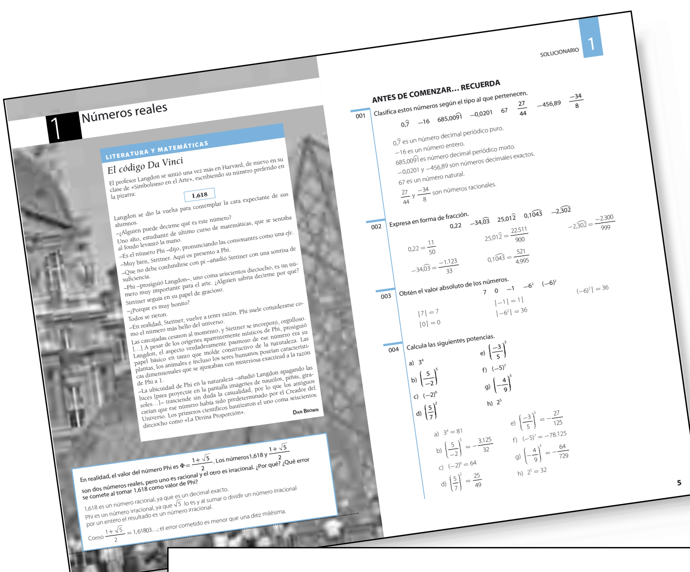
Proyecto **La Casa del Saber**

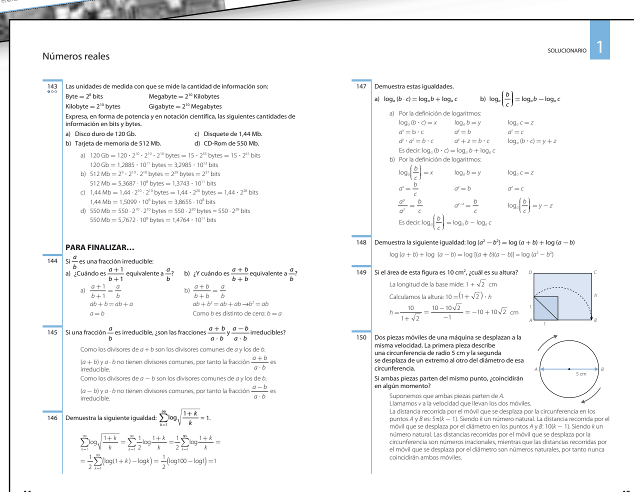
Santillana

Presentación

El nombre de la serie, **La Casa del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real.

En este sentido, y considerando las matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.





Índice

1 Números reales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El código Da Vinci

El profesor Langdon se sintió una vez más en Harvard, de nuevo en su clase de «Simbolismo en el Arte», escribiendo su número preferido en la pizarra:

1,618

Langdon se dio la vuelta para contemplar la cara expectante de sus alumnos.

–¿Alguien puede decirme qué es este número?

Uno alto, estudiante de último curso de matemáticas, que se sentaba al fondo levantó la mano.

–Es el número Phi –dijo, pronunciando las consonantes como una *efe*.

–Muy bien, Stettner. Aquí os presento a Phi.

–Que no debe confundirse con pi –añadió Stettner con una sonrisa de suficiencia.

–Phi –prosiguió Langdon–, uno coma seiscientos dieciocho, es un número muy importante para el arte. ¿Alguien sabría decirme por qué?

Stettner seguía en su papel de gracioso.

–¿Porque es muy bonito?

Todos se rieron.

–En realidad, Stettner, vuelve a tener razón. Phi suele considerarse como el número más bello del universo.

Las carcajadas cesaron al momento, y Stettner se incorporó, orgulloso. […] A pesar de los orígenes aparentemente místicos de Phi, prosiguió Langdon, el aspecto verdaderamente pasmoso de ese número era su papel básico en tanto que molde constructivo de la naturaleza. Las plantas, los animales e incluso los seres humanos poseían características dimensionales que se ajustaban con misteriosa exactitud a la razón de Phi a 1.

–La ubicuidad de Phi en la naturaleza –añadió Langdon apagando las luces [para proyectar en la pantalla imágenes de nautilos, piñas, girasoles…]– trasciende sin duda la casualidad, por lo que los antiguos creían que ese número había sido predeterminado por el Creador del Universo. Los primeros científicos bautizaron el uno coma seiscientos dieciocho como «La Divina Proporción».

DAN BROWN

En realidad, el valor del número Phi es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Los números 1,618 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son dos números reales, pero uno es racional y el otro es irracional. ¿Por qué? ¿Qué error se comete al tomar 1,618 como valor de Phi?

1,618 es un número racional, pues es un decimal exacto.

Phi es un número irracional, ya que $\sqrt{5}$ lo es y, al sumar o dividir un número irracional y un entero, el resultado es un número irracional.

Como $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$; el error cometido es menor que una diezmilésima.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Clasifica estos números según el tipo al que pertenecen.**

$$0,\widehat{7} \qquad -16 \qquad 685,00\widehat{91} \qquad -0,0201 \qquad 67 \qquad \frac{27}{44} \qquad -456,89 \qquad \frac{-34}{8}$$

$0,\widehat{7}$ es un número decimal periódico puro.

-16 es un número entero.

$685,00\widehat{91}$ es número decimal periódico mixto.

$-0,0201$ y $-456,89$ son números decimales exactos.

67 es un número natural.

$\frac{27}{44}$ y $\frac{-34}{8}$ son números racionales.

002 **Expresa en forma de fracción.**

$$0,22 \qquad -34,\widehat{03} \qquad 25,01\widehat{2} \qquad 0,1\widehat{043} \qquad -2,\widehat{302}$$

$0,22 = \frac{11}{50}$

$25,01\widehat{2} = \frac{22.511}{900}$

$-2,\widehat{302} = \frac{-2.300}{999}$

$-34,\widehat{03} = \frac{-1.123}{33}$

$0,1\widehat{043} = \frac{521}{4.995}$

003 **Obtén el valor absoluto de los números.**

$$7 \qquad 0 \qquad -1 \qquad -6^2 \qquad (-6)^2$$

$|7| = 7$

$|-1| = 1$

$|(-6)^2| = 36$

$|0| = 0$

$|-6^2| = 36$

004 **Calcula las siguientes potencias.**

a) 3^4

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5$

c) $(-2)^6$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$

f) $(-5)^7$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3$

h) 2^5

a) $3^4 = 81$

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5 = -\frac{3.125}{32}$

c) $(-2)^6 = 64$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

f) $(-5)^7 = -78.125$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3 = -\frac{64}{729}$

h) $2^5 = 32$

005 Simplifica y expresa el resultado como potencia.

a) $\dfrac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$ b) $2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

a) $\dfrac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}} = \dfrac{6^2 \cdot 5^{14} \cdot 5^7 \cdot 3^3 \cdot 3^3}{6^4} = \dfrac{5^{21} \cdot 3^6}{6^2} = \dfrac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 = \dfrac{2 \cdot 3^3}{2^{11} \cdot 3^2} = \dfrac{3}{2^{10}}$

ACTIVIDADES

001 Calcula el representante canónico de estos números.

a) $\dfrac{-16}{24}$ b) $\dfrac{18}{39}$ c) $\dfrac{-24}{-60}$

a) $\dfrac{-16}{24} = -\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{18}{39} = \dfrac{6}{13}$ c) $\dfrac{-24}{-60} = \dfrac{2}{5}$

002 Escribe dos representantes de los números racionales.

a) $\dfrac{7}{12}$ b) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{8}{25}$

Respuesta abierta.

a) $\dfrac{7}{12} = \left\{\dots, \dfrac{14}{24}, \dfrac{21}{36}, \dots\right\}$

b) $\dfrac{9}{2} = \left\{\dots, \dfrac{18}{4}, \dfrac{27}{6}, \dots\right\}$

c) $\dfrac{8}{25} = \left\{\dots, \dfrac{16}{50}, \dfrac{24}{75}, \dots\right\}$

003 Halla cuántos números racionales distintos hay en esta secuencia.

$$\frac{5}{3} \qquad -\frac{5}{3} \qquad \frac{-5}{3} \qquad \frac{5}{-3} \qquad \frac{10}{6} \qquad 1,\widehat{6}$$

Hay dos números racionales distintos, que son:

$\dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6} = 1,\widehat{6}$ $-\dfrac{5}{3} = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{5}{-3}$

004 Una fracción que tenga un término negativo y otra que tenga sus dos términos positivos, ¿pueden ser representantes del mismo número racional?

No pueden representar el mismo número racional, puesto que si una fracción tiene un término negativo, el cociente es negativo; y si sus dos términos son positivos, el cociente es positivo.

005 **Escribe 4 números irracionales, especificando su regla de formación.**

Respuesta abierta.

Tras la coma, se sitúan todos los múltiplos de 3: 0,3691215…

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 4: 0,481216…

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 1: $\sqrt{2}+1$

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 2: $\sqrt{2}+2$

006 **Decide si los siguientes números son irracionales.**

a) 0,51015202530…

b) $\dfrac{3\pi}{4\pi}$

c) $2-\pi$

d) $\dfrac{10}{17}$

a) Es un número irracional, ya que tiene infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

b) Es un número decimal exacto, luego no es un número irracional.

c) Es un número irracional, porque si a un número irracional se le resta un número entero, el resultado es un número irracional.

d) No es un número irracional, puesto que es una fracción.

007 **Encuentra, sin hacer operaciones con decimales, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.**

Respuesta abierta.

$\sqrt{2}-1$

008 **Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.**

a) La raíz de un número irracional es irracional.

b) Un número irracional al cuadrado no es racional.

a) Cierta, ya que sigue teniendo infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Falsa, por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

009 **Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número.**

a) 8,0999…

b) 1,223334444…

c) $\sqrt{15}$

d) $6,1\widehat{26}$

e) 2,5

f) -11

a) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{I}$

c) $\mathbb{I}$

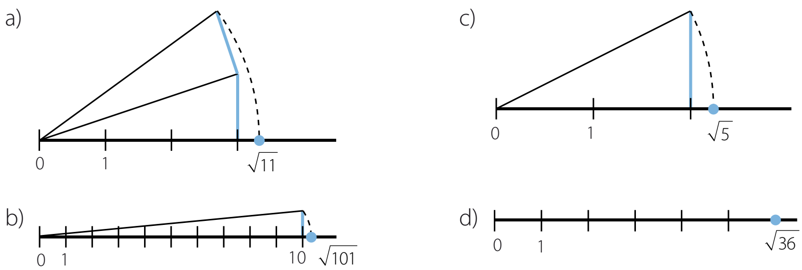
d) $\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{Q}$

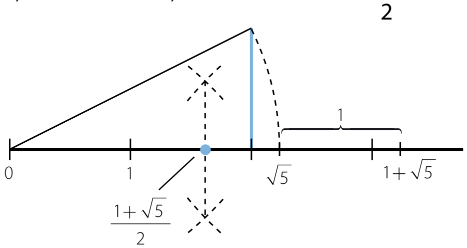
f) $\mathbb{Z}$

010 Representa las raíces.

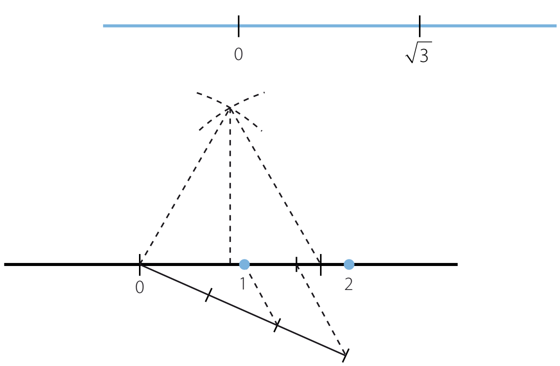
a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$



011 Coloca, en la recta real, el número: $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



012 Representa, en la siguiente recta real, los números 1 y 2.



013 Aplica la propiedad distributiva y opera.

a) $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{5}\right)$ b) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{7} + 3 \cdot \dfrac{2}{7}$

a) $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{30-42}{140} = -\dfrac{12}{140} = -\dfrac{3}{35}$

b) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{7} + 3 \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{5} + 3\right) = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{67}{20} = \dfrac{67}{70}$

014 Ordena, de menor a mayor, los siguientes números racionales e irracionales.

$$\frac{22}{7} \qquad \pi \qquad \frac{2.827}{900}$$

$$\frac{2.827}{900} < \pi < \frac{22}{7}$$

015 Con ayuda de la propiedad distributiva, calcula 99^2 y 999^2 sin realizar las operaciones.

$99^2 = 99 \cdot 99 = 99(100 - 1) = 9.900 - 99 = 9.801$

$999^2 = 999 \cdot 999 = 999(1.000 - 1) = 999.000 - 999 = 998.001$

016 Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

a) Números menores que π.
b) Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7.
c) Números menores o iguales que 2 y mayores que -2.
d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

a) $(-\infty, \pi) = \{x: x < \pi\}$

b) $(\sqrt{3}, 7] = \{x: \sqrt{3} < x \leq 7\}$

c) $(-2, 2] = \{x: -2 < x \leq 2\}$

d) $[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$

017 Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.

a) 

c) 

b) 

d) 

a) $(-\infty, -3) = \{x: x < -3\}$

b) $[-3, 2) = \{x: -3 \leq x < 2\}$

c) $(3, +\infty) = \{x: x > 3\}$

d) $(-1, 1) = \{x: |x| < 1\}$

018 Representa el conjunto $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de todas las formas posibles.

$[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$

019 **Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto.**

a) A las diezmilésimas.

b) A las cienmilésimas.

c) A las millonésimas.

$\sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots$

a) Aproximación por exceso: 1,7321
Aproximación por defecto: 1,7320

b) Aproximación por exceso: 1,73205
Aproximación por defecto: 1,73205

c) Aproximación por exceso: 1,732051
Aproximación por defecto: 1,732052

020 **Calcula los errores absoluto y relativo al redondear el número 1,3456 a las décimas.**

$V_{\text{real}} = 1{,}3456$

$V_{\text{aproximado}} = 1{,}3$

$E_a = |1{,}3456 - 1{,}3| = 0{,}0456$ $\qquad E_r = \left|\dfrac{0{,}0456}{1{,}3456}\right| = 0{,}0338$

021 **Piensa en una situación en la que dos mediciones tengan los mismos errores absolutos, pero distintos errores relativos.**

Respuesta abierta.

$V_{\text{real}} = 12{,}5$

Valores aproximados, 12 y 13. En ambos casos, el error absoluto es 0,5; pero los errores absolutos son distintos:

$E_r = \left|\dfrac{0{,}5}{12}\right| = 0{,}0417$ $\qquad E_r = \left|\dfrac{0{,}5}{13}\right| = 0{,}0385$

022 **Indica dos ejemplos de medida y da sus correspondientes cotas de error.**

Respuesta abierta.

Velocidad en autopista: 120 km/h; edad de jubilación: 65 años.

023 **Calcula las cotas de error absoluto y relativo al redondear el número $\sqrt{2}$:**

a) A las centésimas. **b) A las milésimas.**

a) $E_a = \left|\dfrac{1}{2 \cdot 10^2}\right| = 0{,}005$ $\qquad E_r = \left|\dfrac{0{,}005}{1{,}41 - 0{,}005}\right| = 0{,}0035$

b) $E_a = 0{,}0005$ $\qquad E_r = \left|\dfrac{0{,}0005}{1{,}414 - 0{,}0005}\right| = 0{,}00035$

024 La población de un pueblo, redondeada a las decenas, es de 310 habitantes. ¿Puedes indicar los errores? ¿Sabrías dar las cotas de error cometido?

Para calcular los errores relativos y absolutos es necesario conocer el valor real; por tanto, no se pueden calcular.

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{-1}}\right| = 5$$

$$E_r = \left|\frac{5}{310 - 5}\right| = 0{,}016$$

025 Calcula una cota de error absoluto cuando truncamos un número a las décimas. ¿Y si fuera a las centésimas?

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{1}}\right| = 0{,}5$$

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{2}}\right| = 0{,}05$$

026 Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085

b) 5.000.000.000.000

c) 31.940.000.000

d) 0,000000000479

a) $0{,}0000085 = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$

b) $5.000.000.000.000 = 5 \cdot 10^{12}$

c) $31.940.000.000 = 3{,}194 \cdot 10^{10}$

d) $0{,}000000000479 = 4{,}79 \cdot 10^{-10}$

027 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4}$

b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2})$

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4} = 6{,}465968 \cdot 10^{-2}$

b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2}) = 2{,}92966 \cdot 10^{13}$

028 Decide si son ciertas estas igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1.000.000} = \pm 1.000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

a) Falsa: $(-2)^4 = 16$

b) Falsa: $4^8 = 65.536$

c) Falsa: $(-1.000)^3 = -1.000.000.000$

d) Falsa: $(-2)^5 = -32$

029 Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-10.000}$

d) $\sqrt[5]{243}$

a) $\sqrt[4]{16} = 2$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$

c) No existe ninguna raíz real.

d) $\sqrt[5]{243} = 3$

030 Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$
b) $5^{\frac{2}{3}}$
c) $2^{\frac{1}{6}}$
d) $7^{\frac{3}{5}}$
e) $10^{\frac{2}{7}}$
f) $\sqrt[4]{5^7}$

a) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$
b) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$
c) $2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$
d) $7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$
e) $10^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{10^2}$
f) $\sqrt[4]{5^7} = 5^{\frac{7}{4}}$

031 Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$
b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$
c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$
d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

a) Son equivalentes.
b) No son equivalentes.
c) Son equivalentes.
d) No son equivalentes.

032 Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$
b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5} = 21\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5} = \dfrac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

033 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$
b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$
c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$
d) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} = 20\sqrt{162} = 180\sqrt{2}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8^3}} = \sqrt{\dfrac{2^5}{2^9}} = \dfrac{1}{4}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

d) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^6 \cdot 3^4}{3^3}} = \sqrt[12]{3^7}$

034 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{-3\sqrt[4]{2}}{10}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt[5]{7^2}}{42}$

035 Racionaliza y opera.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{-7}{3\sqrt{2}} + \dfrac{5}{4\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} + \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{18\sqrt{5}+20\sqrt{6}}{30}$

b) $\dfrac{-7}{3\sqrt{2}} + \dfrac{5}{4\sqrt{7}} = \dfrac{-7\sqrt{2}}{6} + \dfrac{5\sqrt{7}}{28} = \dfrac{-98\sqrt{2}+15\sqrt{7}}{84}$

036 Racionaliza y opera.

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7}$ c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$

b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7} = \dfrac{8\sqrt{6}-56\sqrt{2}}{-46} = \dfrac{-4\sqrt{6}+28\sqrt{2}}{23}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}} = \dfrac{45\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{76}$

037 Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} + \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} + \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} =$

$= \dfrac{-3\sqrt{3}-\sqrt{15}+3\sqrt{6}+\sqrt{30}}{3} + \dfrac{-5\sqrt{15}+5\sqrt{35}}{4} =$

$= \dfrac{-12\sqrt{3}+12\sqrt{6}+4\sqrt{30}-19\sqrt{15}+15\sqrt{35}}{12}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \dfrac{24\sqrt{18}+36\sqrt{12}}{-6} = \dfrac{72\sqrt{2}+72\sqrt{3}}{-6} = -12\sqrt{2}-12\sqrt{3}$

038 **Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.**

a) $\log_2 8$ c) $\log 1.000$ e) $\ln e^{33}$ g) $\log_4 16$
b) $\log_3 81$ d) $\log 0{,}0001$ f) $\ln e^{-4}$ h) $\log_4 0{,}25$

a) $\log_2 8 = 3$
b) $\log_3 81 = 4$
c) $\log 1.000 = 3$
d) $\log 0{,}0001 = -4$
e) $\ln e^{33} = 33$
f) $\ln e^{-4} = -4$
g) $\log_4 16 = 2$
h) $\log_4 0{,}25 = -1$

039 **Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.**

a) $\log_3 243$ c) $\log 1.000.000$ e) $\ln e^2$ g) $\log_7 343$
b) $\log_9 81$ d) $\log 0{,}00001$ f) $\ln e^{-14}$ h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1.000.000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

040 **Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.**

a) $\log_4 32$ c) $\log_3 100$ e) $\log_{32} 4$
b) $\log_2 32$ d) $\log_5 32$ f) $\log_2 304$

a) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2 32 = 5$

c) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} = 4{,}1918\ldots$

d) $\log_5 32 = \dfrac{\log 32}{\log 5} = 2{,}1533\ldots$

e) $\log_{32} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \dfrac{\log 304}{\log 2} = 8{,}2479\ldots$

041 **Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$; $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 7 = 0{,}8451$; determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3{,}5$? ¿Y $\log 1{,}5$?**

$\log 4 = \log (2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$

$\log 5 = \log \left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

$\log 6 = \log (3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}4771 + 0{,}3010 = 0{,}7781$

$\log 8 = \log (4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 = 0{,}6020 + 0{,}3010 = 0{,}9030$

$\log 9 = \log (3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 = 0{,}4771 + 0{,}4771 = 0{,}9542$

$\log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log \left(\dfrac{7}{2}\right) = \log 7 - \log 2 = 0{,}8451 - 0{,}3010 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log \left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$

042 **Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.**

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\log 2 = 0{,}3010$.

Si se utilizan cambios de base, resulta:

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}32$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 \rightarrow \log_2 5 = 2{,}32$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} = 0{,}43$$

Como los dos números son inversos, su producto es 1.

También se puede comprobar de este modo:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

043 **Halla el valor de x en las siguientes igualdades.**

a) $\log_x 256 = -8$

b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

d) $\log_x 3 = 2$

a) $\frac{1}{2}$ b) $2{,}0801\ldots$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$

044 **Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.**

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1$$

045 **Calcula la fracción irreducible de:**

a) $\frac{5}{200}$ b) $\frac{-1.080}{432}$ c) $\frac{26}{130}$ d) $\frac{-702}{1.053}$ e) $\frac{12}{400}$ f) $\frac{72}{243}$ g) $\frac{88}{176}$ h) $\frac{104}{216}$

a) $\frac{5}{200} = \frac{1}{40}$ c) $\frac{26}{130} = \frac{1}{5}$ e) $\frac{12}{400} = \frac{3}{100}$ g) $\frac{88}{176} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{-1.080}{432} = \frac{-45}{18}$ d) $\frac{-702}{1.053} = \frac{-2}{3}$ f) $\frac{72}{243} = \frac{8}{27}$ h) $\frac{104}{216} = \frac{13}{27}$

046 **Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles.**

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

Son fracciones irreducibles: $\frac{10}{13}, \frac{12}{5}$ y $\frac{18}{7}$

047 ¿Cuántos números racionales hay en el siguiente grupo?

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{-4}{20} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{25}{100} \quad \frac{150}{200}$$

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir como fracción, luego todos los números del grupo lo son.

048 Halla x para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x}$

b) $\frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{21}{35}$

b) $\frac{-5}{2} = \frac{-20}{8} = \frac{10}{-4} = \frac{25}{-10}$

049 ¿Puedes escribir una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ cuyo denominador sea 10? ¿Por qué?

No, porque 10 no es múltiplo de 3.

050 Realiza estas operaciones.

a) $\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

b) $\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$

a)
$$\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$$
$$= \left(\frac{25}{30} - \frac{24}{30}\right)^{-2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= \left(\frac{1}{30}\right)^{-2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= 900 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= 1.350 + \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{5.401}{4}$$

b)
$$\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{2} =$$
$$= \left(\frac{25}{10} - \frac{4}{10}\right)^{-1} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \left(\frac{21}{10}\right)^{-1} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{10}{21} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{70}{63} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{-42}{63}$$

051 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles no lo son? Razona tu respuesta.

a) 2,555… b) 2,525 c) 2,5255555… d) 2,525522555222…

a) Es un número racional, ya que es periódico, y cualquier número periódico se puede expresar como fracción.

b) Es un número racional, puesto que es un decimal exacto y los decimales exactos se pueden expresar como fracción.

c) Es un número racional, ya que es periódico.

d) Es un número irracional, puesto que tiene infinitas cifras decimales que no son periódicas.

052 Indica el tipo de decimal, en cada caso, y calcula si es posible su fracción generatriz.

a) 15,3222… c) 15,32 e) 15,333

b) 15,233444… d) 15,323232… f) 15

a) Es un número decimal periódico mixto: $\dfrac{1.532-153}{90}=\dfrac{1.379}{90}$

b) Es un número decimal periódico mixto: $\dfrac{152.334-15.233}{9.000}=\dfrac{137.101}{9.000}$

c) Es un número decimal exacto: $\dfrac{1.532}{100}=\dfrac{383}{25}$

d) Es un número decimal periódico puro: $\dfrac{1.532-15}{99}=\dfrac{1.517}{99}$

e) Es un número decimal exacto: $\dfrac{15.333}{1.000}$

f) Es un número natural: $\dfrac{15}{1}$

053 Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 0,2 d) 8,0002 g) 0,01

b) $3,\widehat{5}$ e) $42,\widehat{78}$ h) $5,\widehat{902}$

c) $2,3\widehat{7}$ f) $10,5\widehat{23}$ i) $0,01\widehat{57}$

a) $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{35-3}{9}=\dfrac{32}{9}$

c) $\dfrac{237-23}{90}=\dfrac{214}{90}$

d) $\dfrac{80.002}{10.000}=\dfrac{40.001}{5.000}$

e) $\dfrac{4.278-42}{99}=\dfrac{4.236}{99}=\dfrac{1.412}{33}$

f) $\dfrac{10.523-105}{990}=\dfrac{10.418}{990}=\dfrac{5.209}{495}$

g) $\dfrac{1}{100}$

h) $\dfrac{5.902-5}{999}=\dfrac{5.897}{999}$

i) $\dfrac{157-1}{9.900}=\dfrac{156}{9.900}=\dfrac{13}{825}$

054 Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3} + 3,4$　　c) $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25}$　　e) $3,\widehat{46} + 4,2\widehat{95}$

b) $10,2\widehat{5} - 5,\widehat{7}$　　d) $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7}$　　f) $3,\widehat{21} + 4,3\widehat{12}$

a) $\frac{4}{3} + \frac{17}{5} = \frac{20}{15} + \frac{51}{15} = \frac{71}{15}$

b) $\frac{923}{90} - \frac{52}{9} = \frac{923}{90} - \frac{520}{90} = \frac{403}{90}$

c) $\frac{135}{99} + \frac{817}{99} = \frac{952}{99}$

d) $\frac{41}{9} + \frac{61}{9} = \frac{102}{9}$

e) $\frac{343}{99} + \frac{4.253}{990} = \frac{3.430}{990} + \frac{4.253}{990} = \frac{7.683}{990} = \frac{2.561}{330}$

f) $\frac{318}{99} + \frac{4.269}{990} = \frac{3.180}{990} + \frac{4.269}{990} = \frac{7.449}{990} = \frac{2.483}{330}$

055 Realiza las siguientes operaciones.

a) $1,25 \cdot 2,\widehat{5}$　　b) $0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2}$　　c) $3,7\widehat{6} \cdot 4,\widehat{8}$　　d) $1,25 : 2,2\widehat{5}$

a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{23}{9} = \frac{115}{36}$

b) $\frac{1}{30} : \frac{263}{90} = \frac{90}{7.890} = \frac{9}{789}$

c) $\frac{113}{30} \cdot \frac{44}{9} = \frac{4.972}{270} = \frac{2.486}{135}$

d) $\frac{5}{4} : \frac{203}{90} = \frac{450}{812} = \frac{225}{406}$

056 Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

a) $1,\widehat{9} = 2$　　b) $1,\widehat{3} : 3 = 0,\widehat{4}$　　c) $1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = 2$　　d) $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = 1$

a) Verdadera: $\frac{19-1}{9} = 2$

b) Verdadera: $\frac{13-1}{9} : 3 = \frac{12}{9} : 3 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

c) Falsa: $\frac{189-18}{90} + \frac{11-1}{90} = \frac{171}{90} + \frac{10}{90} = \frac{181}{90} \neq 2$

d) Verdadera: $\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9} = 1$

057 Escribe la expresión decimal de tres números racionales y otros tres irracionales. Explica cómo lo realizas.

Respuesta abierta.

La expresión decimal de un número racional debe ser finita o periódica:

$2,3$　　$2,\widehat{3}$　　$5,32$

La expresión decimal de un número irracional debe ser infinita y no periódica:

$2,1010010001000\ldots$　　$1,1234567891011\ldots$　　$2,23233233323333\ldots$

058 Ordena los siguientes números decimales, de menor a mayor.

$$2{,}999 \quad 2{,}95 \quad 2{,}955 \quad 2{,}59 \quad 2{,}599 \quad 2{,}559$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

$$2{,}559 < 2{,}59 < 2{,}599 < 2{,}95 < 2{,}955 < 2{,}999$$

059 Ordena estos números decimales, de menor a mayor.

a) $2{,}9\overset{\frown}{95}$ $\quad 2{,}\overset{\frown}{9}$ $\quad 2{,}\overset{\frown}{95}$ $\quad 2{,}9\overset{\frown}{59}$ $\quad 2{,}9\overset{\frown}{5}$

b) $4{,}75$ $\quad 4{,}\overset{\frown}{75}$ $\quad 4{,}7\overset{\frown}{5}$ $\quad 4{,}775$ $\quad 4{,}757$ $\quad 4{,}7\overset{\frown}{57}$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

a) $2{,}9\overset{\frown}{5} < 2{,}9\overset{\frown}{59} = 2{,}\overset{\frown}{95} < 2{,}9\overset{\frown}{95} < 2{,}\overset{\frown}{9}$

b) $4{,}75 < 4{,}7\overset{\frown}{5} < 4{,}757 < 4{,}\overset{\frown}{75} = 4{,}7\overset{\frown}{57} < 4{,}775$

060 Da un número racional y otro irracional comprendidos entre:

a) $3{,}4$ y $3{,}400\overset{\frown}{23}$

b) $2{,}5\overset{\frown}{2}$ y $2{,}\overset{\frown}{52}$

c) 1 y 2

d) $5{,}6$ y $5{,}\overset{\frown}{68}$

e) $-2{,}6\overset{\frown}{8}$ y $-2{,}\overset{\frown}{68}$

f) 0,2 y 0,25

Respuesta abierta.

a) Racional: 3,40022
Irracional: 3,4002201001…

b) Racional: 2,523
Irracional: 2,52301001…

c) Racional: 1,1
Irracional: 1,101001…

d) Racional: 5,62
Irracional: 5,6201001…

e) Racional: $-2{,}67$
Irracional: $-2{,}6701001\ldots$

f) Racional: 0,21
Irracional: 0,2101001…

061 ¿Es cierto que $3{,}\overset{\frown}{2} = 3{,}222$? Si no lo es, escribe dos números, uno racional y otro irracional, situados entre ellos.

No es cierto, ya que un número es decimal exacto y el otro es periódico.

Respuesta abierta.

Racional: 3,2221
Irracional: 3,222101001…

062 Clasifica en racionales e irracionales las raíces cuadradas de los números naturales menores que 20.

Son racionales las raíces de los cuadrados perfectos (1, 4, 9 y 16).
Las demás raíces son irracionales.

063 Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.

$$\frac{\sqrt{4}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\sqrt{9}}{3} \quad \frac{\sqrt{16}}{5} \quad \frac{\sqrt{36}}{3}$$

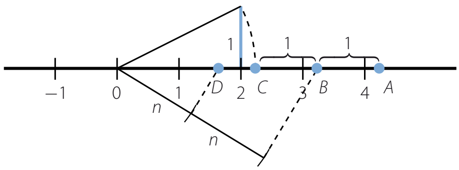
Solo es irracional $\frac{\sqrt{5}}{2}$, ya que las demás raíces son exactas.

064 Deduce cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.

$$1+\sqrt{2} \qquad 3+\sqrt{4} \qquad 5-\sqrt{9} \qquad 8+\sqrt{10} \qquad 3\sqrt{16} \qquad 5\sqrt{49}$$

Son irracionales $1+\sqrt{2}$ y $8+\sqrt{10}$, pues las demás raíces son exactas.

065 ¿Qué números representan sobre esta recta numérica los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, donde *n* es un segmento cualquiera?

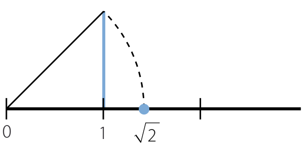


$C=\sqrt{5}$ $\qquad B=1+\sqrt{5}$ $\qquad D=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad A=2+\sqrt{5}$

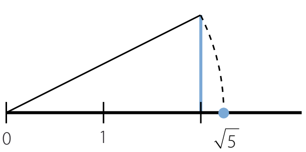
066 Representa en la recta real.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt{7}$ g) $\sqrt{14}$ h) $\sqrt{30}$

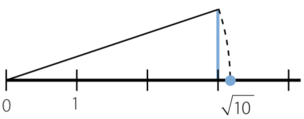
a)



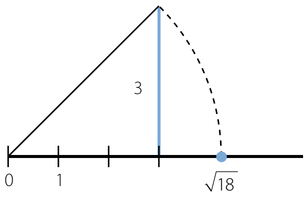
b)



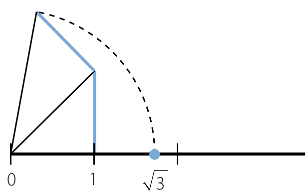
c)



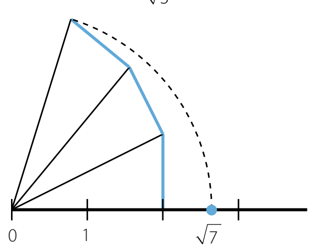
d)



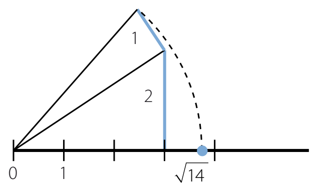
e)



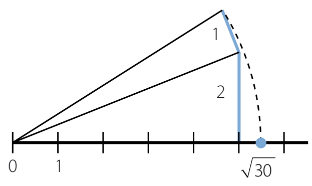
f)



g)



h)



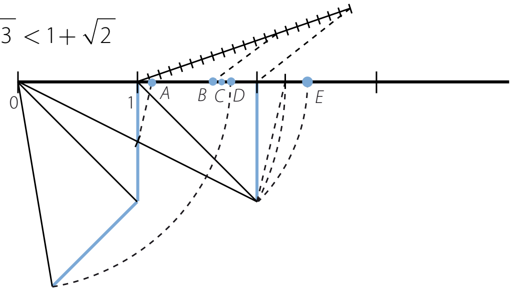
067 Ordena y representa, de forma exacta o aproximada, los siguientes números reales.

$$1{,}65 \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad 1+\sqrt{2} \qquad 1{,}6\widehat{57}$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

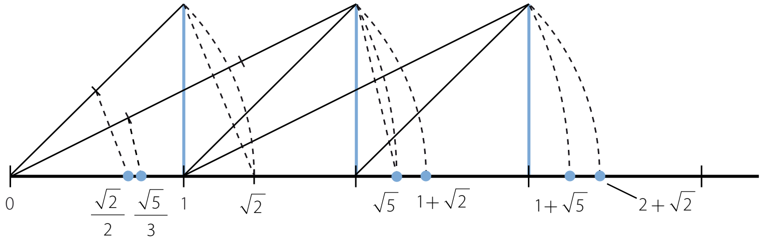
$$\frac{\sqrt{5}}{2} < 1{,}65 < 1{,}6\widehat{57} < \sqrt{3} < 1+\sqrt{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$B = 1{,}65$$
$$C = 1{,}6\widehat{57}$$
$$D = \sqrt{3}$$
$$E = 1+\sqrt{2}$$



068 Representa estos números en la recta real.

$$\sqrt{5} \qquad 1+\sqrt{2} \qquad 2+\sqrt{2} \qquad 1+\sqrt{5} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{5}}{3}$$

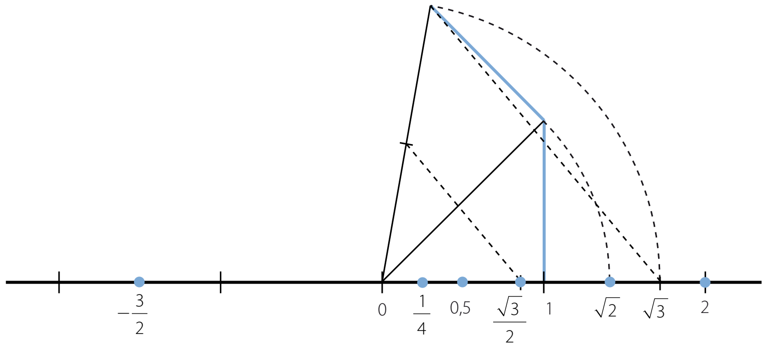


069 Ordena y representa los siguientes números.

$$-\frac{3}{2} \qquad 0{,}5 \qquad \sqrt{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{4} < 0{,}5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$$



070 ●●○

Opera y clasifica el tipo de número real.

a) $\sqrt{2,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{4,\widehat{9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$

a) Es un número racional: $\sqrt{2,\widehat{7}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \pm\dfrac{5}{3}$

b) Es un número irracional: $\sqrt{4,\widehat{9}} = \sqrt{\dfrac{45}{9}} = \sqrt{5}$

c) Es un número racional: $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{27}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}$

071 ●○○

Describe y representa los siguientes intervalos.

a) (0, 10) e) [5, 10)
b) (3, 7] f) [−4, +∞)
c) (−∞, −2) g) (−∞, 6]
d) [2, 5] h) (100, +∞)

a) $\{x: 0 < x < 10\}$

b) $\{x: 3 < x \leq 7\}$

c) $\{x: x < -2\}$

d) $\{x: 2 \leq x \leq 5\}$

e) $\{x: 5 \leq x < 10\}$

f) $\{x: -4 \leq x\}$

g) $\{x: x \leq 6\}$

h) $\{x: 100 < x\}$

072 Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$ b) $6 < x \leq 7$ c) $5 \leq x < 9$ d) $10 \leq x \leq 12$

a) $(1, 3)$ b) $(6, 7]$ c) $[5, 9)$ d) $[10, 12]$

073 Escribe el intervalo que corresponde a:

a) $x \leq -2$ c) $x > -3$ e) $x < -9$

b) $x < 5$ d) $x \geq 7$ f) $x \geq -6$

a) $(-\infty, -2]$ c) $(-3, +\infty)$ e) $(-\infty, -9)$

b) $(-\infty, 5)$ d) $[7, +\infty)$ f) $[-6, +\infty)$

074 Representa, mediante intervalos, los números:

a) Mayores o iguales que 5.

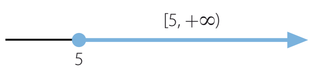
b) Menores o iguales que -8.

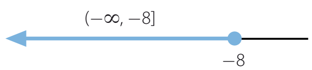
c) Mayores que -2.

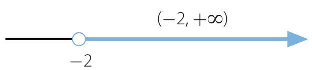
d) Mayores que 2 y menores que 4.

e) Mayores que -5 y menores que -2.

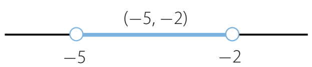
f) Comprendidos entre 0 y 10, incluidos estos.

a) 

b) 

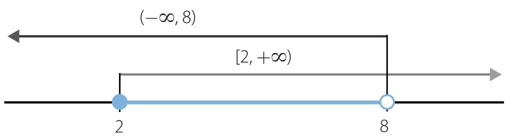
c) 

d) 

e) 

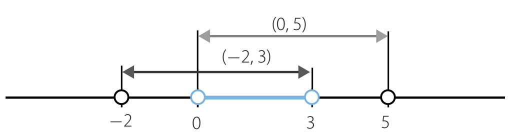
f) 

075 Representa $(-\infty, 8)$ y $[2, +\infty)$ en la misma recta, y señala mediante un intervalo los puntos que están en ambos.



El intervalo es $[2, 8)$.

076 Representa los intervalos $(0, 5)$ y $(-2, 3)$ en la misma recta, y señala el intervalo intersección.



El intervalo es $(0, 3)$.

077 Escribe dos intervalos cuya intersección sea el intervalo $[-1, 1]$.

Respuesta abierta: $(-3, 1]$ y $[-1, 5)$

078 Opera y redondea el resultado a las décimas.

a) $3{,}253 + 8{,}45$
b) $52{,}32 - 18{,}93$
c) $4{,}72 + 153{,}879$
d) $7{,}8 \cdot 12{,}9$
e) $13{,}5 \cdot 2{,}7$
f) $40{,}92 : 5{,}3$
g) $62{,}3 - 24{,}95$
h) $100{,}45 : 8{,}3$

a) Redondeo: 11,7
b) Redondeo: 33,4
c) Redondeo: 158,6
d) Redondeo: 100,6
e) Redondeo: 36,5
f) Redondeo: 7,7
g) Redondeo: 37,4
h) Redondeo: 12,1

079 Halla la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas para cada caso.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $\dfrac{6}{7} + \sqrt{7}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
d) $\dfrac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) 3,1463
b) 3,5029
c) 0,5040
d) 3,0951

080 ¿Qué error absoluto cometemos al aproximar el resultado de $45{,}96 + 203{,}7 + 0{,}823$ por el número 250,49?

$45{,}96 + 203{,}7 + 0{,}823 = 250{,}483$

El error absoluto cometido es: $E_a = |250{,}483 - 250{,}49| = 0{,}007$

081 Si aproximamos 10,469 por 10,5; ¿qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? Razónalo.

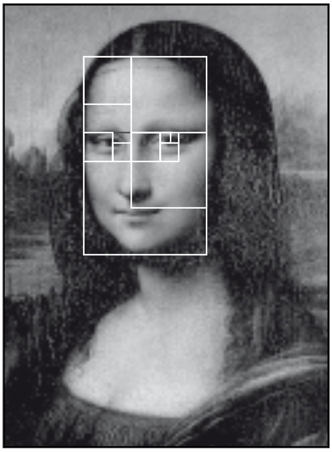
El error absoluto cometido es: $E_a = |10{,}469 - 10{,}5| = 0{,}031$

Si se aproxima por 10,4; el error absoluto es: $E_a = |10{,}469 - 10{,}4| = 0{,}069$

Es mejor aproximación 10,5; porque el error absoluto cometido es menor.

082 Desde la antigüedad aparece con frecuencia, el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en las medidas de construcciones, o en obras de arte como la *Gioconda*.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$



a) Escribe la aproximación por redondeo hasta las centésimas del número de oro.
b) ¿Puedes hallar los errores absoluto y relativo?

a) La aproximación por redondeo a las centésimas es 1,62.
b) No se pueden hallar los errores absoluto y relativo, ya que el número de oro es un número irracional y, por tanto, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

083 Un truncamiento de 8,56792 es 8,56. Calcula el error absoluto y el error relativo.

El error absoluto cometido es: $E_a = |8{,}56792 - 8{,}56| = 0{,}00792$

El error relativo cometido es: $E_r = \left|\dfrac{0{,}00792}{8{,}56792}\right| = 0{,}00092$

084 Aproxima el número $\dfrac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.

Para que el error absoluto cometido sea menor que una centésima, hay que calcular el cociente con dos cifras decimales. La aproximación pedida es 0,14.

085 Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

Para que el error absoluto sea menor que una milésima, se escribe el número con tres cifras decimales. Por tanto, la aproximación pedida es 12,345.

086 Escribe los 5 primeros intervalos encajados dentro de los cuales se halla $\sqrt{32}$, e indica qué error máximo cometes en cada uno.

$\sqrt{32} = 5{,}65685\ldots$

(5, 6)	Error $< 6 - 5 = 1$
(5,5; 5,6)	Error $< 5{,}6 - 5{,}5 = 0{,}1$
(5,65; 5,66)	Error $< 5{,}66 - 5{,}65 = 0{,}01$
(5,656; 5,657)	Error $< 5{,}657 - 5{,}656 = 0{,}001$
(5,6568; 5,6569)	Error $< 5{,}6569 - 5{,}6568 = 0{,}0001$

087 ¿Se puede escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$? Justifica la respuesta y di cuál es el orden de error cometido.

Al ser un número irracional es imposible escribirlo con una fracción, ya que todas las fracciones son números racionales.

$\pi = 3{,}1415926\ldots \qquad \dfrac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$

El error cometido es menor que una millonésima.

088 ¿Para qué número sería 5.432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?

Respuesta abierta.

Una aproximación a las milésimas es 5.432,7231.

La respuesta no es única, ya que hay infinitos números.

089 Indica cuáles de los números están escritos en notación científica.

a) $54 \cdot 10^{12}$ c) 243.000.000 e) $7{,}2 \cdot 10^{-2}$ g) $0{,}01 \cdot 10^{-30}$

b) $0{,}75 \cdot 10^{-11}$ d) 0,00001 f) $0{,}5 \cdot 10^{14}$ h) $18{,}32 \cdot 10^{4}$

El número $7{,}2 \cdot 10^{-2}$ está escrito en notación científica.

090 Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su mantisa y su orden de magnitud.

a) 5.000.000.000 c) 31.940.000 e) 4.598.000.000 g) 329.000.000
b) 0,00000051 d) 0,0000000009 f) 0,0967254 h) 111.000

a) $5.000.000.000 = 5 \cdot 10^9$	Mantisa: 5	Orden de magnitud: 9
b) $0,00000051 = 5,1 \cdot 10^{-7}$	Mantisa: 5,1	Orden de magnitud: −7
c) $31.940.000 = 3,194 \cdot 10^7$	Mantisa: 3,194	Orden de magnitud: 7
d) $0,0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$	Mantisa: 9	Orden de magnitud: −10
e) $4.598.000.000 = 4,598 \cdot 10^9$	Mantisa: 4,598	Orden de magnitud: 9
f) $0,0967254 = 9,67254 \cdot 10^{-2}$	Mantisa: 9,67254	Orden de magnitud: −2
g) $329.000.000 = 3,29 \cdot 10^8$	Mantisa: 3,29	Orden de magnitud: 8
h) $111.000 = 1,11 \cdot 10^5$	Mantisa: 1,11	Orden de magnitud: 5

091 Desarrolla estos números escritos en notación científica.

a) $4,8 \cdot 10^8$ b) $8,32 \cdot 10^{-11}$ c) $6,23 \cdot 10^{-18}$ d) $3,5 \cdot 10^{-12}$

a) $4,8 \cdot 10^8 = 480.000.000$
b) $8,32 \cdot 10^{-11} = 0,0000000000832$
c) $6,23 \cdot 10^{-18} = 0,00000000000000000623$
d) $3,5 \cdot 10^{-12} = 0,0000000000035$

092 Realiza las operaciones.

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4 = 3,89 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3 = 1,0335 \cdot 10^4$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3} = 3,620000585 \cdot 10^4$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2} = 2,303975 \cdot 10^2$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2 = 5,93830346 \cdot 10^4$

093 Halla el resultado de estas operaciones.

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4 = 5,78 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2 = 8,055 \cdot 10^3$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6} = 7,887 \cdot 10^{-4}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2 = 4,652610 \cdot 10^6$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 4,997 \cdot 10^2$

094 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3}$

b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14}$

c) $8{,}3 \cdot 10^6 : 5{,}37 \cdot 10^2$

d) $9{,}5 \cdot 10^{-6} : 3{,}2 \cdot 10^3$

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3} = 3{,}8325 \cdot 10^2$

b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14} = 5{,}0787 \cdot 10^{10}$

c) $8{,}3 \cdot 10^6 : 5{,}37 \cdot 10^2 = 1{,}545623836 \cdot 10^4$

d) $9{,}5 \cdot 10^{-6} : 3{,}2 \cdot 10^3 = 2{,}96875 \cdot 10^{-9}$

095 Simplifica el resultado de estas operaciones.

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}}$

b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}}$

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{2{,}82762 \cdot 10^2}{5{,}1903 \cdot 10^4} = 5{,}447893185 \cdot 10^{-3}$

b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}} = \dfrac{2{,}29712 \cdot 10^{-1}}{6{,}44 \cdot 10^6} = 3{,}566956522 \cdot 10^{-8}$

096 Halla el valor numérico de estos radicales.

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[5]{-100.000}$ d) $\sqrt[3]{-216}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

a) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$

c) $\sqrt[5]{-100.000} = -10$

d) $\sqrt[3]{-216} = -6$

e) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$

f) $\sqrt[7]{-128} = -2$

097 Indica los radicales equivalentes.

$\sqrt[4]{2^3}$ $\sqrt[5]{3^2}$ $\sqrt[3]{7^2}$ $\sqrt[8]{2^6}$ $\sqrt[12]{7^8}$ $\sqrt[10]{3^4}$ $\sqrt[12]{2^9}$ $\sqrt[20]{2^{15}}$

$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{2^9}$

$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{10}} = \sqrt[10]{3^4}$

$\sqrt[8]{2^6} = 2^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{15}{20}} = \sqrt[20]{2^{15}}$

$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{7^8}$

098 Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{75}$ f) $\sqrt[5]{128}$ g) $\sqrt[6]{27}$ h) $\sqrt[8]{625}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$

f) $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{7}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{2^2}$

g) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

h) $\sqrt[8]{625} = \sqrt[8]{5^4} = 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

099 Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

a) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \left(a\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}} = \left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{4}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{-1}{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{-1}{4}}$

g) $\left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} = a^{\frac{-1}{3}}$

100 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}} = \left(3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{10}} \cdot 5^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{3^2 \cdot 5}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} = \left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = \left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

101 Extrae los factores que puedas de la raíz.

a) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{12}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$

b) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{98}$ f) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[3]{40}$

a) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 5^2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{98}=\sqrt{2\cdot 7^2}=7\sqrt{2}$

e) $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 2^2}=2\sqrt{3}$

f) $\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 5^2}=5\sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{1.000}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5^3}=2\cdot 5=10$

h) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=2\sqrt[3]{5}$

102 Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt[3]{8a^5}$ c) $\sqrt{2^6a^4b^8}$ e) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$

b) $\sqrt[4]{16a^7}$ d) $\sqrt[4]{a^6b^5c^9}$ f) $\sqrt[3]{15.625x^4y^3}$

a) $\sqrt[3]{8a^5}=\sqrt[3]{2^3a^5}=2a\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt[4]{16a^7}=\sqrt[4]{2^4a^7}=2a\sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt{2^6a^4b^8}=2^3a^2b^4$

d) $\sqrt[4]{a^6b^5c^9}=abc^2\sqrt[4]{a^2bc}$

e) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}=ab^2\sqrt[5]{a}$

f) $\sqrt[3]{15.625x^4y^3}=\sqrt[3]{5^6x^4y^3}=5^2xy\sqrt[3]{x}$

103 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}}$ e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$ d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$ f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^{-6}}}=\left(a^{\frac{-6}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}=\sqrt[4]{2^5a^5b^{-8}c^{-12}}=2ab^{-2}c^{-3}\sqrt[4]{2a}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^3a^4}{3^4b^3}}=\dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}}$

d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}=\dfrac{-\sqrt[3]{2^3a^3b^5c^{-2}}}{-\sqrt[3]{2^5a^6b^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2a^3c^2}}=\dfrac{1}{a}\sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2c^2}}$

e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}=\sqrt[6]{3^6a^7b^{-12}}=3ab^{-2}\sqrt[6]{a}$

f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(a^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

104 Introduce los factores bajo el radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ c) $3\sqrt[5]{15}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ g) $2\sqrt[3]{7}$ i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ j) $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

b) $4\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{4^4\cdot 20} = \sqrt[4]{5.120}$

c) $3\sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{3^5\cdot 15} = \sqrt[5]{3.645}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3^2\cdot 2}{5^2}} = \sqrt{\frac{18}{25}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\frac{1\cdot 6}{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{6}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3}{8}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4\cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{32}}$

g) $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3\cdot 7} = \sqrt[3]{56}$

h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{5}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 2}{5^3\cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{125}}$

j) $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{4} = \sqrt[3]{\frac{3}{7^3\cdot 4^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{21.952}}$

105 Introduce los factores dentro del radical, si es posible.

a) $a\cdot\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ c) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}}$ e) $5+\sqrt{2}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ d) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

a) $a\cdot\sqrt{\frac{4a-1}{2a}} = \sqrt{\frac{a^2(4a-1)}{2a}} = \sqrt{\frac{4a^2-a}{2}}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}} = \sqrt[4]{\frac{4^4a^4b^4c^2b}{c^4\,8a}} = \sqrt[4]{\frac{2^8a^4b^5c^2}{2^3ac^4}} = \sqrt[4]{\frac{2^5a^3b^5}{c^2}}$

c) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2^2\,3a}{2^3a^2}} = \sqrt{\frac{3}{2a}}$

d) $-2ab^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{-2^3a^3b^6ab} = \sqrt[3]{-2^3a^4b^7}$

e) No es posible introducir factores, puesto que 5 no es factor.

f) $-a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a^6a} = \sqrt[3]{-a^7}$

106 Opera y simplifica.

a) $(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)$

b) $(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})\cdot(5-2\sqrt{2})$

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

d) $(5\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{2}+3)$

e) $(7\sqrt{5}+4)\cdot(5\sqrt{5}-3\sqrt{6})$

f) $(7\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{3}+2)$

g) $(6\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot(6\sqrt{7}-\sqrt{5})$

h) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{10})$

a) $\left(3\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)=12\left(\sqrt{2}\right)^2-9\sqrt{2}-20\sqrt{2}+15=-29\sqrt{2}+39$

b) $\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{2}\right)=10\sqrt{7}-4\sqrt{14}+15\sqrt{2}-6\left(\sqrt{2}\right)^2=$
$=10\sqrt{7}-4\sqrt{14}+15\sqrt{2}-12$

c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$

d) $\left(5\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+3\right)=25\left(\sqrt{2}\right)^2+15\sqrt{2}-15\sqrt{2}-9=50-9=41$

e) $\left(7\sqrt{5}+4\right)\cdot\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{6}\right)=35\left(\sqrt{5}\right)^2-21\sqrt{30}+20\sqrt{5}-12\sqrt{6}=$
$=175-21\sqrt{30}+20\sqrt{5}-12\sqrt{6}$

f) $\left(7\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(5\sqrt{3}+2\right)=35\sqrt{6}+14\sqrt{2}-15\sqrt{3}-6$

g) $\left(6\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(6\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)=36\left(\sqrt{7}\right)^2-6\sqrt{35}+6\sqrt{35}-\left(\sqrt{5}\right)^2=$
$=252-5=247$

h) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)=4\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{50}-2\sqrt{50}-\left(\sqrt{10}\right)^2=$
$=20-10=10$

107 Calcula.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{9}{12}}\cdot a^{\frac{20}{12}}\cdot a^{\frac{8}{12}}=a^{\frac{27}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}=a^3\sqrt[12]{a}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}=\left(3a^2b\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2ab^3\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3a^2b\right)^{\frac{2}{6}}\cdot\left(2ab^3\right)^{\frac{3}{6}}=$
$=\sqrt[6]{3^2a^4b^2\,2^3a^3b^9}=\sqrt[6]{2^3 3^2a^7b^{11}}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}=\left(2a^3b^4\right)^{\frac{1}{5}}:\left(4ab^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2a^3b^4\right)^{\frac{3}{15}}:\left(4ab^2\right)^{\frac{5}{15}}=$
$=\sqrt[15]{\frac{2^3a^9b^{12}}{4^5a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{2^3a^9b^{12}}{2^{10}a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{a^4b^2}{2^7}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a(b)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2b}$

108 Efectúa y simplifica.

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+4\sqrt{5}\right)$

c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-4\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)$

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=4+4\sqrt{3}+3-4+3=6+4\sqrt{3}$

b) $\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+4\sqrt{5}\right)=9-5+4-80=-72$

c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-4\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)=$
$=3-\sqrt{15}+4\sqrt{21}+\sqrt{15}-5+4\sqrt{35}-4\sqrt{21}+4\sqrt{35}-112=109+8\sqrt{35}$

109 Halla el resultado.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{(5\sqrt{3}+1)(5\sqrt{3}+1)}=\sqrt[3]{75-1}=\sqrt[3]{74}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt[4]{3-2}=1$

110 Efectúa y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^4}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^{\frac{48}{12}}}=\sqrt[12]{2^{35}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}=\left(3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right):3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{8}}:3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+\sqrt{7-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{16a+9a}{144}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{25a}{144}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{12}\sqrt{a}\right)^{-2}=\dfrac{144}{25a}$

111 Expresa el resultado como potencia.

a) $\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}\right)^6$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

a) $\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}\right)^6=\left(5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(5^{\frac{5}{6}}\right)^6=5^5$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{5}}\cdot\left(3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{7}{10}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{11}{24}}$

d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}=\left(2^3\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=2\cdot 3^{\frac{4}{15}}$

112 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{-5}{2\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[5]{-3^2}}$

e) $\dfrac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$

f) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

g) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt[3]{6}}$

h) $\dfrac{9}{5\sqrt[7]{5^5}}$

i) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[3]{3^2}}$

j) $\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3^5}}$

a) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}=\dfrac{(6\sqrt{6}-6)\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\dfrac{6\cdot 6-6\sqrt{6}}{6}=\dfrac{6(6-\sqrt{6})}{6}=6-\sqrt{6}$

b) $\dfrac{-5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{-5\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}=\dfrac{-5\sqrt{5}}{10}=\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[5]{-3^2}}=\dfrac{(5\sqrt{3}-4)\sqrt[5]{-3^3}}{\sqrt[5]{-3^2}\cdot\sqrt[5]{-3^3}}=\dfrac{-15\sqrt[10]{3}+4\sqrt[5]{-3^3}}{-3}=\dfrac{15\sqrt[10]{3}-4\sqrt[5]{-3^3}}{3}$

e) $\dfrac{-6}{2\sqrt[4]{7}}=\dfrac{-3}{\sqrt[4]{7}}=\dfrac{-3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7}\,\sqrt[4]{7^3}}=\dfrac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

f) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}=\dfrac{(7+\sqrt{5})\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{7\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{675}}{3}$

g) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt[3]{6}}=\dfrac{(6\sqrt{6}-6)\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6^2}}=\dfrac{6(6\sqrt[6]{6}-\sqrt[3]{6^2})}{6}=6\sqrt[6]{6}-\sqrt[3]{6^2}$

h) $\dfrac{9}{5\sqrt[7]{5^5}}=\dfrac{9\sqrt[7]{5^2}}{5\sqrt[7]{5^5}\cdot\sqrt[7]{5^2}}=\dfrac{9\sqrt[7]{5^2}}{25}$

i) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{(5\sqrt{3}-4)\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{5\sqrt[6]{3^5}-4\sqrt[3]{3}}{3}$

j) $\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3^5}}=\dfrac{7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{7\sqrt[12]{2^4\cdot 3^9}}{9}$

113 ●○○ Elimina las raíces del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=-3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{-5(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=\dfrac{-5\sqrt{3}-10}{3-4}=5\sqrt{3}+10$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{18-5}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{13}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}=\dfrac{7(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{11-9}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{2}$

f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\dfrac{-5(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})}=\dfrac{-5\sqrt{6}+5\sqrt{7}}{6-7}=5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

114 ●●○ Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{-1}{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ b) $\dfrac{5}{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}$ c) $\dfrac{8}{5\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})}$ d) $\dfrac{-7}{9\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3})}$

a) $\dfrac{-1}{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{5}{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{3(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{15}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{8}{5\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})}=\dfrac{8(\sqrt{10}+\sqrt{6})}{5(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})}=\dfrac{8(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{20}=\dfrac{2(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{5}$

d) $\dfrac{-7}{9\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\dfrac{-7(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{9(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{-7(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{27}$

115 ●●○ Racionaliza y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$ b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{3+\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}\,(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{9-6}=\dfrac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{3}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(1-\sqrt{5}+\sqrt{7})(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})}=$

$=\dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-5+\sqrt{35}+\sqrt{7}+\sqrt{35}-7}=\dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-11+2\sqrt{35}}=$

$=\dfrac{(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})(-11-2\sqrt{35})}{(-11+2\sqrt{35})(-11-2\sqrt{35})}=\dfrac{-11-11\sqrt{5}+11\sqrt{7}-2\sqrt{35}-2\sqrt{175}+2\sqrt{245}}{121-140}=$

$=\dfrac{-11-11\sqrt{5}+11\sqrt{7}-2\sqrt{35}-2\sqrt{175}+2\sqrt{245}}{-19}$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{(5\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{18}}{(\sqrt{18})^2}=\dfrac{5\sqrt{3^3\cdot 2^2}-6}{18}=$

$=\dfrac{5\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}-6}{18}=\dfrac{6(5\sqrt{3}-1)}{6\cdot 3}=\dfrac{5\sqrt{3}-1}{3}$

d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}=\dfrac{(4\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{12}}{(\sqrt{12})^2}=\dfrac{24+\sqrt{84}}{12}=\dfrac{2(12+\sqrt{21})}{6\cdot 2}=\dfrac{12+\sqrt{21}}{6}$

116 ●●○ Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}$

d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}=\dfrac{3}{24-9\sqrt{2}-20\sqrt{2}+15}=\dfrac{3}{39-29\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{3(39+29\sqrt{2})}{(39-29\sqrt{2})(39+29\sqrt{2})}=\dfrac{117+87\sqrt{2}}{1.521-1.682}=\dfrac{117+87\sqrt{2}}{-161}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}=\dfrac{-2(5\sqrt{3}+1)}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)(5\sqrt{3}+1)}=\dfrac{-2(5\sqrt{3}+1)}{74\sqrt[3]{4}}=$

$=\dfrac{-5\sqrt{3}-1}{37\sqrt[3]{4}}=\dfrac{(-5\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{4^2}}{37\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{-5\sqrt[6]{3^3\cdot 4^4}-\sqrt[3]{4^2}}{148}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}=\dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{125}-2)}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)(\sqrt{125}-2)}=\dfrac{-\sqrt{250}+2\sqrt{2}}{121\sqrt[3]{2}}=$

$=\dfrac{(-\sqrt{250}+2\sqrt{2})\sqrt[3]{2^2}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{-\sqrt[6]{5^9\cdot 2^7}+2\sqrt[6]{2^7}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{-5\cdot 2\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2^2\sqrt[6]{2}}{242}=$

$=\dfrac{2(-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2})}{242}=\dfrac{-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2}}{121}$

d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}=\dfrac{-4}{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{-4}{3^{\frac{3}{12}}\cdot 2^{\frac{4}{12}}}=\dfrac{-4}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}}=\dfrac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}\,\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}=$

$=\dfrac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{6}=\dfrac{-2\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{3}$

117 Realiza estas operaciones.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[9]{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[9]{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

118 Efectúa las operaciones.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+5}-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+5}-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{5}-5}{(\sqrt{5}+5)\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{5}-5}{\sqrt[6]{5^5}+5\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[9]{3}}{\sqrt[9]{3^7}}$

119 Calcula, mediante la definición, los logaritmos.

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1.000.000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1.000.000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

120 Sabiendo que $\log_3 2 = 0{,}63$; halla $\log_3 24$ mediante las propiedades de los logaritmos.

$$\log_3 24 = \log_3 (2^3\cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3\log_3 2 + \log_3 3 = 3\cdot 0{,}63 + 1 = $$
$$= 1{,}89 + 1 = 2{,}89$$

121 Calcula $\log_4 128$, utilizando las propiedades de los logaritmos, e intenta dar un resultado exacto.

$\log_4 128 \qquad 4^x = 128 \qquad 2^{2x} = 128 \qquad 2^{2x} = 2^7 \qquad x = \frac{7}{2}$

122 Halla el resultado de las expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 = 2\cdot 2 + 5 - 3\cdot 2 = 3$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 = 3 + 3 + 3 = 9$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 = 4 - 2 + 2 = 4$

123 Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\log_3 \dfrac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$

b) $\log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

c) $\log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2 \cdot z^3}}$

d) $\ln \dfrac{e^3 \cdot \sqrt[4]{a^6}}{1.000}$

a) $$\log_3 \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2} = \log_3 (a^2 \cdot b^5 \cdot c) - \log_3 d^2 =$$
$$= \log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 =$$
$$= 2 \log_3 a + 5 \log_3 b + \log_3 c - 2 \log_3 d$$

b) $$\log_2 \frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}} = \log_2 \left(a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}\right) - \log_2 \sqrt[3]{c^7} =$$
$$= \log_2 a^3 + \log_2 b^{\frac{6}{5}} - \log_2 c^{\frac{7}{3}} =$$
$$= 3 \log_2 a + \frac{6}{5} \log_2 b + \frac{7}{3} \log_2 c$$

c) $$\log_{10} \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2 \cdot z^3}} = \log_{10} \left(x \cdot \sqrt{x}\right) - \log_{10} \sqrt[5]{y^2 \cdot z^3} =$$
$$= \log_{10} \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) - \log_{10} \left(y^{\frac{2}{5}} \cdot z^{\frac{3}{5}}\right) =$$
$$= \log_{10} x + \log_{10} x^{\frac{1}{2}} - \log_{10} y^{\frac{2}{5}} - \log_{10} z^{\frac{3}{5}} =$$
$$= \log_{10} x + \frac{1}{2} \log_{10} x - \frac{2}{5} \log_{10} y - \frac{3}{5} \log_{10} z$$

d) $$\ln \frac{e^3 \cdot \sqrt[4]{a^6}}{1.000} = \ln \left(e^3 \cdot a^{\frac{6}{4}}\right) - \ln 1.000 =$$
$$= \ln e^3 + \ln a^{\frac{3}{2}} - \ln 10^3 =$$
$$= 3 \ln e + \frac{3}{2} \ln a - 3 \ln 10$$

124 Determina, utilizando la calculadora.

a) $\log_5 36^2$ b) $\log_2 \sqrt{31}$ c) $\log_6 100$ d) $\log_4 31^5$

a) $$\log_5 36^2 = 2 \log_5 36 = 2 \cdot \frac{\log 36}{\log 5} = 4,4531$$

b) $$\log_2 \sqrt{31} = \frac{1}{2} \log_2 31 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 31}{\log 2} = 2,4771$$

c) $$\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2 \cdot \frac{\log 10}{\log 6} = 2,5701$$

d) $$\log_4 31^5 = 5 \log_4 31 = 5 \cdot \frac{\log 31}{\log 4} = 12,3855$$

125 Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$? ¿Y $\ln 0{,}1$?

$$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025 \qquad \ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$$

126 Halla el valor de los logaritmos decimales, teniendo en cuenta que $\log 2 = 0{,}3010$.

a) $\log 1.250$ c) $\log 5$ e) $\log 1{,}6$
b) $\log 0{,}125$ d) $\log 0{,}04$ f) $\log 0{,}2$

a) $\log 1.250 = \log \frac{10.000}{8} = \log 10.000 - \log 2^3 = 4 - 3 \cdot 0{,}3010 = 3{,}097$

b) $\log 0{,}125 = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 2^3 = 0 - 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}903$

c) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

d) $\log 0{,}04 = \log \frac{2^2}{100} = 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0{,}3010 - 2 = -1{,}398$

e) $\log 1{,}6 = \log \frac{2^4}{10} = 4 \log 2 - \log 10 = 4 \cdot 0{,}3010 - 1 = 0{,}204$

f) $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1 = -0{,}699$

127 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x = 5$ c) $\log_2 x = -1$ e) $\log_3 (x-2) = 5$ g) $\log_2 (2-x) = -1$
b) $\log_5 x = 3$ d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$ f) $\log_5 (x+2) = 3$ h) $\log_{23} (3+x) = 4$

a) $\log_3 x = 5 \rightarrow 3^5 = x \rightarrow x = 243$

b) $\log_5 x = 3 \rightarrow 5^3 = x \rightarrow x = 125$

c) $\log_2 x = -1 \rightarrow 2^{-1} = x \rightarrow x = 0{,}5$

d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = x \rightarrow x = \frac{16}{81}$

e) $\log_3 (x-2) = 5 \rightarrow 3^5 = x - 2 \rightarrow x = 243 + 2 = 245$

f) $\log_5 (x+2) = 3 \rightarrow 5^3 = x + 2 \rightarrow x = 125 - 2 = 123$

g) $\log_2 (2-x) = -1 \rightarrow 2^{-1} = 2 - x \rightarrow x = -0{,}5 + 2 = 1{,}5$

h) $\log_{23} (3+x) = 4 \rightarrow 23^4 = 3 + x \rightarrow x = 279.841 - 3 = 279.838$

128 Halla cuánto vale x.

a) $\log_x 3 = -1$ b) $\log_x 5 = 2$ c) $\log_x 3 = -2$ d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3 = -1 \rightarrow x^{-1} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log_x 5 = 2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$

c) $\log_x 3 = -2 \rightarrow x^{-2} = 3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

d) $\log_x 2 = 5 \rightarrow x^5 = 2 \rightarrow x = \sqrt[5]{2}$

129 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{x/2} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \rightarrow x \log_3 9 = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \rightarrow x \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2 \log 2} \rightarrow x = 4{,}9829$

c) $\ln 3^x = -1 \rightarrow x \ln 3 = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{\ln 3} \rightarrow x = -0{,}9102$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \rightarrow 2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 2^{-2} = 2^{2x+8} \rightarrow -2 = 2x + 8 \rightarrow x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3^3 = 3^{3x+9} \rightarrow 3 = 3x + 9 \rightarrow x = -2$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{\log 2} \rightarrow x = 9{,}9658$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \rightarrow (x+6) \ln 3 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \rightarrow x = -3{,}2693$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \rightarrow (3x+4) \log_3 27 = -2 \rightarrow 3x + 4 = \frac{-2}{3}$

$\rightarrow 3x = \frac{-2-12}{3} \rightarrow x = \frac{-14}{9}$

130 Determina el valor de x.

a) $8^x = 1.024$
b) $3^{x^2} = 27$
c) $3^{x^2-6} = 27$
d) $10^{x-1} = 10^3$
e) $8^{x-2} = 1.024$
f) $(3^x)^2 = 27$
g) $3^{x^2} + 18 = 27$
h) $2^{x^2-2x+1} = 1$

a) $8^x = 1.024 \rightarrow 2^{3x} = 2^{10} \rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $3^{x^2} = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 3^3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $3^{x^2-6} = 27 \rightarrow 3^{x^2-6} = 3^3 \rightarrow x^2 - 6 = 3 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$

d) $10^{x-1} = 10^3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

e) $8^{x-2} = 1.024 \rightarrow 2^{3(x-2)} = 2^{10} \rightarrow 3x - 6 = 10 \rightarrow x = \frac{16}{3}$

f) $(3^x)^2 = 27 \rightarrow 3^{2x} \rightarrow 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

g) $3^{x^2} + 18 = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 9 \rightarrow 3^{x^2} = 3^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$

h) $2^{x^2-2x+1} = 1 \rightarrow 2^{x^2-2x+1} = 2^0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

131

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razona tu respuesta.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.
b) Todos los números reales son racionales.
c) Cualquier número irracional es real.
d) Hay números enteros que son irracionales.
e) Existen números reales que son racionales.
f) Todo número decimal es racional.
g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.
h) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.
i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

a) Falsa, pues los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y no se pueden escribir como fracción.
b) Falsa, porque hay números reales que son irracionales.
c) Verdadera, ya que los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales.
d) Falsa, porque si son enteros no pueden tener infinitas cifras decimales no periódicas.
e) Verdadero, pues todos los números que se pueden expresar como fracción, son números reales, que además son racionales.
f) Falsa, porque los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas son irracionales.
g) Verdadero, ya que tienen infinitas cifras decimales no periódicas.
h) Falsa, pues los decimales exactos también son racionales.
i) Verdadero, por definición.

132

¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier número terminado en 2 es un número irracional? ¿Existe otro conjunto de números con esta característica?

Porque no hay ningún número que, al multiplicarlo por sí mismo, dé un número terminado en 2.

Todas las familias de números terminadas en 3, 7 y 8 tienen esta característica.

133

Escribe en notación científica las siguientes cantidades.

a) Distancia Tierra-Luna: 384.000 km
b) Distancia Tierra-Sol: 150.000.000 km
c) Diámetro de un átomo: 0,0000000001 m
d) Superficie de la Tierra: 500 millones de km^2
e) Longitud de un virus (gripe): 0,0000000022 m
f) Peso de un estafilococo: 0,0000001 g
g) Un año luz: 9.500.000.000.000 km
h) Distancia a la galaxia más lejana: 13.000 millones de años luz

a) $384.000 = 3,84 \cdot 10^5$
b) $150.000.000 = 1,5 \cdot 10^8$
c) $0,0000000001 = 1 \cdot 10^{-10}$
d) $500.000.000 = 5 \cdot 10^8$
e) $0,0000000022 = 2,2 \cdot 10^{-9}$
f) $0,0000001 = 1 \cdot 10^{-7}$
g) $9.400.000.000.000 = 9,4 \cdot 10^{12}$
h) $13.000.000.000 = 1,3 \cdot 10^{10}$

134 Con ayuda de las propiedades de los números reales, prueba que el producto de cero por cualquier número real da como resultado cero. En cada caso, indica la propiedad que estás utilizando.

Por la unicidad de los elementos neutros para la suma y la multiplicación se tiene que:

$$0 \cdot a + a = \underset{\text{Propiedad distributiva}}{\underbrace{a \cdot (0+1)}} = a \cdot 1 = a$$

Como $0 \cdot a + a = a \rightarrow 0 \cdot a = 0$

135 ¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\dfrac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, siendo a un número entero?

Como nuestro sistema de numeración es decimal, al dividir un número entero entre un número que sea potencia de 2 o 5, o de ambos, se obtiene un decimal exacto. Si el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un número entero.

136 ¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan?

Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir con la aproximación por exceso o por defecto?

No pueden coincidir, ya que para aproximar por defecto se eliminan las cifras a partir del orden considerado, y para aproximar por exceso se eliminan las cifras a partir del orden considerado, pero se aumenta en una unidad la última cifra que queda.

La aproximación por redondeo coincide con la aproximación por defecto si la cifra anterior al orden considerado es menor que cinco, y coincide con la aproximación por exceso en el resto de casos.

137 Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo: $\dfrac{1}{\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}}$

Multiplicamos el denominador por el conjugado:

$$\frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{\left(\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)} = \frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b}}$$

$$\frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\sqrt[2^{n-2}]{a} - \sqrt[2^{n-2}]{b}}$$

Por tanto, multiplicando por el conjugado n veces:

$$\frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\dots\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{a - b}$$

138 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ b) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}$

a) $$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}{-5-2\sqrt{12}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)(-5+2\sqrt{12})}{(-5-2\sqrt{12})(-5+2\sqrt{12})}=$$
$$=\frac{-10\sqrt{2}+4\sqrt{24}+10\sqrt{3}-24-20-8\sqrt{12}}{25-48}=$$
$$=\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{6}-10\sqrt{3}+4+16\sqrt{3}}{23}=\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{6}+4+6\sqrt{3}}{23}$$

b) $$\frac{2}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{2(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2)(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}{-23+12\sqrt{3}}=\frac{2(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)(-23-12\sqrt{3})}{(-23+12\sqrt{3})(-23-12\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{-92\sqrt{2}-48\sqrt{6}-138\sqrt{3}-216+92+48\sqrt{3}}{97}=$$
$$=\frac{-92\sqrt{2}-48\sqrt{6}-90\sqrt{3}-124}{97}$$

c) $$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3})(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}{-227-60\sqrt{15}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})(-137-60\sqrt{15})}{-2.471}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})(-137+60\sqrt{15})}{-2.471}$$

139 Indica un procedimiento general para racionalizar expresiones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\ldots+\sqrt{b_n}}$$

teniendo en cuenta que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales.

Se multiplica el denominador por una expresión que resulta al cambiar de signo a todos los elementos del denominador menos a uno.

Al realizar la operación el número de raíces disminuye, se repite este proceso tantas veces como sea necesario hasta que la expresión quede racionalizada.

140 Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son cuatro pueblos. La distancia medida entre *A* y *B* ha sido de 48 km, con un error de 200 m, y la distancia entre *C* y *D* ha sido de 300 m, con un error de 2,5 m. ¿Qué medida es mejor? ¿Por qué?

Se calcula el error relativo: $E_r=\left|\dfrac{0,2}{48}\right|=0,00416$ $E_r=\left|\dfrac{2,5}{300}\right|=0,00833$

Es mejor la medida tomada entre las ciudades *A* y *B*, ya que el error relativo cometido es menor.

141 Comprueba las siguientes igualdades.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$

f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2} = a\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

a) Falso: $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{8} = 4$
$\sqrt[12]{4 \cdot 8} \neq 4$

b) Falso: $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{8} = 4$
$\sqrt[5]{4 \cdot 8} \neq 4$

c) Falso: $\sqrt[3]{5+3} = 2$
$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} \neq 2$

d) Falso: $2\sqrt[3]{3^6} = 18$
$\sqrt[3]{(2 \cdot 3)^6} \neq 18$

e) Verdadero: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^3 \cdot b} =$
$= a\sqrt{a \cdot b}$

f) Falso: $2\sqrt{15+1} = 8$
$\sqrt{2 \cdot 15 + 2 \cdot 1} \neq 8$

g) Falso: $\sqrt[4]{a^8b^2} = \left(a^8b^2\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{4}}b^{\frac{2}{4}} = a^2b^{\frac{1}{2}} =$
$= a^2\sqrt{b} \neq a\sqrt{b}$

h) Falso: $\sqrt{3^2+4^2} = 5$
$3+4 \neq 5$

142 Escribe 2^{500} en notación científica.

a) Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y que $\sqrt{10} = 3{,}1622$.

b) ¿Podrías hacerlo con una calculadora científica?

c) Expresa 5^{500} en notación científica, teniendo en cuenta el primer apartado.

a) Llamamos x al número: $2^{500} = x$

Tenemos que encontrar y tal que $10^y = x$.

$2^{500} = x \qquad 500 = \log_2 x = \dfrac{\log x}{\log 2}$

Por otro lado, como $\log x = y$:

$y = 500 \cdot \log 2 = 150{,}5$

$10^{150{,}5} = 10^{0{,}5} \cdot 10^{150} = 3{,}1622 \cdot 10^{150}$

b) No se puede hallar con calculadora, ya que es un número demasiado grande.

c) Llamamos x al número: $5^{500} = x$

Tenemos que encontrar y tal que $10^y = x$:

$5^{500} = x \qquad 500 = \log_5 x = \dfrac{\log x}{\log 5}$

Por otro lado, como $\log x = y$:

$y = 500 \cdot \log 5 = 349{,}5$

$10^{349{,}5} = 10^{0{,}5} \cdot 10^{349} = 3{,}1622 \cdot 10^{349}$

143 Las unidades de medida con que se mide la cantidad de información son:

Byte $= 2^8$ bits Megabyte $= 2^{10}$ Kilobytes

Kilobyte $= 2^{10}$ bytes Gigabyte $= 2^{10}$ Megabytes

Expresa, en forma de potencia y en notación científica, las siguientes cantidades de información en bits y bytes.

a) Disco duro de 120 Gb.
b) Tarjeta de memoria de 512 Mb.
c) Disquete de 1,44 Mb.
d) CD-Rom de 550 Mb.

a) $120\text{ Gb} = 120 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}\text{ bytes} = 15 \cdot 2^{33}\text{ bytes} = 15 \cdot 2^{41}\text{ bits}$

$120\text{ Gb} = 1{,}2885 \cdot 10^{11}\text{ bytes} = 3{,}2985 \cdot 10^{13}\text{ bits}$

b) $512\text{ Mb} = 2^9 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}\text{ bytes} = 2^{29}\text{ bytes} = 2^{37}\text{ bits}$

$512\text{ Mb} = 5{,}3687 \cdot 10^8\text{ bytes} = 1{,}3743 \cdot 10^{11}\text{ bits}$

c) $1{,}44\text{ Mb} = 1{,}44 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}\text{ bytes} = 1{,}44 \cdot 2^{20}\text{ bytes} = 1{,}44 \cdot 2^{28}\text{ bits}$

$1{,}44\text{ Mb} = 1{,}5099 \cdot 10^6\text{ bytes} = 3{,}8655 \cdot 10^8\text{ bits}$

d) $550\text{ Mb} = 550 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}\text{ bytes} = 550 \cdot 2^{20}\text{ bytes} = 550 \cdot 2^{28}\text{ bits}$

$550\text{ Mb} = 5{,}7672 \cdot 10^8\text{ bytes} = 1{,}4764 \cdot 10^{11}\text{ bits}$

PARA FINALIZAR...

144 Si $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible:

a) ¿Cuándo es $\frac{a+1}{b+1}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?

b) ¿Y cuándo es $\frac{a+b}{b+b}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?

a) $\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b}$

$ab + b = ab + a$

$a = b$

b) $\frac{a+b}{b+b} = \frac{a}{b}$

$ab + b^2 = ab + ab \rightarrow b^2 = ab$

Como b es distinto de cero: $b = a$

145 Si una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible, ¿son las fracciones $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ irreducibles?

Como los divisores de $a + b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a + b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es irreducible.

Como los divisores de $a - b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a - b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a-b}{a \cdot b}$ es irreducible.

146 Demuestra la siguiente igualdad: $\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = 1$

$$\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{2} \log \frac{1+k}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{99} \log \frac{1+k}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{99} \left(\log(1+k) - \log k\right) = \frac{1}{2}\left(\log 100 - \log 1\right) = 1$$

147 **Demuestra estas igualdades.**

a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ b) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

a) Por la definición de logaritmos:

$\log_a (b \cdot c) = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$

$a^x = b \cdot c$ $a^y = b$ $a^z = c$

$a^y \cdot a^z = b \cdot c$ $a^y + z = b \cdot c$ $\log_a (b \cdot c) = y + z$

Es decir: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) Por la definición de logaritmos:

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$

$a^x = \frac{b}{c}$ $a^y = b$ $a^z = c$

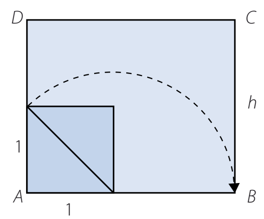
$\frac{a^y}{a^z} = \frac{b}{c}$ $a^{y-z} = \frac{b}{c}$ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = y - z$

Es decir: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

148 **Demuestra la siguiente igualdad: $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$**

$\log (a + b) + \log (a - b) = \log [(a + b)(a - b)] = \log (a^2 - b^2)$

149 **Si el área de esta figura es 10 cm², ¿cuál es su altura?**



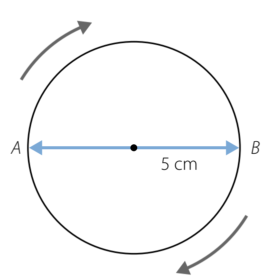
La longitud de la base mide: $1 + \sqrt{2}$ cm

Calculamos la altura: $10 = (1 + \sqrt{2}) \cdot h$

$$h = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = \frac{10 - 10\sqrt{2}}{-1} = -10 + 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

150 **Dos piezas móviles de una máquina se desplazan a la misma velocidad. La primera pieza describe una circunferencia de radio 5 cm y la segunda se desplaza de un extremo al otro del diámetro de esa circunferencia.**

Si ambas piezas parten del mismo punto, ¿coincidirán en algún momento?



Suponemos que ambas piezas parten de *A*.
Llamamos *v* a la velocidad que llevan los dos móviles.
La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por la circunferencia en los puntos *A* y *B* es: $5\pi(k - 1)$, siendo *k* un número natural. La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por el diámetro en los puntos *A* y *B* es: $10(k - 1)$, siendo *k* un número natural. Las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por la circunferencia son números irracionales, mientras que las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por el diámetro son números naturales.
Por tanto, nunca coincidirán ambos móviles.

2 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El último Catón

El calor era infernal, apenas quedaba aire y ya casi no veía, y no sólo por las gotas de sudor que me caían en los ojos, sino porque estaba desfallecida. Notaba un dulce sopor, un sueño ardiente que se apoderaba de mí, dejándome sin fuerza. El suelo, aquella fría plancha de hierro que nos había recibido al llegar, era un lago de fuego que deslumbraba. Todo tenía un resplandor anaranjado y rojizo, incluso nosotros. […]

Pero, entonces, lo comprendí. ¡Era tan fácil! Me bastó echar una última mirada a las manos que Farag y yo teníamos entrelazadas: en aquel amasijo, húmedo por el sudor y brillante por la luz, los dedos se habían multiplicado… A mi cabeza volvió, como en un sueño, un juego infantil, un truco que mi hermano Cesare me había enseñado cuando era pequeña para no tener que aprender de memoria las tablas de multiplicar. Para la tabla del nueve, me había explicado Cesare, sólo había que extender las dos manos, contar desde el dedo meñique de la mano izquierda hasta llegar al número multiplicador y doblar ese dedo. La cantidad de dedos que quedaba a la izquierda, era la primera cifra del resultado, y la que quedaba a la derecha, la segunda.

Me desasí del apretón de Farag, que no abrió los ojos, y regresé frente al ángel. Por un momento creí que perdería el equilibrio, pero me sostuvo la esperanza. ¡No eran seis y tres los eslabones que había que dejar colgando! Eran sesenta y tres. Pero sesenta y tres no era una combinación que pudiera marcarse en aquella caja fuerte. Sesenta y tres era el producto, el resultado de multiplicar otros dos números, como en el truco de Cesare, ¡y eran tan fáciles de adivinar!: ¡los números de Dante, el nueve y el siete! Nueve por siete, sesenta y tres; siete por nueve, sesenta y tres, seis y tres. No había más posibilidades. Solté un grito de alegría y empecé a tirar de las cadenas. Es cierto que desvariaba, que mi mente sufría de una euforia que no era otra cosa que el resultado de la falta de oxígeno. Pero aquella euforia me había proporcionado la solución: ¡Siete y nueve! O nueve y siete, que fue la clave que funcionó. […] La losa con la figura del ángel se hundió lentamente en la tierra, dejando a la vista un nuevo y fresco corredor.

MATILDE ASENSI

Justifica algebraicamente por qué funciona el *truco* para la tabla de multiplicar por 9 y demuestra que no existe un *truco* parecido para multiplicar por un número distinto de 9.

En la tabla del nueve, a medida que vamos multiplicando por un número mayor, sumamos una unidad en las decenas y restamos otra unidad en las unidades:

$$9 \cdot n = n(10 - 1) = 10n - n$$

Por este motivo funciona el *truco*.

En las tablas de multiplicar, desde la tabla del uno hasta la tabla del ocho, a medida que vamos multiplicando por un número mayor no siempre sumamos una unidad en las decenas.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Pon un ejemplo de polinomio de grado 4 y con término independiente -5. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.

Respuesta abierta.

$P(x) = x^4 - x^3 + 5x - 5$

$P(2) = 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 5 = 13$

$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 5 \cdot (-1) - 5 = -8$

002 Saca factor común a las siguientes expresiones.

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1)$

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z = 4xz(xy^2z^2 - 3z - 5y^4)$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)(2x - 8 - 1) =$
$= (3x^2 - 1)(2x - 9)$

003 Realiza esta división por la regla de Ruffini.

$$(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -12 & 0 & -20 & 2 \\ -2 & & -8 & 16 & -8 & 16 & 8 \\ \hline & 4 & -8 & 4 & -8 & -4 & \boxed{10} \end{array}$$

004 Indica los elementos de esta ecuación.

$$(x + 2) \cdot (x - 5) + 2 = 7 - x^2$$

Términos: x^2; $-3x$; -8; 7; $-x^2$

Primer miembro: $(x + 2) \cdot (x - 5) + 2$

Multiplicando el primer miembro: $x^2 - 3x - 8$

Segundo miembro: $7 - x^2$

Incógnita: x

Grado: 2

Soluciones: $x_1 = -2{,}09$; $x_2 = 3{,}59$

005 ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-x}{2}$?

a) $x = 1$

b) $x = 5$

c) $x = -2$

d) $x = 2$

La solución de la ecuación es la del apartado d), $x = 2$.

006 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{4(x-3)}{2}-\dfrac{5(x+8)}{6}=6(x+3)-2$

b) $\dfrac{3(x-2)}{2}-(2x-1)=0$

d) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\dfrac{x+4}{7}-2(x+4)$

a) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{x}{2}\rightarrow 28x-14-6x+6=21x\rightarrow x=8$

b) $\dfrac{3(x-2)}{2}-(2x-1)=0\rightarrow 3x-6-4x+2=0\rightarrow x=-4$

c) $\dfrac{4(x-3)}{2}-\dfrac{5(x+8)}{6}=6(x+3)-2\rightarrow 12x-36-5x-40=$
$=36x+108-12\rightarrow x=-\dfrac{172}{29}$

d) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\dfrac{x+4}{7}-2(x+4)\rightarrow 21x-14+56x-28=$
$=x+4-14x-56\rightarrow x=-\dfrac{1}{9}$

ACTIVIDADES

001 Calcula estos números combinatorios.

a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{7}{5}$ c) $\binom{12}{3}$ d) $\binom{8}{7}$

a) $\binom{7}{2}=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=\dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21$

c) $\binom{12}{3}=\dfrac{12!}{3!\cdot 9!}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$

b) $\binom{7}{5}=\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}=21$

d) $\binom{8}{7}=\dfrac{8!}{7!\cdot 1!}=8$

002 Desarrolla las siguientes potencias, utilizando el binomio de Newton.

a) $(2x-5)^3$ b) $(x^3+2x)^5$

a) $(2x-5)^3=8x^3-60x^2+150x-125$

b) $(x^3+2x)^5=x^{15}+10x^{13}+40x^{11}+80x^9+80x^7+32x^5$

003 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x)=x^4+3x^3-2x^2+6x-8$.

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=-1$ d) $x=-4$

a) $P(1)=1^4+3\cdot 1^3-2\cdot 1^2+6\cdot 1-8=0$
Por tanto, $x=1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2)=2^4+3\cdot 2^3-2\cdot 2^2+6\cdot 2-8=36$

c) $P(-1)=(-1)^4+3\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)-8=-18$

d) $P(-4)=(-4)^4+3\cdot(-4)^3-2\cdot(-4)^2+6\cdot(-4)-8=0$
Por tanto, $x=-4$ es una raíz del polinomio.

004 **Calcula las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 1$ b) $Q(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

La raíz entera del polinomio es: 1

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -1 & 105 \\ 7 & & 7 & -14 & -105 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\ 5 & & 5 & 15 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Las raíces enteras del polinomio son: $\{-3, 5, 7\}$

005 **Factoriza estos polinomios.**

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$ c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = 2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)(x - 4)(3x - 2)$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(x + 3)(x + 4)(2x + 1)$

006 **Encuentra las raíces enteras de los polinomios.**

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$ b) $x^4 - 8x^2 - 9$ c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 12 & 4 \\ -2 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & -1 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

La única raíz entera es: -2

$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$ Esta raíz no es entera.

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -8 & 0 & -9 \\ -3 & & -3 & 9 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-3, 3\}$

c) Sacamos factor común: $2x^2(x^3 + 5x^2 + 14x + 16)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 14 & 16 \\ -2 & & -2 & -6 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-2, 0\}$

007 **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{3x}$ b) $\dfrac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x}$

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{3x} = \dfrac{3x - 5}{3}$

b) $\dfrac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x} = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x + 3}$

008 Realiza esta operación y simplifica el resultado.

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$$

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$$

009 Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2-10x+21=0$
b) $3x^2+20x+12=0$
c) $3x^2+9x-4=0$
d) $4x^2-12x+9=0$
e) $-2x^2+5x-8=0$
f) $3x^2-18x=0$
g) $4x^2-36=0$
h) $-8x^2+40=0$
i) $-5x^2+30x=0$
j) $3x^2=2x^2$

a) Ecuación completa:

$$x^2-10x+21=0\rightarrow x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot21}}{2\cdot1}$$

$$\rightarrow x=\frac{10\pm4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=3\end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2+20x+12=0\rightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot3\cdot12}}{2\cdot3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-20\pm16}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\\x_2=-6\end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2+9x-4=0\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{129}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-9+\sqrt{129}}{6}=0{,}39\\x_2=\dfrac{-9-\sqrt{129}}{6}=-3{,}39\end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2-12x+9=0\rightarrow x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}$$

$$\rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

e) Ecuación completa:

$$-2x^2+5x-8=0\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)}}{2\cdot(-2)}\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{-4}$$

No tiene soluciones reales.

f) Ecuación incompleta:

$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6)=0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

g) Ecuación incompleta:

$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

h) Ecuación incompleta:

$-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

i) Ecuación incompleta:

$-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

j) Ecuación incompleta:

$3x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

010 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0$

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 33 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 20}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = 2$$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

$0 = 0 \rightarrow$ No es una ecuación, es una identidad.

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0 \rightarrow -2x^2 - 7x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{7 \pm \sqrt{177}}{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{177}}{4} = 1{,}58 \\ x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{177}}{4} = -5{,}08 \end{cases}$$

011 **Determina, sin resolver la ecuación, el número de soluciones que tiene.**

a) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$
b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$
c) $-5x^2 + 9x - 6 = 0$
d) $2x^2 - x - 3 = 0$
e) $-x^2 + 9x - 2 = 0$
f) $0{,}34x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = -39 < 0$. No tiene solución real.
b) $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$. Tiene una solución.
c) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6) = -39 < 0$. No tiene solución real.
d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Tiene dos soluciones.
e) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 73 > 0$. Tiene dos soluciones.
f) $\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot (-1) = 1{,}61 > 0$. Tiene dos soluciones.

012 **¿Cuántas soluciones pueden tener estas ecuaciones bicuadradas? Resuélvelas.**

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1)$
c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

Como las ecuaciones son de cuarto grado, pueden tener un máximo de cuatro soluciones.

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 4z^2 - 37z + 9 = 0$

$$z = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{37 \pm 35}{8} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_4 = \dfrac{1}{2}$

b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1) \rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \longrightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

$z_2 = 16 \rightarrow x_3 = -4 \qquad x_4 = 4$

c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

$\rightarrow 36x^4 - 25x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 36z^2 - 25z + 4 = 0$

$$z = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 4}}{2 \cdot 36} = \frac{25 \pm 7}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{4} \\ z_2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$z_1 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1}{2}$

$z_2 = \dfrac{4}{9} \rightarrow x_3 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_4 = \dfrac{2}{3}$

013 Halla la solución de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+7}{x+1}$

b) $\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3-x^2}{x^2}=0$

a) $x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+7}{x+1}\rightarrow x^2-x-6=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-2\end{cases}$$

b) $\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3-x^2}{x^2}=0\rightarrow -x^4+3x^2+4=0\xrightarrow{z=x^2}-z^2+3z+4=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{2\cdot(-1)}=\frac{-3\pm 5}{-2}\rightarrow\begin{cases}z_1=-1\\ z_2=4\end{cases}$$

$z_1=-1\rightarrow$ No tiene solución real.

$z_2=4\rightarrow x_1=2\qquad x_2=-2$

014 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$

b) $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4}$

d) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0$

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6\rightarrow 2x-1=x+4-12\sqrt{x+4}+36$

$\rightarrow(x-41)^2=(-12\sqrt{x+4})^2\rightarrow x^2-226x+1.105=0$

$$x=\frac{-(-226)\pm\sqrt{(-226)^2-4\cdot 1\cdot 1.105}}{2\cdot 1}=\frac{226\pm 216}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=5\\ x_2=221\end{cases}$$

La solución es $x=5$.

b) $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4\rightarrow x^4-8x^2+16=3x^2-2\rightarrow x^4-11x^2+18=0$

$\xrightarrow{z=x^2}z^2-11z+18=0$

$$z=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 7}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=9\\ z_2=2\end{cases}$$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3\qquad x_2=3$

$z_2=2\rightarrow x_3=\sqrt{2}\qquad x_4=-\sqrt{2}$

Las soluciones son $x_1=-3$ y $x_2=3$.

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4} \rightarrow x+2\sqrt{x^2+12x}+x+12=8x+4$
$\rightarrow 4x^2+48x=36x^2-96x+64 \rightarrow 2x^2-9x+4=0$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}=\frac{9\pm 7}{4}\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ x_2=4 \end{cases}$$

La solución es $x=4$.

d) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0 \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2=(3\sqrt{4x-3}-5)^2$
$\rightarrow (6-32x)^2=(-30\sqrt{4x-3})^2 \rightarrow 64x^2-249x+171=0$

$$x=\frac{-(-249)\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot 64\cdot 171}}{2\cdot 64}=\frac{249\pm 135}{256}\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{57}{64} \\ x_2=3 \end{cases}$$

La solución es $x=3$.

015 **Estas ecuaciones aparecen factorizadas. Encuentra su solución.**

a) $3(x-1)(x+2)(x-4)=0$
b) $x(x-2)(x+3)(x-12)=0$
c) $(2x-1)(4x+3)(x-2)=0$
d) $2x^2(x-3)^2(3x+4)=0$
e) $5x(x-1)^2(2x+7)^3=0$

a) $x_1=1 \quad x_2=-2 \quad x_3=4$

b) $x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=-3 \quad x_4=12$

c) $x_1=\dfrac{1}{2} \quad x_2=-\dfrac{3}{4} \quad x_3=2$

d) $x_1=0 \quad x_2=3 \quad x_3=-\dfrac{4}{3}$

e) $x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=-\dfrac{7}{2}$

016 **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$
b) $x^5-6x^4+10x^3-6x^2+9x=0$
c) $x^4+8x^3+17x^2+8x+16=0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)=0$
$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=-4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1)=0$
$x_1=0 \quad x_2=3$

c) $(x+4)^2(x^2+1)=0$
$x=-4$

017 **Escribe una ecuación que tenga como soluciones: $x=3$, $x=2$ y $x=-7$. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?**

Respuesta abierta.

$$(x-3)(x-2)(x+7)=0$$

El mínimo grado que puede tener es 3.

018 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x+6y=0 \\ 6x-9y=-6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5p+\ 2q=1 \\ 15p-10q=11 \end{array}\right\}$

Escoge el método que consideres más adecuado.

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+6y=0 \\ 6x-9y=-6 \end{array}\right\} \rightarrow x=-\frac{3y}{2}$$

$$6\cdot\frac{-3y}{2}-9y=-6 \rightarrow y=\frac{1}{3} \rightarrow x=\frac{-3\cdot\frac{1}{3}}{2}=-\frac{1}{2}$$

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 5p+\ 2q=1 \\ 15p-10q=11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} -15p-\ 6q=-3 \\ 15p-10q=11 \end{array}\right\}$$

Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -15p-\ 6q=-3 \\ 15p-10q=\ 11 \\ \hline -16q=\ 8 \end{array} \rightarrow q=-\frac{1}{2}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5p+2\cdot\frac{-1}{2}=1 \rightarrow p=\frac{2}{5}$$

019 **Halla las soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y+6)=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2 \\ 3(2-x)+4(y+1)=36 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y+6)=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+y=2 \\ 2x-5y=-14 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por reducción:

$$\begin{array}{r} -2x+\ y=\ 2 \\ 2x-5y=-14 \\ \hline -4y=-12 \end{array} \rightarrow y=3$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$-2x+3=2 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2\\ 3(2-x)+4(y+1)=36\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}$

Resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\ \xrightarrow{\cdot 5}\end{array}\left.\begin{array}{r}15x+18y=174\\ -15x+20y=130\end{array}\right\}$$
$$38y=304\rightarrow y=8$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$5x+6\cdot 8=58\rightarrow x=2$

020 **Clasifica estos sistemas de ecuaciones, y resuélvelos por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-\ \ q=11\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}\rightarrow y=4x-2$

Sistema compatible indeterminado: $y=4x-2$.

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-q=11\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-3)}\left.\begin{array}{r}-3p-6q=-3\\ 3p-\ \ q=\ \ 11\end{array}\right\}$$
$$-7q=\ \ 8\rightarrow q=-\frac{8}{7}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

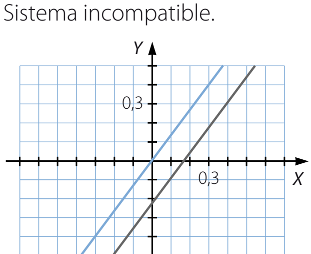
$p-\dfrac{16}{7}=1\rightarrow p=\dfrac{23}{7}$

Sistema compatible determinado.

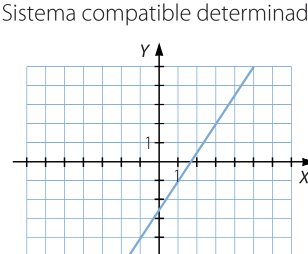
021 **Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.**

a) $\left.\begin{array}{r}-12x+9y=-2\\ 8x-6y=0\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}21a-14b=35\\ -12a+\ \ 8b=-20\end{array}\right\}$

a) Sistema incompatible.



b) Sistema compatible determinado.



022 **Resuelve los sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{array}\right\} \to x = 20 - y$$

$$(20 - y)^2 + y^2 = 202 \to y^2 - 20y + 99 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 11 \\ y_2 = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 20 - 11 = 9$

$x_2 = 20 - 9 = 11$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} \to x = 13 - 2y$$

$$(13 - 2y)^2 + (13 - 2y)y = 24 \to 2y^2 - 39y + 145 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$ $x_2 = 13 - 2 \cdot \dfrac{29}{2} = -16$

023 **Calcula dos números, sabiendo que su suma es 42 y la suma de sus inversos es $\frac{7}{72}$.**

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 42 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{72} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 42 - y \\ 72y + 72x = 7xy \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$72y + 72(42 - y) = 7(42 - y)y \to y^2 - 42y + 432 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 18 \\ y_2 = 24 \end{cases}$$

$x_1 = 42 - 18 = 24$

$x_2 = 42 - 24 = 18$

Los números pedidos son 18 y 24.

024 **Resuelve la siguiente inecuación: $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$**

Razona los pasos realizados para resolverla.

- Resolvemos la ecuación: $\frac{1}{2}x - 4 = 3x + 1 \to x = -2$
- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:
  $x = -4$ de $(-\infty, -2)$ $x = 0$ de $(-2, +\infty)$

- Comprobamos si esos puntos son soluciones:

  Si $x = -4 \rightarrow -6 = \dfrac{-4}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-4) + 1 = -11 \rightarrow (-\infty, -2)$ es solución.

  Si $x = 0 \rightarrow -4 \geq 1 \rightarrow (-2, +\infty)$ no es solución:
- Comprobamos si el extremo es solución.

  Si $x = -2 \rightarrow -5 = \dfrac{-2}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \rightarrow x = -2$ es solución.

Por tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $(-\infty, -2]$.

025 **Encuentra el error cometido en la resolución de esta inecuación.**

$$2x \leq 8x - 12$$
$$-6x \leq -12 \;\rightarrow\; 6x \leq 12 \;\rightarrow\; x \leq 2 \;\rightarrow\; (-\infty, 2)$$

Al pasar del segundo al tercer paso, se ha multiplicado la ecuación por -1, y se debería haber cambiado el sentido de la desigualdad, por las relaciones de orden que cumplen los números reales.

026 **Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.**

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
c) $x^2 - 9x > 0$
d) $x^2 - 9 < 0$
e) $x^2 + 2 \leq 0$
f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$
g) $(x + 3)x < 4$
h) $x^2 - 30 > x$
i) $x^2 + x + 3 < 0$
j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

027 **Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.**

a) $(x-2)(x-3)(x^2-2) \geq 0$
c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$
b) $x(x-4)(x+1)(x^3-1) \leq 0$
d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x-2)(x-3)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10-2)(-10-3)((-10)^2-2) > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow (0-2)(0-3)(0^2-2) < 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow (1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5^2-2) > 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow (2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5^2-2) < 0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow (10-2)(10-3)(10^2-2) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -0{,}5 \qquad x = 0{,}5 \qquad x = 2 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -10 \cdot (-10-4)(-10+1)((-10)^3-1) > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x = -0{,}5 \rightarrow -0{,}5 \cdot (-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1) < 0 \rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5 \cdot (0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1) > 0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot (2-4)(2+1)(2^3-1) < 0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10 \cdot (10-4)(10+1)(10^3-1) > 0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = 0 \rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 < 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 6 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5 \cdot (-10)^3 + 4 \cdot (-10)^2 + 9 \cdot (-10) - 9 > 0$
$\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, 1\right)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 9 > 0 \rightarrow \left(1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5^4 - 5 \cdot 2{,}5^3 + 4 \cdot 2{,}5^2 + 9 \cdot 2{,}5 - 9 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right)$
no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

028 **Representa en el plano la región solución de estas inecuaciones.**

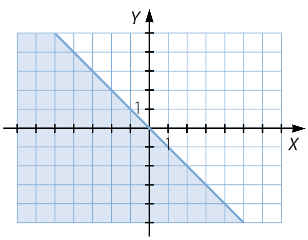
a) $x + y < 0$

b) $x - y \leq 0$

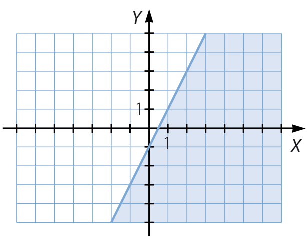
c) $2x - y > 1$

d) $y - 2 \geq 0$

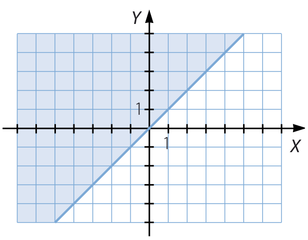
a)



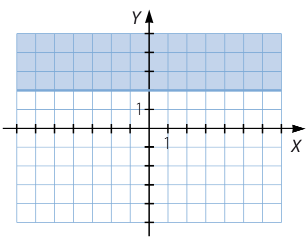
c)



b)



d)



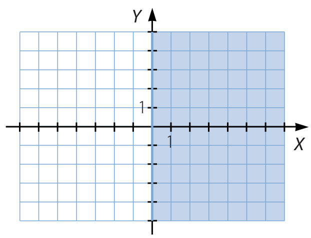
029 Dibuja las siguientes regiones del plano.

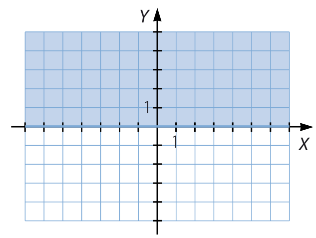
a) Los puntos del plano con abscisa positiva.

b) Los puntos del plano con ordenada mayor o igual que cero.

Encuentra una inecuación que tenga cada una de esas regiones como conjunto solución.

a) $x > 0$ b) $y \geq 0$





030 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+3>5 \\ 2x-1>11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 15+7x\geq 8 \\ 3x<14x+6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+3>5 \\ 2x-1>11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x>2 \\ x>6 \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $(2, +\infty)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 15+7x\geq 8 \\ 3x<14x+6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq -1 \\ x>-\dfrac{6}{11} \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left(-\dfrac{6}{11}, +\infty\right)$.

031 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x<6 \\ 6x^2+4x\geq 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x+x^2<3x^2+4 \\ 7x^2+x\geq 2x-6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x<6 \\ 6x^2+4x\geq 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \\ \dfrac{-2-\sqrt{22}}{6}\leq x\leq\dfrac{-2+\sqrt{22}}{6} \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left[\dfrac{-2-\sqrt{22}}{6}, \dfrac{-2+\sqrt{22}}{6}\right]$

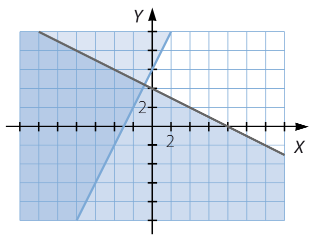
b) $\left.\begin{array}{r} 2x+x^2<3x^2+4 \\ 7x^2+x\geq 2x-6 \end{array}\right\} \rightarrow$ Siempre se cumplen.

Son ciertas para todos los números reales.

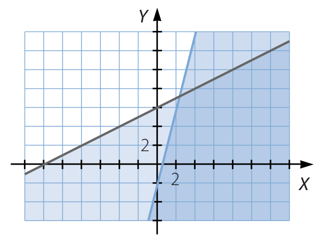
032 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y < 4 \\ -2x + y \geq 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 12x - 3y \geq 7 \\ -x + 2y \leq 12 \end{array}\right\}$

a)



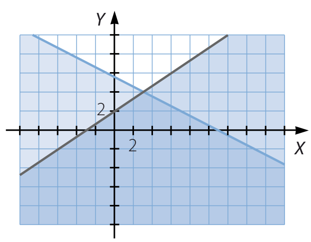
b)



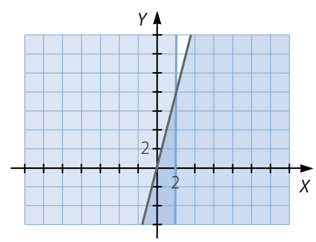
033 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y < 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x - y \geq 0 \\ x < 2 \end{array}\right\}$

a)



b)



034 Calcula 3!, 4!, 5!, 6! y 7!, y comprueba si son ciertas las siguientes expresiones.

a) $2! \cdot 3! = 6!$ b) $3! + 4! = 7!$ c) $6! - 2! = 4!$

$3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$ $7! = 5.040$

a) $2! \cdot 3! = 12$ $6! = 720$ b) $3! + 4! = 30$ $7! = 5.040$ c) $6! - 2! = 718$ $4! = 24$

Por tanto, ninguna expresión es cierta.

035 Simplifica las expresiones sin hallar previamente el valor de los factoriales.

a) $\dfrac{6!}{4!}$ b) $\dfrac{9!}{6!}$ c) $\dfrac{(a+2)!}{a!}$ d) $\dfrac{8!}{4!}$ e) $\dfrac{10!}{7! \cdot 3!}$ f) $\dfrac{x!}{(x-3)!}$

a) $\dfrac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\dfrac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

c) $\dfrac{(a+2)!}{a!} = (a+2)(a+1) = a^2 + 3a + 2$

d) $\dfrac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$

e) $\dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

f) $\dfrac{x!}{(x-3)!} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

036 Calcula las incógnitas y comprueba estas igualdades.

a) $\binom{8}{x}=\binom{8}{6}$ b) $\binom{x}{3}=\binom{x}{7}$ c) $\binom{a}{x}=\binom{a}{5}$

a) No consideramos la solución trivial $x = 6$.

$$\binom{8}{6}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\binom{8}{2}$$

b) $$\binom{10}{7}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\binom{10}{3}$$

c) $$\binom{a}{5}=\frac{a!}{(a-5)\cdot 5!}=\binom{a}{a-5}$$

037 Completa los siguientes desarrollos.

a) $(3x+2)^4 = 81x^4 + \square x^3 + \square + 96\square + 16$

b) $(3-4y)^3 = 27 - \square y + 144\square + \square$

c) $(2p-q^2)^4 = 16p^4 - 32p^{\square}q^{\square} + 24\, p^{\square}q^{\square} + \square + q^{\square}$

d) $(3mn-p^2)^3 = \square m^3n^{\square} - 27m^{\square}n^{\square}p^{\square} + \square mnp^4 - p^{\square}$

a) $(3x+2)^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(3-4y)^3 = 27 - 108y + 144y^2 - 64y^3$

c) $(2p-q^2)^4 = 16p^4 - 32p^3q^2 + 24p^2q^4 - 8pq^6 + q^8$

d) $(3mn-p^2)^3 = 27m^3n^3 - 27m^2n^2p^2 + 9mnp^4 - p^6$

038 Sabiendo que $5,1 = 5 + 0,1$ y que $0,99 = 1 - 0,01$; calcula el valor de $5,1^3$ y $0,99^2$ empleando la fórmula del binomio de Newton.

$$5,1^3 = (5+0,1)^3 = 5^3 + 3\cdot 5^2\cdot 0,1 + 3\cdot 5\cdot 0,1^2 + 0,1^3 =$$
$$= 125 + 7,5 + 0,15 + 0,001 = 132,651$$

$$0,99^2 = (1-0,01) = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 0,01 + 0,01^2 = 1 - 0,02 + 0,0001 = 0,9801$$

039 Determina los términos que se indican en estos desarrollos.

a) Séptimo término de $(x+2y)^{10}$.

b) Décimo término de $(x^2-3)^{15}$.

c) Decimosexto término de $(2p+q^2)^{28}$.

d) Decimocuarto término de $(-a+2)^{21}$.

a) $13.440x^4y^6$

b) $-98.513.415x^{12}$

c) $306.726.174.720p^{13}q^{30}$

d) $1.666.990.080a^8$

040 Halla las potencias cuyo desarrollo da lugar a estas expresiones.

a) $4x^2 + 20x + 25$

b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

c) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16$

a) $(2x+5)^2$ b) $(3x-2)^3$ c) $(3p+2)^4$

041 Encuentra los términos indicados de los siguientes desarrollos.

a) El término central de $(3p^2 - 2q)^{12}$.

b) El término que contiene x^{12} en $(2x^2 + 1)^9$.

c) El término que contiene x^{11} en $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^{10}$.

a) $43.110.144p^{12}q^6$ b) $5.376x^{12}$ c) $-960x^{11}$

042 El séptimo y el octavo términos del desarrollo de una potencia son $1.792x^2y^{12}$ y $1.024xy^{14}$, respectivamente. Intenta descubrir de qué binomio hemos calculado una potencia.

$(x + 2y^2)^8$

043 Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible por $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$N(x) = 2x^2 - x + 2$

044 Determina las raíces de los siguientes polinomios.

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$

b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$

c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$

g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$

h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$

c) $x_1 = -3$ $x_2 = -\frac{2}{3}$ $x_3 = \frac{1}{2}$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 4$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 17 & 10 \\ -1 & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -10 & \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{0} & \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ 2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\ -4 & & -12 & -4 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$3x + 1 = 0$

$x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

g)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\ 1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\ \hline & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 4 & -2 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

h)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\ -2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\ \hline & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 16 & -32 & \\ \hline & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & -16 & & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\ 4 & & 4 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

045 De un polinomio de segundo grado, $P(x)$, se sabe que $P(1) = -6$, $P(0) = -3$ y una de sus raíces es 3. Determínalo.

Obtén el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tenga 2 por raíz.

$(x - 3)(ax + b) = 0$

Como $P(1) = -6$:

$-2a - 2b = -6$

Como $P(0) = -3$:

$-3b = -3$

Por tanto, resulta que $a = 2$ y $b = 1$.

El polinomio pedido es $2x^2 - 5x - 3$.

Y como 2 es raíz:

$m \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 0 \rightarrow m = 3$

046 Obtén el valor de n para que el polinomio $2x^3 + 2x^2 + nx + 3$ tenga -3 por raíz.

Como -3 es raíz:

$2 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + n \cdot (-3) + 3 = 0 \rightarrow n = -11$

047 ¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?

Dividimos el polinomio entre $x - 4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16+4a & 52+16a \\ \hline & 1 & 4+a & 13+4a & \boxed{52+15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$

048 Determina a y b de manera que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible por $x - 2$ y por $x + 3$.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2 \qquad b = -5$$

049 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean las que se indican en cada caso.

a) 2, 3 y 5 b) −2, −1 y 4 c) 2, 2 y −4

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$

b) $Q(x) = (x - 4)(x + 2)(x + 1)$

c) $R(x) = (x + 4)(x - 2)^2$

050 Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2 y tal que $P(3) = 30$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(x) = (x-1)(x+2) \\ Q(3) = 10 \end{array}\right\} \rightarrow P(x) = 3(x-1)(x+2)$$

051 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, −1 y −1, y tal que $Q(2) = -18$.

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-3)(x+1)^2 \\ P(2) = -9 \end{array}\right\} \rightarrow Q(x) = 2(x-3)(x+1)^2$$

052 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{3}{a+2} - \dfrac{1}{2a+4} - \dfrac{2}{3a+6}$ b) $\dfrac{3-2p}{p+2} + \dfrac{1+p}{p+3}$ c) $\dfrac{3}{2a-6} + \dfrac{1}{3-a}$

a) $\dfrac{3}{a+2} - \dfrac{1}{2a+4} - \dfrac{2}{3a+6} = \dfrac{11}{6(a+2)}$

b) $\dfrac{3-2p}{p+2} + \dfrac{1+p}{p+3} = \dfrac{11-p^2}{(p+2)(p+3)}$

c) $\dfrac{3}{2a-6} + \dfrac{1}{3-a} = \dfrac{1}{2(a-3)}$

053 Realiza las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3x-1}{4x+12} - \dfrac{x+2}{4x-12}$ c) $\dfrac{4}{a+b} - \dfrac{5}{a-b}$

b) $\dfrac{2-x}{x^2-3x} - \dfrac{1}{4x-12} + \dfrac{5}{6x-18}$ d) $\dfrac{4-x^2}{x+2} + \dfrac{9-x^2}{x+3}$

a) $\dfrac{3x-1}{4x+12} - \dfrac{x+2}{4x-12} = \dfrac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\dfrac{2-x}{x^2-3x} - \dfrac{1}{4x-12} + \dfrac{5}{6x-18} = \dfrac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\dfrac{4}{a+b} - \dfrac{5}{a-b} = \dfrac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\dfrac{4-x^2}{x+2} + \dfrac{9-x^2}{x+3} = 5 - 2x$

054 Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\dfrac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

055 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\dfrac{2 - x^2}{3} + \dfrac{3 - x}{4} + \dfrac{23}{12} = 0$

b) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{3x^2 - 2x}{3} + \dfrac{19x}{6} = 0$

c) $\dfrac{x - 2x^2}{2} = 1 - \dfrac{3x + x^2}{4}$

d) $\dfrac{x^2 + x}{5} + \dfrac{(x + 2)x}{2} = 0$

a) $\dfrac{2 - x^2}{3} + \dfrac{3 - x}{4} + \dfrac{23}{12} = 0 \rightarrow 8 - 4x^2 + 9 - 3x + 23 = 0 \rightarrow -4x^2 - 3x + 40 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 40}}{2 \cdot (-4)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{649}}{8} \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{649}}{8} \end{cases}$$

b) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{3x^2 - 2x}{3} + \dfrac{19x}{6} = 0 \rightarrow \dfrac{6 - 3x}{6} + \dfrac{6x^2 - 4x}{6} + \dfrac{19x}{6} = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

c) $\dfrac{x - 2x^2}{2} = 1 - \dfrac{3x + x^2}{4} \rightarrow 2x - 4x^2 = 4 - 3x - x^2 \rightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

No tiene solución real.

d) $\dfrac{x^2 + x}{5} + \dfrac{(x + 2)x}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x + 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 7x^2 + 12x = 0$

$x(7x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = -\dfrac{12}{7}$ $\quad x_2 = 0$

056 Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

057 Resuelve las ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula correspondiente.

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$ b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$

Operamos: $-x^2+3x=0$

Es una ecuación incompleta cuyas soluciones son $x_1=0$ y $x_2=3$.

b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

Operamos: $4x^2-4x+1=0$

Factorizamos el primer miembro de la ecuación utilizando las igualdades notables: $(2x-1)^2=0$

La solución es $x=\dfrac{1}{2}$.

058 La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es −21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.
b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4 - x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Las soluciones son −3 y 7.

059 Calcula k en cada caso.

a) $x^2 + kx + 25 = 0$ tiene una solución.
b) $x^2 - 4x + k = 0$ no tiene soluciones.
c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0 \rightarrow k = 10$

b) $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \rightarrow (4, 8)$

c) $8^2 - 4 \cdot k \cdot 5 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{16}{5}\right)$

060 Resuelve la ecuación de segundo grado utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado con el número de soluciones.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

061 ¿Qué valor debe tomar k para que los números indicados sean soluciones de las ecuaciones?

a) $2x^2 + 5x + k = 0$
$x = \dfrac{3}{2}$

b) $k(x^2 - 5x + 1) - 6(x + 2) + 4(k - x) - 65 = 0$
$x = -2$

a) $2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 5 \cdot \dfrac{3}{2} + k = 0 \rightarrow k = -12$

b) $k[(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 1] - 6 \cdot ((-2) + 2) + 4 \cdot (k - (-2)) - 65 = 0 \rightarrow k = 3$

062 ¿Qué valores deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga dos soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{r}25a + 5b - 30 = 0\\ 9a - 3b - 30 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\ \xrightarrow{\cdot 5}\end{array} \left.\begin{array}{r}75a + 15b = 90\\ 45a - 15b = 150\end{array}\right\}$$

$$120a = 240 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow 9 \cdot 2 - 3b - 30 = 0 \rightarrow b = -4$$

063 **Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.**

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b: $(x - a)(x - b) = 0$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5.
Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

d) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1.
La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

064 **Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -7$

c) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta abierta.

a) $(x + 4)(x - 2) = 0$

b) $x(x + 7) = 0$

c) $(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

065 Resuelve las ecuaciones.

a) $\dfrac{2x-3}{x^2-1}-\dfrac{3-x}{x+1}=0$

b) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5-x}{x+1}=0$

c) $\dfrac{-x+3}{x-1}-\dfrac{9-x}{x^2-1}=0$

d) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2$

e) $\dfrac{x+4}{x-3}-\dfrac{1-2x}{x^2-x-6}=0$

a) $\dfrac{2x-3}{x^2-1}-\dfrac{3-x}{x+1}=0 \rightarrow 2x-3+x^2-4x+3=0 \rightarrow x^2-2x=0$

$x_1=0 \qquad x_2=2$

b) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5-x}{x+1}=0 \rightarrow 3x+3+x^2-3x-10=0 \rightarrow x^2-7=0$

$x_1=-\sqrt{7} \qquad x_2=\sqrt{7}$

c) $\dfrac{-x+3}{x-1}-\dfrac{9-x}{x^2-1}=0 \rightarrow -x^2+2x+3-9+x=0 \rightarrow x^2-3x+6=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2 \rightarrow x+x^2-3x+2=3x+6-2x^2+8$

$\rightarrow 3x^2-5x-12=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm 13}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

e) $\dfrac{x+4}{x-3}-\dfrac{1-2x}{x^2-x-6}=0 \rightarrow x^2+6x+8-1+2x=0 \rightarrow x^2+8x+7=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{-8\pm 6}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-7\end{cases}$$

066 Estas ecuaciones tienen menos de cuatro soluciones. Determínalas.

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0$

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0$

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 8z^2 + 26z + 15 = 0$

$$z = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 8 \cdot 15}}{2 \cdot 8} = \frac{-26 \pm 14}{16} \to \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{4} \\ z_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

No tiene solución real.

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 9z^2 + 80z - 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-9)}}{2 \cdot 9} = \frac{-80 \pm 82}{18} \to \begin{cases} z_1 = \frac{1}{9} \\ z_2 = -9 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \to x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3}$

$z_2 = -9 \to$ No tiene solución real.

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0 \to 6x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 6z^2 - 5z + 2 = 0$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{12}$$

No tiene solución real.

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \to -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} -9z^2 + 80z + 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 9}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-80 \pm 82}{-18} \to \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$z_1 = 9 \to x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = -\frac{1}{9} \to$ No tiene solución real.

067 Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a) $\frac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \frac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$

d) $\frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12} = 6 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 13z + 36 = 0$

$z = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{13 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 4 \end{cases}$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \qquad x_4 = 2$

b) $3x^2(x^2-2) = \dfrac{x^2-2}{3} \rightarrow 9x^4 - 19x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 9z^2 - 19z + 2 = 0$

$z = \dfrac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2}}{2 \cdot 9} = \dfrac{19 \pm 17}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

$z_1 = 2 \rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \qquad x_2 = \sqrt{2}$

$z_2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_4 = \dfrac{1}{3}$

c) $8x + \dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{x^3} \rightarrow 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2 + 3z - 5 = 0$

$z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 7}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

$z_2 = -\dfrac{5}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\dfrac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2 \rightarrow 6x^4 - 2x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 6z^2 - 2z + 9 = 0$

$z = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 9}}{2 \cdot 6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-212}}{12}$

No tiene solución real.

068 **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan estas soluciones.**

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \square$

$x = 2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \square - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

$x = 4$

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

069 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x+\sqrt{2x+3}=6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0$

a) $x+\sqrt{2x+3}=6 \rightarrow 2x+3=x^2-12x+36 \rightarrow x^2-14x+33=0$

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 33}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm 8}{2}\rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=11 \end{cases}$$

$x=3 \rightarrow 3+\sqrt{2\cdot 3+3}=6$

$x=11 \rightarrow 11+\sqrt{2\cdot 11+3}\neq 6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0 \rightarrow 4x^2-20x=0$

$x=5 \rightarrow 2\sqrt{3\cdot 5+1}-2\cdot 5+2=2\cdot 4-10+2=0$

$x=0 \rightarrow 2\sqrt{3\cdot 0+1}-2\cdot 0+2=2\cdot 1+2\neq 0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1 \rightarrow x^2-12x+27=0$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm 6}{2}\rightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$x=9 \rightarrow \dfrac{\sqrt{2\cdot 9-2}}{9-5}=\dfrac{4}{4}=1$

$x=3 \rightarrow \dfrac{\sqrt{2\cdot 3-2}}{3-5}=\dfrac{2}{-2}\neq 1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0 \rightarrow x+2=x-6+4\sqrt{x-6}+4 \rightarrow 1=x-6$

$x=7 \rightarrow \sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}-2=3-1-2=0$

070 Estas ecuaciones tienen cero, una o dos soluciones. Determínalas.

a) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}-5=0$

b) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-2}=2$

c) $\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x+8}=0$

d) $\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{5-\sqrt{x}}{3}$

e) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-5}+1=0$

a) No tiene solución.

b) Tiene dos soluciones: $x_1=2 \quad x_2=6$

c) Tiene dos soluciones: $x_1=2 \quad x_2=-4$

d) Tiene una solución: $x=4$

e) No tiene solución.

071 Las ecuaciones tienen tres soluciones. Dada una solución, calcula las otras dos soluciones.

a) $(x+3)(x^2-2x-3)=0$
$x=-3$

b) $(2a-1)(4a^2+20a+25)=0$
$a=\dfrac{1}{2}$

a) Resolvemos la ecuación $x^2-2x-3=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=3\end{cases}$$

b) Resolvemos la ecuación $4a^2+20a+25=0$:

$$a=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 4\cdot 25}}{2\cdot 4}=\frac{20}{8}\rightarrow a=\frac{5}{2}$$

072 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

b) $x^2(x+6)=32$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6\\ 1 & & 1 & 5 & 6\\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0\\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$x_1=-3\qquad x_2=-2\qquad x_3=1$

b) $x^2(x+6)=32\rightarrow x^3+6x^2-32=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32\\ 2 & & 2 & 16 & 32\\ \hline & 1 & 8 & 16 & 0\\ -4 & & -4 & -16 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & \\ -4 & & -4 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$x_1=-4\qquad x_2=2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)\rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -11 & -12 & 36\\ 2 & & 2 & 8 & -6 & -36\\ \hline & 1 & 4 & -3 & -18 & 0\\ 2 & & 2 & 12 & 18 & \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ -3 & & -3 & -9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & & \\ -3 & & -3 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

$x_1=-3\qquad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\
\hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 4$

073 Escribe ecuaciones factorizadas que tengan las soluciones y el grado indicados.

a) Grado 3 y soluciones 5, −2 y 7.

b) Grado 4 y soluciones 1, −3 y −4.

Respuesta abierta.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 7) = 0$

b) $(x - 1)^2(x + 3)(x + 4) = 0$

074 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{2}{3} \qquad x_3 = 1$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1) \rightarrow 4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\
\hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\
\hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2 - 8x - 5 = 0$:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \dfrac{5}{2} \qquad x_4 = 3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

075 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x^3 + x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\frac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\frac{x^3 + x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \frac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6(17x - 4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & \boxed{0} \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = \frac{1}{4} \qquad x_3 = 2$

c) $\frac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0 \rightarrow x^3+7x^2+16x+16=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2+3x+4=0$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=-4$

d) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\frac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3 \rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

076 Del siguiente sistema de ecuaciones se sabe que $x=-1$ forma parte de su solución. Determina el valor de y.

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\ -x+y+3(x-2y)+6=4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\ 2x-5y=-2\end{array}\right\} \rightarrow y=0$$

077 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}-2(x+4)+3(3-2y)-1=12\\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-6y=12 \\ x+3y+6=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-15y=2 \\ x-15y=0 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+3y=27 \\ 3x-4y=13 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array} \left.\begin{array}{r} -30x-9y=-81 \\ 30x-40y=130 \end{array}\right\}$

$\rightarrow y=-1 \rightarrow 3x-4\cdot(-1)=13 \rightarrow x=3$

$x=3 \qquad y=-1$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x-9y=-69 \\ 8x-9y=-11 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

e) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ -8x+12y=-8 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ 8x-12y=8 \end{array}\right\} \rightarrow y=\dfrac{1}{3} \rightarrow 8x-4=8 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2} \qquad y=\dfrac{1}{3}$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\} \rightarrow 16x-3y=16$

Sistema compatible indeterminado.

078 ●●○

Dada la ecuación $2x - 5y = 14$, encuentra otra ecuación para que juntas formen un sistema de dos ecuaciones que:

a) Tenga una sola solución. b) No tenga soluciones. c) Tenga infinitas soluciones.

Respuesta abierta.

a) $3x - 7y = 1$ b) $2x - 5y = 0$ c) $4x - 10y = 28$

079 ●●○

Halla, si es posible, un valor de a para que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 6x - 4y &= 12 \\ -9x + ay &= -18 \end{aligned}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\frac{6}{-9} = \frac{-4}{a}$$

$6a = 36 \rightarrow a = 6$

a) No es posible. b) $a = 6$ c) $a \neq 6$

080 ●●○

Encuentra, si es posible, un valor de b para que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 8x - 12y &= 20 \\ 4x + 9y &= b \end{aligned}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\dfrac{8}{4} \neq \dfrac{-12}{9} \rightarrow$ El sistema es siempre compatible determinado.

081 ●●○

Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x - y &= 2 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ -3x - 2y &= 1 \\ x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -4x + 2y &= 0 \\ 6x - 3y &= 2 \\ 3x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow -1 + y = -4 \rightarrow y = -3$

$x = 1 \qquad y = -3$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x - y &= 2 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Las soluciones de las dos primeras ecuaciones son $x = 3$ e $y = 4$, que no verifican la tercera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 + 2y = 0 \rightarrow y = -2$

$x = 1 \qquad y = -2$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

Las soluciones de la segunda y tercera ecuaciones son $x = \frac{10}{3}$ e $y = 6$, que no verifican la primera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

082 Determina las soluciones de estos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 11 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ -x + y - z = -2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 11 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ -x + y - z = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 2y - 3z + 6} \left.\begin{array}{r} 7y - 5z = -1 \\ -y + 2z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array} \left.\begin{array}{r} 14y - 10z = -2 \\ -5y + 10z = 20 \end{array}\right\}$

$\rightarrow y = 2 \rightarrow -2 + 2z = 4 \rightarrow z = 3$

$x = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 6 = 1$

$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = -2y - z + 1} \left.\begin{array}{r} -5y - z = 2 \\ 5y - z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow z = -2 \rightarrow 5y - (-2) = 2 \rightarrow y = 0$

$x = -2 \cdot 0 - (-2) + 1 = 3$

$x = 3 \qquad y = 0 \qquad z = -2$

083 Resuelve las inecuaciones.

a) $-x + 15 \leq 3 - 7x$

b) $x + 11 \geq 3 - 4x$

c) $-x - 13 \leq 3 + 7x$

d) $2x + 11 \geq 6 + 5x$

a) $-x + 15 \leq 3 - 7x \rightarrow 6x \leq -12 \rightarrow x \leq 2$

$(-\infty, -2]$

b) $x + 11 \geq 3 - 4x \rightarrow 5x \geq -8 \rightarrow x \geq -\frac{8}{5}$

$\left[-\frac{8}{5}, +\infty\right)$

c) $-x - 13 \leq 3 + 7x \rightarrow -16 \leq 8x \rightarrow -2 \leq x$

$[-2, +\infty)$

d) $2x + 11 \geq 6 + 5x \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow \frac{5}{3} \geq x$

$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

084 Halla la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x - 2(x+2) - 3(2-4x) \leq 9$

b) $4(10-2x) - 3(2x+1) \geq -3(x+1) - (2-3x)$

c) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+4}{2} > 1$

a) $x - 2(x+2) - 3(2-4x) \leq 9 \rightarrow x - 2x - 4 - 6 + 12x \leq 9$

$\rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \dfrac{19}{11}$

$\left(-\infty, \dfrac{19}{11}\right]$

b) $4(10-2x) - 3(2x+1) \geq -3(x+1) - (2-3x) \rightarrow -14x \geq -42 \rightarrow x \leq \dfrac{42}{14} = 3$

$(-\infty, 3]$

c) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+4}{2} > 1 \rightarrow 2x + 4 - 6x - 12 > 6 \rightarrow -4x > 14 \rightarrow x < -\dfrac{7}{2}$

$\left(-\infty, -\dfrac{7}{2}\right)$

085 Encuentra la solución de las inecuaciones.

a) $\dfrac{1-5x}{4} - 2\dfrac{4+3x}{5} \leq \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{-2+3x}{5} + \dfrac{6-4x}{3} + \dfrac{1}{2} \geq 0$

c) $1 - \dfrac{2x-5}{6} + \dfrac{1-4x}{2} - \dfrac{x-1}{3} < 0$

a) $\dfrac{1-5x}{4} - 2\dfrac{4+3x}{5} \leq \dfrac{1}{2} \rightarrow 5 - 25x - 32 - 24x \leq 10$

$\rightarrow -49x \leq 37 \rightarrow x \geq -\dfrac{37}{49}$

$\left[-\dfrac{37}{49}, +\infty\right)$

b) $\dfrac{-2+3x}{5} + \dfrac{6-4x}{3} + \dfrac{1}{2} \geq 0 \rightarrow -12 + 18x + 60 - 40x + 15 \geq 0$

$\rightarrow -22x \geq -63 \rightarrow x \leq \dfrac{63}{22}$

$\left(-\infty, \dfrac{63}{22}\right]$

c) $1 - \dfrac{2x-5}{6} + \dfrac{1-4x}{2} - \dfrac{x-1}{3} < 0 \rightarrow 6 - 2x + 5 + 3 - 12x - 2x + 2 < 0$

$\rightarrow -16x < -16 \rightarrow x > 1$

$(1, +\infty)$

086 Resuelve estas inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x<16 \\ 2x>-3 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x<2 \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3>0 \\ -12x+7\geq 0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x>-\dfrac{3}{4} \\ x\leq\dfrac{7}{12} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{12}\right]$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-1<0 \\ 6x-7>0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{7}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\dfrac{7}{6}, +\infty\right)$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -23x-20>3 \\ 4x-2+1<0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x<\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow (-\infty, -1)$

087 ¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?

a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$
c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$
d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) Resolvemos la ecuación: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 6(-10)^2 + 31 \cdot (-10) + 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right]$.

088 **Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+3>0 \\ x-5<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>-3 \\ x<5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3<0 \\ x+3>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x<\dfrac{3}{2} \\ x>-3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} -x+1<0 \\ 2-3x>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>1 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x<-1 \\ x>-\dfrac{5}{2} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

089 Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0$

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0$

c) $x-\frac{1-2x}{3}-\frac{2x^2+1}{4}\geq 5$

d) $3-\frac{2x-3}{2}+\frac{16x+x^2}{3}\geq 0$

e) $\frac{x-1}{4}-\frac{12x-x^2}{3}\geq\frac{2x^2+1}{3}-x$

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0 \rightarrow 5x+10+3x^2-3x>0 \rightarrow 3x^2+2x+10>0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0 \rightarrow 9x-3-2x+2x^2+6<0 \rightarrow 2x^2+7x+3<0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2+7x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-1 \qquad x=0$

Si $x=-10 \rightarrow 2\cdot(-10)^2+7\cdot(-10)+3>0 \rightarrow (-\infty,-3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=-1 \rightarrow 2\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+3<0 \rightarrow \left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 2\cdot 0^2+7\cdot 0+3>0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$.

c) $x-\frac{1-2x}{3}-\frac{2x^2+1}{4}\geq 5 \rightarrow 12x-4+8x-6x^2-3\geq 60 \rightarrow -6x^2+20x-67\geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$-6x^2+20x-67=0$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $3-\frac{2x-3}{2}+\frac{16x+x^2}{3}\geq 0 \rightarrow 18-6x+9+32x+2x^2\geq 0$

$\rightarrow 2x^2+26x+27\geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2+26x+27=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-13-\sqrt{115}}{2}\\x_2=\dfrac{-13+\sqrt{115}}{2}\end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-5 \qquad x=0$

Si $x=-10\rightarrow 2\cdot(-10)^2+26\cdot(-10)+27>0\rightarrow\left(-\infty,\frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=-5\rightarrow\cdot 2\cdot(-5)^2+26\cdot(-5)+27<0\rightarrow\left(\frac{-13-\sqrt{115}}{2},\frac{-13+\sqrt{115}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=0\rightarrow\cdot 2\cdot 0^2+26\cdot 0+27>0\rightarrow\left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2},+\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty,\frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right]\cup\left[\frac{-13+\sqrt{115}}{2},+\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4}-\frac{12x-x^2}{3}\geq\frac{2x^2+1}{3}-x\rightarrow 4x^2+33x+7\geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2+33x+7=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-33-\sqrt{977}}{8}\\x_2=\dfrac{-33+\sqrt{977}}{8}\end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-5 \qquad x=0$

Si $x=-10\rightarrow 4\cdot(-10)^2+33\cdot(-10)+7>0\rightarrow\left(-\infty,\frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=-5\rightarrow 4\cdot(-5)^2+33\cdot(-5)+7<0\rightarrow\left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8},\frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=0\rightarrow 4\cdot 0^2+33\cdot 0+7>0\rightarrow\left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8},+\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty,\frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right]\cup\left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8},+\infty\right)$.

090 Obtén las soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$

Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2-3x-4=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=4 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=10$$

Si $x=-10 \rightarrow (-10)^2-3\cdot(-10)-4>0 \rightarrow (-\infty,-1)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 0^2-3\cdot 0-4<0 \rightarrow (-1,4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=10 \rightarrow 10^2-3\cdot 10-4>0 \rightarrow (4,+\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

$$2x-3<0 \rightarrow x<\frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty,-1)$.

b) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

c) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $(4,+\infty)$.

d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

091 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 10-3x-x^2<0 \\ 3x+5>-16 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10-3x-x^2<0 \\ 2x-3>13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+4x-5>0 \\ 3x-2<10 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+4x-5<0 \\ 3x-2>10 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos cada una de las inecuaciones.

$$-x^2-3x+10=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=10$$

Si $x=-10 \rightarrow -(-10)^2-3\cdot(-10)+10<0 \rightarrow (-\infty,-5)$ es solución.

Si $x=0 \rightarrow -0^2-3\cdot 0+10>0 \rightarrow (-5,2)$ no es solución.

Si $x=10 \rightarrow -10^2-3\cdot 10+10<0 \rightarrow (2,+\infty)$ es solución

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

$$3x + 5 > -16 \rightarrow x > -7$$

Por tanto, la solución es $(-7, +\infty)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-7, -5) \cup (2, +\infty)$.

b) La inecuación de segundo grado es la misma que en el apartado anterior.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$:

$$2x - 3 > 13 \rightarrow x > 8$$

Por tanto, la solución es $(8, +\infty)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(8, +\infty)$.

c) Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 4 \cdot (-10) - 5 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 < 0 \rightarrow (-5, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 4 \cdot 10 - 5 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$3x - 2 < 10 \rightarrow x < 4$$

Por tanto, la solución es $(-\infty, 4)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -5) \cup (1, 4)$.

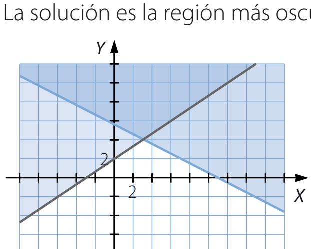
d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, vemos que el sistema no tiene solución.

092 **Obtén gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.**

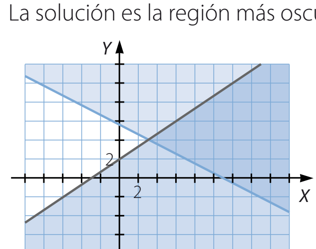
a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 < 0 \\ x + 2y > 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y > 11 \end{array}\right\}$

a) La solución es la región más oscura.



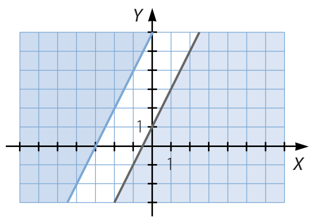
b) La solución es la región más oscura.



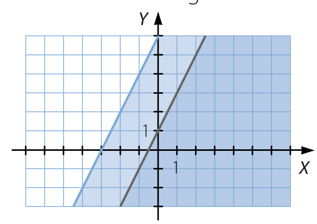
093 ●○○ Calcula las soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}2x-y+6<0\\-4x+2y<2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}2x-y+6<0\\-4x+2y>2\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}2x-y+6>0\\-4x+2y<2\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}2x-y+6>0\\-4x+2y>2\end{array}\right\}$

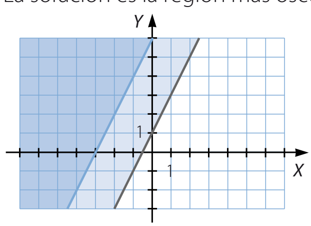
a) No tiene solución.



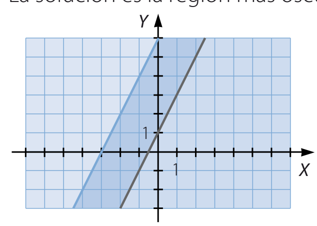
c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



d) La solución es la región más oscura.



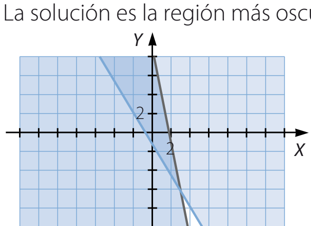
094 ●●● Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x+y}{3}<\dfrac{y+6}{5}\\[2mm]\dfrac{4-x}{3}+\dfrac{2-y}{5}<2\end{array}\right\}$

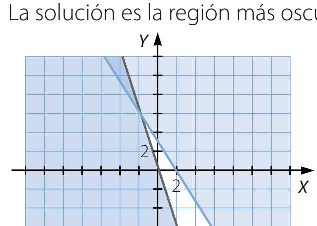
b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x-2y+3}{3}\geq\dfrac{x-y+1}{2}\\[2mm]1-\dfrac{2x-4-y}{3}+\dfrac{2x+3y}{2}\geq 0\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{6x+y}{25}<\dfrac{3-y}{5}\\[2mm]\dfrac{-x+1}{3}-2\cdot\dfrac{2x+y-3}{2}<\dfrac{3x+1}{4}\end{array}\right\}$

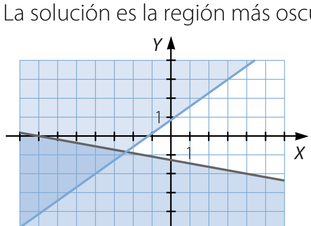
a) La solución es la región más oscura.



c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



095 Determina la suma y el producto de las soluciones de la ecuación.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Halla las soluciones. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 14 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

096 Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \dfrac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} = 0$ $(b = 0, c = 0) \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$c = 0$ y $\dfrac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$c = 0$ y $\dfrac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ Tiene tres soluciones: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{-b}{a}}$.

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene cuatro soluciones.

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

097 Utiliza el método de sustitución para resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = 4$

Si $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{array}\right\}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11$

Si $x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$

c) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 5$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \dfrac{10}{-2} = -5$

Si $x_2 = 5 \rightarrow y_2 = \dfrac{10}{5} = 2$

d) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 4x + 15 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución real, por lo que el sistema no tiene solución.

098 Resuelve la ecuación.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Trata de hacerlo sustituyendo en la expresión $x-\frac{1}{x}=t$ y obtendrás una ecuación de segundo grado. Calcula las soluciones para la incógnita t y luego sustituye para hallar el valor de x.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Sustituimos: $x-\frac{1}{x}=t$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-3t=0$

$t_1=\frac{3}{2}\qquad t_2=0$

Sustituimos para calcular x:

$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$x_1=-\frac{1}{2}\qquad x_2=2$

$x_3=-1\qquad x_4=1$

099 Determina la solución de estas ecuaciones realizando las sustituciones de variable necesarias.

a) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$

b) $\frac{x^2}{x^2-6x+9}-\frac{6x}{x-3}+8=0$

a) Sustituimos: $t=x-\frac{1}{x}=0$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-9t+10=0$

$t_1=\frac{5}{2}\qquad t_2=2$

Sustituimos para calcular x:

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$x_1=\frac{1}{2}\qquad x_2=2$

$x+\frac{1}{x}=2$

$x_3=1$

b) Factorizamos el denominador de segundo grado:

$$\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x}{x-3} + 8 = 0$$

Lo expresamos como una identidad notable:

$$\left(\frac{x}{x-3} - 3\right)^2 - 1 = 0$$

Sustituimos: $t = \dfrac{x}{x-3} - 3$

Resolvemos la ecuación: $t^2 - 1 = 0$

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 1$

Sustituimos para calcular x:

$$1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_1 = 4$$

$$-1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_2 = 6$$

100 ●●○ **Si Max sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?**

Llamamos x al número de escalones:

$$\frac{x}{3} + 30 = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 180 = 3x \rightarrow x = 180$$

La torre tiene 180 escalones.

101 ●●○ **El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?**

Llamamos x al número de camellos del jeque:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} = 140 \rightarrow 3x - 2x = 420 \rightarrow x = 420$$

El rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

102 ●●○ **En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de reserva y 12 botellas de crianza y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva, pagó 80 €.**

Llamamos x al precio de la botella de crianza e y al precio de la botella de reserva:

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ 6x + 8y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ -12x - 16y = -160 \end{array}\right\} \rightarrow -13y = -91 \rightarrow y = 7$$

$6x + 8 \cdot 7 = 80 \rightarrow x = 4$

El precio de la botella de crianza es de 4 € y el precio de la botella de reserva es de 7 €.

103 Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

104 Carmen se dispone a invertir 100.000 €.
En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

Llamamos x al dinero invertido en el Fondo Tipo A e y al dinero invertido en el Fondo B:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100.000 \\ 0{,}04x + 0{,}06y = 4.500 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 4.000 - 0{,}04y + 0{,}06y = 4.500$$
$$\rightarrow 0{,}02y = 500 \rightarrow y = 25.000$$

$x = 100.000 - 25.000 = 75.000$

Adquirió 75.000 € del Fondo Tipo A, y 25.000 € del Fondo Riesgo B.

105 Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a la velocidad del mismo:

1 h 48 min = 1,8 h

$$\left.\begin{array}{r} x = 1{,}8y \\ 180 - x = 7{,}2y \end{array}\right\} \rightarrow 180 - 1{,}8y = 7{,}2y \rightarrow y = 20$$

$x = 1{,}8 \cdot 20 = 36$

La velocidad del ciclista es 20 km/h, y la velocidad del coche es 80 km/h.

106 Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrán recorrido habrá recorrido hasta ese momento?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left.\begin{array}{r} x = 80y \\ x + 160 = 100y \end{array}\right\} \rightarrow 80y + 160 = 100y \rightarrow y = 8$$

$x = 80 \cdot 8 = 640$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

107 **Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.**

Llamamos x al lado menor del polígono e y a su área:

$$\left.\begin{array}{r} x(x+2)=y \\ (x+2)(x+4)=y+40 \end{array}\right\} \rightarrow x^2+6x+8=x^2+2x+40 \rightarrow 4x=32 \rightarrow x=8$$

$y=8(8+2)=80$

Los lados del polígono original miden 8 y 10 m, respectivamente.

108 **Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ 10y+x+18=10x+y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=14-x \\ 9y-9x+18=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 126-9x-9x+18=0 \rightarrow 18x=144 \rightarrow x=8$$

$y=14-8=6$

El número es 86.

109 **El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?**

Llamamos x al número de amigos de Inés, e y al dinero que tiene que pagar cada uno:

$$\left.\begin{array}{r} xy=80 \\ (x+3)(y-6)=80 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{80}{y}+3\right)(y-6)=80 \rightarrow 80-\frac{480}{y}+3y-18=80$$

$$\rightarrow y^2-6y-160=0$$

$$y=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-160)}}{2\cdot1}=\frac{6\pm26}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=-10 \rightarrow \text{Solución no válida} \\ y_2=16 \end{cases}$$

Si $y_2=16 \rightarrow x_2=\dfrac{80}{16}=5$

Van de excursión 5 amigos.

110 **Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos de la tierra, se da cuenta que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?**

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=170 \\ x^2+y^2=130^2 \end{array}\right\} \rightarrow y^2-170y+6.000=0$$

$$y=\frac{-(-170)\pm\sqrt{(-170)^2-4\cdot1\cdot6.000}}{2\cdot1}=\frac{170\pm70}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=120 \\ y_2=50 \end{cases}$$

Si $y_1=120 \rightarrow x_1=170-120=50$

Si $y_2=50 \rightarrow x_2=170-50=120$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6.000 m².

111 ●○○ **La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.**

Llamamos x al lado del hexágono, y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por catetos de la apotema y la mitad del lado, y por hipotenusa, la longitud del lado:

$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 = 256 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x_1 = -\frac{16\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

La longitud del lado es $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

El área de un polígono regular es: $A = \frac{P \cdot a_p}{2}$

Por tanto, el área mide: $A = 128\sqrt{3}$ cm^2

112 ●●○ **Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2, y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.**

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{array}{r}(x-2)(y-5) = 360\\(x-4)(y-2,5) = 360\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = \dfrac{350+2y}{y-5}\\[2ex] x = \dfrac{350+4y}{y-2,5}\end{array}\right\} \rightarrow 2y^2 - 15y - 875 = 0$$

$$y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-875)}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 85}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{35}{2} \\ y_2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = -\frac{35}{2} \rightarrow x_1 = \frac{350 + 2\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2} - 5} = -14 \qquad \text{Si } y_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{350 + 2 \cdot 25}{25 - 5} = 20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

113 ●●○ **Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.**

Llamamos x al número:

$$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -22 & -8 \\ 4 & & 4 & 24 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{7} \\ x_2 = -3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$x_1 = -3 - \sqrt{7} \qquad x_2 = -3 + \sqrt{7} \qquad x_3 = 4$

El número entero es 4.

114 Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Llamamos x a la arista del cubo:

$(x+4)^3 = 8x^3 \rightarrow -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -7 & 12 & 48 & 64 \\ 4 & & -28 & -64 & -64 \\ \hline & -7 & -16 & -16 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 4$

$-7x^2 - 16x - 16 = 0 \rightarrow 7x^2 + 16x + 16 = 0$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 7 \cdot 16}}{2 \cdot 7} = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

La longitud de la arista es de 4 cm.

115 Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Llamamos x al precio de las vacas, y al precio de los terneros y z al precio de las ovejas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 16z \\ x + 4z &= 3y \\ 3y + 8z &= 4x \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 4z \\ y &= \frac{8}{3}z \end{aligned}\right\}$$

Una vaca vale lo mismo que cuatro ovejas, y un ternero cuesta igual que ocho terceras partes del precio de una oveja.

116 Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma *abc*. Determínalo, sabiendo que si escribes *cab*, el número disminuye 459 unidades; si escribes *bac*, el número disminuye 360 unidades, y que *bca* es 45 unidades menor que *bac*.

A la cifra de las centenas la llamamos a, a la de las decenas b y a la de las unidades c:

$$\left.\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 100c + 10a + b + 459 \\ 100a + 10b + c &= 100b + 10a + c + 360 \\ 100b + 10c + a &= 100b + 10a + c - 45 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 90a + 9b - 99c &= 459 \\ 90a - 90b &= 360 \\ -9a + 9c &= -45 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 10a + b - 11c &= 51 \\ 10a - 10b &= 40 \\ -a + c &= -5 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{a = c+5} \left.\begin{aligned} b - c &= 1 \\ -10b + 10c &= -10 \end{aligned}\right\}$$

$a = c + 5$ y $b = c + 1$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, c es un número de 0 a 9. Como $a = c + 5$, c solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4. Para cada uno de estos valores de c resultan a y b.

Si $c = 0$, entonces: $a = 5$ y $b = 1$. El número es 510.

Si $c = 1$, entonces: $a = 6$ y $b = 2$. El número es 621.

Si $c = 2$, entonces: $a = 7$ y $b = 3$. El número es 732.

Si $c = 3$, entonces: $a = 8$ y $b = 4$. El número es 843.

Si $c = 4$, entonces: $a = 9$ y $b = 5$. El número es 954.

117 El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

Llamamos x al número:

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$.

118 De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

Llamamos x al número: $x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$

Resolvemos la ecuación: $2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 1 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 0 - 1 < 0 \rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 1 > 0 \rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ y menores que $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

119 ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva? ¿Qué números cumplen esa condición?

Llamamos x al número:

Vemos que no se verifica que: $-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

$x + x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -0{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -0{,}5 \rightarrow (-0{,}5)^2 - 0{,}5 < 0 \rightarrow (-1, 0)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 > 0 \rightarrow (0, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

120 **Encuentra todos los números enteros que multiplicados por el siguiente número den un resultado menor que 24.**

Llamamos x al número:

$x(x+1) < 24 \rightarrow x^2 + x - 24 < 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 + x - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 0 - 24 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}$ y menores que $\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}$.

121 **Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas.**

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2x+1)$

a) $5 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$

$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$

b) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$[3, +\infty)$

c) $4 - 3x - x^2 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 4 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 4 > 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 4 < 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-4, 1]$.

d) $2 - 5x > 0 \rightarrow x < \frac{2}{5}$

$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$

e) $6 - x - x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - (-10) + 6 < 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 0 + 6 > 0 \rightarrow (-3, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 10 + 6 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 2)$.

f) $x^2 - 2x + 1 > 0$

La ecuación solo se anula para $x = 1$, y en el resto de los valores el primer miembro de la inecuación es siempre positivo.

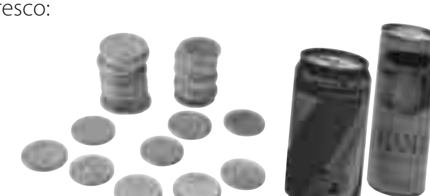
$x \neq 1$

122 **Jesús y Beatriz quieren saber cuánto cuesta un bote de refresco, pero no recuerdan exactamente lo que pagaron. Jesús compró 8 botes y sabe que pagó con un billete de 5 € y que le devolvieron una moneda de 2 € y algo más de dinero. Beatriz compró 18 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?**

Llamamos x al precio del bote de refresco:

$$\left.\begin{array}{r} 5 - 8x > 2 \\ 18x < 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \frac{3}{8} \\ x < \frac{7}{18} \end{array}\right\}$$

El precio del bote de refresco es menor que 0,375 €.



PARA FINALIZAR...

123 **Demuestra la siguiente propiedad que cumplen los números combinatorios.**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\cdots+\binom{n}{n}1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

124 **Demuestra, utilizando el método de inducción, las siguientes igualdades.**

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

a) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

La igualdad es cierta.

b) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

La igualdad es cierta.

c) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

La igualdad es cierta.

125 **Discute las soluciones de la siguiente ecuación, según los valores de *m*.**

$$x^2-2x+\log m=0$$

Por la definición de logaritmo, $m>0$: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot\log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4-4\log m<0 \rightarrow (10,+\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4-4\log m=0 \rightarrow m=10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4-4\log m>0 \rightarrow (-\infty, 10)$

126 **Si las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) Los cuadrados de x_1 y x_2. b) Los inversos de x_1 y x_2. c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

127 **Halla la relación entre los coeficientes de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.**

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$

Dividiendo la ecuación de tercer grado entre el coeficiente del monomio de mayor grado, y comparando los coeficientes, se obtiene que:

El coeficiente de segundo grado es el opuesto a la suma de las tres raíces.

El coeficiente de primer grado es la suma del resultado de multiplicar las raíces dos a dos.

El término independiente es el opuesto del producto de las tres raíces.

128 **Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño. Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con esos datos, calcula los peldaños «visibles» de la escalera.**

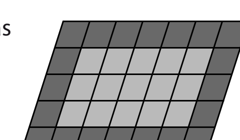
Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras que Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

Por tanto, resulta que: $75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$

El número de peldaños «visibles» es 100.

129 **Tenemos un suelo rectangular, formado por baldosas enteras cuadradas de color claro, que está rodeado de baldosas oscuras, también cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo claro para que el número de baldosas de la zona clara sea igual al de la franja oscura que lo rodea?**



Sean x e y el número de baldosas claras que hay en el largo y el ancho.

$(x + 2)(y + 2) = 2xy \rightarrow$ Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Una solución de esta ecuación es: $x = 10$ e $y = 3$

Es decir, el rectángulo claro tendrá 10 baldosas de largo y 3 baldosas de ancho.

3 Trigonometría

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La medición del mundo

El cielo estaba encapotado, la tierra, embarrada. Trepó por encima de un seto y se encontró, jadeante, sudado y cubierto de agujas de pino, delante de dos muchachas. Al preguntarle qué hacía allí, explicó, nervioso, la técnica de la triangulación: conociendo un lado y dos ángulos de un triángulo, se podían determinar los otros lados y el ángulo desconocido. Así que se escogía un triángulo en cualquier lugar de aquella tierra de Dios, se medía el lado de más fácil acceso, y se determinaban los ángulos para el tercer punto con ese aparato. Levantó el teodolito y lo giró, así asá, y fíjense ustedes, así, con dedos torpes, de un lado a otro, como si fuera la primera vez. Luego añádase una serie de tales triángulos uno junto a otro. […]

Pero un paisaje, repuso la mayor de las dos, no era un plano.

Él la miró fijamente. Había faltado la pausa. Como si ella no precisase reflexionar. Desde luego que no, contestó él sonriendo.

Los ángulos de un triángulo, dijo ella, sumaban en un plano ciento ochenta grados, pero no sobre una esfera. Con eso quedaba dicho todo.

Él la observó como si la viera entonces por primera vez. Ella le devolvió la mirada enarcando las cejas. Sí, dijo él. Bien. Para compensarlo, había que encoger en cierto modo los triángulos después de la medición hasta un tamaño infinitamente pequeño. En principio una sencilla operación diferencial. Aunque de esa forma… Se sentó en el suelo y sacó su bloc. De esa forma, murmuró mientras pergeñaba sus anotaciones, todavía no lo había realizado nadie. Cuando levantó la vista, se había quedado solo. […]

Pidió por carta la mano de Johanna y fue rechazado. No tenía nada contra él, escribió ella, sólo que dudaba que la existencia a su lado fuese saludable. Sospechaba que él extraía la vida y la energía de las personas de su entorno, igual que la tierra del sol y el mar de los ríos, de que cerca de él una estaría condenada a la palidez y a la semirrealidad de una existencia de espectro.

[Pasado un tiempo, lo volvió a intentar y, esta vez, fue aceptado. «Él», uno de los dos protagonistas de esta novela, se llamaba Gauss y fue uno de los astrónomos, físicos y matemáticos más importantes del siglo XIX.]

DANIEL KEHLMANN

En una superficie de tierra plana, hay tres árboles, *A*, *B* y *C*, y no podemos acceder al árbol *C*. La distancia entre *A* y *B* es de 26 m, y con un teodolito, como el de Gauss, medimos los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CBA}$ y obtenemos 48° y 60°, respectivamente. Con estos datos, ¿qué otras distancias o áreas podemos calcular? Basándote en esto, explica la técnica de la triangulación.

Podemos hallar el ángulo desconocido, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°:

$$180° - 60° - 48° = 72°$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 48°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{26}{\operatorname{sen} 72°} \rightarrow \begin{cases} a = 20{,}32 \text{ m} \\ b = 23{,}68 \text{ m} \end{cases}$$

Para calcular el área podemos aplicar la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad A = \sqrt{35(35-20{,}32)(35-23{,}68)(35-26)} = 228{,}79 \text{ m}^2$$

La técnica de la triangulación consiste en la aplicación de la trigonometría para hallar distancias desconocidas.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Halla el término que falta para que estos pares de razones formen una proporción.**

a) $\frac{4}{7}$ y $\frac{10}{x}$ **b)** $\frac{3}{10}$ y $\frac{x}{2}$ **c)** $\frac{x}{3}$ y $\frac{x}{2}$

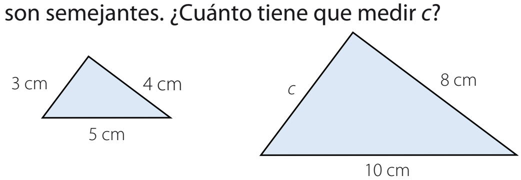
a) $x = 17{,}5$ b) $x = 0{,}6$ c) $x = 6$

002 **Calcula el ángulo complementario y suplementario de:**

a) 15° **b)** 47° **c)** 78° **d)** 89°

a) El ángulo complementario de 15° es 75° y el suplementario es 165°.
b) El ángulo complementario de 47° es 43° y el suplementario es 133°.
c) El ángulo complementario de 78° es 12° y el suplementario es 102°.
d) El ángulo complementario de 89° es 1° y el suplementario es 91°.

003 **Estos triángulos son semejantes. ¿Cuánto tiene que medir *c*?**



Como los triángulos son semejantes, las medidas de los lados son proporcionales. Por tanto, *c* tiene que medir 6 cm.

004 **Razona por qué son semejantes los tres triángulos rectángulos que aparecen al trazar la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo.**

Para explicar que los triángulos son semejantes, vamos a demostrar que los tres ángulos son iguales:

1.° Los tres triángulos tienen un ángulo recto.
2.° El triángulo mediano y el triángulo menor comparten un ángulo agudo con el triángulo mayor.
3.° Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es un valor constante, si coincide la medida de dos ángulos, el tercer ángulo será igual.

005 **Indica cuáles de estas ternas de longitudes corresponden a los lados de un triángulo.**

a) 3 cm, 4 cm y 5 cm **c)** 5 cm, 15 cm y 30 cm
b) 1 cm, 2 cm y 3 cm **d)** 15 cm, 8 cm y 20 cm

a) Pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, ya que el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.
b) No pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, puesto que el lado mayor es igual que la suma de los otros lados.
c) No pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, porque el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.
d) Pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, ya que el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.

006 En un triángulo $\widehat{ABC}$, el ángulo $\hat{A} = 105°$. ¿Cuánto suman $\hat{B}$ y $\hat{C}$?

Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180°:

$180° - 105° = 75°$

Por tanto, los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ deben sumar 75°.

007 Construye triángulos con los siguientes datos.

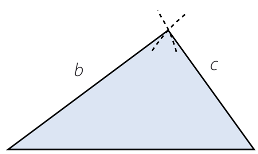
a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm

b) $a = 5$ cm, $\hat{B} = 60°$ y $\hat{C} = 45°$

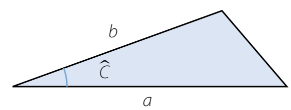
c) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $\hat{C} = 20°$

d) $a = 5$ cm, $\hat{B} = 50°$ y $\hat{A} = 85°$

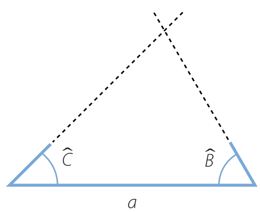
a)



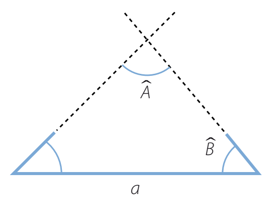
c)



b)



d)



ACTIVIDADES

001 Expresa en grados los ángulos cuya amplitud es 1, 2, 3, 4, 5 y 6 radianes.

Como 2π rad son 360°:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 2\pi \text{ rad} \xrightarrow{\text{son}} 360° \\ 1 \text{ rad} \xrightarrow{\text{serán}} x \text{ grados} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{2\pi} = 57°\,17'\,45''$$

1 rad = 57° 17' 45''

2 rad = 114° 35' 30''

3 rad = 171° 53' 14''

4 rad = 229° 10' 59''

5 rad = 286° 28' 44''

6 rad = 343° 46' 29''

002 Expresa en radianes la medida de los ángulos de los cuatro primeros polígonos regulares.

Si llamamos n al número de lados del polígono regular, entonces la medida de sus ángulos viene dada por la expresión: $\dfrac{180°(n-2)}{n}$

Los ángulos de un triángulo equilátero miden: $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

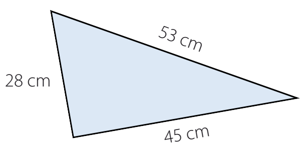
Los ángulos de un cuadrado miden: $90° = \frac{\pi}{2}$ rad

Los ángulos de un pentágono regular miden: $108° = \frac{3\pi}{5}$ rad

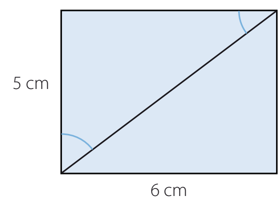
Los ángulos de un hexágono regular miden: $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

003 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos.**

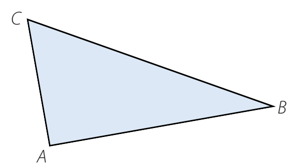
a)



b)



a) Llamamos $\widehat{C}$ al ángulo opuesto al lado de 28 cm.



$sen\,\widehat{C} = \frac{28}{53} = 0{,}53$ $\qquad sec\,\widehat{C} = \frac{53}{28} = 1{,}89$

$cos\,\widehat{C} = \frac{45}{53} = 0{,}85$ $\qquad cosec\,\widehat{C} = \frac{53}{45} = 1{,}18$

$tg\,\widehat{C} = \frac{28}{45} = 0{,}62$ $\qquad cotg\,\widehat{C} = \frac{45}{28} = 1{,}61$

Llamamos $\widehat{B}$ al ángulo opuesto al lado de 45 cm.

$sen\,\widehat{B} = \frac{45}{53} = 0{,}85$ $\qquad sec\,\widehat{B} = \frac{53}{45} = 1{,}18$

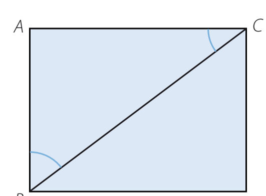
$cos\,\widehat{B} = \frac{28}{53} = 0{,}53$ $\qquad cosec\,\widehat{B} = \frac{53}{28} = 1{,}89$

$tg\,\widehat{B} = \frac{45}{28} = 1{,}61$ $\qquad cotg\,\widehat{B} = \frac{28}{45} = 0{,}62$

b) Calculamos la diagonal del rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}\ \text{cm}$$

Llamamos $\widehat{C}$ al ángulo opuesto al lado de 6 cm.



$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{\sqrt{61}} = 0{,}77$ $\qquad sec\,\widehat{C} = \frac{\sqrt{61}}{6} = 1{,}3$

$cos\,\widehat{C} = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0{,}64$ $\qquad cosec\,\widehat{C} = \frac{\sqrt{61}}{5} = 1{,}56$

$tg\,\widehat{C} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ $\qquad cotg\,\widehat{C} = \frac{5}{6} = 0{,}83$

Llamamos $\widehat{B}$ al ángulo opuesto al lado de 5 cm.

$sen\,\widehat{B} = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0{,}64$ $\qquad sec\,\widehat{B} = \frac{\sqrt{61}}{5} = 1{,}56$

$cos\,\widehat{B} = \frac{6}{\sqrt{61}} = 0{,}77$ $\qquad cosec\,\widehat{B} = \frac{\sqrt{61}}{6} = 1{,}3$

$tg\,\widehat{B} = \frac{5}{6} = 0{,}83$ $\qquad cotg\,\widehat{B} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

004 Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades.

a) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ b) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ c) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

a) $\sec\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\dfrac{c}{a}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

b) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

c) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

005 Calcula las razones trigonométricas del ángulo si:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{4}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}49$ c) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ d) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2$

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}} \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \sec\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{4}{4\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15} \rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{15}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{4} \rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 4$

b) $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \rightarrow \cos\alpha = 0{,}9 \rightarrow \sec\alpha = 1{,}11$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\cos\alpha = 0{,}9} \operatorname{sen}^2\alpha + 0{,}9^2 = 1$

$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}44 \rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 2{,}29$

$\operatorname{tg}^2 = 0{,}49 \rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = 2{,}04$

c) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos\alpha = \frac{2}{3}} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

d) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \xrightarrow{sen\ \alpha\ =\ 0,2} 0,2^2 + cos^2\ \alpha = 1$
$\rightarrow cos\ \alpha = 0,98 \rightarrow sec\ \alpha = 1,02$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \xrightarrow{sen\ \alpha\ =\ 0,2;\ cos\ \alpha\ =\ 0,98} tg\ \alpha = \frac{0,2}{0,98} = 0,2 \rightarrow cotg\ \alpha = 4,9$$

$sen\ \alpha = 0,2 \rightarrow cosec\ \alpha = 5$

006 **Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:**

a) ***sen*** $\boldsymbol{\alpha = 0,3}$ **y** ***cos*** $\boldsymbol{\alpha = 0,8}$
b) ***sen*** $\boldsymbol{\alpha = 0,72}$ **y** ***tg*** $\boldsymbol{\alpha = 1,04}$
c) ***cos*** $\boldsymbol{\alpha = 0,1}$ **y** ***sen*** $\boldsymbol{\alpha = 0,99}$

a) No existe, ya que no cumple las relaciones trigonométricas.
$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1;\ 0,3^2 + 0,8^2 = 0,73 \neq 1$

b) Sí existe, pues cumple las relaciones trigonométricas.
Calculamos el coseno: $1,04 = \dfrac{0,72}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = 0,69 \rightarrow 0,72^2 + 0,69^2 = 1$

c) Sí existe, porque cumple las relaciones trigonométricas.
$0,1^2 + 0,99^2 = 1$

007 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin utilizar el teorema de Pitágoras.**

$$cos\ 30° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot cos\ 30° = 4,33\ \text{cm}$$

La altura del triángulo es 4,33 cm.

008 **Si la altura de un triángulo equilátero mide 5,196 cm; calcula cuánto mide el lado del triángulo, sin utilizar el teorema de Pitágoras.**

$$cos\ 30° = \frac{5,196}{l} \rightarrow l = 6\ \text{cm}$$

El lado del triángulo mide 6 cm.

009 **Halla el valor de las siguientes expresiones.**

a) $\boldsymbol{cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°}$
b) $\boldsymbol{cos^2\ 60° - sen^2\ 45°}$
c) $\boldsymbol{tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°}$
d) $\boldsymbol{tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30°}$

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45° = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30° = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-3 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

010 **Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.**

a) 66°
b) 18°
c) 175°
d) 135°
e) 342°
f) 120°

a) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.
b) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.
c) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivas, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
d) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
e) Es del 4.º cuadrante; el coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
f) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

011 **Razona la respuesta.**

a) **¿Por qué no existe tg 90°?**
b) **¿Ocurre lo mismo con todos los ángulos que son múltiplos de 90°?**

a) No existe, porque $cos\ 90° = 0$.
b) Si multiplicamos 90° por un número par, la tangente es cero, ya que el seno vale 0 y el coseno vale 1.

Si multiplicamos 90° por un número impar, la tangente no está definida, puesto que el coseno vale 0.

012 **Indica el signo de las razones trigonométricas de los ángulos cuya amplitud es múltiplo de 90°.**

Estudiamos los ángulos que son múltiplos de 90°:

- Para $360° \cdot k$, siendo k un número natural.
El coseno y la secante son positivos, el seno y la tangente valen 0 y la cosecante y la cotangente no están definidas.
- Para $90° + 360° \cdot k$, siendo k un número natural.
El seno y la cosecante son positivos, el coseno y la cotangente valen 0 y la secante y la tangente no están definidas.
- Para $180° + 360° \cdot k$, siendo k un número natural.
El coseno y la secante son negativos, el seno y la tangente valen 0 y la cosecante y la cotangente no están definidas.
- Para $270° + 360° \cdot k$, siendo k un número natural.
El seno y la cosecante son negativos, el coseno y la cotangente valen 0 y la secante y la tangente no están definidas.

013 **Sabiendo que $cos\ 50° = 0{,}6428$; halla las razones trigonométricas de:**

a) 130° b) 230° c) −50° d) 310°

Calculamos el seno de 50°:

$sen^2\ 50° + 0{,}6428^2 = 1 \qquad sen\ 50° = 0{,}766$

a) $-cos\ 50° = cos\ 130° = -0{,}6428$; $sen\ 50° = sen\ 130° = 0{,}766$; $tg\ 130° = -1{,}1918$
$sec\ 130° = -1{,}5557$; $cosec\ 130° = 1{,}3054$; $cotg\ 130° = -0{,}8391$

b) $-cos\ 50° = cos\ 230° = -0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen\ 230° = -0{,}766$
$tg\ 230° = 1{,}1918$; $sec\ 230° = -1{,}5557$; $cosec\ 230° = -1{,}3054$; $cotg\ 230° = 0{,}8391$

c) $cos\ 50° = cos\ (-50°) = 0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen\ (-50°) = -0{,}766$
$tg\ (-50°) = -1{,}1918$; $sec\ (-50°) = 1{,}5557$; $cosec\ (-50°) = -1{,}3054$
$cotg\ (-50°) = -0{,}8391$

d) $cos\ 50° = cos\ 310° = 0{,}6428$; $-sen\ 50° = sen\ 310° = -0{,}766$
$tg\ 310° = -1{,}1918$; $sec\ 310° = 1{,}5557$; $cosec\ 310° = -1{,}3054$
$cotg\ 310° = -0{,}8391$

014 **Calcula las razones trigonométricas en función de las razones de otros ángulos del 1.er cuadrante.**

a) 475° b) 885° c) 1.130° d) 695° e) 1.215° f) 985°

a) $sen\ 475° = sen\ 115° = sen\ 65° = 0{,}9063$
$cos\ 475° = cos\ 115° = -sen\ 65° = -0{,}4226$
$tg\ 475° = tg\ 115° = -tg\ 65° = -2{,}1445$

b) $sen\ 885° = sen\ 165° = sen\ 15° = 0{,}2588$
$cos\ 885° = cos\ 165° = -cos\ 15° = -0{,}9659$
$tg\ 885° = tg\ 165° = -tg\ 15° = -0{,}2679$

c) $sen\ 1.130° = sen\ 50° = 0{,}766$
$cos\ 1.130° = cos\ 50° = 0{,}6428$
$tg\ 1.130° = tg\ 50° = 1{,}1917$

d) $sen\ 695° = sen\ 335° = -sen\ 25° = -0{,}4226$
$cos\ 695° = cos\ 335° = cos\ 25° = 0{,}9063$
$tg\ 695° = tg\ 335° = -tg\ 25° = 0{,}4663$

e) $sen\ 1.215° = sen\ 135° = sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$cos\ 1.215° = cos\ 135° = -cos\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$tg\ 1.215° = tg\ 135° = -tg\ 45° = -1$

f) $sen\ 985° = sen\ 265° = -sen\ 85° = -0{,}9962$
$cos\ 985° = cos\ 265° = -cos\ 85° = -0{,}0872$
$tg\ 985° = tg\ 265° = tg\ 85° = 11{,}4301$

015 Sabiendo que $sen\,\alpha = \dfrac{1}{5}$, calcula:

a) $sen\,(90° - \alpha)$ b) $sen\,(180° - \alpha)$ c) $sen\,(-\alpha)$

a) $\dfrac{1}{5} = sen\,\alpha = cos\,(90° - \alpha)$

Sustituimos en la expresión para calcular $sen\,(180° - \alpha)$:

$$cos^2\,(90° - \alpha) + sen^2\,(90° - \alpha) = 1;\ sen\,(90° - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) $sen\,(180° - \alpha) = sen\,\alpha = \dfrac{1}{5}$

c) $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha = -\dfrac{1}{5}$

016 Si $sen\,18° = 0{,}309$ y $cos\,18° = 0{,}951$; halla:

a) $sen\,72°$ b) $cos\,162°$ c) $tg\,(-72°)$

a) $sen\,72° = sen\,(90° - 18°) = cos\,18° = 0{,}951$

b) $cos\,162° = cos\,(180° - 18°) = -cos\,18° = -0{,}951$

c) $tg\,(-72°) = -tg\,72° = -tg\,(90° - 18°) =$

$$= -\frac{1}{tg\,18°} = -\frac{cos\,18°}{sen\,18°} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} = -3{,}0777$$

017 Indica cómo son los ángulos α y β si cumplen las siguientes igualdades.

a) $sen\,\alpha = cos\,\beta$ b) $cos\,\alpha = cos\,\beta$ c) $sen\,\alpha = sen\,\beta$

a) Los ángulos son complementarios.

b) Los ángulos son opuestos.

c) Los ángulos son suplementarios.

018 A partir de las razones de 30° y 45°, calcula las razones trigonométricas de 75° y 22,5°.

$$sen\,75° = sen\,(30° + 45°) = sen\,30° \cdot cos\,45° + cos\,30° \cdot sen\,45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 0{,}97$$

$$cos\,75° = cos\,(30° + 45°) = cos\,30° \cdot cos\,45° - sen\,30° \cdot sen\,45° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}26$$

$$tg\,75° = tg\,(30° + 45°) = \frac{tg\,30° - tg\,45°}{1 + tg\,30° \cdot tg\,45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = 3{,}73$$

$$sen\,22{,}5° = sen\,\frac{45°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm 0{,}38$$

$$\cos 22{,}5° = \cos \frac{45°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm 0{,}92$$

$$tg\ 22{,}5° = tg\ \frac{45°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \pm 0{,}41$$

019 Expresa, en función de $tg\ \alpha$, las razones trigonométricas $sen\ 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

$$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha}} \frac{2\ sen^2\ \alpha}{tg\ \alpha} \xrightarrow{sen^2\alpha = 1-\cos^2\alpha} \frac{2(1-\cos^2\alpha)}{tg\ \alpha} =$$

$$= \frac{2-2\cos^2\alpha}{tg\ \alpha} \xrightarrow{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}} \frac{2-\frac{2}{1+tg^2\alpha}}{tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\ \alpha \xrightarrow{sen^2\alpha = 1-\cos^2\alpha} \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) =$$

$$= -1+2\cos^2\alpha \xrightarrow{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}} -1+\frac{2}{1+tg^2\alpha}$$

020 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].

a) $5\ sen\ x = 2$ b) $7\cos x = -1$ c) $5\ tg\ x = 12$ d) $2\ tg\ x = 2$

a) $5\ sen\ x = 2 \rightarrow sen\ x = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 23°\ 34'\ 41{,}44'' \\ x_2 = 156°\ 25'\ 18{,}56'' \end{cases}$

b) $7\cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{7} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 98°\ 12'\ 47{,}56'' \\ x_2 = 261°\ 47'\ 12{,}44'' \end{cases}$

c) $5\ tg\ x = 12 \rightarrow tg\ x = \frac{12}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 67°\ 22'\ 48{,}49'' \\ x_2 = 247°\ 22'\ 48{,}49'' \end{cases}$

d) $2\ tg\ x = 2 \rightarrow tg\ x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° \\ x_2 = 225° \end{cases}$

021 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas y simplifica el resultado.

a) $sen\ 2x = 1$ b) $\cos x + \cos 2x = 0$

a) $sen\ 2x = 1 \rightarrow 2x = 90° + 360° \cdot k \rightarrow x = 45° + 180° \cdot k$

b) $\cos x + \cos 2x = 0 \rightarrow \cos x + 2\ sen\ x \cos x = 0 \rightarrow \cos x(1 + 2\ sen\ x) = 0$

$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90° + 360° \cdot k \\ x = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$

$1+2\ sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ x = 330° + 360° \cdot k \end{cases}$

022 **En un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es $\widehat{A}$, se sabe que $b = 30$ m y $c = 25$ m. Resuélvelo.**

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$h = \sqrt{30^2 + 25^2} = \sqrt{1.525} = 39{,}05$ m

Utilizamos una de las razones trigonométricas para calcular uno de sus ángulos agudos:

$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{30}{39{,}05} = 0{,}7682 \rightarrow \widehat{B} = 50°\ 11'\ 40''$

Usamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90° - 50°\ 11'\ 40'' = 39°\ 48'\ 20''$

023 **De un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$, conocemos que $\widehat{C} = 62°$ y que la hipotenusa a mide 1 m. Halla sus elementos.**

Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{B} = 90° - 62° = 28°$

Utilizamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

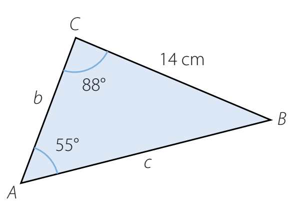
$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} \rightarrow b = sen\ 28° = 0{,}4695$ m

Usamos el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado:

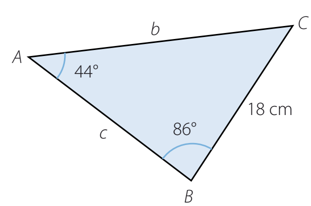
$c = \sqrt{1^2 - 0{,}4695^2} = 0{,}8829$ m

024 **Calcula b y c en estos triángulos.**

a)



b)



a) $\widehat{B} = 180° - 88° - 55° = 37°$

$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 37°} = \frac{14}{sen\ 55°} \rightarrow b = 10{,}29$ cm

$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \frac{c}{sen\ 88°} = \frac{14}{sen\ 55°} \rightarrow c = 17{,}08$ cm

b) $\widehat{C} = 180° - 44° - 86° = 50°$

Aplicamos el teorema del seno como en el apartado anterior y resulta:

$b = 25{,}85$ cm $\qquad c = 19{,}85$ cm

025 **Razona si es posible que en un triángulo se cumplan estas igualdades.**

$$a = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} \qquad a = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

Es posible si el triángulo es rectángulo, porque entonces $\widehat{A} = 90°$ y $sen\ \widehat{A} = 1$.

026 **Un triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo y la longitud de su hipotenusa es a.**

a) Aplica el teorema del coseno al ángulo recto $\widehat{A}$.

b) ¿En qué teorema se transforma el teorema del coseno en este caso?

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90° = b^2 + c^2$

b) Se transforma en el teorema de Pitágoras.

027 **Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.**

a) 12, 11 y 9 cm **b) 23, 14 y 8 cm** **c) 26, 24 y 10 cm** **d) 40, 30 y 20 m**

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}2929 \rightarrow \widehat{A} = 72° \ 57' \ 59{,}7'' \rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90° \rightarrow$ El triángulo es rectángulo.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}25 \rightarrow \widehat{A} = 104° \ 28' \ 39'' \rightarrow$ El triángulo es obtusángulo.

028 **En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.**

Llamamos $a = 15$ m, $b = 10$ m y $c = 10$ m.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 15^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$

$\widehat{A} = 97° \ 10' \ 50{,}7''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow 10^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$

$\widehat{B} = 41° \ 24' \ 34{,}6''$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 97° \ 10' \ 50{,}7'' + 41° \ 24' \ 34{,}6'' + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{C} = 41° \ 24' \ 34{,}6''$

029 **En un romboide, los lados miden 5 cm y 8 cm y una de sus diagonales mide 10 cm. Calcula la medida de sus cuatro ángulos.**

Llamamos $a = 5$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$

$\widehat{A} = 29° \ 41' \ 10{,}7''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow 8^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$

$\widehat{B} = 52° \ 24' \ 37{,}8''$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 29° \ 41' \ 10{,}7'' + 52° \ 24' \ 37{,}8'' + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{C} = 97° \ 54' \ 11{,}5''$

030 **Resuelve el triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 14 cm y 18 cm, respectivamente, y el ángulo opuesto a uno de ellos mide 70°. Dibuja el triángulo.**

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

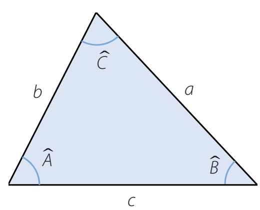
$$\frac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \frac{14}{\text{sen }\widehat{B}} = \frac{18}{\text{sen }70°} \rightarrow \widehat{B} = 46°\ 57'\ 34{,}4''$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{A} + 46°\ 57'\ 34{,}4'' + 70° = 180° \rightarrow \widehat{A} = 63°\ 2'\ 25{,}6''$$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

$$\frac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \frac{a}{\text{sen }63°\ 2'\ 25{,}6''} = \frac{18}{\text{sen }70°} \rightarrow a = 17{,}07 \text{ cm}$$



031 **Al resolver el triángulo con $a = 4$ m, $c = 6$ m y $\widehat{A} = 25°$, obtenemos como soluciones dos triángulos obtusángulos. Comprueba que esto es posible y dibuja las soluciones.**

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\frac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \frac{4}{\text{sen }25°} = \frac{6}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \begin{cases} \widehat{C} = 39°\ 20'\ 25{,}7'' \\ \widehat{C} = 140°\ 39'\ 34'' \end{cases}$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

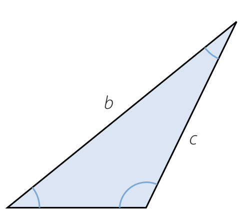
1.ª solución: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \rightarrow 25° + \widehat{B} + 39°\ 20'\ 25{,}7'' = 180° \rightarrow \widehat{B} = 115°\ 39'\ 34''$

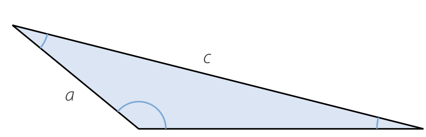
2.ª solución: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \rightarrow 25° + \widehat{B} + 140°\ 39'\ 34'' = 180° \rightarrow \widehat{B} = 14°\ 20'\ 26''$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

1.ª solución: $\dfrac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen }\widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \dfrac{b}{\text{sen }115°\ 39'\ 34''} = \dfrac{4}{\text{sen }25°} \rightarrow b = 8{,}53$ m

2.ª solución: $\dfrac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen }\widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen }\widehat{C}} \rightarrow \dfrac{b}{\text{sen }14°\ 20'\ 26''} = \dfrac{4}{\text{sen }25°} \rightarrow b = 2{,}34$ m





032 Transforma los siguientes ángulos en grados o radianes, según corresponda.

a) 225° d) −1,5 rad g) −270° j) 0,3 rad m) 264° 25'

b) 75° e) 2 rad h) 140° 40' k) 120° n) $\frac{7\pi}{2}$ rad

c) 160° f) 540° i) $\frac{\pi}{3}$ rad l) 315° ñ) $\frac{-6\pi}{5}$ rad

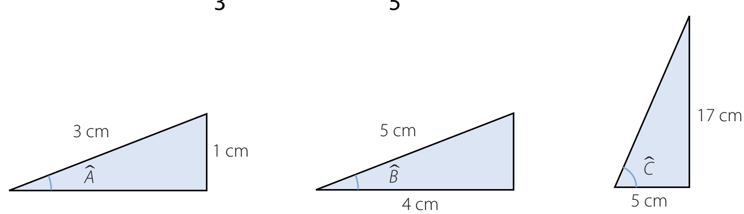
a) $\frac{5\pi}{4}$ rad d) 85° 56' 37,2" g) $\frac{\pi}{2}$ rad j) 17° 11' 19,44" m) 4,61 rad

b) $\frac{5\pi}{12}$ rad e) 114° 35' 30" h) 2,46 rad k) $\frac{2\pi}{3}$ rad n) 630°

c) $\frac{8\pi}{9}$ rad f) 3π rad i) 60° l) $\frac{7\pi}{4}$ rad ñ) 144°

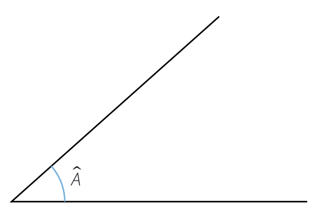
033 Dibuja tres ángulos agudos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, tales que:

$$sen\,\widehat{A} = \frac{1}{3} \qquad cos\,\widehat{B} = \frac{4}{5} \qquad tg\,\widehat{C} = 3,4$$

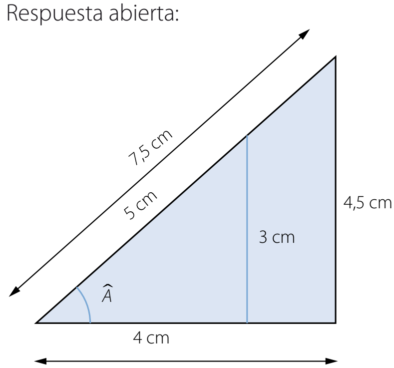


034 Dibuja dos rectas perpendiculares a uno de los lados de este ángulo, de modo que se formen dos triángulos rectángulos.

Mide los lados de los dos triángulos y verifica que las razones del ángulo $\widehat{A}$ son idénticas en ambos.



Respuesta abierta:



$$sen\,\widehat{A} = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6 \qquad cos\,\widehat{A} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = 0,8 \qquad tg\,\widehat{A} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = 0,75$$

035 Comprueba si son ciertas o no las siguientes igualdades, sin usar la calculadora.

a) $sen\ 30° + sen\ 45° = sen\ 75°$

b) $cos\ 90° - cos\ 30° = cos\ 60°$

c) $tg\ 60° = 2\ tg\ 30°$

d) $sen\ 60° = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30°$

e) $cos\ 45° = \frac{cos\ 90°}{2}$

f) $cos\ 60° = cos^2\ 30° - sen^2\ 30°$

a) Falsa

$sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30° \cdot cos\ 45° + cos\ 30° \cdot sen\ 45° \neq sen\ 30° + sen\ 45°$

b) Falsa

$cos\ 60° = cos\ (90° - 30°) = cos\ 90° \cdot cos\ 30° - sen\ 90° \cdot sen\ 30° \neq cos\ 90° - cos\ 30°$

c) Falsa

$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} \neq 2\ tg\ 30°$

d) Verdadera

$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30° \cdot cos\ 30°$

e) Falsa

$cos\ 45° = cos\ \frac{90°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ 90°}{1 + cos\ 90°}} \neq \frac{cos\ 90°}{2}$

f) Verdadera

$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30°$

036 Los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son agudos. Completa la siguiente tabla sin determinarlos.

Seno	Coseno	Tangente
$sen\ \widehat{A} = 0,5602$	$cos\ \widehat{A} = 0,8284$	$tg\ \widehat{A} = 0,6763$
$sen\ \widehat{B} = 0,9828$	**$cos\ \widehat{B} = 0,1849$**	$tg\ \widehat{B} = 5,3151$
$sen\ \widehat{C} = 0,6616$	$cos\ \widehat{C} = 0,3384$	**$tg\ \widehat{C} = 2,7804$**

$0,5602^2 + cos^2\ \widehat{A} = 1 \rightarrow cos\ \widehat{A} = \sqrt{1 - 0,5602^2} = 0,8284$

$tg\ \widehat{A} = \frac{0,5602}{0,8284} = 0,6763$

$sen^2\ \widehat{B} + 0,1849^2 = 1 \rightarrow sen\ \widehat{B} = \sqrt{1 - 0,1849^2} = 0,9828$

$tg\ \widehat{B} = \frac{0,5602}{0,8284} = 0,6763$

$cos\ \widehat{C} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2,7804^2}} = 0,3384$

$sen^2\ \widehat{C} + 0,3384^2 = 1 \rightarrow sen\ \widehat{C} = \sqrt{1 - 0,3384^2} = 0,6616$

037 Emplea la calculadora para determinar los ángulos agudos que cumplen:

a) $\cos \widehat{A} = 0{,}3453$
b) $tg\ \widehat{B} = 2{,}3688$
c) $cosec\ \widehat{C} = 1{,}9044$
d) $\cos \widehat{D} = 0{,}9726$
e) $tg\ \widehat{E} = 0{,}3554$
f) $sen\ \widehat{F} = 0{,}0968$
g) $sen\ \widehat{G} = 0{,}2494$
h) $cotg\ \widehat{H} = 2{,}5$

a) $\cos \widehat{A} = 0{,}3453 \rightarrow \widehat{A} = 69°\ 47'\ 59{,}6''$
b) $tg\ \widehat{B} = 2{,}3688 \rightarrow \widehat{B} = 67°\ 6'\ 45{,}84''$
c) $cosec\ \widehat{C} = 1{,}9044 \rightarrow sen\ \widehat{C} = 0{,}5251 \rightarrow \widehat{C} = 31°\ 40'\ 29{,}9''$
d) $\cos \widehat{D} = 0{,}9726 \rightarrow \widehat{D} = 13°\ 26'\ 36{,}3''$
e) $tg\ \widehat{E} = 0{,}3554 \rightarrow \widehat{E} = 19°\ 33'\ 54{,}8''$
f) $sen\ \widehat{F} = 0{,}0968 \rightarrow \widehat{F} = 5°\ 33'\ 17{,}75''$
g) $sen\ \widehat{G} = 0{,}2494 \rightarrow \widehat{G} = 14°\ 26'\ 31{,}2''$
h) $cotg\ \widehat{H} = 2{,}5 \rightarrow tg\ \widehat{H} = 0{,}4 \rightarrow \widehat{H} = 21°\ 48'\ 5{,}07''$

038 Determina las siguientes razones.

a) $sen\ 19°\ 22'\ 37''$
b) $\cos 44°\ 52'$
c) $\cos 1{,}03$
d) $sen\ \frac{2\pi}{5}$
e) $sec\ 54°\ 28'$
f) $cosec\ \pi$
g) $tg\ 83°\ 41'\ 57''$
h) $sen\ 37°\ 25''$
i) $tg\ \frac{\pi}{8}$
j) $\cos 0{,}845$
k) $cotg\ 35°\ 40'$
l) $sec\ \frac{\pi}{6}$

a) $sen\ 19°\ 22'\ 37'' = 0{,}3318$
b) $\cos 44°\ 52' = 0{,}7088$
c) $\cos 1{,}03 = 0{,}5148$
d) $sen\ \frac{2\pi}{5} = 0{,}9511$
e) $sec\ 54°\ 28' = 1{,}7206$
f) No está definida.
g) $tg\ 83°\ 41'\ 57'' = 9{,}0567$
h) $sen\ 37°\ 25'' = 0{,}6019$
i) $tg\ \frac{\pi}{8} = 0{,}4142$
j) $\cos 0{,}845 = 0{,}6637$
k) $cotg\ 35°\ 40' = 1{,}3934$
l) $sec\ \frac{\pi}{6} = 1{,}1547$

039 Resuelve los triángulos rectángulos correspondientes, considerando que $\widehat{A}$ es el ángulo recto.

a) $b = 7$ m, $\widehat{B} = 48°$
b) $c = 12$ m, $\widehat{B} = 28°$
c) $a = 13$ m, $c = 5$ m
d) $a = 6$ cm, $\widehat{C} = 42°\ 12'$
e) $b = 3$ m, $c = 6$ m
f) $b = 8$ m, $a = 10$ m

a) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{C} = 90° - 48° = 42°$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{7}{sen\ 48°} = a \rightarrow a = 9{,}42 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$$c = \sqrt{9{,}42^2 - 7^2} = 6{,}3 \text{ m}$$

b) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$$\widehat{C} = 90° - 28° = 62°$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para obtener otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 28°} = \frac{12}{sen\,62°} \rightarrow b = 6{,}38 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$$a = \sqrt{12^2 + 6{,}38^2} = 13{,}59 \text{ m}$$

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

$$sen\,\widehat{B} = \frac{12}{13} \rightarrow \widehat{B} = 67°\ 22'\ 48{,}5''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{5}{13} \rightarrow \widehat{C} = 22°\ 37'\ 11{,}5''$$

d) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para obtener el tercer ángulo:

$$\widehat{B} = 90° - 42°\ 12' = 47°\ 48'$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 47°\ 48'} = 6 \rightarrow b = 4{,}44 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$$c = \sqrt{6^2 - 4{,}44^2} = 4{,}04 \text{ m}$$

e) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71 \text{ m}$$

$$sen\,\widehat{B} = \frac{3}{6{,}71} \rightarrow \widehat{B} = 26°\ 33'\ 26{,}6''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{6{,}71} \rightarrow \widehat{C} = 63°\ 26'\ 33{,}4''$$

f) Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$$c = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ m}$$

$$sen\,\widehat{B} = \frac{8}{10} \rightarrow \widehat{B} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{10} \rightarrow \widehat{C} = 36°\ 52'\ 11{,}63''$$

040 ●●○ **Si nos situamos a 40 metros de la chimenea de una fábrica la vemos bajo un ángulo de 26°. ¿Qué altura tiene? Considera que los ojos del observador están situados a 175 cm del suelo.**

$$tg\ 26° = \frac{a}{40} \rightarrow a = 19{,}51 \text{ m}$$

$19{,}51 + 1{,}75 = 21{,}26$ m

La altura de la chimenea es 21,26 m.

041 ●●○ **Una barca está atada a la orilla de un canal con una cuerda que mide 8 metros. En cierto momento, esta cuerda forma un ángulo de 38° con el borde. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra la barca?**

$$sen\ 38° = \frac{b}{8} \rightarrow b = 4{,}93 \text{ m}$$

La barca se encuentra a 4,93 m de la orilla.

042 ●●○ **Las bases de un trapecio isósceles miden 8 cm y 14 cm, y los lados iguales, 5 cm. Calcula la medida de sus ángulos.**

$$sen\,\widehat{B} = \frac{3}{5} \rightarrow \widehat{B} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$$

$$\widehat{C} = 90° - 53°\ 7'\ 48{,}37'' = 36°\ 52'\ 11{,}63''$$

$$\widehat{D} = 90° + 36°\ 52'\ 11{,}6'' = 126°\ 52'\ 11{,}63''$$

043 ●●○ **¿Qué ángulo forman entre sí las diagonales de un rectángulo de 10 cm de base y 6 cm de altura?**

Hallamos la longitud de la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11{,}66 \text{ cm}$$

Calculamos el ángulo opuesto al lado de 6 cm, en el triángulo isósceles que tiene por lados iguales la mitad de la diagonal:

$$5{,}83^2 = 5{,}83^2 + 6^2 - 2 \cdot 5{,}83 \cdot 6 \cdot cos\,\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 59°\ 1'\ 50{,}27''$$

El ángulo que forman entre sí las diagonales del rectángulo es 59° 1' 50,27".

044 **Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. Determina la medida de su lado.**

El pentágono regular se puede dividir en cinco triángulos isósceles.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360°}{5} = 72°$

El ángulo central mide 72°.

Hallamos los restantes ángulos del triángulo:

$180° = 72° + 2\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 54°$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,72°} = \frac{20}{sen\,54°} \rightarrow b = 23{,}51 \text{ cm}$$

El lado mide 23,51 cm.

045 **Calcula la longitud del lado de un dodecágono regular circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm**

El dodecágono regular se divide en 24 triángulos rectángulos.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360°}{24} = 15°$

El ángulo central mide 15°.

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,15°} = 6 \rightarrow b = 1{,}55 \text{ cm}$$

El lado mide 3,1 cm.

046 **La tabla muestra razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. Sin determinarlos, complétala con las razones que faltan.**

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	**0,6702**	−0,7422	−0,903
Tercero	0,8911	**−0,4539**	−1,9631
Cuarto	0,8016	−0,5979	**−0,7459**
Tercero	**−0,7822**	−0,623	1,2555
Segundo	0,8849	−0,4657	**−1,9004**
Cuarto	−0,7158	**0,6983**	−1,0251

$$0{,}6702^2 + cos^2\,\widehat{A} = 1 \rightarrow cos\,\widehat{A} = \sqrt{1 - 0{,}6702^2} = -0{,}7422$$

$$tg\,\widehat{A} = \frac{0{,}6702}{-0{,}7422} = -0{,}903$$

$$sen^2\,\widehat{B} + (-0{,}4539)^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{B} = \sqrt{1 - 0{,}4539^2} = 0{,}8911$$

$$tg\,\widehat{B} = \frac{0{,}8911}{-0{,}4539} = -1{,}9631$$

$$\cos\widehat{C}=\sqrt{\frac{1}{1+(-0{,}7459)^2}}=0{,}8016$$

$$\text{sen}^2\,\widehat{C}+0{,}8016^2=1\rightarrow \text{sen}\,\widehat{C}=\sqrt{1-0{,}8016^2}=-0{,}5979$$

$$(-0{,}7822)^2+\cos^2\widehat{D}=1\rightarrow \cos\widehat{D}=\sqrt{1-0{,}7822^2}=-0{,}623$$

$$\text{tg}\,\widehat{D}=\frac{-0{,}7822}{-0{,}623}=1{,}2555 \qquad \cos\widehat{E}=\sqrt{\frac{1}{1+(-1{,}9004)^2}}=-0{,}4657$$

$$\text{sen}^2\,\widehat{E}+(-0{,}4657)^2=1\rightarrow \text{sen}\,\widehat{E}=\sqrt{1-0{,}4657^2}=0{,}8849$$

$$\text{sen}^2\,\widehat{F}+0{,}6983^2=1\rightarrow \text{sen}\,\widehat{F}=\sqrt{1-0{,}6983^2}=-0{,}7158$$

$$\text{tg}\,\widehat{F}=\frac{-0{,}7158}{0{,}6983}=-1{,}0251$$

047 Sin usar la calculadora, determina.

a) $\text{sen}\,\pi-\text{tg}\,\pi+2\cos\pi$

b) $\cos\frac{\pi}{2}-\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$

c) $\text{tg}\,2\pi-\text{sen}\,\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{3\pi}{2}$

d) $\cos 2\pi-\text{sen}\,2\pi$

a) $\text{sen}\,\pi-\text{tg}\,\pi+2\cos\pi=0-\frac{0}{1}+2\cdot 1=2$

b) $\cos\frac{\pi}{2}-\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}=0-1=-1$

c) $\text{tg}\,2\pi-\text{sen}\,\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{3\pi}{2}=\frac{0}{1}-1-2\cdot 0=-1$

d) $\cos 2\pi-\text{sen}\,2\pi=1-0=1$

048 Completa, sin usar la calculadora, los valores del seno de los siguientes ángulos.

$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
-1	0	1	0	-1	0	1	0

049 Completa, sin usar la calculadora, los valores del coseno de los siguientes ángulos.

$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
0	1	0	-1	0	1	0	-1

050 Completa, sin usar la calculadora, los valores de la tangente de los siguientes ángulos.

−60°	−45°	−30°	0°	30°	45°	60°	90°
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definido
120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definido

051 Utiliza la calculadora para hallar las razones.

a) *sen* 319° 12' 52''
b) *cos* 434° 26'
c) *tg* 7,03
d) $sen\ \frac{8\pi}{5}$
e) *cosec* 200° 16'
f) $sec\ \frac{5\pi}{4}$
g) *tg* 183° 13' 53''
h) *sen* 333° 55''
i) $tg\ \frac{11\pi}{8}$
j) *cos* 3,845
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6}$
l) *cosec* 5,24

a) *sen* 319° 12' 52'' = −0,6532
b) *cos* 434° 26' = 0,2684
c) *tg* 7,03 = 0,9257
d) $sen\ \frac{8\pi}{5} = -0{,}9511$
e) *cosec* 200° 16' = −2,8869
f) $sec\ \frac{5\pi}{4} = -1{,}4142$
g) *tg* 183° 13' 53'' = 0,0565
h) *sen* 333° 55'' = −0,4538
i) $tg\ \frac{11\pi}{8} = 2{,}4142$
j) *cos* 3,845 = −0,7626
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6} = -1{,}7321$
l) *cosec* 5,24 = −1,1574

052 Reduce los ángulos al 1.er cuadrante y calcula estas razones.

a) *sen* 131°
b) *cos* 334° 46'
c) *tg* 146° 22''
d) *cosec* 122° 53'
e) *sec* 156° 23' 6''
f) *tg* 238° 24'
g) *sen* 302° 15''
h) *cos* 192° 21' 32''
i) *cotg* 295° 12' 45''
j) *sec* 203° 36' 54''

a) *sen* 131° = *sen* 49° = 0,7547
b) *cos* 334° 46' = *cos* 25° 14' = 0,9046
c) *tg* 146° 22'' = −*tg* 33° 59' 38'' = −0,6744
d) *cosec* 122° 53' = *cosec* 57° 7' = 1,1908
e) *sec* 156° 23' 6'' = −*sec* 23° 36' 54'' = −1,0914
f) *tg* 238° 24' = *tg* 58° 24' = 1,6255
g) *sen* 302° 15'' = −*sen* 57° 45' = −0,8480
h) *cos* 192° 21' 32'' = −*cos* 12° 21' 32'' = −0,9767
i) *cotg* 295° 12' 45'' = −*cotg* 64° 47' 15'' = −0,4708
j) *sec* 203° 36' 54'' = −*sec* 23° 36' 54'' = −1,0914

053 En la circunferencia goniométrica, dibuja y obtén con ayuda de la calculadora.

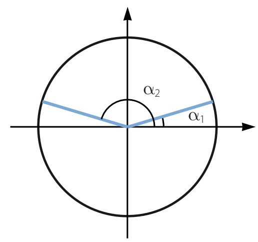
a) Dos ángulos cuyo seno valga 0,36.

b) Dos ángulos cuya tangente valga −3,54.

a) $sen\ \alpha = 0{,}36$

$\alpha_1 = 21°\ 6'\ 0{,}706''$

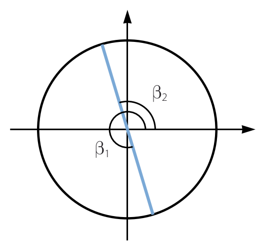
$\alpha_2 = 158°\ 53'\ 59{,}2''$



b) $tg\ \beta = -3{,}54$

$\beta_1 = 285°\ 46'\ 27''$

$\beta_2 = 105°\ 46'\ 27''$



054 Halla los siguientes ángulos.

a) *arc cos* 0,4539
b) *arc sen* 0,9284
c) *arc tg* (−0,5459)
d) *arc cos* (−0,3996)
e) *arc tg* 2,1618
f) *arc cos* (−0,2926)
g) *arc sen* 0,6862
h) *arc sen* (−0,3308)

a) *arc cos* 0,4539 = 63° 20,95''
b) *arc sen* 0,9284 = 68° 11' 12,3''
c) *arc tg* (−0,5459) = 331° 22' 12''
d) *arc cos* (−0,3996) = 113° 33' 11''
e) *arc tg* 2,1618 = 65° 10' 32,9''
f) *arc cos* (−0,2926) = 107° 49,2''
g) *arc sen* 0,6862 = 43° 19' 48,2''
h) *arc sen* (−0,3308) = 340° 40' 58''

055 Conocidas las razones de 30°, 45° y 60°, obtén, sin usar la calculadora, las razones de 120°, 225°, 240° y 300°.

$sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

$sen\ 225° = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 225° = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 225° = tg\ 45° = 1$

$sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

$sen\ 300° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 300° = cos\ 60° = \frac{1}{2}$

$tg\ 300° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

056 Determina el ángulo α del 1.er cuadrante cuyas razones trigonométricas verifican:

$$sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'| \qquad cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'| \qquad tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'|$$

Halla cuáles son sus razones trigonométricas.

$sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'| = 0{,}9368 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

$cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'| = 0{,}3499 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

$tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'| = 2{,}6770 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

057 ¿Qué ángulo del 3.er cuadrante tiene el mismo coseno que 132° 24' 18''?
Usa la calculadora para obtener las razones de esos dos ángulos y compáralas.

El ángulo del 3.er cuadrante que tiene el mismo coseno que 132° 24' 18" es 227° 35' 42".

$cos\ 132°\ 24'\ 18'' = cos\ 227°\ 35'\ 42'' = -0{,}6744$

$sen\ 132°\ 24'\ 18'' = -sen\ 227°\ 35'\ 42'' = 0{,}7384$

$tg\ 132°\ 24'\ 18'' = -tg\ 227°\ 35'\ 42'' = -1{,}0949$

058 ¿Qué ángulo del 2.º cuadrante tiene la misma tangente que 337° 54' 29"?
Con ayuda de la calculadora, obtén las razones de los ángulos y compáralas.

El ángulo del 2.º cuadrante que tiene la misma tangente que 337° 54' 29" es 157° 54' 29".

$cos\ 337°\ 54'\ 29'' = -cos\ 157°\ 54'\ 29'' = 0{,}9266$

$sen\ 337°\ 54'\ 29'' = -sen\ 157°\ 54'\ 29'' = -0{,}3761$

$tg\ 337°\ 54'\ 29'' = tg\ 157°\ 54'\ 29'' = -0{,}4059$

059 Sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}23$ y que α es un ángulo agudo, determina las razones trigonométricas.

a) $cos\ \alpha$
b) $tg\ \alpha$
c) $tg\ (-\alpha)$
d) $cos\ (180° - \alpha)$
e) $sen\ (180° + \alpha)$
f) $sen\ (720° + \alpha)$

a) $0{,}23^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}23^2} = 0{,}9732$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}23}{0{,}9732} = 0{,}2363$

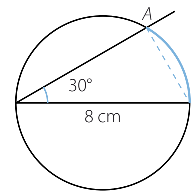
c) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = -0{,}2363$

d) $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha = -0{,}9732$

e) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}23$

f) $sen\ (720° + \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}23$

060 En la siguiente circunferencia, calcula la medida del segmento AB y del arco de circunferencia $\widehat{AB}$.



Como el ángulo $\widehat{A} = 90°$, el ángulo $\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

$$sen\ 30° = \frac{AB}{8} \rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

El segmento AB mide 4 cm.

Como el ángulo de 30° es inscrito, el ángulo central que abarca el arco $\widehat{AB}$ mide 60°.

Calculamos la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de 4 cm de radio:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}19 \text{ cm}$$

El arco $\widehat{AB}$ mide 4,19 cm.

061 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$, $cos\ \gamma = -0{,}54$

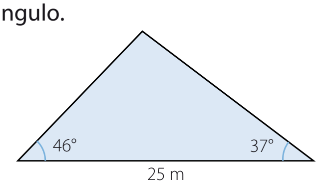
b) $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$, $sen\ \delta = 0$

a) $sen^2\ \gamma + (-0{,}54)^2 = 1 \rightarrow sen\ \gamma = -\sqrt{1 - (-0{,}54)^2} = -0{,}8417$

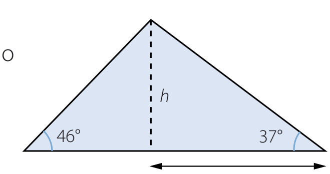
$$tg\ \gamma = \frac{-0{,}8417}{-0{,}54} = 1{,}5587$$

b) No existe ningún ángulo con estas condiciones, pues si $sen\ \delta = 0$, entonces $\delta = 2k\pi$.

062 Calcula el área de este triángulo.



La altura sobre el lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 37° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 46° = \dfrac{h}{25 - x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow h = x \cdot tg\ 37° \\ \rightarrow h = (25 - x) \cdot tg\ 46° \end{array}\Bigg\} \rightarrow x = \frac{25 \cdot tg\ 46°}{tg\ 37° + tg\ 46°} = 14{,}47 \text{ m}$$

$h = 14{,}47 \cdot tg\ 37° = 10{,}9$ m

La altura del triángulo mide 10,9 m.

Calculamos el área: $A = \frac{25 \cdot 10{,}9}{2} = 136{,}3 \text{ m}^2$

El área del triángulo mide 136,3 m^2.

063 Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm
b) $b = 6$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 39°\ 12'$
c) $a = 7$ cm, $\widehat{B} = 38°\ 49'$, $\widehat{C} = 66°\ 40'$
d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $\widehat{B} = 36°\ 38'$
e) $a = 2{,}1$ cm; $b = 1{,}4$ cm; $c = 1{,}8$ cm
f) $a = 9$ cm, $c = 5$ cm, $\widehat{B} = 103°\ 27'$
g) $b = 8{,}3$ cm; $c = 9{,}1$ cm; $\widehat{C} = 112°\ 50'$
h) $c = 6$ cm, $\widehat{A} = 27°\ 42'$, $\widehat{B} = 98°\ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-100 + 196 + 64}{2 \cdot 14 \cdot 8} = 0{,}7143$$

$\widehat{A} = 44°\ 24'\ 55{,}1''$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} = -0{,}2$$

$\widehat{B} = 101°\ 32'\ 13''$

$\widehat{C} = 180° - 44°\ 24'\ 55{,}1'' - 101°\ 32'\ 13'' = 34°\ 2'\ 51{,}85''$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 39°\ 12' \rightarrow a = 5{,}77 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 33{,}3 + 81}{2 \cdot 5{,}77 \cdot 9} = 0{,}7534$$

$\widehat{B} = 41°\ 4'\ 14{,}51'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 39°\ 12' - 41°\ 4'\ 14{,}51'' = 99°\ 43'\ 45{,}49''$

c) $\widehat{A} = 180° - 38°\ 49' - 66°\ 40' = 74°\ 31°$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 38°\ 49'} = \frac{7}{\operatorname{sen} 74°\ 31'} \rightarrow b = 4{,}55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 66°\ 40'} = \frac{7}{\operatorname{sen} 74°\ 31'} \rightarrow c = 6{,}67 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen} 36°\ 38'} = \frac{8}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}4774$$

$\widehat{A} = 28°\ 30'\ 45{,}7''$

$\widehat{C} = 180° - 36°\ 38' - 28°\ 30'45{,}7'' = 114°\ 51'\ 14{,}3''$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 114°\ 51'\ 14{,}3''} = \frac{8}{\operatorname{sen} 28°\ 30'\ 45{,}7''} \rightarrow c = 15{,}21 \text{ cm}$$

e) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-4{,}41 + 1{,}96 + 3{,}24}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}8} = 0{,}1567$$

$\widehat{A} = 80°\ 58'\ 54{,}9''$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-1{,}96 + 4{,}41 + 3{,}24}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 1{,}8} = 0{,}7606$$

$\widehat{B} = 40°\ 29'\ 4{,}08''$

$\widehat{C} = 180° - 40°\ 29'\ 4{,}08'' = 58°\ 32'\ 1{,}02''$

f) Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90 \cdot \cos 103° 27'} = 11,27 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{11,27}{\operatorname{sen} 103° 27'} = \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0,7767$$

$$\widehat{A} = 50° 57' 26,6'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 50° 57' 26,6'' - 103° 27' = 25° 35' 33,4''$$

g) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \frac{9,1}{\operatorname{sen} 112° 50'} = \frac{8,3}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = 0,8406$$

$$\widehat{B} = 57° 12' 18,2'' \rightarrow \widehat{A} = 180° - 112° 50' - 57° 12' 18,2'' = 9° 57' 41,8''$$

$$a = \frac{9,1 \cdot \operatorname{sen} 91° 57' 41,8''}{\operatorname{sen} 112° 50'} = 1,71 \text{ cm}$$

h) $\widehat{C} = 180° - 27° 42' - 98° 20' = 53° 58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{6}{\operatorname{sen} 53° 58'} = \frac{a}{\operatorname{sen} 27° 42'} \rightarrow a = 3,45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \frac{6}{\operatorname{sen} 53° 58'} = \frac{b}{\operatorname{sen} 98° 20'} \rightarrow b = 7,34 \text{ cm}$$

064 **Encuentra las soluciones para estos triángulos.**

a) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm

b) $a = 8$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 42° 55'$

c) $a = 10$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 72° 55'$

d) $b = 6$ cm; $c = 4,5$ cm; $\widehat{C} = 38° 26'$

e) $c = 12$ cm, $\widehat{A} = 92°$, $\widehat{B} = 26° 28'$

f) $a = 11$ cm, $b = 12$ cm, $\widehat{A} = 27° 36'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0,7024$$

$$\widehat{A} = 134° 37' 6''$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0,9097$$

$$\widehat{B} = 24° 31' 58,8''$$

$$\widehat{C} = 180° - 24° 31' 58,8'' - 134° 37' 6'' = 20° 50' 55,2''$$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{8}{\operatorname{sen} 42° 55'} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = 0,7661$$

$\widehat{C} = 50° 2''$ $\qquad$ $\widehat{B} = 180° - 42° 55' - 50° 2'' = 87° 4' 58''$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 87° 4' 58''} = \frac{8}{\operatorname{sen} 42° 55'} \rightarrow b = 11,73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{10}{\operatorname{sen} 72° 55'} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = 0,8603$$

$\widehat{C} = 59° 20' 57,2''$ $\qquad$ $\widehat{B} = 180° - 59° 20' 57,2'' - 72° 55' = 47° 44' 2,76''$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 47° 44' 2,76''} = \frac{10}{\operatorname{sen} 72° 55'} \rightarrow b = 7,74 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{4{,}5}{sen\,38°\,26'} = \frac{6}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\,\widehat{B} = 0{,}8288$$

$\widehat{B} = 55°\,58'\,34{,}2''$

$\widehat{A} = 180° - 55°\,58'\,34{,}2'' - 38°\,26' = 85°\,35'\,25{,}8''$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{4{,}5}{sen\,38°\,26'} = \frac{a}{sen\,85°\,35'\,25{,}8''} \rightarrow a = 7{,}22 \text{ cm}$$

e) $\widehat{C} = 180° - 92° - 26°\,28' = 61°\,32'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{12}{sen\,61°\,32'} = \frac{b}{sen\,26°\,28'} \rightarrow b = 6{,}08 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{12}{sen\,61°\,32'} = \frac{a}{sen\,92°} \rightarrow a = 13{,}64 \text{ cm}$$

f) Aplicamos el teorema del seno:

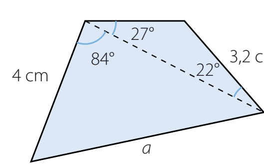
$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{12}{sen\,\widehat{B}} = \frac{11}{sen\,27°\,36'} \rightarrow sen\,\widehat{B} = 0{,}5054$$

$\widehat{B} = 30°\,21'\,31{,}8''$

$\widehat{C} = 180° - 30°\,21'\,31{,}8'' - 27°\,36' = 122°\,2'\,28{,}2''$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{sen\,122°\,2'\,28{,}2''} = \frac{11}{sen\,27°\,36'} \rightarrow c = 20{,}13 \text{ cm}$$

065 ●●○ **Obtén el valor de *a* en la siguiente figura.**



Calculamos el ángulo desconocido del triángulo menor:

$180° - 27° - 22° = 131°$

Aplicamos el teorema del seno para conocer la longitud de la diagonal:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\,131°} = \frac{3{,}2}{sen\,27°} \rightarrow b = 5{,}32 \text{ cm}$$

Utilizamos el teorema del coseno para calcular el valor de *a*:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A} \rightarrow a^2 = 5{,}32^2 + 4^2 - 2 \cdot 5{,}32 \cdot 4 \cdot cos\,84° \rightarrow a = 6{,}31 \text{ cm}$

El valor de *a* es 6,31 cm.

066 ●●○ **En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada extremo de una cuerda a las argollas y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.**

a) ¿Cuánto mide la cuerda?

b) ¿A qué distancia está el niño de la pared?

La altura del lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 37° = \dfrac{h}{8-x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to h = x \cdot tg\ 50° \\ \to h = (8-x) \cdot tg\ 37° \end{array}\Bigg\} \to x = \frac{8 \cdot tg\ 37°}{tg\ 37° + tg\ 50°} = 3{,}1\ \text{m}$$

$h = 3{,}1 \cdot tg\ 50° = 3{,}69$ m

El niño está a una distancia de 3,69 m de la pared.

$$sen\ 50° = \frac{3{,}69}{BA} \to BA = \frac{3{,}69}{sen\ 50°} = 4{,}82\ \text{m}$$

$$sen\ 37° = \frac{3{,}69}{CA} \to CA = \frac{3{,}69}{sen\ 37°} = 6{,}13\ \text{m}$$

Calculamos la longitud de la cuerda:

$8 + 4{,}82 + 6{,}13 = 18{,}95$ m

La cuerda mide 18,95 m.

067 ●●○ **Dos exploradores se han perdido y deciden seguir caminos distintos para conseguir ayuda. Para saber dónde está el otro en cada momento mantienen un rumbo fijo y sus trayectorias forman un ángulo de 54°. Si uno camina a 5 km/h y el otro lo hace a 4 km/h, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de 2 horas? ¿Y después de 6 horas?**

Después de 2 horas, los exploradores y el punto de origen forman un triángulo del que conocemos dos lados, de 10 y 8 km, respectivamente, y el ángulo comprendido es de 54°.

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado que falta:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\ \widehat{A} \to a^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot cos\ 54° \to a = 8{,}36$ km

Al cabo de 2 horas están a 8,36 km de distancia.

Después de 6 horas, los exploradores han recorrido 30 y 24 km, respectivamente.

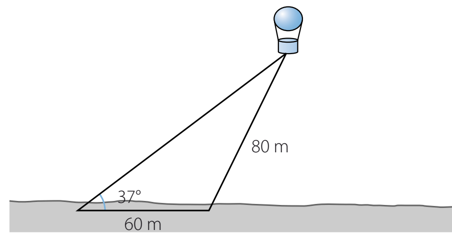
El triángulo formado es semejante al anterior, ya que están en posición de Tales.

Calculamos la distancia a la que se encuentran los exploradores:

$8{,}36 \cdot 3 = 25{,}08$ km

Después de 6 horas están a 25,08 km de distancia.

068 Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°.



Calcula.

a) La medida del otro cable.

b) La distancia del globo al suelo.

a) $\dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} = \dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \dfrac{60}{sen\,\widehat{C}} = \dfrac{80}{sen\,37°} \rightarrow sen\,\widehat{C} = 0{,}4514$

$\widehat{C} = 26°\ 49'\ 51{,}8''$ $\quad \widehat{B} = 180° - 26°\ 49'\ 51{,}8'' - 37° = 116°\ 10'\ 8{,}2''$

Aplicamos el teorema del seno para calcular la medida del otro cable:

$\dfrac{b}{sen\,\widehat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \dfrac{b}{sen\,116°\ 10'\ 8{,}2''} = \dfrac{80}{sen\,37°} \rightarrow b = 119{,}31$ m

La medida del otro cable es 119,31 m.

b) Calculamos la distancia del globo al suelo:

$sen\,37° = \dfrac{h}{119{,}31} \rightarrow h = 71{,}8$ m

El globo está a 71,8 m de altura.

069 Los segmentos que unen los vértices de un triángulo con su circuncentro dividen la circunferencia circunscrita en 3 partes.

a) Si el radio de dicha circunferencia mide 4 cm y dos de los arcos tienen una amplitud de 128° y 83°, ¿cuánto mide el otro arco?

b) Calcula la medida de los lados y los ángulos del triángulo.

a) Calculamos el tercer arco: $360° - 128° - 83° = 149°$

b) Tenemos tres triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm y los ángulos comprendidos miden 128°, 83° y 149°, respectivamente.

Aplicamos el teorema del coseno para calcular los lados del triángulo original:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A} \rightarrow a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot cos\,128° \rightarrow a = 7{,}19$ cm

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B} \rightarrow b^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot cos\,83° \rightarrow b = 5{,}3$ cm

$c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{C} \rightarrow c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot cos\,149° \rightarrow c = 7{,}71$ cm

Los lados del triángulo miden 7,19; 5,3 y 7,71 cm, respectivamente.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A}$

$\rightarrow cos\,\widehat{A} = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \dfrac{-51{,}7 + 28{,}09 + 59{,}44}{2 \cdot 5{,}3 \cdot 7{,}71} = 0{,}4384$

$\widehat{A} = 63°\ 59'\ 49{,}7''$

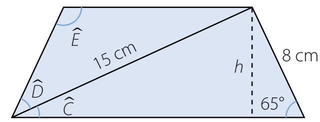
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B}$

$\rightarrow cos\,\widehat{B} = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \dfrac{-28{,}09 + 51{,}7 + 59{,}44}{2 \cdot 7{,}19 \cdot 7{,}71} = 0{,}749$

$\widehat{B} = 41°\ 29'\ 46{,}2''$

$\widehat{C} = 180° - 63°\ 59'\ 49{,}7'' - 41°\ 29'\ 46{,}2'' = 74°\ 30'\ 24{,}1''$

070 **Uno de los ángulos de un trapecio isósceles mide 65°, los lados iguales miden 8 cm y su diagonal es de 15 cm. Determina su área.**



Con el teorema del seno calculamos la base mayor:

$$\frac{8}{sen\,\widehat{C}} = \frac{15}{sen\,65°} \rightarrow sen\,\widehat{C} = 0{,}4834$$

$$\widehat{C} = 28°\ 54'\ 19{,}3''$$

$$\widehat{B} = 180° - 28°\ 54'\ 19{,}3'' - 65° = 86°\ 5'\ 40{,}7''$$

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,86°\ 5'\ 40{,}7''} = \frac{15}{sen\,65°} \rightarrow b = 16{,}51\text{ cm}$$

$$65° = \widehat{C} + \widehat{D} \rightarrow \widehat{D} = 65° - 28°\ 54'\ 19{,}3'' = 36°\ 5'\ 40{,}7''$$

La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°; por tanto, como el trapecio es isósceles, los otros dos ángulos iguales miden:

$$\widehat{E} = \frac{360° - 130°}{2} = 115°$$

Aplicamos el teorema del seno para calcular la base menor:

$$\frac{e}{sen\,\widehat{E}} = \frac{d}{sen\,\widehat{D}} = \frac{15}{sen\,115°} \rightarrow \frac{d}{sen\,36°\ 5'\ 40{,}74''} \rightarrow d = 9{,}75\text{ cm}$$

Hallamos la altura:

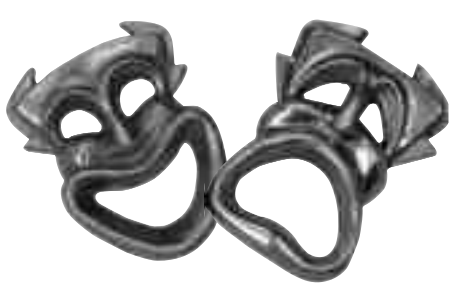
$$sen\,65° = \frac{h}{8} \rightarrow h = 7{,}25\text{ cm}$$

Calculamos el área del trapecio:

$$A = \frac{(d + b)h}{2} = 95{,}19\text{ cm}^2$$

El área del trapecio es 95,19 cm^2.

071 **El ancho de un escenario de teatro mide 8 m. Las localidades que hemos comprado están situadas a una distancia de 6 m y 12 m de cada uno de los extremos laterales del escenario. ¿Cuál es el ángulo de visión que tendremos para ver la representación?**



Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A} \rightarrow cos\,\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-64 + 36 + 144}{2 \cdot 6 \cdot 12} = 0{,}8056$$

$$\widehat{A} = 36°\ 19'\ 54{,}3''$$

Tendremos un ángulo de visión de 36° 19' 54,3".

072 A partir de las razones de 30°, 45° y 60° obtén, sin usar la calculadora, las razones de 75°, 105° y 15°. Comprueba luego los resultados con la calculadora.

$$sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30° \cdot cos\ 45° + cos\ 30° \cdot sen\ 45° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$
$$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30° \cdot cos\ 45° - sen\ 30° \cdot sen\ 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30° \cdot tg\ 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$
$$sen\ 105° = sen\ (45° + 60°) = sen\ 45° \cdot cos\ 60° + cos\ 45° \cdot sen\ 60° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$
$$cos\ 105° = cos\ (45° + 60°) = cos\ 45° \cdot cos\ 60° - sen\ 45° \cdot sen\ 60° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$
$$tg\ 105° = tg\ (45° + 60°) = \frac{tg\ 45° + tg\ 60°}{1 - tg\ 45° \cdot\ tg\ 60°} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$
$$sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45° \cdot cos\ 30° - cos\ 45° \cdot sen\ 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
$$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) = cos\ 45° \cdot cos\ 30° + sen\ 45° \cdot sen\ 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$
$$tg\ 15° = tg\ (45° - 30°) = \frac{tg\ 45° - tg\ 30°}{1 + tg\ 45° \cdot tg\ 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

073 Teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas las razones de ángulos conocidos, calcula las razones de los ángulos cuya amplitud es 7° 30' y 210°. Comprueba luego los resultados que has obtenido con la calculadora.

$$sen\ 7°\ 30' = sen\ \frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 15°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,9659}{2}} = 0,1305$$
$$cos\ 7°\ 30' = cos\ \frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 15°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,9659}{2}} = 0,9914$$

$$tg\ 7°\ 30' = tg\ \frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 15°}{1 + cos\ 15°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}9659}{1 + 0{,}9659}} = 0{,}1316$$

$$sen\ 210° = sen\ (2 \cdot 105°) = 2 \cdot sen\ 105° \cdot cos\ 105° =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -0{,}5$$

$$cos\ 210° = cos\ (2 \cdot 105°) = cos^2\ 105° - sen^2\ 105° =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 210° = tg\ (2 \cdot 105°) = \frac{2 \cdot tg\ 105°}{1 - tg^2\ 105°} = \frac{2(-2 - \sqrt{3})}{1 - (-2 - \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

074 Halla las razones de 67° 30', 195° y 52° 30'. Comprueba los resultados con la calculadora.

$$sen\ (67°\ 30') = sen\ (60° + 7°\ 30') = sen\ 60° \cdot cos\ 7°\ 30' + cos\ 60° \cdot sen\ 7°\ 30' =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}9914 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1305 = 0{,}9239$$

$$cos\ (67°\ 30') = cos\ (60° + 7°\ 30') = cos\ 60° \cdot cos\ 7°\ 30' - sen\ 60° \cdot sen\ 7°\ 30' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}9914 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}1305 = 0{,}3827$$

$$tg\ (67°\ 30') = tg\ (60 + 7°\ 30') = \frac{tg\ 60° + tg\ 7°\ 30'}{1 - tg\ 60° \cdot tg\ 7°\ 30'} = \frac{\sqrt{3} + 0{,}1316}{1 - \sqrt{3} \cdot 0{,}1316} = 2{,}4142$$

$$sen\ 195° = sen\ (210° - 15°) = sen\ 210° \cdot cos\ 15° - cos\ 210° \cdot sen\ 15° =$$

$$= -0{,}5 \cdot 0{,}9659 - (-0{,}8660) \cdot 0{,}2588 = -0{,}2588$$

$$cos\ 195° = cos\ (210° - 15°) = cos\ 210° \cdot cos\ 15° + sen\ 210° \cdot sen\ 15° =$$

$$= -0{,}8660 \cdot 0{,}9659 + (-0{,}5) \cdot 0{,}2588 = -0{,}9659$$

$$tg\ 195° = tg\ (210° - 15°) = \frac{tg\ 210° - tg\ 15°}{1 + tg\ 210° \cdot tg\ 15°} = \frac{0{,}5773 - 0{,}2679}{1 + 0{,}5773 \cdot 0{,}2679} = 0{,}2679$$

$$sen\ 52°\ 30' = sen\ \frac{105°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 105°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-0{,}2588)}{2}} = 0{,}7933$$

$$cos\ 52°\ 30' = cos\ \frac{105°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 105°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-0{,}2588)}{2}} = 0{,}6088$$

$$tg\ 52°\ 30' = tg\ \frac{105°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 105°}{1 + cos\ 105°}} = \sqrt{\frac{1 - (-0{,}2588)}{1 + (-0{,}2588)}} = 1{,}3032$$

075 Sabemos que *sen* 56° = 0,83 y *cos* 23° = 0,92.

a) Calcula el resto de razones de esos ángulos.
b) Halla las razones trigonométricas de 79°.
c) Determina las razones de 33°.
d) ¿Podrías hallar las razones de 28°?
e) ¿Y las de 46°?

a) $0{,}83^2 + \cos^2 56° = 1 \rightarrow \cos 56° = \sqrt{1 - 0{,}83^2} = 0{,}56$

$$\text{tg } 56° = \frac{0{,}83}{0{,}56} = 1{,}48$$

$\text{sen}^2\ 23° + 0{,}92^2 = 1 \rightarrow \text{sen } 23° = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39$

$$\text{tg } 23° = \frac{0{,}39}{0{,}92} = 0{,}42$$

b) $\text{sen } 79° = \text{sen } (56° + 23°) = \text{sen } 56° \cdot \cos 23° + \cos 56° \cdot \text{sen } 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 + 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}98$

$\cos 79° = \cos (56° + 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° - \text{sen } 56° \cdot \text{sen } 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 - 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}19$

$$\text{tg } 79° = \text{tg } (56° + 23°) = \frac{\text{tg } 56° + \text{tg } 23°}{1 - \text{tg } 56° \cdot \text{tg } 23°} = \frac{1{,}48 + 0{,}42}{1 - 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 5{,}02$$

c) $\text{sen } 33° = \text{sen } (56° - 23°) = \text{sen } 56° \cdot \cos 23° - \cos 56° \cdot \text{sen } 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 - 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}55$

$\cos 33° = \cos (56° - 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° + \text{sen } 56° \cdot \text{sen } 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 + 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}84$

$$\text{tg } 33° = \text{tg } (56° - 23°) = \frac{\text{tg } 56° - \text{tg } 23°}{1 + \text{tg } 56° \cdot \text{tg } 23°} = \frac{1{,}48 - 0{,}42}{1 + 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 0{,}65$$

d) $$\text{sen } 28° = \text{sen } \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}56}{2}} = 0{,}47$$

$$\cos 28° = \cos \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}56}{2}} = 0{,}88$$

$$\text{tg } 28° = \text{tg } \frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 56°}{1 + \cos 56°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}56}{1 + 0{,}56}} = 0{,}53$$

e) $\text{sen } 46° = \text{sen } (2 \cdot 23°) = 2 \cdot \text{sen } 23° \cdot \cos 23° = 2 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}92 = 0{,}72$

$\cos 46° = \cos (2 \cdot 23°) = \cos^2 23° - \text{sen}^2\ 23° = 0{,}92^2 - 0{,}39^2 = 0{,}69$

$$\text{tg } 46° = \text{tg } (2 \cdot 23°) = \frac{2 \cdot \text{tg } 23°}{1 - \text{tg}^2\ 23°} = \frac{2 \cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = 1{,}02$$

076 Obtén una fórmula simplificada de:

a) $\text{sen } (30° + \widehat{A})$
b) $\cos (\widehat{B} - 60°)$
c) $\text{tg } (45° - \widehat{C})$
d) $\cos (\widehat{D} + 30°)$

a) $sen\,(30° + \widehat{A}) = sen\,30° \cdot cos\,\widehat{A} + cos\,30° \cdot sen\,\widehat{A} = \frac{1}{2}\,cos\,\widehat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,\widehat{A} =$

$= \frac{1}{2}(cos\,\widehat{A} + \sqrt{3}\;\;sen\,\widehat{A})$

b) $cos\,(\widehat{B} - 60°) = cos\,\widehat{B} \cdot cos\,60° + sen\,\widehat{B} \cdot sen\,60° = \frac{1}{2}\,cos\,\widehat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,\widehat{B} =$

$= \frac{1}{2}(cos\,\widehat{B} + \sqrt{3}\;\;sen\,\widehat{B})$

c) $tg\,(45° - \widehat{C}) = \dfrac{1 - tg\,\widehat{C}}{1 + tg\,\widehat{C}}$

d) $cos\,(\widehat{D} + 30°) = cos\,\widehat{D} \cdot cos\,30° - sen\,\widehat{D} \cdot sen\,30° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,cos\,\widehat{D} - \frac{1}{2}\,sen\,\widehat{D} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\;\;cos\,\widehat{D} - sen\,\widehat{D})$

077 **Si $sen\,x = 0{,}6$ y $cos\,x = -0{,}8$; calcula las siguientes razones trigonométricas.**

a) $cos\,(x - \pi)$
b) $sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
c) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
d) $sen\,(x - \pi)$
e) $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
f) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Razona en qué cuadrante se encuentra cada uno de esos ángulos.

El ángulo x está en el 2.º cuadrante, ya que su seno es positivo y su coseno es negativo.

a) $cos\,(x - \pi) = -cos\,x = 0{,}8$

El ángulo está en el 4.º cuadrante.

b) $sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\,x = -0{,}8$

El ángulo está en el 3.er cuadrante.

c) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{tg\,x + tg\,\frac{\pi}{4}}{1 - tg\,x \cdot tg\,\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-0{,}75 + 1}{1 + 0{,}75} = 0{,}14$

El ángulo está en el 3.er cuadrante.

d) $sen\,(x - \pi) = -sen\,x = -0{,}6$

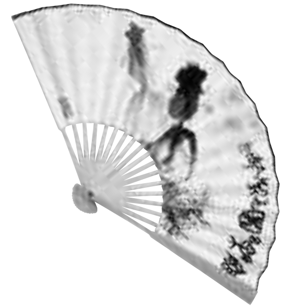
El ángulo está en el 4.º cuadrante.

e) $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cos\,x \cdot cos\,\frac{\pi}{4} + sen\,x \cdot sen\,\frac{\pi}{4} = -0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}99$

El ángulo está en el 3.er cuadrante.

f) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,x}{1 + tg\,\frac{\pi}{4} \cdot tg\,x} = \dfrac{1 + 0{,}75}{1 - 0{,}75} = 7$

El ángulo está en el 3.er cuadrante.



078 ●●○ El ángulo que se forma entre cada dos nervios de un abanico es de 15°. Si el abanico tiene cuatro nervios centrales, calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se forman al desplegarlo nervio a nervio.

Tenemos que calcular las razones trigonométricas de 15°, 30°, 45°, 60° y 75°.

Las razones de 30°, 45° y 60° son conocidas.

$$sen\ 15° = sen\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{2}} = 0{,}25$$

$$cos\ 15° = cos\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = 0{,}96$$

$$sen\ 75° = sen\ (45° + 30°) = sen\ 45° \cdot cos\ 30° + cos\ 45° \cdot sen\ 45° = 0{,}96$$

$$cos\ 75° = cos\ (45° + 30°) = cos\ 45° \cdot cos\ 30° - sen\ 45° \cdot sen\ 30° = 0{,}26$$

079 ●○○ Sabiendo que $sen\ x = \frac{2}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x.

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

a) Expresa los resultados utilizando radicales.

b) Explica cómo determinarías las razones de $\frac{\pi}{4}$ rad y $\frac{\pi}{3}$ rad.

Hallamos las razones trigonométricas de x:

$$cos\ x = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \qquad tg\ x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

a) y b) Las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ rad, 45° y $\frac{\pi}{3}$ rad, 60° son conocidas.

$$sen\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sen\ x \cdot cos\ \frac{\pi}{4} + cos\ x \cdot sen\ \frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{42}}{10}$$

$$tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{tg\ x - tg\ \frac{\pi}{3}}{1 + tg\ x \cdot tg\ \frac{\pi}{3}} = -\frac{8\sqrt{21} + 25\sqrt{3}}{9}$$

080 ●●○ Se sabe que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ y $tg\ x = \frac{3}{4}$.

a) Halla $sen\ x$ y $cos\ x$.

b) Determina, utilizando radicales, las razones de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$.

c) Sin determinar el ángulo *x*, calcula.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

d) Sin determinar el ángulo *x*, decide razonadamente en qué cuadrante están los ángulos.

$$x-\frac{\pi}{4} \qquad x+\frac{\pi}{6}$$

a) $\cos x=\sqrt{\dfrac{1}{1+0{,}75^2}}=-0{,}8 \qquad sen^2 x+0{,}8^2=1 \rightarrow sen\ x=\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$

b) $sen\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2} \qquad \cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\dfrac{\pi}{4}=1$

c) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+sen\ x\cdot sen\dfrac{\pi}{4}=-0{,}8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0{,}6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-0{,}7\sqrt{2}$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{tg\ x+tg\dfrac{\pi}{6}}{1-tg\ x\cdot tg\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

d) Como el seno del ángulo $x-\dfrac{\pi}{4}$ es positivo, el ángulo está en el 2.º cuadrante.

Y como la tangente del ángulo $x+\dfrac{\pi}{6}$ es positiva, el ángulo está en el 3.er cuadrante.

081 ●●●

Sabiendo que las razones de 32° son: *sen* 32° = 0,53 *cos* 32° = 0,848

a) Calcula las razones trigonométricas de 62°.

b) Halla las razones de 31°.

c) ¿Puedes medir cualquier ángulo cuya medida en grados no tenga minutos ni segundos?

a) $sen\ 62°=sen\ (32°+30°)=sen\ 32°\cdot\cos 30°+\cos 32°\cdot sen\ 30°=$

$=0{,}53\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0{,}848\cdot\dfrac{1}{2}=0{,}88$

$\cos 62°=\cos(32°+30°)=\cos 32°\cdot\cos 30°-sen\ 32°\cdot sen\ 30°=$

$=0{,}848\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0{,}53\cdot\dfrac{1}{2}=0{,}46$

$tg\ 62°=\dfrac{0{,}88}{0{,}46}=1{,}91$

b) $sen\ 31°=sen\dfrac{62°}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 62°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-0{,}46}{2}}=0{,}52$

$\cos 31°=\cos\dfrac{62°}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 62°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+0{,}46}{2}}=0{,}85$

$tg\ 31°=\dfrac{0{,}52}{0{,}85}=0{,}61$

c) Sí podemos calcular las razones de cualquier ángulo, ya que a partir de las medidas de 32° y de 31° hallamos las medidas de 1°, y a partir de ellas, las demás.

082

Expresa en función de la razón de un solo ángulo.

$$1+\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$$

$$1+\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$$

083

Demuestra que se verifican estas igualdades.

a) $1+\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)$

b) $\cos 2\alpha=2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°)$

a) $2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)=$

$$=2(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}45°)=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\alpha}{4}+\frac{4\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{4}+\frac{2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{4}\right)=$$
$$=\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=1+\operatorname{sen}2\alpha$$

b) $2\operatorname{sen}(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°)=$

$$=2(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}45°)=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\alpha}{4}-\frac{2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{4}\right)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos 2\alpha$$

084

Comprueba la siguiente relación entre las razones trigonométricas de un ángulo.

$$\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{\operatorname{tg}x}{2}$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=\frac{\operatorname{sen}x}{2\cos x}=\frac{\operatorname{tg}x}{2}$$

085

Demuestra que es cierta la igualdad.

$$\operatorname{sen}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

086 Simplifica la expresión: $\dfrac{2\cos(45° - \alpha)\cos(45° + \alpha)}{\cos 2\alpha}$

$$\frac{2\cos(45°-\alpha)\cos(45°+\alpha)}{\cos 2\alpha} =$$
$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\frac{2(\cos^2\alpha - sen^2\alpha)}{2}}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = 1$$

087 Busca una fórmula simplificada para calcular las razones del ángulo triple: $sen\,3\alpha$ y $\cos 3\alpha$. Comprueba el resultado obtenido para el ángulo $\alpha = 40°$.

$$sen\,3\alpha = sen\,(2\alpha + \alpha) = 2\,sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (\cos^2\alpha - sen^2\alpha)\,sen\,\alpha =$$
$$= 2\,sen\,\alpha \cdot \cos^2\alpha + sen\,\alpha \cdot \cos^2\alpha - sen^3\alpha = 3\,sen\,\alpha \cdot \cos^2\alpha - sen^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = (\cos^2\alpha - sen^2\alpha)\cos\alpha - 2\,sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot sen\,\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot sen^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot sen^2\alpha = -3\cos\alpha \cdot sen^2\alpha + \cos^3\alpha$$
$$sen\,120° = 3\,sen\,40° \cdot \cos^2 40° - sen^3 40° = 0{,}866$$
$$\cos 120° = -3\cos 40° \cdot sen^2 40° + \cos^3 40° = -0{,}5$$

088 Demuestra la siguiente igualdad: $sen\,\alpha\;sen\,(\alpha - \beta) + \cos\alpha\,\cos(\alpha - \beta) = \cos\beta$

$$sen\,\alpha\;sen\,(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) =$$
$$= sen\,\alpha\,(sen\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\,\beta) + \cos\alpha\,(\cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta) =$$
$$= sen^2\alpha \cdot \cos\beta - sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot sen\,\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot sen\,\beta =$$
$$= \cos\beta\,(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos\beta$$

089 Demuestra que se verifica la igualdad.

$$\frac{tg\,a + tg\,b}{tg\,a - tg\,b} = \frac{sen\,(a + b)}{sen\,(a - b)}$$

$$\frac{tg\,a + tg\,b}{tg\,a - tg\,b} = \frac{\frac{sen\,a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\cos a \cdot sen\,b}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{sen\,a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\cos a \cdot sen\,b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{sen\,a \cdot \cos b + \cos a \cdot sen\,b}{sen\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot sen\,b} = \frac{sen\,(a+b)}{sen\,(a-b)}$$

090 Comprueba, sustituyendo α por un ángulo conocido, que la siguiente igualdad es cierta.

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = \cos\alpha - sen\,\alpha\;tg\,\alpha$$

Demuestra que esta propiedad se cumple para cualquier ángulo α.

Elegimos el ángulo de 30°.

$$\frac{2\,sen\,30°}{tg\,2 \cdot 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos 30° - sen\,30° \cdot tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha}{\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}} = \frac{sen\,\alpha \cdot (1 - tg^2\alpha)}{tg\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha} - \frac{sen\,\alpha \cdot tg^2\alpha}{tg\,\alpha} =$$
$$= \cos\alpha - sen\,\alpha \cdot tg\,\alpha$$

091 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x \, tg\, x = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x + sen\, 2x = 1$

c) $\cos 2x - sen\, 2x = 0$

d) $sen\, 2x + \cos x = 1$

e) $sen\, 2x + sen\, 2x = 0$

f) $tg\, x + sen\, x = 0$

g) $tg\, x - sen\, 2x = 0$

h) $\frac{sen\,(60° - x)}{\cos x} = 1$

i) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\, x - 1 = 0$

j) $sen\,(x + 30°) + \cos\,(x + 60°) = 1 + \cos 2x$

a) $\cos x\, tg\, x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\, x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $\cos 2x + sen\, 2x = 1 \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x + 2\, sen\, x \cdot \cos x = \cos^2 x + sen^2 x$

$\rightarrow -2\, sen^2 x + 2\, sen\, x \cdot \cos x = 0 \rightarrow 2\, sen\, x\,(-sen\, x + \cos x) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$sen\, x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $\cos 2x - sen\, 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = sen\, 2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180° \cdot k \end{cases}$

d) $sen\, 2x + \cos x = (2\, sen\, x + 1) \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k & x_3 = 210° + k \cdot 360° \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k & x_4 = 330° + k \cdot 360° \end{cases}$

e) $sen\, 2x + sen\, 2x = 0 \rightarrow 2\, sen\, 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 180° \cdot k \end{cases}$

f) $tg\, x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\frac{1}{\cos x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180° + 360° \cdot k$

g) $tg\, x - sen\, 2x = 0 \rightarrow \frac{sen\, x}{\cos x} - 2\, sen\, x \cdot \cos x = 0 \rightarrow sen\, x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$1 - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45° + 360° \cdot k$

h) $\frac{sen\,(60° - x)}{\cos x} = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}\, \cos x - sen\, x}{2 \cos x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\, x = 2$

$\rightarrow tg\, x = -0{,}2679 \rightarrow x = 345° + 360° \cdot k$

i) $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+tg\,x-1=0 \rightarrow \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}+tg\,x-1=0$

$\rightarrow tg^2\,x-tg\,x=0 \rightarrow tg\,x(tg\,x-1)=0$

$tg\,x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0°+360°\cdot k \\ x_2=180°+360°\cdot k \end{cases}$

$tg\,x-1=0 \rightarrow tg\,x=1 \rightarrow \begin{cases} x_1=45°+360°\cdot k \\ x_2=225°+360°\cdot k \end{cases}$

j) $sen\,(x+30°)+cos\,(x+60°)=1+cos\,2x$

$\rightarrow \frac{\sqrt{3}\ sen\ x}{2}+\frac{cos\ x}{2}+\frac{cos\ x}{2}-\frac{\sqrt{3}\ sen\ x}{2}=$

$=cos^2\,x+sen^2\,x+cos^2\,x-sen^2\,x \rightarrow cos\,x=2\,cos^2\,x \rightarrow cos\,x(2\,cos\,x-1)=0$

$cos\,x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=90°+360°\cdot k \\ x_2=270°+360°\cdot k \end{cases}$

$2\,cos\,x-1=0 \rightarrow cos\,x=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=60°+360°\cdot k \\ x_2=300°+360°\cdot k \end{cases}$

092 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.**

a) $\left.\begin{array}{l} sen^2\ x+sen^2\ y=1 \\ cos^2\ x-cos^2\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ cos\ x=\frac{1}{2\ cos\ y}+sen\ x\cdot tg\ y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen^2\ x+sen^2\ y=1 \\ cos^2\ x-cos^2\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} sen^2\ x=1-sen^2\ y=cos^2\ y \\ cos^2\ x-sen^2\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

$cos\ 2x=\frac{1}{2} \rightarrow x=30°+180°\cdot k$

$cos^2\,y=sen^2\,30° \rightarrow cos\,y=\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow y=60°+180°\cdot k$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ cos\ x=\frac{1}{2\ cos\ y}+sen\ x\cdot tg\ y \end{array}\right\} \xrightarrow{x=120°-y} cos\ (120°-y)=$

$=\frac{1}{2\ cos\ y}+sen\ (120°-y)\ tg\ y$

$-cos^2\,y+\sqrt{3}\ sen\,y\cdot cos\,y=1+\sqrt{3}\ sen\,y\cdot cos\,y-sen^2\,y$

$\rightarrow cos^2\,y-sen^2\,y=1 \rightarrow cos\,2y=-1 \rightarrow y=90°+180°\cdot k$

$x=120°-y=120°-90°-180°\cdot k=30°-180°\cdot k$

093 Resuelve las ecuaciones trigonométricas.

a) $4\,sen\,x - sec\,x = 0$

b) $\dfrac{cos^2\,x}{2\,cos\,x + sen\,x} = sen\,x$

c) $\dfrac{1}{cos\,x + sen\,x} + 2\,sen\,x = 2\,cos\,x$

d) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 5\,cos^2\,x - 4$

e) $2\,cos\,x - 1 = sec\,x$

f) $2\,cos\,x + sen\,x = 1$

g) $sen\,x + cos\,x = 0$

a) $4\,sen\,x - sec\,x = 0 \rightarrow 4\,sen\,x \cdot cos\,x - 1 = 0 \rightarrow 2\,sen\,2x = 1 \rightarrow sen\,2x = \dfrac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 75° + 180° \cdot k \end{cases}$$

b) $\dfrac{cos^2\,x}{2\,cos\,x + sen\,x} = sen\,x \rightarrow cos^2\,x = 2\,cos\,x \cdot sen\,x + sen^2\,x \rightarrow cos\,2x = sen\,2x$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180° \cdot k \end{cases}$$

c) $\dfrac{1}{cos\,x + sen\,x} + 2\,sen\,x = 2\,cos\,x \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x \cdot cos\,x + 2\,sen^2\,x}{2\,cos^2\,x + 2\,sen\,x \cdot cos\,x} = 1$

$$\rightarrow \frac{sen\,x(cos\,x + sen\,x)}{cos\,x(cos\,x + sen\,x)} = 1 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 5\,cos^2\,x - 4 \rightarrow sen^2\,x - sen\,x = 5(1 - sen^2\,x) - 4$

$6\,sen^2\,x - sen\,x - 1 = 0$

$$\rightarrow sen\,x = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 340°\ 31'\ 44'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 199°\ 28'\ 16'' + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$$

e) $2\,cos\,x - 1 = sec\,x \rightarrow 2\,cos^2\,x - cos\,x - 1 = 0$

$$\rightarrow cos\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$$

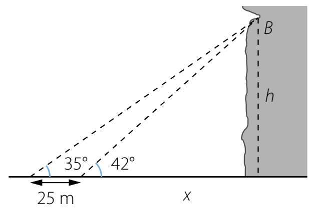
$$\rightarrow cos\,x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120° + 360° \cdot k \\ x_2 = 240° + 360° \cdot k \end{cases}$$

f) $2\,cos\,x + sen\,x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - cos^2\,x} = 1 - 2\,cos\,x \rightarrow 5\,cos^2\,x - 4\,cos\,x = 0$

$$\rightarrow cos\,x(5\,cos\,x - 4) = 0 \rightarrow cos\,x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 323°\ 7'\ 48{,}4'' + 360° \cdot k \end{cases}$$

g) $sen\,x + cos\,x = 0 \rightarrow sen\,x = -cos\,x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360° \cdot k \\ x_2 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

094 Observa la situación y, con ayuda de la trigonometría, calcula la altura *h* a la que está el punto *B*.

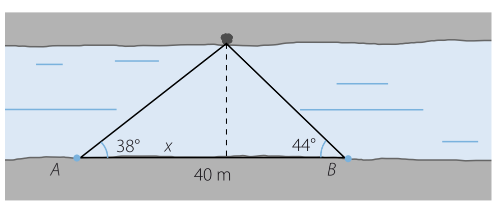


Llamamos *h* a la altura a la que está *B*.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{25+x} \\ tg\ 42° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}11h} h = 17{,}51 + 0{,}63h \rightarrow h = 47{,}38 \text{ m}$$

El punto *B* está a una altura de 47,38 m.

095 Dos amigos están separados por una distancia de 40 metros y ven un árbol en la orilla opuesta de un río, como indica la figura. Calcula la anchura del río.



Llamamos *h* a la anchura del río.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 38° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 44° = \dfrac{h}{40-x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}28h} 38{,}63 - 1{,}24h = h \rightarrow h = 17{,}25 \text{ m}$$

La anchura del río es 17,25 m.

096 Un mástil se sujeta al suelo por dos cables de acero que forman ángulos de 43° y 57° 50', respectivamente. Si las distancias de los cables al pie del mástil suman 15 m, ¿cuál es la altura del mástil?

Llamamos *h* a la altura del mástil.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 43° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 57°\ 50' = \dfrac{h}{15-x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}07h} 23{,}85 - 1{,}7h = h \rightarrow h = 8{,}83 \text{ m}$$

La altura del mástil es 8,83 m.

097 ●●○

Sabiendo que el área de un triángulo rectángulo es 28 cm² y que uno de sus ángulos mide 60°:

a) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

b) Calcula la longitud de sus lados y su perímetro.

a) El ángulo desconocido mide: $90° - 60° = 30°$

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{56}{a}}{a} \rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{tg\ 30°}} = 9{,}85 \text{ cm}$$

$b = 5{,}68$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

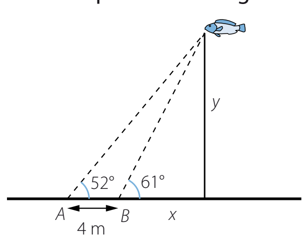
$$c = \sqrt{9{,}85^2 + 5{,}68^2} = 11{,}37 \text{ cm}$$

Los lados miden 11,37; 5,68 y 9,85 cm.

El perímetro es 26,9 cm.

098 ●●●

Dos personas han ido a pescar y están colocadas en la orilla a una distancia de 4 m entre sí, por lo que ven saltar un pez con los ángulos que indica la figura.



¿Qué cantidad de sedal necesita cada uno para lanzar el anzuelo hasta el lugar donde saltó el pez?

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52° = \dfrac{y}{x+4} \\ tg\ 61° = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 1{,}8x} 1{,}28x + 5{,}12 = 1{,}8x \rightarrow x = 9{,}84 \rightarrow y = 17{,}75$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador A:

$9{,}84 + 4 = 13{,}84$

$$a = \sqrt{13{,}84^2 + 17{,}75^2} = 22{,}51 \text{ m}$$

El pescador A necesita 22,51 m de sedal.

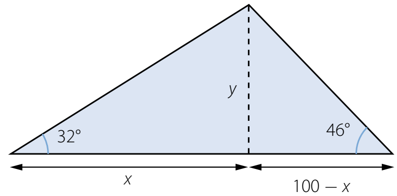
Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador B:

$$a = \sqrt{9{,}84^2 + 17{,}75^2} = 20{,}3 \text{ m}$$

El pescador B necesita 20,3 m de sedal.

099

Dos focos situados en el suelo y en lados distintos, iluminan el campanario de una iglesia. La suma de las distancias de los focos hasta el pie de la torre es de 100 m. Si los ángulos que forman los haces de luz con el suelo son 32° y 46°, respectivamente, ¿qué altura tiene el campanario?



Llamamos y a la altura del campanario.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 46° = \dfrac{y}{100 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}64} 103{,}55 - 1{,}66y = y \rightarrow y = 38{,}93 \text{ m}$$

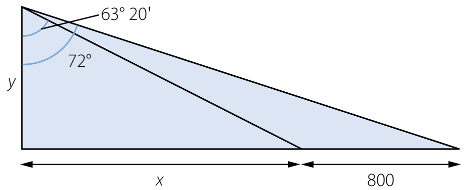
La altura del campanario es 38,93 m.

100

En una colina se ven, en línea recta hacia el Este, dos barrios que están separados por 800 metros. Desde la cima, se observan con ángulos de 18° y 26° 40', respectivamente.

a) ¿Cuál es la altura de la colina?

b) ¿A qué distancia se encuentra cada barrio del observador?



a) Llamamos y a la altura de la colina.

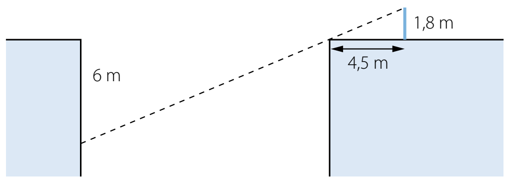
$90° - 18° = 72°$ $\qquad$ $90° - 26° 40' = 63° 20'$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 72° = \dfrac{x + 800}{y} \\ tg\ 63°\ 20' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}99y} 3{,}08y = 1{,}99y + 800 \rightarrow y = 735{,}94 \text{ m}$$

b) $x = 199y = 1.504{,}42$ m $\qquad$ $800 + x = 2.304{,}42$ m

La distancia del observador a cada barrio es 1.674,78 m y 2.419,18 m, respectivamente.

101 Esther y María desean medir la anchura de un desfiladero. Para ello se colocan en uno de los bordes del mismo. Esther deja deslizarse una cuerda que tiene 6 m de largo, sosteniéndola desde el borde del precipicio. Por su parte, María, cuyos ojos se hallan a 1,8 m del suelo, debe retirarse 4,5 m para ver el borde más próximo coincidiendo con el final de la cuerda.



a) ¿Qué anchura tiene?

b) ¿Se podría calcular sin hacer uso de la trigonometría?

Llamamos x a la anchura del desfiladero.

$$tg\ a = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$$

$$0,4 = \frac{6}{x} \rightarrow x = 15 \text{ m}$$

a) La anchura del desfiladero es 15 m.

b) Se podría aplicar la semejanza de triángulos para resolver el problema.

102 Antonio mide 1,70 m y observa que su sombra es de 50 cm a cierta hora del día. ¿Con qué inclinación llegan los rayos solares a esa hora?

$$tg\ a = \frac{1,7}{0,5} = 3,4 \rightarrow a = 73°\ 36'\ 37,7''$$

Los rayos solares llegan con una inclinación de 73° 36' 37,7''.

103 Una casa de planta rectangular mide 12 metros de largo y 8 metros de ancho. El tejado, con una inclinación de 18°, es una superficie plana inclinada cuya parte más elevada está situada sobre uno de los lados mayores del rectángulo. Calcula el área del tejado.

Como sabemos que el tejado tiene forma rectangular y que uno de sus lados mide 12 m, hallamos la longitud del otro lado, x.

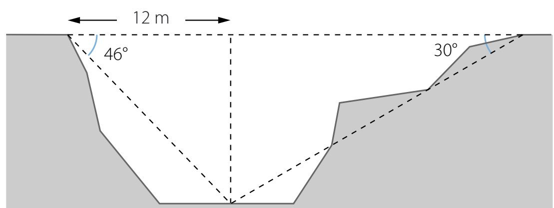
$$\cos 18° = \frac{8}{x} \rightarrow x = 8{,}41 \text{ m}$$

Calculamos el área del tejado:

$$A = 12 \cdot 8{,}41 = 100{,}92 \text{ m}^2$$

El área del tejado es 100,92 m².

104 Para construir un viaducto se han tomado estas medidas.



a) ¿Qué longitud tendrá el viaducto?
b) ¿Cuál es la altura máxima de los pilares que lo sujetan?

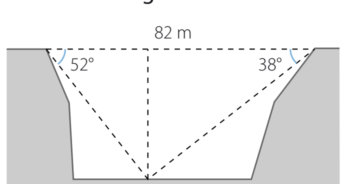
Llamamos x a la longitud del viaducto e y es su altura máxima.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 46° = \dfrac{y}{12} \\ tg\ 30° = \dfrac{y}{x - 12} \end{array}\right\} \rightarrow y = 12{,}43 \text{ m} \rightarrow x = 33{,}53 \text{ m}$$

a) La longitud del viaducto es 33,53 m.

b) La altura máxima de los pilares es 12,43 m.

105 Calcula la altura a la que caminan los viajeros cuando cruzan un desfiladero por un puente colgante como el de la figura.



Llamamos y a la altura del puente colgante.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 38° = \dfrac{y}{82 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0{,}78y} 64{,}07 - 0{,}61y = y \rightarrow y = 39{,}8 \text{ m}$$

La altura del puente colgante es 39,8 m.

106 Sabiendo que x es un ángulo del 2.° cuadrante y que $tg\,x = -0{,}5322$ determina, sin calcular el ángulo x:

a) $sen\,2x$

b) $cos\left(90° - \dfrac{x}{2}\right)$

a) $cos\,x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + tg^2\,x}} \rightarrow cos\,x = -0{,}8828$

$sen^2\,x + (-0{,}8828)^2 = 1 \rightarrow sen\,x = \sqrt{1 - 0{,}7793} = 0{,}4698$

$sen\,2x = 2\,sen\,x \cdot cos\,x = 2 \cdot (-0{,}8828) \cdot 0{,}4698 = -0{,}8295$

b) $cos\left(90° - \dfrac{x}{2}\right) = sen\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}8828}{2}} = 0{,}9703$

107 Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual que su producto.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

$a + b + c = 180°$

$tg\,c = tg\,[180° - (a + b)] = -tg\,(a + b) = -\dfrac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$

Por tanto, la suma de las tangentes es:

$tg\,a + tg\,b + tg\,c = tg\,a + tg\,b - \dfrac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$

$tg\,c = -\dfrac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b} \rightarrow tg\,c(1 - tg\,a \cdot tg\,b) = -tg\,a - tg\,b$

$\rightarrow tg\,c - tg\,a \cdot tg\,b \cdot tg\,c = -tg\,a - tg\,b$

$\rightarrow tg\,a + tg\,b + tg\,c = tg\,a \cdot tg\,b \cdot tg\,c$

108 Las medidas de los lados de un triángulo son proporcionales a 5, 6 y 7, respectivamente y su área es $24\sqrt{6}$. Determina la medida de sus lados y de sus ángulos.

Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y sus ángulos son iguales. Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\widehat{A} \rightarrow cos\,\widehat{A} = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \dfrac{-49 + 36 + 25}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0{,}2$

$\widehat{A} = 78°\ 27'\ 46{,}9''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B} \rightarrow cos\,\widehat{B} = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \dfrac{-36 + 49 + 25}{2 \cdot 7 \cdot 5} = 0{,}5429$

$\widehat{B} = 57°\ 7'\ 7{,}42''$

$\widehat{C} = 180° - 78°\ 27'\ 46{,}9'' - 57°\ 7'\ 7{,}42'' = 44°\ 25'\ 5{,}68''$

Para hallar la longitud de los lados aplicamos la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

$a = 5t; b = 6t; c = 7t; p = \dfrac{5t + 6t + 7t}{2} = \dfrac{18t}{2} = 9t$

$24\sqrt{6} = \sqrt{9t(9t - 7t)(9t - 6t)(9t - 5t)} \rightarrow 3{,}456 = 9t \cdot 2t \cdot 3t \cdot 4t \rightarrow t = 2$

Los lados miden 10, 12 y 14, respectivamente.

109 Comprueba que la siguiente fórmula se cumple si $\widehat{A}$ mide 45°.

$$sen^2\left(\frac{\widehat{A}+30°}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}\cos 30°+\sqrt{2}\,sen\,30°}{4}$$

Demuestra que es una igualdad que solo se cumple para otro valor de $\widehat{A}$. Encuéntralo.

$$sen^2\left(\frac{45°+30°}{2}\right)=0{,}3706$$

$$\frac{2-\sqrt{2}\cos 30°+\sqrt{2}\,sen\,30°}{4}=0{,}3706$$

$$sen^2\left(\frac{\widehat{A}+30}{2}\right)=\frac{1-\cos(\widehat{A}+30°)}{2}=\frac{1-\cos\widehat{A}\cdot\cos 30°+sen\,\widehat{A}\cdot sen\,30°}{2}$$

$$\frac{1-\cos\widehat{A}\cdot\cos 30°+sen\,\widehat{A}\cdot sen\,30°}{2}=\frac{2-\sqrt{2}\cos 30°+\sqrt{2}\,sen\,30°}{4}$$

$$\frac{-\sqrt{3}\cos\widehat{A}+\sqrt{1-\cos^2\widehat{A}}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

$$4\cos^2\widehat{A}+(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos\widehat{A}+\sqrt{3}+1=0$$

$$\begin{cases}\widehat{A}_1=45°+360°\cdot k\\ \widehat{A}_2=165°+360°\cdot k\end{cases}$$

110 Obtén la relación que existe entre el lado de un pentágono regular y el radio de la circunferencia donde se halla inscrito.

En el pentágono regular se pueden formar cinco triángulos isósceles cuyo lado desigual coincide con el lado del pentágono y los lados iguales son radios de la circunferencia.

El ángulo opuesto al lado desigual mide 72° y los otros dos ángulos miden 54°.

Llamamos a al lado desigual y r al radio.

$$tg\,54°=\frac{r}{\frac{a}{2}}\rightarrow a=\frac{2r}{tg\,54°}$$

111 En un triángulo rectángulo se verifica también el teorema del seno. Averigua si esto nos da información adicional sobre los elementos de ese triángulo.

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}}=\frac{b}{sen\,\widehat{B}}=\frac{c}{sen\,\widehat{C}}$$

Como $\widehat{A}$ es un ángulo recto y $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos complementarios:

$$a=\frac{b}{sen\,\widehat{B}}=\frac{c}{\cos\widehat{C}}\rightarrow\begin{cases}b=a\,sen\,\widehat{B}\\ c=a\cos\widehat{C}\end{cases}$$

Obtenemos que los catetos son proyecciones de la hipotenusa.

112 El teorema del coseno tiene tres enunciados, uno para cada lado del triángulo. Si el triángulo es rectángulo y *a* es la hipotenusa, la fórmula del teorema del coseno que empieza por *a* es, realmente, el teorema de Pitágoras. Investiga si los otros dos enunciados nos dan alguna propiedad nueva del triángulo.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{c}{a} \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C} \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{b}{a} \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Se da el cateto desconocido en función del otro cateto y la hipotenusa.

Además, si sumamos las dos primeras ecuaciones resulta:

$$b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(c \cos \widehat{B} - b \cos \widehat{C})$$

$$a = c \cos \widehat{B} - b \cos \widehat{C}$$

113 Sabemos que $tg\ z = 1{,}5$. Con estos datos, ¿puedes calcular $tg\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ sin determinar el ángulo *z*?

Si aplicas la fórmula del ángulo suma tendrás dificultades. Utiliza esta expresión.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

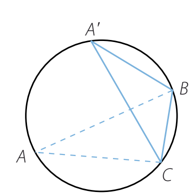
$$tg\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = tg\left(\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 - tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}}{1 - \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}} =$$

$$= \frac{2}{-2\ tg\ z} = -cotg\ z$$

114 Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden igual. Utilízalo para demostrar que:

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

siendo *d* el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



El triángulo $\widehat{CBA}'$ es recto por ser uno de sus lados el diámetro de la circunferencia. Los lados opuestos a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son iguales.

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$ son iguales por abarcar el mismo arco, luego sus senos son iguales.

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{A}'} = \frac{a}{\frac{a}{d}} = d$$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = d$$

PARA FINALIZAR…

115 **¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $sen\, x \cos x = k$?**

Acota las posibles soluciones.

$sen\, x \cdot \cos x = k \rightarrow 2\, sen\, x \cdot \cos x = 2k \rightarrow sen\, 2x = 2k$

Como $sen\, x < |1| \rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$

Las soluciones estarán acotadas en [0°, 180°] + 180° · k.

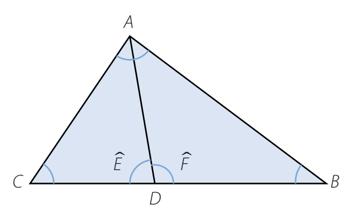
116 **Demuestra que la bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$, en el triángulo $\widehat{ABC}$, divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados AB y AC.**

Llamamos D al punto de corte de la bisectriz con el lado CB.

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{CD}{sen\, \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\, \widehat{C}} = \frac{AC}{sen\, \widehat{E}} \rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{sen\, \frac{\widehat{A}}{2}}{sen\, \widehat{E}}$$

$$\frac{DB}{sen\, \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\, \widehat{B}} = \frac{AB}{sen\, \widehat{F}} \rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{sen\, \frac{\widehat{A}}{2}}{sen\, \widehat{F}}$$



Como los ángulos son suplementarios, sus senos son iguales.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

117 **Demuestra que la suma del seno y el coseno de un ángulo es siempre menor o igual que el doble del seno de $\frac{\pi}{4}$ radianes.**

¿Para qué ángulos se verifica la igualdad?

Suponemos $sen\, x + \cos x > 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \rightarrow 2\, sen^2 x - 2\sqrt{2}\;\; sen\, x + 1 < 0$

El discriminante de esta ecuación es cero, y salvo la igualdad, siempre es positivo o siempre es negativo; en este caso siempre es positivo, lo que contradice la hipótesis. Es decir: $sen\, x + \cos x \leq \sqrt{2}$

La igualdad se verifica para:

$$sen\, x + \sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{2} \rightarrow 2\, sen^2 x - 2\sqrt{2}\;\; sen\, x + 1 = 0$$

$$\rightarrow sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = 45° + 360° \cdot k$

118 **Averigua el perímetro y el área de un polígono regular de radio *r* y *n* lados.**

Dividimos el polígono en triángulos isósceles, y llamamos r a los lados iguales y l al lado desigual.

Si el polígono tiene n lados, los ángulos iguales de los triángulos miden: $90° - \frac{180°}{n}$

Relacionamos el radio de la circunferencia circunscrita con el lado del polígono utilizando el coseno de este ángulo:

$$\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{r} \rightarrow l = 2r\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$$

Relacionamos la apotema del polígono, altura del triángulo, con el radio utilizando el seno del ángulo:

$$\operatorname{sen}\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = \frac{a_p}{r} \rightarrow a_p = r\operatorname{sen}\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$$

Por tanto, el perímetro mide: $2r \cdot n\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$

Calculamos el área:

$$A = r \cdot n\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right) \cdot r\operatorname{sen}\left(90° - \frac{180°}{n}\right) =$$
$$= r^2 \cdot n\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$$

119 **En un triángulo equilátero de lado *l* se han trazado las circunferencias inscrita y circunscrita. Calcula la altura del triángulo y la medida de los radios de ambas circunferencias en función de *l*.**

Aplicamos el teorema de Pitágoras para expresar la altura en función del lado del triángulo:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Llamamos R y r a los radios de las circunferencias mayor y menor, respectivamente.

Consideramos el triángulo que forman los radios con la mitad del lado.
Este triángulo es semejante con el triángulo que resulta al dividir el triángulo equilátero por una bisectriz.

Por tanto, los ángulos de este triángulo son 30°, 60° y 90°.

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}\,R}{3}$$

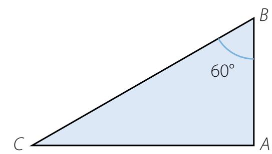
La altura del triángulo es la suma de los radios de las circunferencias.

$$R + r = \frac{\sqrt{3}}{2}l \rightarrow R + \frac{\sqrt{3}\,R}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}l \rightarrow R = \frac{3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}l = \frac{-3+3\sqrt{3}}{4}l$$

$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{4}l$$

120 En un triángulo $\widehat{ABC}$, se cumplen estas condiciones:

- El lado BC mide el doble que el lado AB.
- El ángulo $\widehat{B}$ mide 60°.



Halla los otros dos ángulos.

Llamamos a al lado BC y c al lado AB, y se tiene que $a = 2c$.

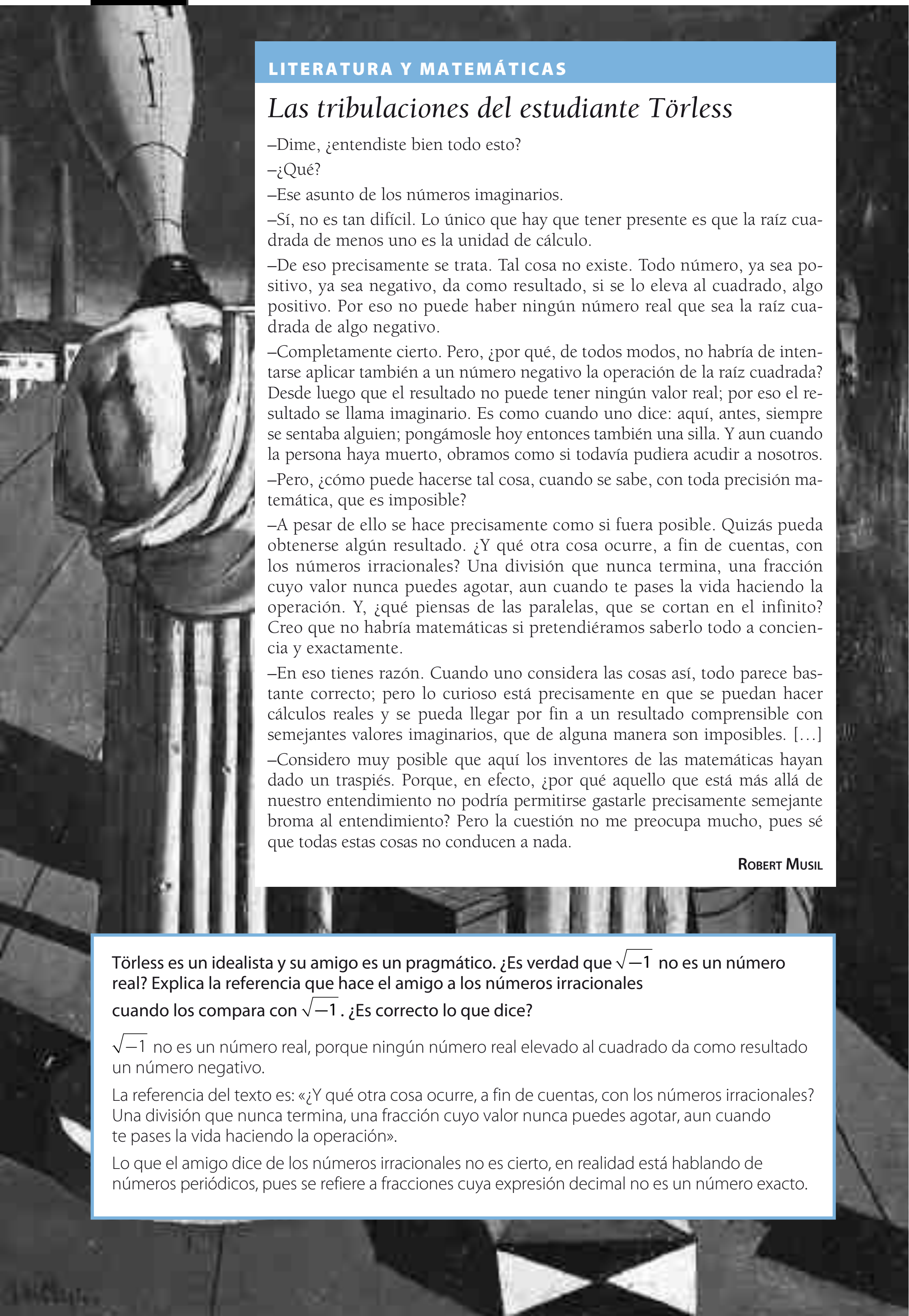
Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b^2 = (2c)^2 + c^2 - 4c^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow b^2 = 3c^2 \rightarrow b = \sqrt{3}\, c$$

Utilizamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{\sqrt{3}c}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{\sqrt{3}c}{2\sqrt{3}c} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{C} = 30° \rightarrow A = 90°$$

4 Números complejos



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Las tribulaciones del estudiante Törless

–Dime, ¿entendiste bien todo esto?

–¿Qué?

–Ese asunto de los números imaginarios.

–Sí, no es tan difícil. Lo único que hay que tener presente es que la raíz cuadrada de menos uno es la unidad de cálculo.

–De eso precisamente se trata. Tal cosa no existe. Todo número, ya sea positivo, ya sea negativo, da como resultado, si se lo eleva al cuadrado, algo positivo. Por eso no puede haber ningún número real que sea la raíz cuadrada de algo negativo.

–Completamente cierto. Pero, ¿por qué, de todos modos, no habría de intentarse aplicar también a un número negativo la operación de la raíz cuadrada? Desde luego que el resultado no puede tener ningún valor real; por eso el resultado se llama imaginario. Es como cuando uno dice: aquí, antes, siempre se sentaba alguien; pongámosle hoy entonces también una silla. Y aun cuando la persona haya muerto, obramos como si todavía pudiera acudir a nosotros.

–Pero, ¿cómo puede hacerse tal cosa, cuando se sabe, con toda precisión matemática, que es imposible?

–A pesar de ello se hace precisamente como si fuera posible. Quizás pueda obtenerse algún resultado. ¿Y qué otra cosa ocurre, a fin de cuentas, con los números irracionales? Una división que nunca termina, una fracción cuyo valor nunca puedes agotar, aun cuando te pases la vida haciendo la operación. Y, ¿qué piensas de las paralelas, que se cortan en el infinito? Creo que no habría matemáticas si pretendiéramos saberlo todo a conciencia y exactamente.

–En eso tienes razón. Cuando uno considera las cosas así, todo parece bastante correcto; pero lo curioso está precisamente en que se puedan hacer cálculos reales y se pueda llegar por fin a un resultado comprensible con semejantes valores imaginarios, que de alguna manera son imposibles. […]

–Considero muy posible que aquí los inventores de las matemáticas hayan dado un traspiés. Porque, en efecto, ¿por qué aquello que está más allá de nuestro entendimiento no podría permitirse gastarle precisamente semejante broma al entendimiento? Pero la cuestión no me preocupa mucho, pues sé que todas estas cosas no conducen a nada.

ROBERT MUSIL

Törless es un idealista y su amigo es un pragmático. ¿Es verdad que $\sqrt{-1}$ no es un número real? Explica la referencia que hace el amigo a los números irracionales cuando los compara con $\sqrt{-1}$. ¿Es correcto lo que dice?

$\sqrt{-1}$ no es un número real, porque ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo.

La referencia del texto es: «¿Y qué otra cosa ocurre, a fin de cuentas, con los números irracionales? Una división que nunca termina, una fracción cuyo valor nunca puedes agotar, aun cuando te pases la vida haciendo la operación».

Lo que el amigo dice de los números irracionales no es cierto, en realidad está hablando de números periódicos, pues se refiere a fracciones cuya expresión decimal no es un número exacto.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Pon tres ejemplos de números reales que no sean racionales, y otros tres ejemplos de números reales que no sean irracionales.**

Respuesta abierta.

Tres números reales que no sean racionales: $\sqrt{2}$, π y $\sqrt{3}$

Tres números reales que no sean irracionales: 1, 2 y 3

002 **Calcula las raíces reales de los siguientes radicales.**

a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-1}$ **d)** $\sqrt[5]{32}$ **e)** $\sqrt[5]{0}$

a) $\sqrt{16} = \pm 4$

b) $\sqrt[4]{-16} \rightarrow$ No tiene raíces reales.

c) $\sqrt[3]{-1} = -1$

d) $\sqrt[5]{32} = 2$

e) $\sqrt[5]{0} = 0$

003 **Resuelve:** $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

004 **Expresa en radianes estos ángulos.**

a) 45° **b)** 60° **c)** 120° **d)** 240° **e)** 300°

a) $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $60° = \frac{\pi}{3}$ rad

c) $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

d) $240° = \frac{4\pi}{3}$ rad

e) $300° = \frac{5\pi}{3}$ rad

005 **Expresa en grados los ángulos.**

a) $\frac{\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{\pi}{2}$ rad **c)** π rad **d)** $\frac{5\pi}{4}$ rad **e)** $\frac{3\pi}{5}$ rad

a) $\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

b) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

c) π rad $= 180°$

d) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

e) $\frac{3\pi}{5}$ rad $= 108°$

006 **Calcula:** $\left(\mathit{sen}\ 45° - \frac{\cos 180° - \mathit{tg}\ 30°}{\mathit{sen}\ 60°}\right)(\cos 30° - \mathit{sen}\ 90°)$

$$\left(\mathit{sen}\ 45° - \frac{\cos 180° - \mathit{tg}\ 30°}{\mathit{sen}\ 60°}\right)\left(\cos 30° - \mathit{sen}\ 90°\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3} - 2}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}$$

007 Determina el signo del seno, el coseno y la tangente de estos ángulos.

a) 150° b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 240° d) −60° e) $\frac{2\pi}{3}$

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
150°	+	−	−
$\frac{3\pi}{2}$	−	0	No existe
240°	−	−	+
−60°	−	+	−
$\frac{2\pi}{3}$	+	−	−

ACTIVIDADES

001 Escribe estos números como números complejos.

a) $\sqrt{-3}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) 3 d) −3

a) $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$

b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{4i} = 2\sqrt{i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

c) $3 = 3 + 0i$

d) $-3 = -3 + 0i$

002 Resuelve las siguientes ecuaciones, y expresa sus soluciones como números complejos.

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 3\cdot 2}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{6} \to \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}\,i}{6} \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}\,i}{6} \end{cases}$$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \to \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$$

003 Escribe dos números complejos cuya parte real sea −1, y otros dos cuya parte imaginaria sea −1.

Dos números complejos cuya parte real sea −1: $-1 + i$ y $-1 + 2i$.

Dos números complejos cuya parte imaginaria sea −1: $1 - i$ y $2 - i$.

004 Determina x e y para que estos números complejos sean iguales.

a) $-2x + 3i$ y $\frac{3}{2} - 2yi$ b) $-x + yi$ y $7 - 6i$

a) $-2x + 3i = \frac{3}{2} - 2yi \rightarrow \begin{cases} -2x = \frac{3}{2} \rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ 3 = -2y \rightarrow y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

b) $-x + yi = 7 - 6i \rightarrow \begin{cases} -x = 7 \rightarrow x = -7 \\ y = -6 \end{cases}$

005 Dado el número complejo $z = -2x + \frac{y}{2}i$, determina el valor de x e y para que sea:

a) Un número real.
b) Un número imaginario puro.
c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro.

a) $y = 0$ b) $x = 0$ c) $x \neq 0, y \neq 0$

006 Halla el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{2} + i$ c) $\frac{1}{2} - i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2} + i$ d) $-\frac{1}{2} - i$ f) -5 h) 0

	$\frac{1}{2} + i$	$-\frac{1}{2} + i$	$\frac{1}{2} - i$	$-\frac{1}{2} - i$	i	-5	$\frac{5}{2}$	0
Opuesto	$-\frac{1}{2} - i$	$\frac{1}{2} - i$	$-\frac{1}{2} + i$	$\frac{1}{2} + i$	$-i$	5	$-\frac{5}{2}$	0
Conjugado	$\frac{1}{2} - i$	$-\frac{1}{2} - i$	$\frac{1}{2} + i$	$-\frac{1}{2} + i$	$-i$	-5	$\frac{5}{2}$	0

007 Representa gráficamente los siguientes números complejos.

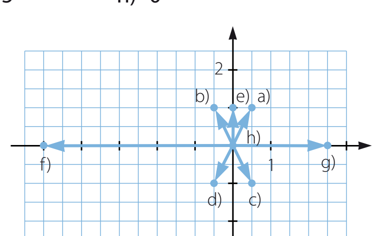
a) $\frac{1}{2} + i$ c) $\frac{1}{2} - i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2} + i$ d) $-\frac{1}{2} - i$ f) -5 h) 0

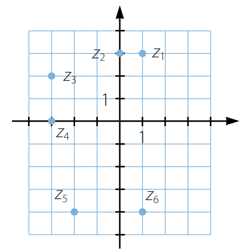
Ahora contesta, ¿dónde estará situado un número real?
¿Y si el número es imaginario puro?

Un número real estará situado en el eje de abscisas.

Un número imaginario puro se situará en el eje de ordenadas.



008 Escribe en forma binómica los números complejos correspondientes a los afijos representados.



$z_1 = (1, 3), z_2 = (0, 3), z_3 = (-3, 2),$
$z_4 = (-3, 0), z_5 = (-2, -4), z_6 = (1, -4)$

009 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$

b) $\dfrac{-1 - i}{-4 + 5i}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

d) $\dfrac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i$

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i) = -5 + 4i$

b) $\dfrac{-1 - i}{-4 + 5i} = \dfrac{(-1 - i)(-4 - 5i)}{(-4 + 5i)(-4 - 5i)} = \dfrac{-1 + 9i}{41}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i) = 4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$

d) $\dfrac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i = \dfrac{(-5 - 5i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} - 2i = 3 - i - 2i = 3 - 3i$

010 Calcula x para que el resultado sea un número real.

a) $(2x - i)(-2 + 7xi)$

b) $\dfrac{2x - i}{-2 + 7i}$

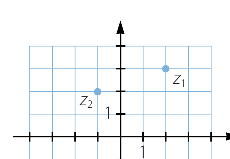
a) $(2x - i)(-2 + 7xi) = -4x + 14x^2 i + 2i + 7x = 3x + (14x^2 + 2)i$

Igualamos a cero la parte imaginaria: $14x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{-1}{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}i$

b) $\dfrac{2x - i}{-2 + 7i} = \dfrac{(2x - i)(-2 - 7i)}{(-2 + 7i)(-2 - 7i)} = \dfrac{-4x - 7}{53} + \dfrac{-14x + 2}{53}i$

Igualamos a cero la parte imaginaria: $\dfrac{-14x + 2}{53} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{7}$

011 Determina la expresión polar de los números complejos representados.



$z_1 \rightarrow r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$tg\ \alpha = \dfrac{3}{2} \rightarrow = 56°\,18'\,35{,}8''$ $\quad z_1 = (2, 3) = \sqrt{13}_{56°\,18'\,35{,}8''}$

$z_2 \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$tg\ \alpha = \dfrac{2}{-1} \rightarrow \xrightarrow{\alpha \in (90°,\ 180°)} \alpha = 116°\,33'\,54''$ $\quad z_2 = (-1, 2) = \sqrt{5}_{116°\,33'\,54''}$

012 Expresa en forma polar.

a) $2+i$
c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
e) $-4i$
b) $-2-i$
d) $2-\sqrt{3}i$
f) 12

a) $2+i=\sqrt{5}_{26^\circ 33' 54,2''}$
b) $-2-i=\sqrt{5}_{206^\circ 33' 54''}$
c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}_{135^\circ}$
d) $2-\sqrt{3}i=\sqrt{7}_{310^\circ 53' 36,2''}$
e) $-4i=4_{270^\circ}$
f) $12=12_{0^\circ}$

013 Expresa estos números en formas binómica y trigonométrica.

a) 1_{120°
c) $2_{\frac{\pi}{3}}$
b) 3_{240°
d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $1_{120^\circ}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cos 120^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 120^\circ)$

b) $3_{240^\circ =}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3\,(\cos 240^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 240^\circ)$

c) $2_{\frac{\pi}{3}}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $3_{\frac{3\pi}{2}}=(0,-3)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

014 Expresa los siguientes números complejos en forma polar.

a) $3\,(\cos 45^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 45^\circ)$
b) $3\,(\cos 135^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 135^\circ)$

a) $3\,(\cos 45^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 45^\circ)=3_{45^\circ}$
b) $3\,(\cos 135^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 135^\circ)=3_{135^\circ}$

015 Dados los números complejos:

$$z_1=2_{30^\circ} \qquad z_2=\cos 60^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 60^\circ \qquad z_3=2_{\frac{5\pi}{4}}$$

calcula.

a) $z_1\cdot z_2$
c) $z_3\cdot z_3$
b) $z_1\cdot \bar{z}_3$
d) $(z_1)^2\cdot \bar{z}_2$

$z_1=2_{30^\circ}$ $\quad z_2=1_{60^\circ}$ $\quad z_3=2_{225^\circ}$

a) $2_{30^\circ}\cdot 1_{60^\circ}=2_{90^\circ}$
b) $2_{30^\circ}\cdot 2_{135^\circ}=4_{165^\circ}$
c) $2_{225^\circ}\cdot 2_{225^\circ}=4_{450^\circ}=4_{90^\circ}$
d) $(2_{30^\circ})^2\cdot 1_{300^\circ}=4_{60^\circ}\cdot 1_{300^\circ}=4_{0^\circ}$

016 Dados los números complejos:

$$z_1 = 1_{210°} \qquad z_2 = 3\,[\cos(-30°) + i\,\mathrm{sen}\,(-30°)]$$

calcula.

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\dfrac{(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2}{z_2}$

$z_1 = 1_{210°} \qquad z_2 = 3_{330°}$

a) $\dfrac{1_{210°}}{3_{330°}} = \dfrac{1}{3_{240°}}$

b) $\dfrac{(1_{210°})^2 \cdot 3_{30°}}{3_{330°}} = \dfrac{1_{420°} \cdot 3_{30°}}{3_{330°}} = \dfrac{3_{450°}}{3_{330°}} = 1_{120°}$

017 Dados los números complejos:

$$z_1 = 4_{330°} \qquad z_2 = \cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120° \qquad z_3 = 1 - i$$

calcula.

a) $(z_1)^2$ b) $(z_2)^3$ c) $(z_3)^4 \cdot \bar{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

$z_1 = 4_{330°} \qquad z_2 = 1_{120°} \qquad z_3 = \sqrt{2}_{315°}$

a) $(4_{330°})^2 = 16_{660°} = 16_{300°}$

b) $(1_{120°})^3 = 1_{0°}$

c) $\left(\sqrt{2}_{315°}\right)^4 \cdot \sqrt{2}_{45°} = 4_{1.260°} \cdot \sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}_{1.305°} = 4\sqrt{2}_{225°}$

d) $(4_{330°})^2 \cdot 1_{240°} = 16_{660°} \cdot 1_{240°} = 16_{900°} = 16_{180°} = -16$

018 Resuelve esta operación.

$$[16\,(\cos 60° + i\,\mathrm{sen}\,60°)] \cdot (2_{210°})^4$$

$[16\,(\cos 60° + i\,\mathrm{sen}\,60°)] \cdot (2_{210°})^4 = 16_{60°} \cdot 16_{840°} = 256_{900°} = 256_{180°}$

019 Utilizando la fórmula de Moivre, expresa *cos* 3α y *sen* 3α en función de *cos* α y *sen* α.

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$$(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha - i\,\mathrm{sen}^3\alpha = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha)i$$

Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha)i = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

$$\begin{cases}\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ \mathrm{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha\end{cases}$$

020 **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{3_{150°}}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{-i}$

d) $\sqrt[3]{-1+i}$

a) $\sqrt{3_{150°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k=0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150° + 0\cdot 360°}{2} = 75°$$

$$\text{Si } k=1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150° + 1\cdot 360°}{2} = 255°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{75°}$ y $\sqrt{3}_{255°}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k=0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0\cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k=1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1\cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k=2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2\cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°} = -3$ y $3_{300°}$.

c) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k=0 \rightarrow \beta_1 = \frac{270° + 0\cdot 360°}{4} = 67°\,30'$$

$$\text{Si } k=1 \rightarrow \beta_2 = \frac{270° + 1\cdot 360°}{4} = 157°\,30'$$

$$\text{Si } k=2 \rightarrow \beta_3 = \frac{270° + 2\cdot 360°}{4} = 247°\,30'$$

$$\text{Si } k=3 \rightarrow \beta_4 = \frac{270° + 3\cdot 360°}{4} = 337°\,30'$$

Por tanto, las raíces son $1_{67°\,30'}$, $1_{157°\,30'}$, $1_{247°\,30'}$ y $1_{337°\,30'}$.

d) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{135°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135° + 0 \cdot 360°}{3} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135° + 1 \cdot 360°}{3} = 165°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 285°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{45°}$, $\sqrt[6]{2}_{165°}$ y $\sqrt[6]{2}_{285°}$.

021 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^2 + 16 = 0$

c) $z^3 + 8 = 0$

d) $z^3 - 8 = 19$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{4} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{4} = 90°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{4} = 180°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{0° + 3 \cdot 360°}{4} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $1_{0°} = 1$, $1_{90°} = i$, $1_{180°} = -1$ y $1_{270°} = -i$.

b) $z^2 + 16 = 0 \rightarrow z = \sqrt{-16} = \sqrt{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{2} = 90°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{2} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $4_{90°} = 4i$ y $4_{270°} = -4i$.

c) $z^3 + 8 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8} \rightarrow z = \sqrt[3]{8_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $2_{60°}$, $2_{180°}$ y $2_{300°}$.

d) $z^3 - 8 = 19 \rightarrow z = \sqrt[3]{27} \rightarrow z = \sqrt[3]{27_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{3} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = 120°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{3} = 240°$$

Por tanto, las raíces son $3_{0°}$, $3_{120°}$ y $3_{240°}$.

022 **Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.**

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{1+i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-1}{1+1} = -1 = 1_{180°}$$

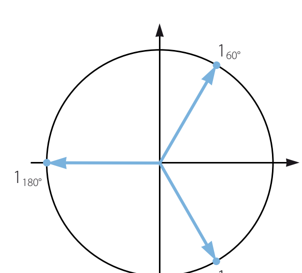
Módulo: $\sqrt[3]{1} = 1$

Argumentos:

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$



Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.

023 **Un cuadrado, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $A(3, 2)$. Determina los demás vértices.**

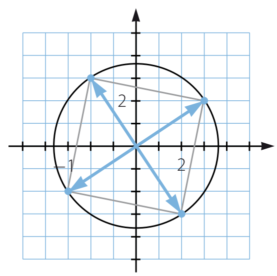
Calculamos las raíces cuartas de $3 + 2i$.

Módulo: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentos: $tg\ \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33°\ 41'\ 24{,}2''$

Sumamos 90° al argumento de cada vértice para obtener el siguiente.

Por tanto, las raíces son $\sqrt{13}_{33°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{123°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{213°\ 41'\ 24{,}2''}$ y $\sqrt{13}_{303°\ 41'\ 24{,}2''}$.



024 **Expresa los números complejos en forma binómica.**

a) $\sqrt{-16} + 3$ b) $-2 - \sqrt{-4}$ c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2}$

a) $\sqrt{-16} + 3 = 3 + 4i$

b) $-2 - \sqrt{-4} = -2 - 2i$

c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{8}\, i$

025 **Resuelve estas ecuaciones, y expresa sus soluciones en forma compleja.**

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $2x^2 - x + 5 = 0$

a) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$

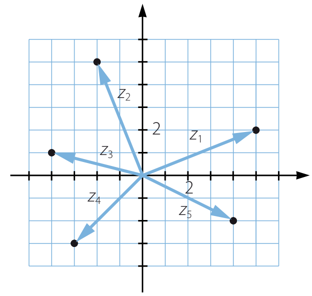
b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-i}{2} \end{cases}$$

c) $2x^2 - x + 5 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-39}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{39}\, i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{39}\, i}{2} \end{cases}$$

026 Expresa en forma binómica estos números complejos.



$z_1 = 5 + 2i$

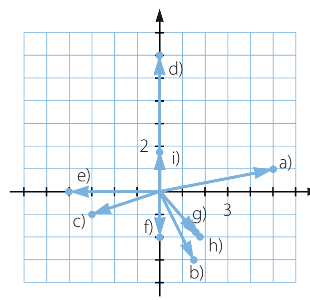
$z_2 = -2 + 5i$

$z_3 = -4 + i$

$z_4 = -3 - 3i$

$z_5 = 4 - 2i$

027 Representa los números en el plano complejo.



a) $5 + i$

b) $\sqrt{2} - 3i$

c) $-3 - i$

d) $6i$

e) -4

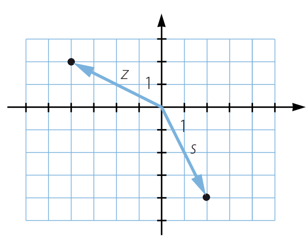
f) $-2i$

g) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{3}i$

h) $\sqrt{3} - 2i$

i) $\sqrt{3}\,i$

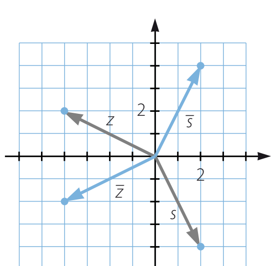
028 Dibuja el conjugado y el opuesto de los números complejos z y s.



a) ¿Cómo será la representación del conjugado de un número?

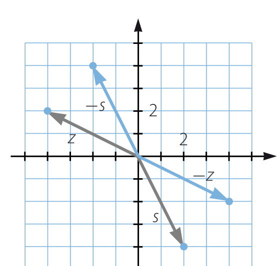
b) ¿Y de su opuesto?

a)



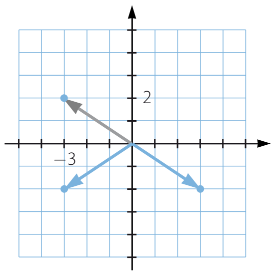
El conjugado de un número es simétrico respecto del eje de abscisas.

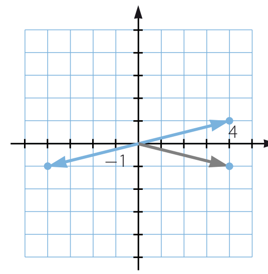
b)



El opuesto de un número es simétrico respecto del origen.

029 Representa en el plano complejo los siguientes números: $-3+2i$ y $4-i$. Obtén sus conjugados y sus opuestos, y represéntalos.





030 Encuentra las soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2-2x+5=0$

b) $x^2-6x+10=0$

c) $x^2-4x+7=0$

d) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{5}{x+1}+2=0$

a) $x^2-2x+5=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=1+2i\\x_2=1-2i\end{cases}$$

b) $x^2-6x+10=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot10}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=3+i\\x_2=3-i\end{cases}$$

c) $x^2-4x+7=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-12}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=2+\sqrt{3}i\\x_2=2-\sqrt{3}i\end{cases}$$

d) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{5}{x+1}+2=0\rightarrow x^2+8x+22=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot1\cdot22}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{-24}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-4+\sqrt{6}i\\x_2=-4-\sqrt{6}i\end{cases}$$

031 Calcula y representa en el plano complejo los números: $i^1,\ i^2,\ i^3,\ i^4,\ i^5,\ i^6,\ldots$

Investiga también lo que ocurre con:

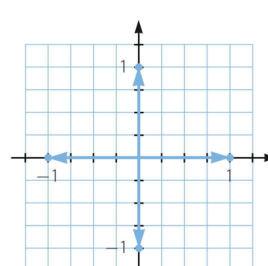
$i^{-1},\ i^{-2},\ i^{-3},\ i^{-4},\ i^{-5},\ i^{-6},\ldots$

$i^{4n-3}=i$ $\qquad i^{-4n+3}=-i$

$i^{4n-2}=-1$ $\qquad i^{-4n+2}=-1$

$i^{4n-1}=-i$ $\qquad i^{-4n+1}=i$

$i^{4n}=1$ $\qquad i^{-4n}=1$



032 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3-5i)+(2-7i)+(-4+8i)$
b) $(-1+2i)-(3+6i)-(-4-i)$
c) $-(1-2i)-(-7i)-(-4-3i)$
d) $2(1-4i)-2(1+4i)-3(4-4i)$
e) $2\left(\sqrt{3}+i\right)-3\left(2\sqrt{3}+4i\right)$
f) $\left(\sqrt{2}-3i\right)+2\left(2-\sqrt{3}i\right)$
g) $\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{3}i\right)+2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}i\right)$
h) $(1-3i)+i(2-6i)-2i(-1+6i)$

a) $(3-5i)+(2-7i)+(-4+8i)=1-4i$
b) $(-1+2i)-(3+6i)-(-4-i)=(-1+2i)+(-3-6i)+(4+i)=-3i$
c) $-(1-2i)-(-7i)-(-4-3i)=(-1+2i)+(7i)+(4+3i)=3+12i$
d) $2(1-4i)-2(1+4i)-3(4-4i)=-12-4i$
e) $2\left(\sqrt{3}+i\right)-3\left(2\sqrt{3}+4i\right)=\left(2\sqrt{3}+2i\right)+\left(-6\sqrt{3}-12i\right)=-4\sqrt{3}-10i$
f) $\left(\sqrt{2}-3i\right)+2\left(2-\sqrt{3}i\right)=\left(\sqrt{2}-3i\right)+\left(4-2\sqrt{3}i\right)=\left(\sqrt{2}+4\right)-\left(3+2\sqrt{3}\right)i$
g) $\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{3}i\right)+2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{14}{3}i$
h) $(1-3i)+i(2-6i)-2i(-1+6i)=(1-3i)+(6+2i)+(12+2i)=19+i$

033 Haz estos productos y potencias.

a) $(1-3i)(2-6i)$
b) $(-3-4i)(7-i)$
c) $(-2+5i)^2$
d) $(5-4i)(5+4i)$
e) $\left(-3-2\sqrt{2}i\right)\left(-3+2\sqrt{2}i\right)$
f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3$

a) $(1-3i)(2-6i)=2-6i-6i-18=-16-12i$
b) $(-3-4i)(7-i)=-21+3i-28i-4=-25-25i$
c) $(-2+5i)^2=4-25-20i=-21-20i$
d) $(5-4i)(5+4i)=25+16=41$
e) $\left(-3-2\sqrt{2}i\right)\left(-3+2\sqrt{2}i\right)=9+8=17$
f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3=\sqrt{2^3}-6i-3\sqrt{2}+i=-\sqrt{2}-5i$

034 Efectúa las divisiones.

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$
b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}$
c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}=\dfrac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}=\dfrac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}=\dfrac{160-120i+320i+240}{64+36}=4+2i$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}=\dfrac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-2-i+10i-5}{4+1}=\dfrac{-7+9i}{5}$

035 Obtén, en forma binómica, el resultado de las operaciones.

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i=-3+9i+(3+2i)=11i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}=2i+\dfrac{9}{10}+\dfrac{33}{10}i=\dfrac{9}{10}+\dfrac{53}{10}i$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)=\dfrac{48-4i}{2-6i}-(6+18i-2i+6)=$
$=3+7i-(12+16i)=-9-9i$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}=(-2-5i)-\dfrac{5-15i}{3-i}=$
$=(-2-5i)-(3-4i)=-5-i$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\dfrac{-8+6i+4}{-3+4i}=\dfrac{36}{25}-\dfrac{2}{25}i$

036 Representa en el plano complejo los números complejos y los resultados de las operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.

a) $(3+2i)+(-1+4i)$

b) $(3+2i)(-1+3i)$

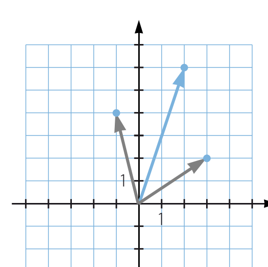
c) $(-5+2i)-(4+3i)$

d) $\dfrac{-2+6i}{4-2i}$

a) $(3+2i)+(-1+4i)=2+6i$

El resultado es otro número complejo que tiene por coordenadas la suma de las coordenadas de los dos números.

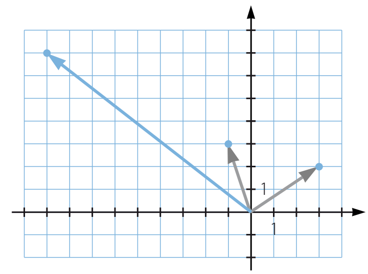
Gráficamente coincide con el vector suma.



b) $(3+2i)(-1+3i) = -3+9i-2i-6 = -9+7i$

El resultado es otro número complejo que tiene:

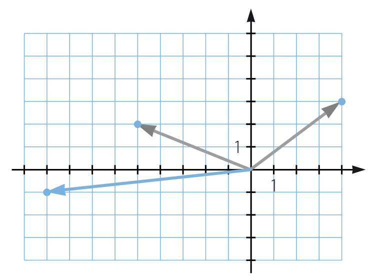
- Parte real igual al producto de las partes reales de los números, menos el producto de las partes imaginarias.
- Parte imaginaria igual al producto de la parte real del primero por la parte imaginaria del segundo, más la parte imaginaria del primero por la parte real del segundo.



c) $(-5+2i)-(4+3i) = -9-i$

El resultado es otro número complejo que tiene por coordenadas la resta de las coordenadas de los dos números.

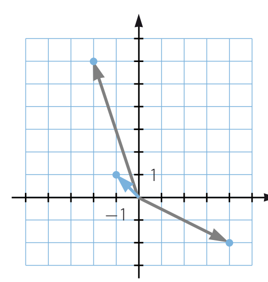
Gráficamente coincide con la diferencia de vectores.



d) $\dfrac{-2+6i}{4-2i} = \dfrac{(-2+6i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{-8-4i+24i-12}{16+4} = \dfrac{-20+20i}{20} = -1+i$

El resultado es otro número complejo que tiene:

- Parte real igual al producto de las partes reales de los números, más el producto de las partes imaginarias, dividido entre la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del divisor.
- Parte imaginaria igual al producto de la parte imaginaria del primero por la parte real del segundo, menos la parte real del primero por la parte imaginaria del segundo, dividido entre la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del divisor.



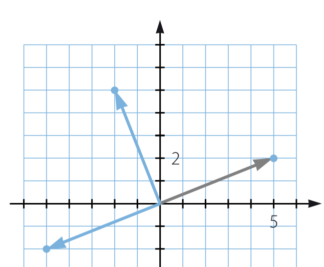
037 ●●○ **Representa $(5+2i)$. Multiplícalo por i y representa el resultado. Multiplica dos veces por i y explica qué se obtiene.**

$(5+2i)i = -2+5i$

$(5+2i)i^2 = -5-2i$

Al multiplicar por i el punto se desplaza 90°, mediante un giro de centro el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Al multiplicar por i^2 se obtiene el punto simétrico respecto del origen (su opuesto).



038 Encuentra el número complejo que es inverso de $-1 + 2i$.

$$\frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-1-2i}{5}$$

039 Calcula z en la siguiente ecuación.

$$(2-3i)z = (6+5i)$$

$$(2-3i)z = (6+5i) \to z = \frac{6+5i}{2-3i} \to z = \frac{(6+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \to z = \frac{-3+28i}{13}$$

040 Calcula $a, b, c, \ldots$, para que se verifiquen las condiciones indicadas en cada apartado.

a) $(3-5i) + (-1+ai)$ es un número real.
b) $(b+3i) + (5+2i)$ es un número imaginario puro.
c) $(c+6i)(3-2i)$ es un número real.
d) $(d+6i)(3-2i)$ es un número imaginario puro.
e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}$ es un número real.
f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}$ es un número imaginario puro.

a) $(3-5i) + (-1+ai) = 2 + (-5+a)i \to a = 5$

b) $(b+3i) + (5+2i) = (b+5) + 5i \to b = -5$

c) $(c+6i)(3-2i) = (3c+12) + (-2c+18)i \to -2c+18 = 0 \to c = 9$

d) $(d+6i)(3-2i) = (3d+12) + (-2d+18)i \to 3d+12 = 0 \to d = -4$

e) $$\frac{7+11i}{e-2i} = \frac{(7+11i)(e+2i)}{(e-2i)(e+2i)} = \frac{7e-22}{e^2+4} + \frac{11e+14}{e^2+4}i \to \frac{11e+14}{e^2+4} = 0$$
$$\to e = -\frac{14}{11}$$

f) $$\frac{7+11i}{f-2i} = \frac{(7+11i)(f+2i)}{(f-2i)(f+2i)} = \frac{7f-22}{f^2+4} + \frac{11f+14}{f^2+4}i \to \frac{7f-22}{f^2+4} = 0$$
$$\to f = \frac{22}{7}$$

041 Encuentra p y q para que se cumpla:

$$(p+3i)(4+qi) = 15+9i$$

$$(p+3i)(4+qi) = 15+9i \to (4p-3q) + (12+pq)i = 15+9i$$

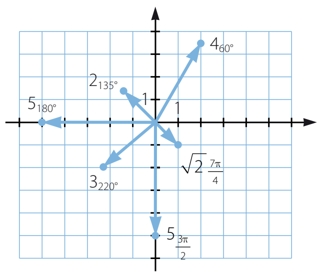
$$\left.\begin{array}{l} 4p-3q = 15 \\ 12+pq = 9 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} p_1 = 3;\ q_1 = -1 \\ p_2 = \dfrac{3}{4};\ q_2 = -4 \end{array}\right.$$

042 Demuestra que el número complejo $z = 1 - 3i$ verifica la igualdad $\frac{z^2}{2} = z - 5$.

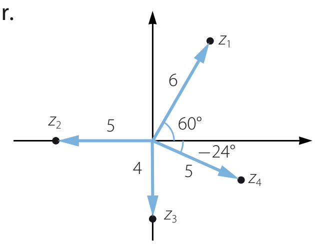
$$\frac{z^2}{2} = \frac{(1-3i)^2}{2} = \frac{-8-6i}{2} = -4-3i = 1-3i-5 = z-5$$

043 Representa los siguientes números complejos expresados en forma polar.

a) $4_{60°}$ b) $2_{135°}$ c) $3_{220°}$ d) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ e) $5_{180°}$ f) $5_{\frac{3\pi}{2}}$



044 Expresa estos números complejos en forma polar.



$z_1 = 6_{60°}$

$z_2 = 5_{180°}$

$z_3 = 4_{270°}$

$z_4 = 5_{336°}$

045 Escribe estos números en forma polar y represéntalos.

a) $3-4i$ b) $\sqrt{3}+i$ c) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ d) $-3i$ e) -3 f) $\frac{1}{2}i$

a) $3-4i = 5_{306°\,52'\,11{,}63''}$

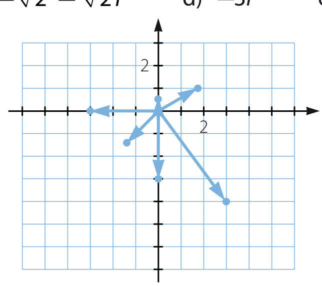
b) $\sqrt{3}+i = 2_{30°}$

c) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2_{225°}$

d) $-3i = 3_{270°}$

e) $-3 = 3_{180°}$

f) $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}_{90°}$



046 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos.

a) $4_{60°}$ b) $2_{215°}$ c) $3_{\frac{\pi}{2}}$ d) 2_{π} e) $3_{150°}$ f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ h) $\sqrt{3}_{300°}$

a) $2+2\sqrt{3}i$ c) $3i$ e) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ g) $1-i$

b) $-1{,}64-1{,}15i$ d) -2 f) $-i$ h) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

047 Dados los números complejos:

$$z_1 = 5_{240°} \qquad z_2 = 3_{135°} \qquad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$$

escribe, en forma polar y binómica, el conjugado y el opuesto de cada uno de ellos.

Tenemos en cuenta que el conjugado es el punto simétrico respecto del eje de abscisas y el opuesto es el simétrico respecto del origen.

Número		Conjugado		Opuesto	
Polar	Binómica	Polar	Binómica	Polar	Binómica
$5_{240°}$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{120°}$	$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{60°}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
$3_{135°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{225°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{315°}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
$\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{11\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{6}}$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

048 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°}$

b) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°}$

d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}}$

e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$

f) $2_{260°} \cdot 5_{130°}$

g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

h) $(2_{120°})^5$

i) $\dfrac{10_{120°}}{5_{240°}}$

j) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°} = 12_{180°}$

b) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}} = 3_{\frac{3\pi}{4}}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°} = 4_{60°} \cdot 2_{270°} = 8_{330°}$

d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}} = 4_{120°}$

e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 25_{\frac{2\pi}{3}}$

f) $2_{260°} \cdot 5_{130°} = 10_{390°} = 10_{30°}$

g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}} = \dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

h) $(2_{120°})^5 = 32_{600°} = 32_{240°}$

i) $\dfrac{10_{120°}}{5_{240°}} = 2_{240°}$

j) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6 = 27_{15\pi} = 27_{\pi}$

049 Realiza estas operaciones, expresando primero los números en forma polar.

a) $(1-i)^4$ b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6$ c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7$

a) $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}_{315°}\right)^4 = 4_{180°}$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6 = (2_{135°})^6 = 64_{90°}$

c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4 = (2_{120°})^4 = 16_{120°}$

d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7 = \sqrt{3}_{324°\,44'\,8,2''}$

050 Calcula, usando la fórmula del binomio de Newton, esta potencia: $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5$. Hazlo en forma binómica.

Comprueba, expresando el número en forma polar, que se obtiene el mismo resultado.

$$\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5 = 2^5 - 5\cdot 2^4\cdot 2\sqrt{3}i - 10\cdot 2^3\cdot 12 + 10\cdot 2^2\cdot 24\sqrt{3}i + 5\cdot 2\cdot 72 - 288\sqrt{3}i =$$
$$= 512 + 512\sqrt{3}i$$

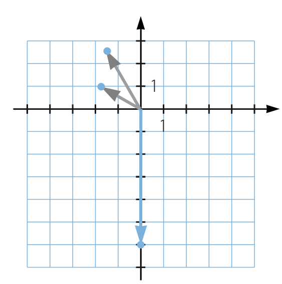
$(4_{300°})^5 = 1.024_{60°}$

$512 + 512\sqrt{3}i = 1.024_{60°}$

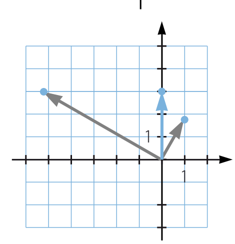
051 Representa en el plano complejo estos números y los resultados de sus operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.

a) $2_{150°}\cdot 3_{120°}$ b) $\dfrac{6_{150°}}{2_{60°}}$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4$

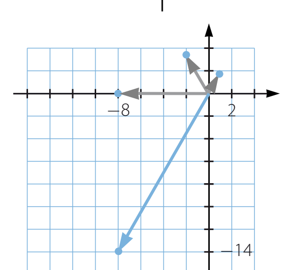
a) El módulo del resultado es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos de los números dados.



b) El módulo del resultado es el cociente de los módulos, y el argumento es la resta de los argumentos de los números dados.



c) El módulo del resultado es la cuarta potencia del módulo, y el argumento es el cuádruple del argumento del número dado.



052 Realiza las siguientes potencias, empleando la fórmula de Moivre.

a) $\left(3\left(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°\right)\right)^4$

b) $\left(2\left(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°\right)\right)^9$

c) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)^3$

d) $\left(3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)\right)^4$

a) $(3(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°))^4 = 81(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$

b) $(2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°))^9 = 512(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 512$

c) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$

d) $\left(3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)\right)^4 = 81(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 81$

053 Con la fórmula de Moivre, expresa *sen* 5α y *cos* 5α en función de *sen* α y *cos* α.

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$$(1_\alpha)^5 = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^5 = \cos 5\alpha + i \operatorname{sen} 5\alpha$$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\cos^5 \alpha + 5i \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 10 \cos^3 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 10i \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + 5 \cos \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha + i \operatorname{sen}^5 \alpha = (\cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + 5 \cos \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha) + (5 \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 10 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen}^5 \alpha)i$$

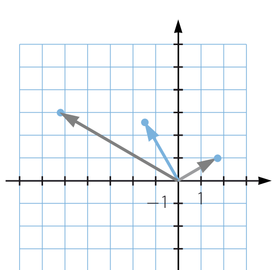
Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$$(\cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + 5 \cos \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha) + (5 \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 10 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen}^5 \alpha)i = \cos 5\alpha + i \operatorname{sen} 5\alpha$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

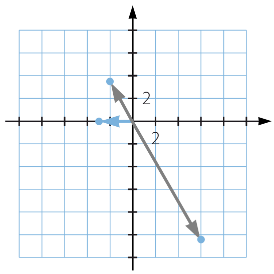
$$\left.\begin{aligned} \cos 5\alpha &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + 5 \cos \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha \\ \operatorname{sen} 5\alpha &= 5 \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 10 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen}^5 \alpha \end{aligned}\right\}$$

054 Dibuja los números $2_{30°}$ y $6_{150°}$. ¿Por qué número complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?



Hay que multiplicar por $3_{120°}$.

055 Dibuja los números $12_{300°}$ y $4_{120°}$. ¿Por qué número complejo hay que dividir al primero para obtener el segundo?



Hay que dividir entre $3_{180°}$.

056 Calcula las soluciones de las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ c) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{120° + 0 \cdot 360°}{3} = 40°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{120° + 1 \cdot 360°}{3} = 160°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{120° + 2 \cdot 360°}{3} = 280°$$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$ y $4_{280°}$.

b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt[5]{32_{225°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$ y $2_{333°}$.

c) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: $\sqrt{3}$.
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{220° + 0 \cdot 360°}{4} = 55°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{220° + 1 \cdot 360°}{4} = 145°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{220° + 2 \cdot 360°}{4} = 235°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{220° + 3 \cdot 360°}{4} = 325°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{55°}$, $\sqrt{3}_{145°}$, $\sqrt{3}_{235°}$ y $\sqrt{3}_{325°}$.

057 **Realiza las raíces y representa los resultados en el plano complejo.**

a) $\sqrt[6]{-16}$ b) $\sqrt[3]{16i}$ c) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

a) $\sqrt[6]{-16} = \sqrt[6]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz sexta del módulo: $\sqrt[3]{4}$.
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{6} = 30°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{6} = 90°$$

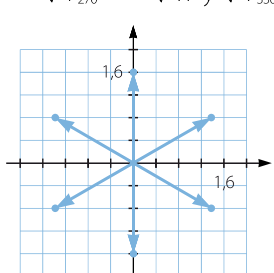
$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{6} = 150°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180° + 3 \cdot 360°}{6} = 210°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{180° + 4 \cdot 360°}{6} = 270°$$

$$\text{Si } k = 5 \rightarrow \beta_6 = \frac{180° + 5 \cdot 360°}{6} = 330°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[3]{4}_{30°}$, $\sqrt[3]{4}_{90°} = \sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{150°}$, $\sqrt[3]{4}_{210°}$, $\sqrt[3]{4}_{270°} = -\sqrt[3]{4}i$ y $\sqrt[3]{4}_{330°}$.



b) $\sqrt[3]{16i} = \sqrt[3]{16_{90°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $2\sqrt[3]{2}$.

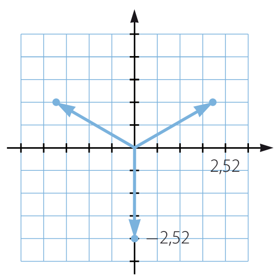
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{90° + 0 \cdot 360°}{3} = 30°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{90° + 1 \cdot 360°}{3} = 150°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{90° + 2 \cdot 360°}{3} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $2\sqrt[3]{2}_{30°}$, $2\sqrt[3]{2}_{150°}$ y $2\sqrt[3]{2}_{270°} = -2\sqrt[3]{2}i$.



c) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{60°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta del módulo: $\sqrt[5]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{60° + 0 \cdot 360°}{5} = 12°$$

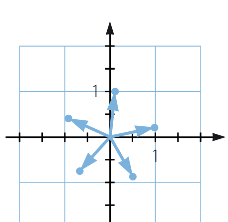
$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{60° + 1 \cdot 360°}{5} = 84°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{60° + 2 \cdot 360°}{5} = 156°$$

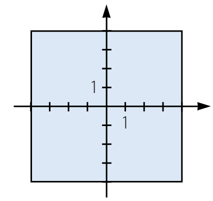
$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{60° + 3 \cdot 360°}{5} = 228°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{60° + 4 \cdot 360°}{5} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[5]{2}_{12°}$, $\sqrt[5]{2}_{84°}$, $\sqrt[5]{2}_{156°}$, $\sqrt[5]{2}_{228°}$ y $\sqrt[5]{2}_{300°}$.



058 Los vértices del polígono representado son las raíces cuartas de un número complejo.
Determina el número y sus raíces.



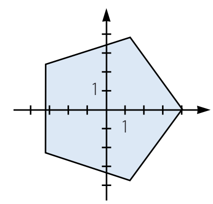
Las raíces son:

$z_1 = 4 + 4i = \sqrt{32}_{45°}$ $\quad$ $z_3 = -4 - 4i = \sqrt{32}_{225°}$

$z_2 = -4 + 4i = \sqrt{32}_{135°}$ $\quad$ $z_4 = 4 - 4i = \sqrt{32}_{315°}$

El número es: $z = 1.024_{180°} = -1.024$

059 En el gráfico se representan las raíces de un número. Determínalas y descubre de qué número se trata.



Las raíces son:

$z_1 = 4_{0°} = 4$ $\quad$ $z_4 = 4_{216°}$

$z_2 = 4_{72°}$ $\quad$ $z_5 = 4_{288°}$

$z_3 = 4_{144°}$

El número es: $z = 1.024_{0°} = 1.024$

060 Encuentra n y z de manera que dos de las soluciones de $\sqrt[n]{z}$ sean $6_{30°}$ y $6_{120°}$. ¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor número n que puedes encontrar?

Sea $z = r_\alpha$.
La raíz enésima de r debe ser 6.
El argumento debe ser múltiplo de 30 y de 120.
La solución no es única.
El menor número que cumple las condiciones es $n = 4$.
$z_1 = 1.296_{120°}$
Otra solución es $n = 8$.
$z_2 = 1.679.616_{240°}$

061 Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 + 1 = 0$ $\quad$ c) $x^5 - 32 = 0$ $\quad$ e) $x^4 + 16 = 0$

b) $x^3 + 12 = 0$ $\quad$ d) $x^5 - 1 = 0$ $\quad$ f) $x^3 - 8 = 0$

a) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1} = 1_{\frac{180° + k \cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90°} = i$ $\quad$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{270°} = -i$

b) $x^3 + 12 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-12} = \sqrt[3]{12}_{\frac{180° + k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{12}_{60°}$ $\quad$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt[3]{12}_{300°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{12}_{180°} = -\sqrt[3]{12}$

c) $x^5 - 32 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2_{\frac{0° + k \cdot 360°}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{72°}$ $\quad$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{288°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{144°}$ $\quad$ Si $k = 4 \rightarrow x_5 = 2_{0°} = 2$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{216°}$

d) $x^5 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{72^\circ}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{288^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{144^\circ}$ Si $k = 4 \rightarrow x_5 = 1_{0^\circ} = 1$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{216^\circ}$

e) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-16} = 2_{\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{45^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{225^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{135^\circ}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{315^\circ}$

f) $x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{120^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{0^\circ} = 2$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{240^\circ}$

062 Realiza la siguiente operación.

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \sqrt[4]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{22,5^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{202,5^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{112,5^\circ}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{292,5^\circ}$

063 Expresa en forma polar el inverso de estos números.

a) 2_{150° b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ c) $4_{\frac{\pi}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)_{\pi}$

Para calcular el inverso de un número en forma polar, calculamos el inverso del módulo y el opuesto del argumento.

a) $\frac{1}{2}_{210^\circ}$ b) $\frac{1}{3}_{\frac{3\pi}{2}}$ c) $\frac{1}{4}_{\frac{5\pi}{3}}$ d) $4_{\pi} = -4$

064 Calcula las siguientes raíces de números complejos.

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt[3]{1}$ c) $\sqrt[4]{1}$ d) $\sqrt{i}$ e) $\sqrt[3]{i}$ f) $\sqrt[4]{i}$

a) $\sqrt{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{180^\circ} = -1$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{0^\circ} = 1$

b) $\sqrt[3]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{120^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{0^\circ} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{240^\circ}$

c) $\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{0° + k \cdot 360°}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90°} = i$
Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{180°} = -1$
Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270°} = -i$
Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{0°} = 1$

d) $\sqrt{i} = 1_{\frac{90° + k \cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{45°}$
Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{225°}$

e) $\sqrt[3]{i} = 1_{\frac{90° + k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{30°}$
Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{150°}$
Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270°} = -i$

f) $\sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90° + k \cdot 360°}{4}}$

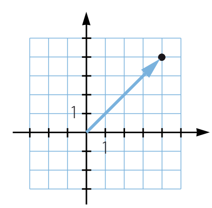
Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{22,5°}$
Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{112,5°}$
Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{202,5°}$
Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{292,5°}$

065 ●●○ **Observa el número complejo representado.**

a) ¿A qué exponente hay que elevarlo para obtener un número real?

b) ¿Y un número imaginario puro?

c) ¿Hay una única solución en cada caso?



El argumento es 45°.

a) $n \cdot 45° = 180° \rightarrow n = 4 \cdot (2k + 1)$
$n \cdot 45° = 360° \rightarrow n = 8 \cdot (k + 1)$

b) $n \cdot 45° = 90° \rightarrow n = 2 \cdot (4k + 1)$
$n \cdot 45° = 270° \rightarrow n = 6 \cdot (4k + 1)$

c) En cada caso hay infinitas soluciones.

066 ●●○ **¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3 + 2i$ para que resulte $5_{270°}$? ¿Y para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?**

$(-3 + 2i) + (a + bi) = -5i \rightarrow a = 3, b = -7$

$(-3 + 2i) + (a + bi) = 3 - 3\sqrt{3}\,i \rightarrow a = 6, b = -2 - 3\sqrt{3}$

067 ●●○ **Calcula z sabiendo que su módulo es $\sqrt{5}$ y que $z(3 - 6i)$ es un número imaginario puro.**

$z = \sqrt{5}_{\alpha}$

$3 - 6i = \sqrt{45}_{296°\,33'\,54,1''}$

$\alpha + 296°\,33'\,54,1'' = 90° \rightarrow \alpha = 153°\,26'\,5,82'' + 360° \cdot k$

$\alpha + 296°\,33'\,54,1'' = 270° \rightarrow \alpha = 333°\,26'\,5,82'' + 360° \cdot k$

Por tanto, tenemos que: $\alpha = 153°\,26'\,5,82'' + 180° \cdot k$.

068 Escribe qué condiciones deben cumplir a, b, c y d para que:

a) $(a+bi)(c+di)$ sea un número real.

b) $(a+bi)(c+di)$ sea un número imaginario puro.

c) $\dfrac{a+bi}{c+di}$ sea un número imaginario puro.

d) $\dfrac{a+bi}{c+di}$ sea un número real.

$$(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

a) Para que sea un número real: $ad=-bc$

b) Para que sea un número imaginario puro: $ac=bd$

c) Para que sea un número imaginario puro: $ac=-bd$

d) Para que sea un número real: $ad=bc$

069 Calcula dos números reales a y b, de modo que: $a+5i=\dfrac{13+bi}{4-i}$

$$\frac{13+bi}{4-i} = \frac{(13+bi)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{52-b}{17} + \frac{13+4b}{17}i$$

$$\begin{cases} \dfrac{52-b}{17} = a \rightarrow 17a+b=52 \rightarrow a=2 \\ \dfrac{13+4b}{17} = 5 \rightarrow 13+4b=85 \rightarrow b=18 \end{cases}$$

070 Halla el valor de a para que este número complejo cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

$$a+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Calculamos el cuadrado: $\left(a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = a^2-\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}ai$

Hallamos el conjugado: $a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{cases} a^2-\dfrac{3}{4}=a \\ \sqrt{3}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

071 Halla el valor de m para que $3-2i$ sea raíz del polinomio x^2-6i+m.

$m=a+bi$

Para que sea raíz del polinomio debe cumplir:

$$(3-2i)^2-6i+a+bi=0 \rightarrow (5+a)+(-18+b)i=0 \rightarrow a=-5, b=18$$

072 Calcula el valor de b para que el cociente de $-9+bi$ entre $1-2i$ tenga módulo $5\sqrt{2}$.

$$\frac{-9+bi}{1-2i}=\frac{(-9+bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-9-2b+(-18+b)i}{5}$$

$$\sqrt{(-9-2b)^2+(-18+b)^2}=5\sqrt{2} \rightarrow 81+36b+4b^2+324-36b+b^2=50$$

$$5b^2+355=0 \rightarrow b=\sqrt{71}\,i$$

073 Halla c sabiendo que la representación gráfica de $\dfrac{12+ci}{-5+2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante.

Para que esté sobre la bisectriz del primer cuadrante, la parte imaginaria debe ser igual a la parte real.

$$\frac{12+ci}{-5+2i}=\frac{(12+ci)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{-60+2c+(-24-5c)i}{29}$$

$$-60+2c=-24-5c \rightarrow c=\frac{36}{7}$$

074 ¿Es cierto que, siempre que multiplicas un número real por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z?

Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.

No es cierto, ya que: $1_{180^\circ}\cdot 1_{90^\circ}=1_{270^\circ}$.

Solo es cierto si el número real es positivo.

Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.

075 ¿Es cierto que el conjugado del producto de dos números complejos es el producto de sus conjugados?

Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos.

Calculamos el conjugado del producto:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

El conjugado del producto es: $ac-bd-(ad+bc)i$

Hallamos el producto de sus conjugados:

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd+(-ad-bc)i=ac-bd-(ad+bc)i$$

Luego es cierto.

076 Demuestra que, si multiplicas un número complejo por su conjugado, se obtiene el cuadrado de su módulo.

Sea $z = a + bi$.

Calculamos su módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

El cuadrado del módulo es: $a^2 + b^2$

Multiplicamos por el conjugado: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Por tanto, es cierto.

077 ¿Qué diferencia existe entre las soluciones de la raíz cuadrada real de 16 y la raíz cuadrada del número complejo $16 + 0i$?

No existe ninguna diferencia, pues ambos números tienen como raíz cuadrada 4 y -4.

078 Calcula las tres raíces cúbicas de -27 y comprueba que su suma es cero. Comprueba si sucede lo mismo con las tres raíces cúbicas de $16 - 88i$. ¿Sucederá eso con todos los números complejos? Justifica tu respuesta.

$$\sqrt[3]{-27} = 3_{\frac{180° + k \cdot 360°}{3}}$$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 3_{60°} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 3_{300°} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 3_{180°} = -3$

Sumamos las raíces: $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i - 3 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i = 0$

Calculamos las raíces cúbicas de $16 - 88i = \sqrt{8.000}_{280° 18' 17,45''}$:

$$\sqrt[6]{8.000}_{\frac{280° 18' 17,45'' + k \cdot 360°}{3}}$$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt[6]{8.000}_{93° 26' 5,82''} = -1,1983 + 19,965i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt[6]{8.000}_{213° 23' 5,82''} = -16,6902 - 11,0197i$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt[6]{8.000}_{333° 26' 5,82''} = 17,8885 - 8,94427i$

Sumamos las raíces:

$$-1,1983 + 19,965i - 16,6902 - 11,0197i + 17,8885 - 8,94427i = 0$$

Sucederá lo mismo con todos los números complejos.

Dado un número complejo, sus tres raíces cúbicas serán: r_α, $r_{\alpha+120°}$ y $r_{\alpha+240°}$.

Si multiplicamos las raíces por el número complejo $\left(\dfrac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°}$, da como resultado las raíces cúbicas de -27, cuya suma es cero:

$$0 = z_1 + z_2 + z_3 = \left(\frac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°} \cdot (r_\alpha + r_{\alpha+120°} + r_{\alpha+240°})$$

Como $\left(\dfrac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°} \neq 0 \rightarrow (r_\alpha + r_{\alpha+120°} + r_{\alpha+240°}) = 0$, la suma de las tres raíces cúbicas de cualquier número complejo distinto de cero es cero.

079 Uno de los vértices de un triángulo es el origen de coordenadas y los otros dos son los afijos de los números complejos $-2+5i$ y $3+i$. Calcula la longitud de sus lados.

Sea O el origen de coordenadas, $A=-2+5i$, $B=3+i$.

Calculamos la longitud del lado OA: $\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$

Hallamos la longitud del lado OB: $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Determinamos la longitud del lado AB: $\sqrt{(-2-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{41}$

080 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los afijos de los números $6+5i$ y $3+i$. Determina el resto de sus vértices, sabiendo que tiene uno en el cuarto cuadrante.

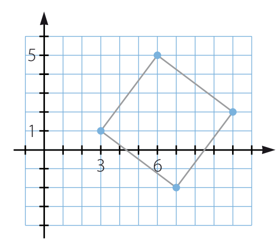
La variación de la parte real de los dos números es de 3 unidades y la variación de la parte compleja es de 4 unidades.

Por tanto, si a partir de los vértices conocidos llevamos una variación de 4 unidades en la parte real y 3 unidades en la parte imaginaria, resultan los otros dos vértices, obteniéndose dos soluciones:

$C=(7,-2)$ y $D=(10,2)$

$C'=(-1,4)$ y $D'=(2,8)$

De estas soluciones únicamente la primera solución tiene un vértice en el cuarto cuadrante.



081 Uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen tiene coordenadas $(-1,3)$. Utiliza los números complejos para determinar los otros vértices y su área.

$z_2=-1+3i$

Elevamos a la cuarta: $z=100_{73°\,44'\,23{,}26''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt[4]{100_{40}}=\sqrt{10}_{\frac{40°+k\cdot 360°}{4}}$

Si $k=0\rightarrow x_1=\sqrt{10}_{18°\,26'\,5{,}82''}=3+i$ Si $k=2\rightarrow x_3=\sqrt{10}_{198°\,26'\,5{,}81''}$

Si $k=1\rightarrow x_2=\sqrt{10}_{108°\,26'\,5{,}81''}$ Si $k=3\rightarrow x_4=\sqrt{10}_{288°\,26'\,5{,}81''}$

$z_1=(3,1)$ y $z_2=(-1,3)$

Hallamos la longitud del lado: $\sqrt{(-1-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}$

Por tanto, el área es 20.

082 Un pentágono regular, con centro en el origen de coordenadas, tiene en $(-3,-2)$ uno de sus vértices. Halla los demás vértices usando números complejos.

$z_2=-3-2i$

Elevamos a la quinta: $z=\sqrt{13^5}_{213°\,41'\,24{,}2''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{13}_{\frac{213°\,41'\,24{,}2''+k\cdot 360°}{5}}$

Si $k=0\rightarrow x_1=\sqrt{13}_{42°\,44'\,16{,}85''}$ Si $k=2\rightarrow x_3=\sqrt{13}_{186°\,44'\,16{,}85''}$

Si $k=1\rightarrow x_2=\sqrt{13}_{114°\,44'\,16{,}85''}$ Si $k=3\rightarrow x_4=\sqrt{13}_{258°\,44'\,16{,}85''}$

083 ¿Qué número complejo forma un triángulo equilátero con su conjugado y con -5?

Sea L la longitud del lado del triángulo equilátero, uno de los vértices es el complejo $a + bi$ y el otro vértice es su conjugado $a - bi$.

$$b = L \cdot sen\ 30° = \frac{L}{2} \qquad a = -5 + L \cdot cos\ 30° = -5 + \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Todos los triángulos tienen -5 como el vértice situado más a la izquierda.

Si el vértice -5 estuviera situado a la derecha del triángulo, las coordenadas de los otros vértices serían:

$$b = L \cdot sen\ 30° = \frac{L}{2} \qquad a = -5 - L \cdot cos\ 30° = -5 - \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$$

084 **Las cuatro raíces cuartas de -4.096 describen un cuadrado. Calcula su área. Además, sus raíces cúbicas describen un triángulo equilátero. Determina su área.**

Las raíces cuartas de -4.096 son:

$$z_1 = 8_{45°} = \left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \qquad z_3 = 8_{225°} = \left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$$

$$z_2 = 8_{135°} = \left(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \qquad z_4 = 8_{315°} = \left(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$$

Calculamos el lado: $\sqrt{\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$

Por tanto, el área es de128.

Las raíces cúbicas de -4.096 son:

$$z_1 = 16_{60°} = \left(8, 8\sqrt{3}\right) \qquad z_3 = 16_{300°} = \left(8, -8\sqrt{3}\right)$$

$$z_2 = 16_{180°} = (-16, 0)$$

Se forma un triángulo cuya base mide 16 y su altura es de 24.

Por tanto, su área mide $192\sqrt{3}$.

085 **El número complejo $3 + 5i$ es una de las raíces cúbicas de z. Halla las otras dos raíces.**

$$z_1 = 3 + 5i = \sqrt{35}_{59°\ 2'\ 10{,}48''}$$

Las raíces tendrán el mismo módulo.

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{35}_{59°\ 2'\ 10{,}48'' + \frac{k \cdot 360°}{3}}$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{35}_{59°\ 2'\ 10{,}48''} \qquad \text{Si } k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{35}_{299°\ 2'\ 10{,}48''}$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt{35}_{179°\ 2'\ 10{,}48''}$$

086 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $3 + i$ y $3 - i$. Haz lo mismo con $-2 - 5i$ y $-2 + 5i$.**

$$(x - 3 + i)(x - 3 - i) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - ix - 3x + 9 + 3i + ix - 3i + 1 = 0$$
$$\rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 5ix + 2x + 4 - 10i + 5ix + 10i + 25 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 4x + 29 = 0$$

087 **Demuestra que si una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son números reales tiene dos raíces complejas, estas deben ser números conjugados.**

Tenemos una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \end{cases}$$

Luego sus soluciones son dos números complejos conjugados.

088 **¿Qué condición deben cumplir los números reales a, b y c para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga soluciones complejas?**

Se debe cumplir que: $b^2 - 4ac < 0$

089 **Resuelve la ecuación $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$.**

$$x^4 + 10x^2 + 169 = 0 \xrightarrow{t = x^2} t^2 + 10t + 169 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 169}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 24i}{2} = \begin{cases} t_1 = -5 + 12i \\ t_2 = -5 - 12i \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{-5 + 12i} = \sqrt{13_{112^\circ\ 37'\ 11,5''}} = \begin{cases} x_1 = \sqrt{13}_{\,56^\circ\ 18'\ 35,75''} \\ x_2 = \sqrt{13}_{\,236^\circ\ 18'\ 35,75''} \end{cases}$$

$$\sqrt{-5 - 12i} = \sqrt{13_{247^\circ\ 22'\ 48,49''}} = \begin{cases} x_3 = \sqrt{13}_{\,123^\circ\ 41'\ 24,24''} \\ x_4 = \sqrt{13}_{\,303^\circ\ 41'\ 24,24''} \end{cases}$$

090 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\dfrac{z}{5 - i} + (2 - i)\,6i = -3 + 2i$

b) $z(-2 + 6i) + \dfrac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i = z(1 + 7i)$

a) $\dfrac{z}{5 - i} + (2 - i)6i = -3 + 2i \rightarrow \dfrac{z}{5 - i} + 6 + 12i = -3 + 2i$

$\rightarrow \dfrac{z}{5 - i} = -9 - 10i \rightarrow z = (5 - i)(-9 - 10i) \rightarrow z = -55 - 41i$

b) $z(-2 + 6i) + \dfrac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i = z(1 + 7i) \rightarrow z(-2 + 6i) - 11 +$

$+ i + 10 - 8i = z(1 + 7i) \rightarrow z(-2 + 6i) - 1 - 7i = z(1 + 7i)$

$\rightarrow z(-2 + 6i) - z(1 + 7i) = 1 + 7i \rightarrow z(-2 + 6i - 1 - 7i) = 1 + 7i$

$\rightarrow z = \dfrac{1 + 7i}{-3 - i} \rightarrow z = -1 - 2i$

091 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$

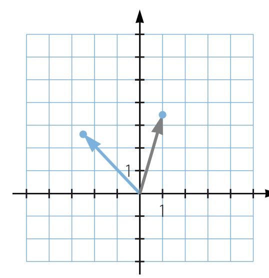
b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\}$

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8i \pm \sqrt{-64 - 4\cdot 1\cdot(4i - 19)}}{2\cdot 1} = \dfrac{8i \pm \sqrt{10 - 16i}}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\} \xrightarrow{x = iy} y - i(iy) = 4 - 6i \rightarrow y + y = 4 - 6i \rightarrow y = 2 - 3i$

$x = i(2 - 3i) = 3 + 2i$

092 Representa el número complejo $1 + 2\sqrt{3}i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Halla las expresiones binómica y polar del número complejo resultante.



$z = 1 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{13}_{73°\ 53'\ 52{,}39''}$

Hacemos un giro de 60°:

$\sqrt{13}_{133°\ 53'\ 52{,}39''} = -2{,}5 + 2{,}6i$

093 La suma de dos números complejos conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. Determínalos.

Sea $z = a + bi$.

$\left.\begin{array}{r} a + bi + a - bi = 16 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array}\right\}$

$\rightarrow 64 + b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 6$

Los números son: $8 + 6i$ y $8 - 6i$.

094 Encuentra todos los números complejos tales que su cubo es igual a su raíz cuadrada.

Un número complejo es de la forma r_α. Si ponemos la condición de que su cubo sea igual a su raíz cuadrada, tenemos:

$(r_\alpha)^3 = \sqrt{r_\alpha}$

$(r_\alpha)^3 = r^3_{3\alpha} = \sqrt{r_\alpha} = \left(\sqrt{r}\right)_{\frac{\alpha}{2}}$

Para que sean iguales es preciso que: $\left.\begin{array}{r} r^3 = \sqrt{r} \\ 3\alpha = \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\}$

$r^3 = \sqrt{r} \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$

$3\alpha = \dfrac{\alpha}{2} + 360° \rightarrow 6\alpha = \alpha + 720° \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0° \\ \alpha = 144° \end{cases}$

Las soluciones son:

$z = 0_{0° + k\cdot 360°}$, $z = 1_{0° + k\cdot 360°}$, $z = 1_{144° + k\cdot 360°}$

095 Investiga qué números complejos cumplen que su cuadrado es igual a su conjugado. Para realizarlo supón que el número está expresado en forma polar.

$z = r_\alpha$

$|z| = r_{360° - \alpha}$

$r^2_{2\alpha} = r_{360° - \alpha}$

Igualamos: $r^2 = r \rightarrow r = 0, r = 1$

$2\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = 120°$

Por tanto, los números cuyo cuadrado es igual a su conjugado son 0_α y $1_{120°}$.

096 Sea $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Comprueba que si $z = -2 + 5i$, entonces z, $u \cdot z$ y $u^2 \cdot z$ son las tres raíces cúbicas de un número complejo. Demuestra que eso sucede para cualquier número z. ¿Qué tiene de particular el número u?

$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111° 48' 5,07''}$

$$u \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 + 5i) = 1_{120°} \cdot \sqrt{29}_{111° 48' 5,07''} = \sqrt{29}_{231° 48' 5,07''}$$

$$u^2 \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 (-2 + 5i) = 1_{120°} \cdot \sqrt{29}_{111° 48' 5,07''} = \sqrt{29}_{351° 48' 5,07''}$$

Son las raíces cúbicas de $29_{335° 24' 15,2''}$.

Esto sucede para cualquier número complejo, ya que las raíces cúbicas de un número complejo tienen el mismo módulo y su argumento se diferencia en 120°.

Al multiplicar cualquier número por u, su módulo no varía y su argumento aumenta 120°.

097 Determina si es cierta esta afirmación.

Si dos números complejos z y w cumplen que $z^3 = w^3$, entonces $z = w$.

La afirmación no es cierta.

Para cualquier número complejo z tenemos otros dos complejos: $1_{120°} \cdot z$ y $1_{240°} \cdot z$, cuyo cubo coincide con el cubo de z.

$(1_{120°} \cdot z)^3 = 1_{360°} \cdot z^3 = z^3$

$(1_{240°} \cdot z)^3 = 1_{720°} \cdot z^3 = z^3$

098 Del número complejo z_1 se sabe que su argumento es 150°, y el módulo de z_2 es 2. Calcula z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $-8i$.

$z_1 = r_{150°}$

$z_2 = 2_\alpha$

$-8i = 8_{270°}$

$r_{150°} \cdot 2_\alpha = 8_{270°}$

$$\left.\begin{array}{r} r \cdot 2 = 8 \\ 150° + \alpha = 270° \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r = 4 \\ \alpha = 120° \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 4_{150°} \\ z_2 = 2_{120°} \end{array}$$

099 Representa el número $1 + i$. Pásalo a forma polar y calcula sus 10 primeras potencias. Represéntalas en el plano complejo. Observa que los afijos de esos números describen una curva espiral.

$z = 1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

$z^2 = 2_{90°}$

$z^3 = 2\sqrt{2}_{135°}$

$z^4 = 4_{180°}$

$z^5 = 4\sqrt{2}_{225°}$

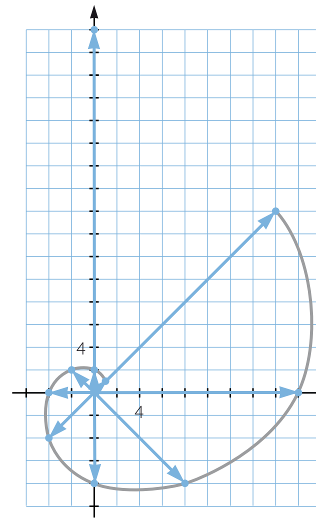
$z^6 = 8_{270°}$

$z^7 = 8\sqrt{2}_{315°}$

$z^8 = 16_{0°}$

$z^9 = 16\sqrt{2}_{45°}$

$z^{10} = 32_{90°}$



100 Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia $1 + 2i$ y cuyo primer término es $-6 - 2i$.

$d = 1 + 2i$

$a_1 = -6 - 2i$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_{10} = -6 - 2i + (10 - 1)(1 + 2i) = 3 + 16i$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(-6 - 2i + 3 + 16i)10}{2} = -15 + 70i$$

101 Si el número complejo $a + bi$ tiene módulo m y argumento α, ¿cómo expresarías en forma binómica un número complejo con módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$? ¿Y si el módulo es $3m$ y el argumento es $\alpha + \dfrac{3\pi}{2}$?

Sea $w = c + di$ el número complejo que tiene por módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$.

$$c = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos(2\pi - \alpha) = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$

$$d = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}(2\pi - \alpha) = -6\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\,\alpha$$

Sea $v = e + fi$ el número complejo que tiene por módulo $3m$ y argumento $\alpha + \dfrac{3\pi}{2}$.

$$e = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\,\alpha$$

$$f = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$

102 Sea $z = r_\alpha$ un número complejo en forma polar y $\bar{z}$ su conjugado. Calcula el valor del cociente.

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z}) \cdot [z^2 + (\bar{z})^2] \cdot \ldots \cdot [z^n + (\bar{z})^n]}$$

$$z = r_\alpha = r\ (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\bar{z} = r_{360° - \alpha} = r\ (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z}) \cdot \left(z^2 + (\bar{z})^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(z^n + (\bar{z})^n\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(r\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) + r\,(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)) \cdot \ldots \cdot (r^n\,(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) + r^n\,(\cos n\alpha - i \operatorname{sen} n\alpha))} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{2r\cos\alpha \cdot 2r^2\cos 2\alpha \cdot 2r^n \cos n\alpha} = \frac{1}{2^n \cdot r^{\frac{n+n^2}{2}}}$$

103 Dada la ecuación $z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$, con a, b, c y d números reales, encuentra la relación entre ellos para que sus raíces tengan el mismo argumento.

$$z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$$

$$z = \frac{-a - bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 4(c+di)}}{2} = \frac{-a - bi \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di}}{2}$$

Para que tengan el mismo argumento, el cociente entre la parte imaginaria y la parte entera debe ser el mismo.

$$a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 4c &= 0 \\ 2ab - 4d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Como solo tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas tenemos que dejar dos de las incógnitas en función de las otras.

$$a_1 = \frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d} \qquad b_1 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$a_2 = -\frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d} \qquad b_2 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_3 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{-\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_4 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

PARA FINALIZAR...

104 **Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$, expresando el resultado lo más simplificado posible.**

$$\sum_{k=0}^{n} i^k = i - 1 - i + 1 + \ldots + i^n$$

Si $n = 4t,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = 1$

Si $n = 4t - 1,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = 0$

Si $n = 4t - 2,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = i - 1$

Si $n = 4t - 3,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = i$

105 **Demuestra que si el número complejo z es una raíz del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, $\bar{z}$ es también una raíz.**

$z = d + ei$

$$P(d + ei) = a(d + ei)^2 + b(d + ei) + c = a(d^2 - e^2 + 2dei) + bd + ebi + c =$$
$$= ad^2 - ae^2 + 2adei + bd + ebi + c = 0$$

Por tanto, resulta que: $ad^2 - ae^2 + bd + c = 0 \qquad 2adei + ebi = 0$

$$P(d - ei) = a(d - ei)^2 + b(d - ei) + c = a(d^2 - e^2 - 2dei) + bd - ebi + c =$$
$$= ad^2 - ae^2 - 2adei + bd - ebi + c =$$
$$= ad^2 - ae^2 + bd + c - (2adei + ebi) = 0$$

106 **Halla un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales, cuyas raíces sean $2i$ y $1 + i$.**

$$(x + 2i)(x - 2i)(x - (1 + i))(x - (1 - i)) \rightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

107 **Obtén la suma y el producto de las raíces n-ésimas de la unidad.**

Sea $\sqrt[n]{1_0} = 1_{\frac{k \cdot 360°}{n}}$.

La suma de las raíces es: $$\frac{1_{\frac{360°}{n}} \cdot \left(\left(1_{\frac{360°}{n}}\right)^n - 1\right)}{\left(1_{\frac{360°}{n}} - 1\right)} = \frac{1_{\frac{360°}{n}} \cdot (1 - 1)}{\left(1_{\frac{360°}{n}} - 1\right)} = 0$$

El producto de las raíces es:

$$P_n = 1_{\frac{360°}{n}} \cdot 1_{\frac{2 \cdot 360°}{n}} \cdot \ldots \cdot 1_{\frac{n \cdot 360°}{n}} = 1_{\left(\frac{360°}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n} + \ldots + \frac{n \cdot 360°}{n}\right)} = 1_{\frac{360°}{n}(1+2+\ldots+n)} = 1_{\frac{360°}{n} \cdot \frac{(n+1)n}{2}} = -1$$

108 **Calcula las 5 soluciones complejas de esta ecuación.**

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

El primer término es la suma de los términos de una progresión geométrica.

$a_1 = 1, r = x \qquad S_5 = \dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1}$

Por tanto, resulta que: $\dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1} = 0 \rightarrow x^6 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1_{60°} \\ x_3 = 1_{120°} \\ x_4 = 1_{180°} \\ x_5 = 1_{240°} \\ x_6 = 1_{300°} \end{cases}$

Las soluciones son: x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.

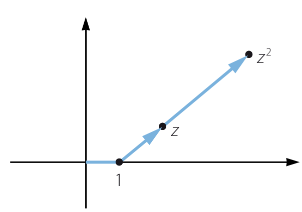
109 **Resuelve el sistema de ecuaciones con incógnitas *z* y *w*.**

$$\begin{cases} iz - (1+i)w = 3 \\ (2+i)z + iw = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} iz - (1+i)w = 3 \\ (2+i)z + iw = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{w + iw + 3}{i} \\ z = \dfrac{4 - iw}{2+i} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} z = w - (w+3)i \\ z = \dfrac{8 - w - (2w+4)i}{5} \end{array}\right\} \rightarrow w = \frac{1}{3} + 2i$$

$$z = \left(\frac{1}{3} + 2i\right) - \left(\left(\frac{1}{3} + 2i\right) + 3\right)i = \frac{7 - 4i}{3}$$

110 **Halla la expresión de *z* sabiendo que los afijos de los números complejos 1, *z* y z^2 están alineados.**



Las coordenadas de los números complejos son:

$A(1, 0) \qquad B(a, b) \qquad C(a^2 - b^2, 2ab)$

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (a - 1, b) \qquad \overrightarrow{AC} = (a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales.

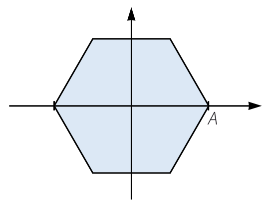
$\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AC} \rightarrow (a - 1, b) = t\,(a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

$$\left.\begin{array}{r} a - 1 = t(a^2 - b^2 - 1) \\ b = t \cdot 2ab \end{array}\right\} \xrightarrow{t = \frac{1}{2a}} a - 1 = \left(\frac{1}{2a}\right)(a^2 - b^2 - 1)$$

$$\rightarrow a^2 - 2a + 1 = b \rightarrow b = a - 1$$

Por tanto, resulta que: $z = a + (a - 1)i$

111 **Un hexágono regular está centrado en el origen de coordenadas y uno de sus vértices es el punto *A*(1, 0).**



Halla los vértices de otro hexágono regular con el mismo centro, lados paralelos al anterior y un área que es 5 veces mayor.

Si los dos polígonos son semejantes y la razón entre sus áreas es 5, la razón entre sus longitudes es $\sqrt{5}$.

Un vértice es el punto $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$ y los otros vértices son $\sqrt{5}_{60°}$, $\sqrt{5}_{120°}$, $\sqrt{5}_{180°}$, $\sqrt{5}_{240°}$ y $\sqrt{5}_{300°}$.

Esto sería equivalente a calcular las raíces sextas de $\left(\sqrt{5}\right)^6 = 125$.

5 Geometría analítica

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La caricia del escorpión

Continuamos, pues, en ese piso calamitoso de Delicias, achicando inundaciones domésticas, martilleando en las cañerías. Todos estos desarreglos me crispaban tanto como a ella, pero la energía que consumíamos en combatirlos nos libraba de discutir otros problemas más importantes. Además de su amante y amigo, me convertía en enyesador, en fontanero, carpintero, electricista y no sé cuántas cosas más. [...] Solventé un problema de unión de dos tuberías en cruz sin saber nada del oficio, basándome en mis conocimientos de geometría euclidiana y aplicando el teorema de Cavalieri. [...]
Dependíamos uno del otro; ella de mí para recomponer los destrozos y yo de ella para tener una misión con que contentarla, o, mejor dicho, para contentar mi amor por ella y así, de vuelta, quererme más. Ya se sabe: uno hipoteca el amor a sí mismo a que la persona amada esté de acuerdo en concedértelo. Se antepone la convicción de que la otra persona está a gusto con uno para poder sentirse él también cómodo. Cuando amas no unes tu corazón: lo divides. [...]

Según uno baja por Delicias, para entrar en nuestra antigua calle hay que atravesar la plazoleta Luca de Tena, doblando una esquina a la izquierda, y es ahí donde uno se tropieza con el enorme respiradero del suburbano. Para ser exactos, no es una esquina, sino un chaflán (triedro en el cual dos planos normalmente perpendiculares son cortados por una intersección). La placa metálica que airea las emanaciones del metro se compone de cinco celdillas de ancho por nueve de largo, de un metro cuadrado cada una (en total, cuarenta y cinco metros cuadrados). Es difícil eludir ese paso, puesto que más allá hay un parterre con árboles, a menos que uno dé un rodeo por su lado más largo, primero a la izquierda y luego a la derecha. Lo usual en estos casos es abreviar cruzando el respiradero por su diagonal. Candela, en cambio, recorre los dos catetos del triángulo rectángulo en vez de la hipotenusa (o diagonal del rectángulo), cometiendo así una imperdonable infracción pitagórica. Más que repugnancia al aire que sale de allí, yo casi creo que es por miedo de que la placa ceda bajo su peso, o algo. Una manía como cualquier otra; las mías son peores.

IGNACIO GARCÍA-VALIÑO

Calcula los módulos de los vectores que definen Candela y su novio al cruzar la placa metálica que airea las emanaciones del metro. ¿Qué relación existe entre ellos?

Tomamos como origen la esquina por donde empiezan a cruzar la placa metálica.

En su movimiento, Candela define los vectores (5, 0) y (0, 9).

Por tanto, los módulos miden 14 metros.

El novio de Candela define el vector (5, 9).

Este vector tiene por módulo:

$$\sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106} = 10{,}30 \text{ metros}$$

Es mayor la distancia recorrida por Candela.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Pon varios ejemplos de magnitudes escalares y vectoriales.**

Son magnitudes escalares: la capacidad, el volumen, la superficie…

Son magnitudes vectoriales: el peso, la aceleración…

002 **Representa estas rectas.**

a) $y = -2x$

b) $y = \dfrac{x}{2}$

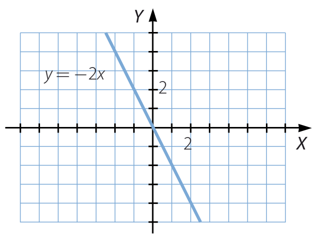
c) $y = -x + 1$

d) $y = \dfrac{-x-1}{2}$

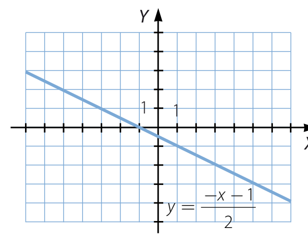
e) $y = 2x - 2$

f) $y = \dfrac{x}{2} - 1$

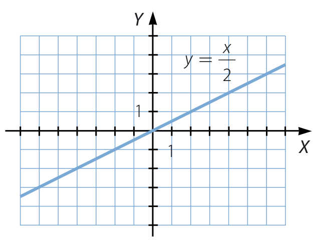
a)



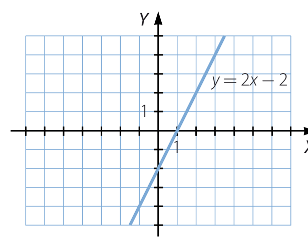
d)



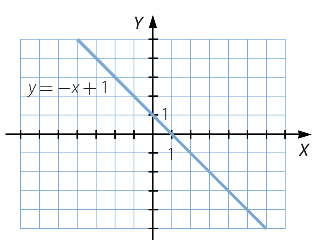
b)



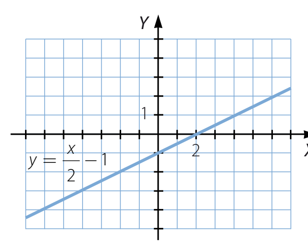
e)



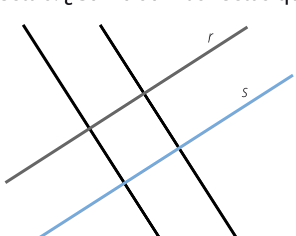
c)



f)

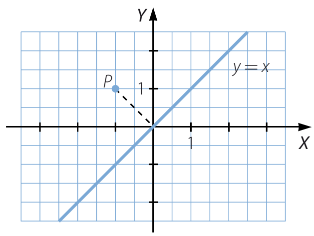


003 **Dibuja dos rectas paralelas, *r* y *s*. Después, traza una perpendicular a la recta *r* y otra a la recta *s*. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?**



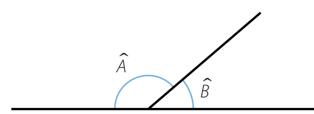
Las rectas son paralelas.

004 Representa, en un sistema de ejes cartesianos, el punto $P(-1, 1)$ y la recta $y = x$, y determina la proyección ortogonal del punto sobre la recta.



La proyección ortogonal de *P* sobre *r* es el origen.

005 Observa los siguientes ángulos y contesta.



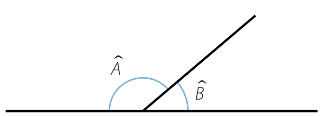
a) ¿Cuánto suman los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$?

b) Dibuja en tu cuaderno un ángulo igual a $\hat{A}$ y otro igual a $\hat{B}$.

c) ¿Qué condiciones cumplen los ángulos que has dibujado?

a) Los ángulos suman 180°.

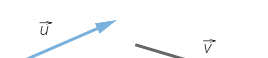
b)



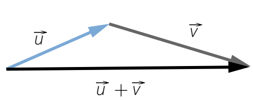
c) Son ángulos suplementarios.

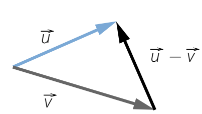
ACTIVIDADES

001 Copia estos vectores y calcula gráficamente su suma y su diferencia.

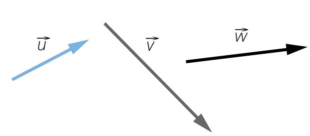


$$\vec{u} + \vec{v} \qquad \vec{u} - \vec{v}$$





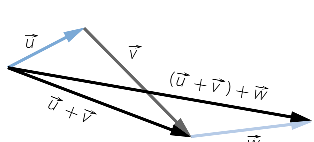
002 Realiza las siguientes sumas de vectores.



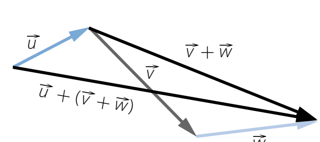
a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

a)



b)

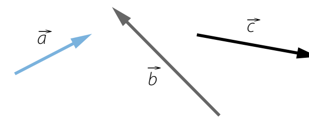


003 Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.

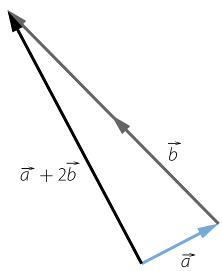
a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

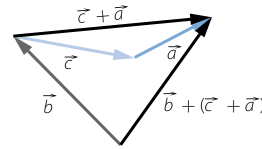
c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$



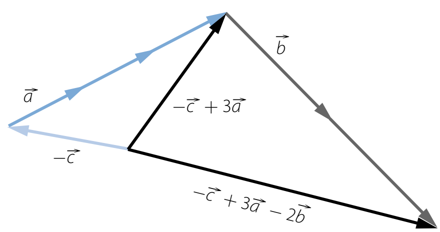
a)



c)

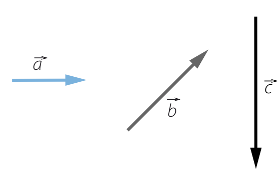


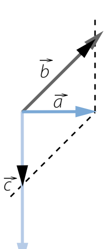
b)

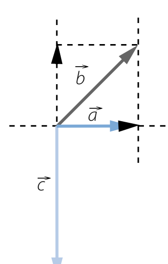


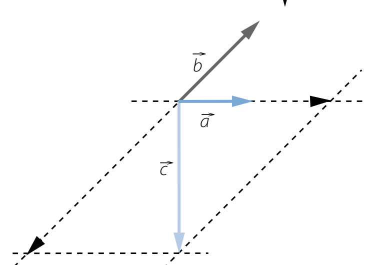
004 Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Expresa $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{c}$, y también $\vec{c}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

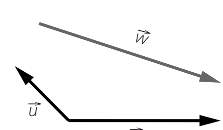




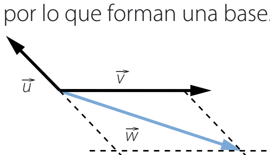




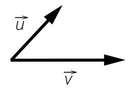
005 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base, y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.



006 Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:



a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

b) Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.

c) Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

a)

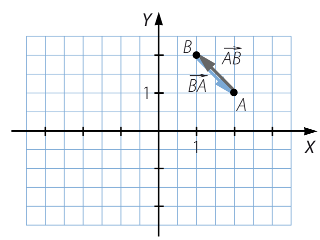
b) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.

c) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$

007 Dibuja los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$ y calcula.

a) Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

b) Sus módulos.



a) $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, 2 - 1) = (-1, 1)$

$\overrightarrow{BA} = (2 - 1, 1 - 2) = (1, -1)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

008 Encuentra cuáles son vectores paralelos.

$\vec{a} = (2, 1)$ $\quad \vec{b} = (-2, -1)$ $\quad \vec{c} = (-2, 1)$ $\quad \vec{d} = (2, -1)$ $\quad \vec{e} = (4, 2)$ $\quad \vec{f} = (-6, 3)$

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ son paralelos, porque: $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} = \dfrac{4}{2}$

Los vectores $\vec{c}$, $\vec{d}$ y $\vec{f}$ son paralelos, porque: $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{-6}{3}$

009 Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ y $D(-3, 4)$, halla los vectores.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ $\quad$ c) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA}$

a) $(2 - 0, 1 - 3) - (-3 - (-2), 4 - 2) = (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4)$

b) $(-2 - 0, 2 - 3) + (-2 - (-3), 2 - 4) = (-2, -1) + (1, -2) = (-1, -3)$

c) $(-3 - 2, 4 - 1) - (0 - (-2), 3 - 2) = (-5, 3) - (2, 1) = (-7, 2)$

010 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza las siguientes operaciones de vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ $\quad$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ $\quad$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - (0, -9) = (2, 8)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = (10, -5) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 1) + (0, 6) = (-2, 7)$

011 **Sean los vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$. Calcula.**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) + (0, -1)) = (0, 2) \cdot (1, -2) = -4$

c) $\vec{w} \cdot \vec{v} = (0, -1) \cdot (1, -1) = 1$

d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (0, -1) = -2$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) - (0, -2)) = (0, 2) \cdot (1, 1) = 2$

f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v} = (0, -4) \cdot (3, -3) = 12$

012 **El producto escalar de dos vectores coincide con el producto de sus módulos. ¿Qué puedes decir de los vectores?**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

Para que el producto escalar de dos vectores coincida con el producto de sus módulos, tiene que verificarse que $\cos\alpha = 1$. Por tanto, los vectores deben tener igual dirección y sentido.

013 **Halla el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (4, -6)$. ¿Qué deduces del resultado?**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2) \cdot (4, -6) = 12 - 12 = 0$. El producto de vectores no nulos puede ser cero.

014 **Calcula el ángulo que forman estos vectores expresados en coordenadas.**

a) $\vec{u} = (1, -3)$ $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-1, 2)$ $\vec{v} = (4, 3)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -0{,}61 \rightarrow \alpha = 127°\ 52'\ 29{,}9''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = 0{,}18 \rightarrow \alpha = 79°\ 41'\ 42{,}55''$

015 **Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a los siguientes vectores.**

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$ d) $\vec{d} = (1, -5)$

Respuesta abierta.

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)

Vectores perpendiculares: (−1, 1), (−2, 2) y (−3, 3)

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)

Vectores perpendiculares: (2, −3), (4, −6) y (6, −9)

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

d) $\vec{d} = (1, -5)$

Vectores paralelos: (2, −10), (3, −15) y (4, −20)

Vectores perpendiculares: (5, 1), (10, 2) y (15, 3)

016 **Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.**

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

El perímetro mide:

$$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36 \text{ u}$$

017 **Dados $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$, halla el punto medio de AB y los simétricos de A respecto de B y de B respecto de A.**

Llamamos M al punto medio de A y B.

$$M = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de A respecto de B.

$$(1, -2) = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) \rightarrow (x, y) = (4, -7)$$

Llamamos $B'(x', y')$ al punto simétrico de B respecto de A.

$$(-2, 3) = \left(\frac{1+x'}{2}, \frac{-2+y'}{2}\right) \rightarrow (x', y') = (-5, 8)$$

018 **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.**

$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

019 **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

020 **Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.**

Bisectriz del primer cuadrante.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$$

Bisectriz del segundo cuadrante.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -t \end{array}\right\}$$

021 **Dos rectas, *r* y *s*, ¿pueden tener el mismo vector director? ¿Qué relación habrá entre ellas?**

Dos rectas pueden tener el mismo vector director. Cuando dos rectas tienen el mismo vector director, son paralelas o coincidentes.

022 **Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$. Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.**

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto *P* cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto *P* no pertenece a la recta.

023 **Obtén la ecuación general de la recta que pasa por $A(1, -1)$ y $B(0, 2)$. Calcula también un vector perpendicular a su vector director.**

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$

Obtenemos la ecuación general:

$A = 3 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -2$

$3x + y - 2 = 0$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(-3, -1)$.

024 **Halla las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(3, -3)$ y por el origen de coordenadas.**

Calculamos la ecuación explícita de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{A(3,-3)} -3 = m \cdot 3 + n \\ y = mx + n \xrightarrow{O(0,\,0)} 0 = m \cdot 0 + n \end{array}\right\} \rightarrow y = -x$$

Para determinar la ecuación punto-pendiente hallamos un vector director:

$\overrightarrow{OA} = (3, -3)$

Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{-3}{3} = -1$$

Tomamos el punto $O(0, 0)$:

$y - 0 = -1(x - 0)$

025 **Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.**

Calculamos la pendiente: $tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

026 **Halla los valores de B y C para que las rectas r y s sean paralelas.**

$$r\colon\ 3x + By + 5 = 0 \qquad s\colon\ x + 2y + C = 0$$

Para que las rectas sean paralelas se tiene que cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{B}{2} \rightarrow B = 6 \qquad \frac{3}{1} \neq \frac{5}{C} \rightarrow C \neq \frac{5}{3}$$

027 **Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?**

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta r, y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta s.

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$$

028 **Halla la distancia entre el punto $P(2, -1)$ y la recta r, cuya ecuación es:**

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ u$$

029 **Calcula la distancia que separa esta recta del origen de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ u$$

030 **Halla la distancia entre estas rectas.**

$$r\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\}$$

Calculamos el vector director de la recta r: $\vec{u_r} = (2, 5)$

Hallamos el vector director de la recta s: $\vec{u_s} = (2, 5)$

Tomamos un punto de la recta r, $A(0, 1)$, y vemos si pertenece a s:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} 0 = 2t \\ 1 = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-2}{5} \end{array}\right\} \rightarrow A \notin s$$

Expresamos la recta, s, en forma general:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x - 2y + 6 = 0$$

Las rectas son paralelas, y calculamos la distancia de A a s:

$$d(A, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}\ u$$

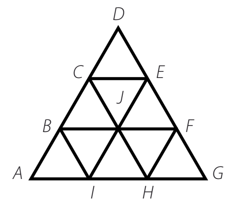
031 **Calcula el ángulo que forman las rectas.**

$$r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\rightarrow \alpha = 71^\circ\ 33'\ 54{,}18''$$

032 A la vista de la siguiente figura, realiza las operaciones indicadas.



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

b) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{IH}+2\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{DC}$

e) $\overrightarrow{HG}+2\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{CB}$

f) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}$

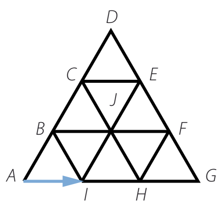
g) $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{IE}$

h) $2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{CD}$

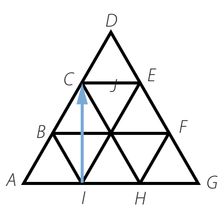
i) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$

j) $2\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{BC}$

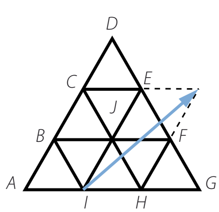
a)



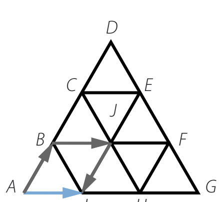
b)



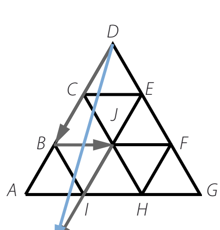
c)



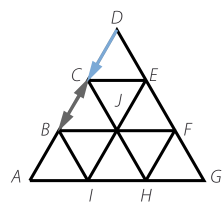
d)



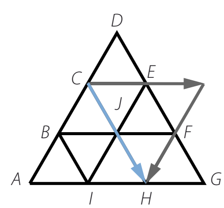
e)



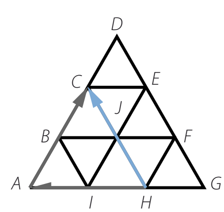
f)



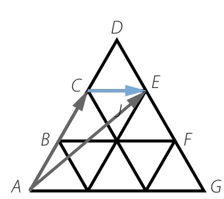
g)



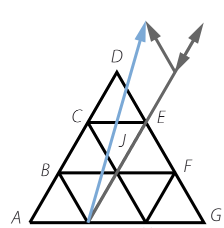
h)



i)

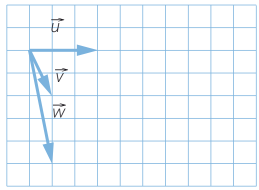


j)



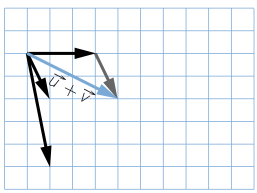
033

Haz las siguientes operaciones.

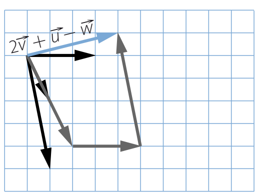


a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $2\vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$
c) $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$
d) $\vec{v} - 2\vec{u} - \vec{w}$
e) $2\vec{u} + \vec{w}$

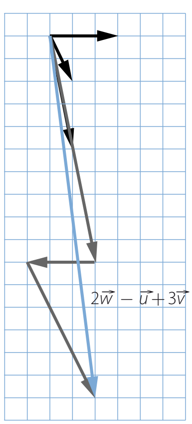
a)



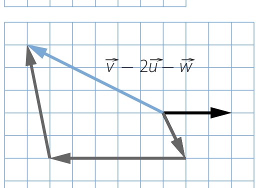
b)



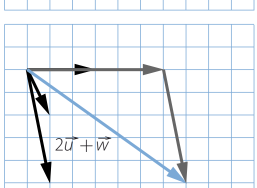
c)



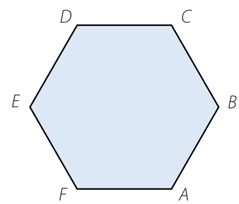
d)



e)



034 Expresa los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{FC}$ de la figura como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

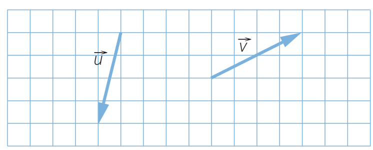
$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB}$

035 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura forman una base.

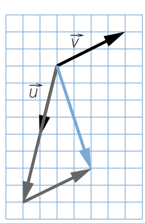


Dibuja los vectores con coordenadas en esa base.

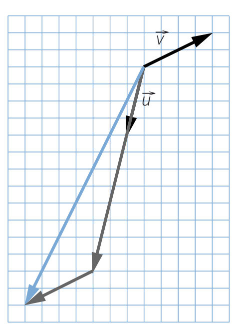
a) (2, 1) b) (3, –1) c) (–2, 3)

Como los vectores tienen distinta dirección, forman una base.

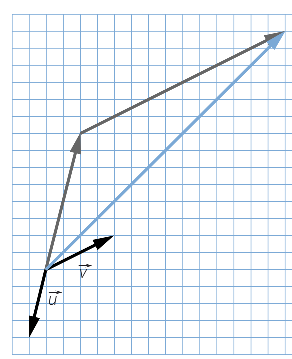
a)



b)



c)



036 Razona qué pares de vectores forman una base.

a) $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$ b) $\vec{u} = (0, -2)$ y $\vec{v} = (4, 1)$

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, puesto que no son proporcionales.

$$(2, -3) = t(5, 4) \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{5} \\ t = \dfrac{-3}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No son proporcionales.}$$

b) De forma análoga, tenemos que:

$$(0, -2) = t(4, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No son proporcionales.}$$

037 Si, respecto de una base, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores

a) $2\vec{u} + \vec{v}$
c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$
e) $-3\vec{u} - \vec{v}$
b) $5\vec{u} + 2\vec{v}$
d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = (4, -6) + (5, 4) =$
$(9, -2)$

b) $5\vec{u} + 2\vec{v} = (10, -15) + (10, 8) = (20, -7)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 3) + (10, 8) = (8, 11)$

d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (4, -6) + (2{,}5; 2) = (6{,}5; -4)$

e) $-3\vec{u} - \vec{v} = (-6, 9) + (-5, -4) = (-11, 5)$

f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = \left(-1, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{25}{6}\right)$

038 Calcula λ y μ para que los vectores $\vec{u} = (5, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (13, 11)$ verifiquen que: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{w}$.

$\lambda(5, 1) + \mu(-1, 4) = (13, 11)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\lambda - \mu = 13 \\ \lambda + 4\mu = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda = 11 - 4\mu} 5(11 - 4\mu) - \mu = 13 \rightarrow \mu = 2 \rightarrow \lambda = 3$$

039 Halla el módulo de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ y $2\vec{b} - \vec{c}$, dados $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (-5, -12)$ y $\vec{c} = (3, -1)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\vec{a} + \vec{b} = (-8, -8)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$2\vec{b} - \vec{c} = (-10, -24) + (-3, 1) = (-13, -23)$

$|2\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(-13)^2 + (-23)^2} = \sqrt{698}$

040 Si $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v}$
c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$
d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 1) \cdot (2, -1) = 6 - 1 = 5$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v} = (3, 1) \cdot (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = ((6, 2) + (6, -3)) \cdot (2, -1) = (12, -1) \cdot (2, -1) = 24 + 1 = 25$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (3, 1) \cdot ((3, 1) + (-2, 1)) = (3, 1) \cdot (1, 2) = 3 + 2 = 5$

041 Dados los puntos $A(3, 7)$, $B(4, 9)$, $C(-4, 3)$ y $D(4, 9)$, ¿son paralelos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

$\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

$\overrightarrow{CD} = (8, 6)$

No son paralelos, porque: $\frac{8}{1} \neq \frac{6}{2}$

042 Calcula el valor de t para que $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$, si $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(3,t)$. Halla el módulo de los dos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=7$

$(-1,2)\cdot(3,t)=7 \rightarrow -3+2t=7 \rightarrow t=5$

$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

043 Si $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$ y $\vec{w}=(e,f)$, prueba que se verifican las igualdades.

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

a) $\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)=\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(a,b)\cdot((c,d)+(e,f))=(a,b)\cdot(c+e,d+f)=ac+ae+bd+bf$

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)=ac+bd+ae+bf$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=((a,b)+(c,d))\cdot((a,b)+(c,d))=$
$=(a+c,b+d)\cdot(a+c,b+d)=a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=(a,b)\cdot(a,b)+(2a,2b)\cdot(c,d)+(c,d)\cdot(c,d)=$
$=a^2+b^2+2ac+2bd+c^2+d^2$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=((a,b)+(c,d))\cdot((a,b)-(c,d))=$
$=(a+c,b+d)\cdot(a-c,b-d)=a^2-c^2+b^2-d^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=(a,b)\cdot(a,b)-(c,d)\cdot(c,d)=a^2+b^2-c^2-d^2$

044 Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos.

a) $\vec{a}=(-2,4)$ y $\vec{b}=(3,2)$

b) $\vec{c}=(4,-3)$ y $\vec{d}=(6,8)$

a) $\frac{-2}{3}\neq\frac{4}{2}$

No son paralelos.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2,4)\cdot(3,2)=-6+8\neq 0$

No son perpendiculares.

b) $\frac{4}{6}\neq\frac{-3}{8}$

No son paralelos.

$\vec{c}\cdot\vec{d}=(4,-3)\cdot(6,8)=24-24=0$

Son perpendiculares.

045 Encuentra un vector $\vec{u}=(a,b)$ que es perpendicular a $\vec{v}=(3,5)$ y cuyo módulo sea $|\vec{u}|=2\sqrt{34}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a,b)\cdot(3,5)=3a+5b=0 \rightarrow a=-\frac{5b}{3}$

$|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\frac{5b}{3}\right)^2+b^2}=2\sqrt{34} \rightarrow \frac{25b^2}{9}+b^2=136 \rightarrow 34b^2=1.224 \rightarrow b=\sqrt{36}=\pm 6$

Si $b=6 \rightarrow a=-10$ Si $b=-6 \rightarrow a=10$

046 Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$

$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7-3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$

Si $a = -\dfrac{4}{5} \rightarrow b = \dfrac{47}{5}$

Si $a = 5 \rightarrow b = -8$

047 Halla m y n para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 4$

Si $m = 4$:

$(3, 4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \dfrac{4}{3}$

Si $m = -4$:

$(3, -4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n + 4 = 0 \rightarrow n = -\dfrac{4}{3}$

048 Calcula m para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:

a) Sean perpendiculares.
b) Sean paralelos.
c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, 2) \cdot (m, 6) = 7m + 12 = 0 \rightarrow m = -\dfrac{12}{7}$

b) $\dfrac{7}{m} = \dfrac{-2}{6} \rightarrow m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \rightarrow m = \sqrt{17}$

049 Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$
$\rightarrow m = \pm\sqrt{10}$

La solución no es única.

050 ¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, siendo $\vec{b}=(2,1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c}=(2,6)$?

$\vec{a}\cdot\vec{b}=5 \rightarrow (a,b)\cdot(2,1)=5 \rightarrow 2a+b=5$
$\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \rightarrow (a,b)\cdot(2,6)=0 \rightarrow 2a+6b=0$

Resolvemos el sistema:
$a=3, b=-1$

051 Considera que A, B, C y D son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$

Tomamos el punto A como origen, por lo que obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ y $D(0,1)$

a) $\overrightarrow{AB}=(1,0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,1)$
$(1,0)\cdot(0,1)=0$

b) $\overrightarrow{AC}=(1,1)$, $\overrightarrow{DB}=(1,-1)$
$(1,1)\cdot(1,-1)=1-1=0$

c) $\overrightarrow{AD}=(0,1)$, $\overrightarrow{CB}=(0,-1)$
$(0,1)\cdot(0,-1)=-1$

d) $\overrightarrow{AC}=(1,1)$, $\overrightarrow{CB}=(0,-1)$
$(1,1)\cdot(0,-1)=-1$

052 Por una traslación, el punto $(1,-3)$ se transforma en $(3,7)$. ¿Cuál es la imagen del punto $(-2,5)$ por la misma traslación? ¿Y la imagen de $(4,-6)$?

Calculamos el vector de la traslación:
$A(1,-3)$, $B(3,7)$
$\overrightarrow{AB}=(2,10)$

Hallamos la imagen de $(-2,5)$:
$(-2,5)+(2,10)=(0,15)$

Determinamos la imagen de $(4,-6)$:
$(4,-6)+(2,10)=(6,4)$

053 Halla el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{a}=(-1,5)$ y $\vec{b}=(3,2)$
b) $\vec{c}=\left(1,\sqrt{3}\right)$ y $\vec{d}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$
c) $\vec{e}=(-6,4)$ y $\vec{f}=(-9,6)$
d) $\vec{g}=(2,-5)$ y $\vec{h}=(4,6)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=0{,}38 \rightarrow \alpha=67°\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|}=\dfrac{2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}=0{,}5 \rightarrow \alpha=60°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{f}|} = \dfrac{78}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{117}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{g}\cdot\vec{h}}{|\vec{g}|\cdot|\vec{h}|} = \dfrac{-22}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{52}} = -0{,}56 \rightarrow \alpha = 124°\ 30'\ 30{,}6''$

054 Calcula m para que los vectores $\vec{a} = (8, -6)$ y $\vec{b} = (m, 3)$ formen un ángulo de 60°.

$$\cos 60° = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10+\sqrt{m^2+9}} \rightarrow \sqrt{m^2+9} = 16m-46$$

$$\rightarrow 255m^2 - 1.472m + 2.107 = 0 \rightarrow m = \frac{736}{255} \pm \frac{\sqrt{4.411}}{255}$$

055 Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\cdot|\vec{b}|$.

$$\cos 30° = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a-4b}{5\sqrt{3}+5} \rightarrow 15+5\sqrt{3} = 6a-8b$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow a^2+b^2 = 75$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6a-8b = 15+5\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 75 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}} \left(\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}\right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)b + 75\sqrt{3} - 1.200 = 0$$

$$\rightarrow b = -\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{5} \pm \sqrt{\frac{1.296-27\sqrt{3}}{50}}$$

056 Calcula a y b, si los vectores $\vec{u} = (a, 4)$ y $\vec{v} = (b, 14)$ forman un ángulo de 45° y $|\vec{u}| = 5$.

$$\cos 45° = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ab+56}{5+\sqrt{b^2+196}} \rightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{2b^2+392} = 2ab+112$$

$$\sqrt{a^2+16} = 5$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5\sqrt{2}+\sqrt{2b^2+392} = 2ab+112 \\ \sqrt{a^2+16} = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\pm 3} \left\{\begin{array}{l} b_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}\left(56\sqrt{2}-5\right)}{17} + \sqrt{\dfrac{9.629-560\sqrt{2}}{289}} \\ b_2 = \dfrac{3\sqrt{2}\left(56\sqrt{2}-5\right)}{17} - \sqrt{\dfrac{9.629-560\sqrt{2}}{289}} \end{array}\right.$$

057 Halla el punto medio de los segmentos de extremos:

a) $A(3, 5)$ y $B(9, 11)$

b) $A(-3, 1)$ y $B(7, -4)$

c) $A(4, 5)$ y $B(7, 1)$

d) $A(-6, -1)$ y $B(-9, -3)$

Llamamos M al punto medio de A y B.

a) $M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{5+11}{2}\right) = (6, 8)$

b) $M = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1-4}{2}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

c) $M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$

d) $M = \left(\frac{-6-9}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = \left(-\frac{15}{2}, -2\right)$

058 Si el punto medio del segmento AB es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto B. Luego obtén A con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{9+x}{2} \\ 5 = \dfrac{7+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = \dfrac{4+x}{2} \\ 5 = \dfrac{-9+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = 19 \end{array}\right\}$$

059 Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(-4, 2)$ respecto del punto $Q(5, -1)$. Determina también el punto simétrico de $A(3, -2)$ respecto de $B(-3, 4)$.

Como $P(-4, 2)$ es el punto medio de $Q(5, -1)$ y $Q'(x, y)$:

$$(-4, 2) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 = \dfrac{5+x}{2} \\ 2 = \dfrac{-1+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -13 \\ y = 5 \end{array}\right\}$$

Y como $B(-3, 4)$ es el punto medio de $A(3, -2)$ y $A'(x, y)$:

$$(-3, 4) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 = \dfrac{3+x}{2} \\ 4 = \dfrac{-2+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -9 \\ y = 10 \end{array}\right\}$$

060 Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?

Calculamos el punto medio del segmento AC:

$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

El cuarto vértice, $D(x, y)$, es simétrico de B respecto de M.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{7+x}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 \end{array}\right\}$$

061 Dos vértices consecutivos de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas son $(4, 0)$ y $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$. Calcula las coordenadas de los demás vértices.

Calculamos los vértices $A'(a, b)$ y $B'(c, d)$, que son simétricos de A y B respecto de O.

$$(0, 0) = (4 + a, 0 + b) \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 0 \end{array}\right\} \qquad (0, 0) = \left(2 + a, 2\sqrt{3} + b\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

El vértice C se obtiene con una traslación con origen en B y vector $(-4, 0)$:

$$C = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-4,0) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$$

El vértice C' se obtiene con una traslación con origen en B' y vector $(4, 0)$:

$$C' = \left(-2, -2\sqrt{3}\right) + (4, 0) = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$$

062 Tres vértices consecutivos de un hexágono regular son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $\left(3, \sqrt{3}\right)$. Halla los otros vértices.

Sabemos que $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C\left(3, \sqrt{3}\right)$.

Calculamos el vértice D, con una traslación con origen en C y vector guía $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$D = \left(3, \sqrt{3}\right) + \left(-1, \sqrt{3}\right) = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$$

Hallamos el vértice E, con una traslación con origen en D y vector guía $(-2, 0)$:

$$E = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-2, 0) = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$$

Determinamos el vértice F, con una traslación con origen en E y vector guía $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$:

$$F = \left(0, 2\sqrt{3}\right) + \left(-1, -\sqrt{3}\right) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$$

063 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos del segmento, y el segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12, 9) = (9, 2)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12, 9) = (13, 5)$$

064 ●○○ **Determina el valor de a, sabiendo que la distancia entre $Q(-6, 2)$ y $P(a, 7)$ es 13. Escribe también las coordenadas y el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.**

$$\sqrt{(-6-a)^2+(2-7)^2}=13 \rightarrow \sqrt{36+12a+a^2+25}=13$$

$$\rightarrow a^2+12a-108=0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=-18 \\ a_2=6 \end{array}\right\}$$

Calculamos las dos soluciones:

$\overrightarrow{PQ}=(-12, -5)$

$\overrightarrow{PQ}=(12, -5)$

$|\overrightarrow{PQ}|=13$

065 ●●○ **Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.**

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB}=(6, -2)$, $\overrightarrow{BC}=(-4, -4)$ y $\overrightarrow{AC}=(2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}\ u$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}\ u$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\ u$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, AB y AC, es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, h, sobre el lado BC aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2}=\sqrt{40-8}=\sqrt{32}\ u$$

$$A=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}{2}=16\ u^2$$

066 ●●○ **Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.**

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB}=(8, 6)$, $\overrightarrow{BC}=(-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{64+36}=10\ u$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20\ u$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+484}=\sqrt{500}\ u$

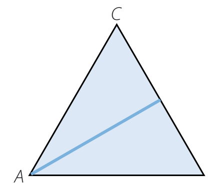
Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2$

$10^2+20^2=500$

Luego el triángulo es rectángulo.

067 Halla la longitud de la mediana que parte de *A* en el triángulo de vértices $A(-1, 4)$, $B(6, 5)$ y $C(10, -3)$. ¿Coincide la mediana con la altura en este caso? Justifícalo.



Calculamos el punto medio, *M*, del segmento *CB*:

$$M = \left(\frac{6+10}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (8, 1)$$

Para hallar la longitud de la mediana, determinamos el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (9, -3)$ $\quad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

Para que la mediana, *AM*, coincida con la altura sobre el lado *CB*, los lados *AC* y *AB* deben ser iguales.

$\overrightarrow{AC} = (11, -7)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (7, 1)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Luego la mediana no coincide con la altura.

068 Halla los vértices de un cuadrado si dos de esos vértices no consecutivos son (3, 1) y (9, −7).

$A(3, 1)$, $C(9, -7)$, $B(a, b)$ y $D(c, d)$

Calculamos la longitud de la diagonal formada por los vértices dados:

$|D| = \sqrt{(9-3)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{36+64} = 10$ u

Hallamos la longitud de los lados, l: $100 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{50}$

La longitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$ debe ser igual a la longitud del lado.

$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 2b + 1$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-9)^2 + (b+7)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 18a + 81 + b^2 + 14b + 49$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-9)^2 + (d+7)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 18c + 81 + d^2 + 14d + 49$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-3)^2 + (d-1)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 6c + 9 + d^2 - 2d + 1$$

Resolvemos el sistema: $B(2, -6)$ y $D(10, 0)$

069 Los vértices de un triángulo son (−7, 3), (1, 1) y (−1, −5). Halla los puntos medios de sus lados. Comprueba que el triángulo que determinan tiene los lados paralelos al primero y que la medida de sus lados es la mitad.

Calculamos el punto medio, C', del lado *AB*, siendo $A(-7, 3)$ y $B(1, 1)$: $C' = (-3, 2)$

Hallamos el punto medio, B', del lado *AC*, siendo $A(-7, 3)$ y $C(-1, -5)$: $B' = (-4, -1)$

Determinamos el punto medio, A', del lado *CB*, siendo $B(1, 1)$ y $C(-1, -5)$: $A' = (0, -2)$

Calculamos los vectores formados por los vértices de los triángulos:

$\overrightarrow{AB} = (8, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (6, -8)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2, -6)$

$\overrightarrow{A'B'} = (-4, 1)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-3, 4)$ y $\overrightarrow{B'C'} = (1, 3)$

Como las coordenadas son proporcionales, los lados son paralelos.

Determinamos la longitud de los lados:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ $\quad |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+64} = 10$ $\quad |\overrightarrow{A'C'}| = \sqrt{9+16} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ $\quad |\overrightarrow{B'C'}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

070 ●●● Dados los puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$, obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan.

Los vectores formados por los vértices deben tener la misma longitud.

Si $C(0, c)$:

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9 + c^2} \qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9 + c^2} \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6$$

$$6 = \sqrt{9 + c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$$

Los puntos pedidos son: $C_1\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ y $C_2\left(0, -3\sqrt{3}\right)$

Calculamos el área de los triángulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

071 ●●● ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$? Con este resultado demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

$\vec{u} = (a, b) \qquad \vec{v} = (c, d)$

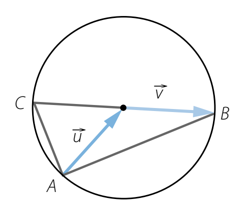
$$(a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = 0 \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales. Por tanto, si las diagonales son perpendiculares, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

072 ●●● El lado mayor de este triángulo es un diámetro de la circunferencia.

Expresa el vector $\overrightarrow{AC}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Realiza el producto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ y simplifica todo lo posible. ¿Qué resultado obtienes?



$\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v} \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$

Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales, ya que son radios de la circunferencia.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$$

073 ●○○ Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que cumplen estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(3, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-2, 7)$.

c) Su ecuación explícita es $y = -3x + 4$.

a) Calculamos el vector director: $(8, 2)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (5, 3) + t(8, 2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, 4)$ y $B(1, 1)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 1) + t(1, -3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\}$

074 Expresa la ecuación continua de la recta que:

a) Pasa por los puntos (8, 3) y (1, 5).

b) Pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, -4)$.

c) Su ecuación general es $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director: $(-7, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x-8}{-7} = \dfrac{y-3}{2}$

b) Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-4}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, -7)$ y $B(1, -5)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2}$

075 Escribe la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por los puntos (−3, 5) y (3, −1).

b) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.

c) Su ecuación continua es $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{5}$.

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,\,5)} 5 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3,\,-1)} -1 = 3m + n \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $m = -1$ y $n = 2 \rightarrow y = -x + 2$

b) Calculamos la pendiente: $m = \dfrac{2}{3}$

El punto $P(-1, 0)$ debe cumplir la ecuación de la recta.

$y = \dfrac{2}{3}x + n \rightarrow 0 = -\dfrac{2}{3} + n \rightarrow n = \dfrac{2}{3}$

Por tanto, la ecuación explícita de la recta es:

$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{5} \rightarrow 5x = -2y + 6 \rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 3$

076 Comprueba si los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -1)$ están en las rectas.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{array}\right\}$ b) $y = \dfrac{5x - 3}{3}$ c) $5x - 2y + 19 = 0$ d) $\dfrac{x + 4}{3} = \dfrac{y + 7}{2}$

a) $\left.\begin{array}{l} -3 = 3 - 2\lambda \\ 2 = 3 + 4\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = \dfrac{-1}{4} \end{array}\right\}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\left.\begin{array}{l} 5 = 3 - 2\lambda \\ -1 = 3 + 4\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}\right\}$

El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

b) $2 \neq \dfrac{-15 - 3}{3}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$-1 \neq \dfrac{25 - 3}{3}$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

c) $-15 - 4 + 19 = 0$

El punto $(-3, 2)$ pertenece a la recta.

$25 + 2 + 19 \neq 0$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

d) $\dfrac{-3 + 4}{3} \neq \dfrac{2 + 7}{2}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\dfrac{5 + 4}{3} = \dfrac{-1 + 7}{2} \rightarrow$ El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

077 Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.

a) Vector director de la recta: $(2, -4)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{-4}$

b) Vector director de la recta: $(2, 5)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x + 2}{2} = \dfrac{y - 5}{5}$

078 Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto (0, −1) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-1}$ y pasa por el punto (5, −2).

a) Vector director de la recta: (3, 0)

Pendiente: $m = 0$

$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: (4, −1)

Pendiente: $m = -\dfrac{1}{4}$

$-2 = -\dfrac{5}{4} + n \rightarrow n = -\dfrac{3}{4}$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$

079 Escribe la ecuación general de la recta que:

a) Pasa por el punto (10, −2) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $y = \dfrac{8x-3}{2}$ y pasa por el punto (4, 0).

a) Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-10}{-3} = \dfrac{y+2}{-2}$

Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: (1, 4)

Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{4}$

Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

080 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta.

a) Pasa por el punto (0, −3) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{4}$.

b) Pasa por el punto (−5, 0) y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a (−3, 4) es (4, 3).

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a (−2, 3) es (−3, −2)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

081 ●○○ **Determina la ecuación continua de la recta que cumple estas condiciones.**

a) Pasa por el punto (7, −1) y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{-x+6}{3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 4) y es perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta:
$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$
Un vector perpendicular a (3, −1) es (1, 3).
Expresamos la recta en forma continua:
$$\frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{3}$$

b) Calculamos el vector director de la recta:
$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$
Un vector perpendicular a (1, 2) es (−2, 1).
Expresamos la recta en forma continua:
$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-4}{1}$$

082 ●○○ **Halla la ecuación explícita de la recta que:**

a) Pasa por el punto (2, −5) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 8) y es perpendicular a la recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, 2)$
La pendiente de la recta es $m = \dfrac{2}{3}$.
Como pasa por el punto (2, −5):
$$-5 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\frac{19}{3}$$
La ecuación de la recta es $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{19}{3}$.

b) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (-2, 3)$
La pendiente de la recta es $m = -\dfrac{3}{2}$.
Como pasa por el punto (−4, 8):
$$8 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + n \rightarrow n = 2$$
La ecuación de la recta es $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$.

083 ●●○ **Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos (−1, −10) y (2, *c*), sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.**

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \dfrac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$
$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+10}{21}$$

Y la expresamos en forma general:

$21x+21=3y+30 \rightarrow 21x-3y-9=0$

084 **Determina el punto de la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}$, que dista 2 unidades del punto $P(-2, 2)$.**

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=-1-t \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma:

$A_r(1+2t, -1-t)$

Calculamos los vectores que van de la recta al punto P:

$\overrightarrow{A_rP}=(-3-2t, 3+t)$

Veamos cuáles de estos vectores tienen módulo 2.

$$2=\sqrt{(-3-2t)^2+(3+t)^2} \rightarrow 4=9+12t+4t^2+9+6t+t^2$$

$$\rightarrow 5t^2+18t+14=0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{-9-\sqrt{11}}{5} \\ t_2=\dfrac{-9+\sqrt{11}}{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, los puntos son:

$$A_1\left(1+\frac{-18-2\sqrt{11}}{5}, -1+\frac{9+\sqrt{11}}{5}\right) \qquad A_2\left(1+\frac{-18+2\sqrt{11}}{5}, -1+\frac{9-\sqrt{11}}{5}\right)$$

085 **Estudia la posición relativa que tienen estas rectas.**

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x=1-4\lambda \\ y=3-2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x=2+3\mu \\ y=7-2\mu \end{array}\right\}$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x=1-6\lambda \\ y=-3+2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x=2+3\mu \\ y=-\mu \end{array}\right\}$

a) $\vec{u}_r=(-4, -2)$

$\vec{u}_s=(3, -2)$

Como los vectores no son proporcionales, las rectas son secantes.

b) $\vec{u}_r=(-6, 2)$

$\vec{u}_s=(3, -1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(1, -3)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} 1=2+3\mu \\ -3=-\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu=-\dfrac{1}{3} \\ \mu=3 \end{array}\right\}$$

Las rectas son paralelas.

086 Decide qué posición relativa tienen las rectas.

a) $r\colon \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{-2}$ $\qquad s\colon \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) $r\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3}$ $\qquad s\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-3}$

a) $\vec{u}_r = (6, -2)$ $\qquad \vec{u}_s = (-3, 1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(2, -1)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{2+1}{-3} \neq \frac{-1+3}{1}$$

Las rectas son paralelas.

b) $\vec{u}_r = (2, -3)$ $\qquad \vec{u}_s = (2, -3)$

Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 2)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Las rectas son paralelas.

087 Investiga qué posición relativa tienen los siguientes pares de rectas.

a) $r\colon 3x - 5y + 9 = 0$ $\qquad s\colon x + 4y - 3 = 0$

b) $r\colon 6x - 4y + 11 = 0$ $\qquad s\colon -9x + 6y - 1 = 0$

c) $r\colon 4x - y + 1 = 0$ $\qquad s\colon 2x - 3y + 13 = 0$

a) $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-5}{4} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\dfrac{-9}{6} = \dfrac{6}{-4} \neq \dfrac{-1}{11} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\dfrac{4}{2} \neq \dfrac{-1}{-3} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

088 Discute la posición relativa de estas rectas.

a) $r\colon y = \dfrac{6x-1}{4}$ $\qquad s\colon y = \dfrac{-3x+5}{-2}$

b) $r\colon y = \dfrac{6x+18}{9}$ $\qquad s\colon y = \dfrac{4x+12}{6}$

a) La pendiente de la recta r es: $m_r = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

La pendiente de la recta s es: $m_s = \dfrac{3}{2}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(1, -1)$, de la recta s, pertenece a la recta r.

$-1 \neq \dfrac{6-1}{4} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) La pendiente de la recta r es: $m_r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

La pendiente de la recta s es: $m_s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(0, 2)$, de la recta s, pertenece a la recta r.

$2 = \frac{6 \cdot 0 + 18}{9} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

089 ¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: x + 2y - 7 = 0$

b) $r: y = \frac{5x + 1}{-2}$ $\quad s: \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 7}{-5}$

a) Expresamos la recta r en forma general:

$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$

Las rectas son paralelas.

b) Expresamos las rectas en forma general:

$r: -2y = 5x + 1$
$5x + 2y + 1 = 0$

$s: -5x - 15 = 2y - 14$
$5x + 2y + 1 = 0$

Las rectas son coincidentes.

090 ¿Qué posición relativa mantienen los siguientes pares de rectas?

a) r pasa por $(-3, 4)$ y por $(8, -1)$.
$s: x - 2y + 15 = 0$

b) r pasa por $(-1, 4)$ y por $(2, -5)$.
$s: \frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 7}{3}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,4)} 4 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(8,-1)} -1 = 8m + n \end{array}\right\}$

$y = -\frac{5}{11}x + \frac{29}{11} \rightarrow 5x + 11y - 29 = 0 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\vec{u_r} = (3, -9)$

$\vec{u_s} = (-1, 3)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 4)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$\frac{-1 + 2}{-1} = \frac{4 - 7}{3} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

091 ¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?

a) r es perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$. $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = -6\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{array}\right\}$

b) r es una recta perpendicular a $y = \dfrac{2x+3}{-5}$. $\quad s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5}$

a) Calculamos el vector director de la recta:

$m = \dfrac{3}{4} \rightarrow (4, 3)$

Este vector es perpendicular al vector director de la recta s.

$\vec{u}_r = (4, 3) \qquad \vec{u}_s = (-6, 8)$

Las rectas r y s son perpendiculares.

b) Calculamos el vector director de la recta:

$m = \dfrac{-2}{5} \rightarrow (5, -2)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta r.

$\vec{u}_r = (5, -2) \qquad \vec{u}_s = (2, 5)$

Las rectas r y s son perpendiculares.

092 Determina la ecuación de la recta r, que es perpendicular a s: $3x - 2y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(0, 2)$.

Hallamos el vector director de la recta: $m = \dfrac{3}{2} \rightarrow (2, 3)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta r.

$\vec{u}_r = (-3, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

093 Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.

a) r: $2x - y + 8 = 0 \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{array}\right\}$

b) r: $y = \dfrac{-2x+7}{3} \qquad s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$

c) r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-6} \qquad s: 3x + y + 2 = 0$

d) r: $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+7}{-4}$

e) r: $y = \dfrac{6x+3}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} + 3\lambda \end{array}\right\}$

a) $2(2 + 3\lambda) - (7 + \lambda) + 8 = 0 \rightarrow 4 + 6\lambda - 7 - \lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

El punto de corte es $P(-1, 6)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3y = -2x + 7 \\ -2x + 4 = 3y - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 3y = -7 \end{array}\right\}$

Hay infinitos puntos de corte, y las rectas son coincidentes.

c) $\left.\begin{array}{l}-6x+6=2y+6\\3x+y+2=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}-6x-2y=0\\3x+y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+y=0\\3x+y=-2\end{array}\right\}$

No hay puntos de corte, y las rectas son paralelas.

d) $\dfrac{-1-3\lambda-3}{1}=\dfrac{5+8\lambda+7}{-4}\rightarrow 12\lambda+16=8\lambda+12\rightarrow\lambda=-1$

El punto de corte es $P(2,-3)$.

e) $\dfrac{3}{2}+3\lambda=\dfrac{6+6\lambda+3}{2}\rightarrow 3+6\lambda=6\lambda+9$

No tiene solución, las rectas son paralelas.

094 Halla el valor que debe tomar k para que la recta $\dfrac{x+1}{k}=\dfrac{y-2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l}x=3-\lambda\\y=2+5\lambda\end{array}\right\}$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{k}{-1}=\dfrac{3}{5}\rightarrow k=-\dfrac{3}{5}$

095 Encuentra el valor de a para que la recta $ax+3y-7=0$ sea paralela a $\dfrac{x-1}{5}=y+2$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{-3}{5}=\dfrac{a}{1}\rightarrow a=-\dfrac{3}{5}$

096 ¿Para qué valores de m son estas rectas perpendiculares?

$r\colon\ y=mx+6 \qquad s\colon\ 8x-5y+1=0$

$\vec{u}_r=(5,8)$

Cualquier vector perpendicular es proporcional a $(-8,5)$.

Por tanto, la pendiente es: $m=-\dfrac{5}{8}$

097 Prueba que todas las rectas cuya ecuación es del tipo $y=ax+a$ pasan por el mismo punto. Halla el punto y la recta de ese tipo que es paralela a: $\left.\begin{array}{l}x=21-3\lambda\\y=-1+2\lambda\end{array}\right\}$.

Hallamos el punto de corte:

$\left.\begin{array}{l}y=ax+a\\y=bx+b\end{array}\right\}\rightarrow ax+a=bx+b\rightarrow(a-b)x=-(a-b)\rightarrow x=-1\rightarrow y=0$

Todas las rectas pasan por $(-1,0)$.

Como la recta es paralela a la recta dada, su vector director es $(-3,2)$.

$m=-\dfrac{2}{3}$

La recta es: $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

098 Calcula la perpendicular trazada desde el punto P a la recta r.

a) $r\colon\ 2x - 5y + 9 = 0 \qquad P(4, -14)$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{array}\right\} \qquad P(4, -5)$

c) $r\colon\ y = \dfrac{3x - 2}{5} \qquad P(2, -4)$

a) $\vec{u}_r = (5, 2)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(-2, 5)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 - 2\lambda \\ y = -14 + 5\lambda \end{array}\right\}$$

b) $\vec{u}_r = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(3, 2)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

c) $\vec{u}_r = (5, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(-3, 5)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -4 + 5\lambda \end{array}\right\}$$

099 Determina la recta paralela a r que pasa por el punto simétrico de P respecto de la recta r.

a) $r\colon\ 2x - 3y + 10 = 0 \qquad P(4, -7)$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array}\right\} \qquad P(4, 4)$

c) $r\colon\ y = \dfrac{3x - 1}{4} \qquad P(5, -9)$

a) Calculamos la recta s, perpendicular a r, y que pasa por P:

$$s\colon\ \frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 7}{3}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

$(-2, 2)$ es el punto medio de P y su simétrico, P', respecto de r.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-2, 2) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{-7 + y}{2}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = -8 \\ y = 11 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -8 + 3\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \end{array}\right\}$

b) Calculamos la recta s, perpendicular a r, y que pasa por P:

$$s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{-2}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\frac{-2\lambda-4}{1} = \frac{2-\lambda-4}{-2} \rightarrow \lambda = 2$$

$(-4, 0)$ es el punto medio de P y su simétrico, P', respecto de r.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-12 \\ y=-4 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x=-12-2\lambda \\ y=-4-\lambda \end{array}\right\}$

c) Calculamos la recta s, perpendicular a r, y que pasa por P:

$$s: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+9}{4}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 4y=3x-1 \\ 4x-20=-3y-27 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x+4y=-1 \\ 4x+3y=-7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$$

$(-1, -1)$ es el punto medio de P y su simétrico, P', respecto de r.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=7 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x=-7+4\lambda \\ y=7+3\lambda \end{array}\right\}$

100 Encuentra la ecuación de la recta simétrica de r respecto de la recta s.

a) r: $y = \dfrac{x-4}{2}$ $\quad s: -x+2y+4=0$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3+2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: 2x+y-7=0$

a) $\vec{u}_r = (2, 1), \vec{u}_s = (2, 1)$

Las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, P, de r y calculamos la distancia hasta s:

$$P(4, 0) \qquad d(P, s) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-4+2\cdot 0+4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 0$$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

b) $\vec{u}_r = (-1, 2), \vec{u}_s = (1, -2)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, P, de r y calculamos la distancia hasta s:

$$P(2, 3) \qquad d(P, s) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 2+1\cdot 3-7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0$$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

101 Determina el ángulo que forman las rectas.

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2-3\lambda \\ y = -1-2\lambda \end{array}\right\}$ $s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2\mu \\ y = 5+3\mu \end{array}\right\}$

b) $r\colon y = 3x+2$ $s\colon y = \dfrac{4x+1}{-2}$

c) $r\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{6}$ $s\colon \dfrac{2x+3}{-1} = \dfrac{y}{2}$

d) $r\colon 20x-4y+1=0$ $s\colon -15x+3y+7=0$

a) $\vec{u}_r = (3, 2)$, $\vec{u}_s = (2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 2\cdot 3|}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{13}$$

$\alpha = 22°\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\vec{u}_r = (1, 3)$, $\vec{u}_s = (-4, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|1\cdot(-4) + 3\cdot 8|}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+8^2}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

c) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (-1, 2)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|2\cdot(-1) + 6\cdot 2|}{\sqrt{2^2+6^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

d) $\vec{u}_r = (4, 20)$, $\vec{u}_s = (3, 15)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|4\cdot 3 + 20\cdot 15|}{\sqrt{4^2+20^2}\cdot\sqrt{3^2+15^2}} = \frac{312}{312} = 1$$

$\alpha = 0°$

102 ¿Qué ángulo forman las rectas?

a) $r\colon y = \dfrac{-6x-4}{3}$ $s\colon -4x+2y-1=0$

b) $r\colon x+1 = \dfrac{y-5}{2}$ $s\colon y = \dfrac{9x-8}{3}$

c) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3+\lambda \end{array}\right\}$ $s\colon 2x+2y-1=0$

d) $r\colon y = \dfrac{6x+1}{-3}$ $s\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3}$

e) $r\colon 3x-y-3=0$ $s\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-4}$

f) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3 \end{array}\right\}$ $s\colon \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+6}{6}$

a) $\vec{u_r} = (3, -6), \vec{u_s} = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-6) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53° \, 7' \, 48{,}37''$

b) $\vec{u_r} = (1, 2), \vec{u_s} = (3, 9)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{21}{\sqrt{450}} =$$

$$= \frac{21}{15\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$\alpha = 8° \, 7' \, 48{,}37''$

c) $\vec{u_r} = (1, 1), \vec{u_s} = (2, -2)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 0$$

$\alpha = 90°$

d) $\vec{u_r} = (-3, 6), \vec{u_s} = (2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|-3 \cdot 2 + 6 \cdot 3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{585}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

$\alpha = 60° \, 15' \, 18{,}43''$

e) $\vec{u_r} = (1, 3), \vec{u_s} = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

f) $\vec{u_r} = (-1, 0), \vec{u_s} = (3, 6)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|(-1) \cdot 3 + 0 \cdot 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha = 63° \, 26' \, 5{,}82''$

103 Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$ y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

$\overrightarrow{PQ} = (4, 4), \vec{u_r} = (2, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2.176}}$$

$\alpha = 30° \, 57' \, 49{,}52''$

104 ●○○ Obtén la medida de los ángulos que forman las parejas de rectas.

a) $r: y = \dfrac{4x-3}{2}$ y s es la recta que pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r: x + 3 = \dfrac{y}{2}$ y s es la recta que pasa por $(3, 8)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+9}{4}$.

c) $r: 8x - 2y - 3 = 0$ y s es perpendicular a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 6 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}$ y pasa por $(3, -2)$.

a) $\vec{u_r} = (2, 4), \vec{u_s} = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53° \, 7' \, 48''$

b) $\vec{u_r} = (1, 2), \vec{u_s} = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$\alpha = 0° \to$ Las rectas son paralelas.

c) $\vec{u_r} = (2, 8)$

El vector $\vec{u_s}$ debe ser perpendicular a $(-1, 3)$; por tanto, puede ser $\vec{u_s} = (3, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 8 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha = 57° \, 31' \, 43{,}71''$

105 ●●○ Encuentra el valor de m para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45° con $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-3}{6}$.

$\vec{u_r} = (-3, 6), \vec{u_s} = (1, m)$

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 \cdot m|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\to m = 3,\ m = -\frac{1}{3}$$

106 ●●○ Obtén el valor que debe tener b para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \dfrac{x+4}{-3}$.

$\vec{u_r} = (-3, 1), \vec{u_s} = (b, -3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \to \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}}$$

$$\to m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13},\ m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13}$$

107 ●○○ Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a las rectas.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$

c) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{6}$

d) $y = \dfrac{4x-5}{3}$

a) $d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}\ u$

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$-x + 2 = \dfrac{y - 2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0\ u$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow 2x - y = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\ u$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \dfrac{17}{5}\ u$

108 **Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por (−3, 6) y es paralela a $\dfrac{x - 1}{-6} = \dfrac{y - 2}{8}$.**

Determinamos la recta pedida: $\dfrac{x + 3}{-6} = \dfrac{y - 6}{8}$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}\ u$

109 **¿Qué distancia hay entre los pares de rectas?**

a) $r\!: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\!: -x + 2y + 5 = 0$

b) $r\!: \dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y - 1}{6}$ $\quad s\!: y = \dfrac{8x - 3}{4}$

c) $r\!: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\!: y = \dfrac{-x - 1}{3}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1)$, $\vec{u}_s = (-2, -1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de r es $P(-1, 3)$

$d(r, s) = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

b) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (4, 8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u}_r = (3, -1)$, $\vec{u}_s = (3, -1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta r, $A(2, -1)$, y vemos si pertenece a s: $-1 = \dfrac{-2 - 1}{3}$.

Las rectas son coincidentes.

110 Calcula el valor de a para que la distancia del punto a la recta sea de 4 unidades.

$$r\colon\ 12x + 5y - 19 = 0 \qquad P(3, a)$$

$$4 = \frac{|12 \cdot 3 + 5a - 19|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow 52 = |17 + 5a|$$

$$a = 7,\ a = -\frac{69}{5}$$

111 Halla el valor de b para que la recta y el punto se encuentren a 5 unidades de distancia.

$$r\colon\ \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \qquad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

112 Determina a para que las dos rectas sean paralelas y halla, en ese caso, la distancia que las separa.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 + 3\lambda \\ y = -1 + a\lambda \end{array}\right\} \qquad s\colon\ 4x - 3ay + 6 = 0$$

Expresamos la recta r en forma general:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{a} \rightarrow ax - 4a = 3y + 3 \rightarrow ax - 3y - 4a - 3 = 0$$

Para que las rectas sean paralelas se debe cumplir que:

$$\frac{a}{4} = \frac{-3}{-3a} \neq \frac{-4a-3}{6} \rightarrow a = \pm 2$$

Tomamos un punto $P(4, -1)$ de la recta r, y calculamos la distancia entre el punto y la recta s.

Si $a = 2$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 4 - 6 \cdot (-1) + 6|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}\ u$$

Si $a = -2$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 6|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{16}{2\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}\ u$$

113 Encuentra la ecuación de una recta paralela a $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-5}{4}$ y que se halla a 8 unidades de distancia de ella.

La recta tiene esta ecuación general.

$4x + 3y + C = 0$

$8 = \dfrac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \rightarrow 40 = |11 + C|$

$C = 29, C = -51$

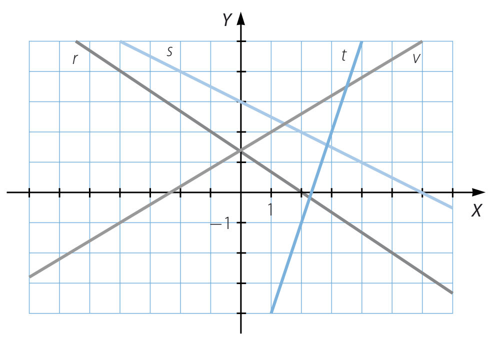
Las siguientes rectas cumplen las condiciones indicadas.

$4x + 3y + 29 = 0$

$4x + 3y - 51 = 0$

114 Encuentra las ecuaciones, en las formas que se piden, de las siguientes rectas.

r **en forma paramétrica.** ***t*** **en forma explícita.**
s **en forma continua.** ***v*** **en forma general.**



$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$

$s\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-1}$

$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(2,\,-1)} -1 = 2m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3,\,2)} 2 = 3m + n \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema, obtenemos $m = 3$ y $n = -7$.

$t\colon\ y = 3x - 7$

$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-4,\,-1)} -1 = -4m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(1,\,2)} 2 = m + n \end{array}\right\}$

Y resolviendo el sistema, obtenemos $m = \dfrac{3}{5}$ y $n = \dfrac{7}{5}$.

$v\colon y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{5} \rightarrow -3x + 5y - 7 = 0$

115 **Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.**

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

116 **Verifica si los puntos $(-4, -3)$, $(1, 4)$ y $(16, 23)$ están alineados. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta.**

Llamamos a los puntos:

$P(-4, -3)$

$Q(1, 4)$

$R(16, 23)$

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (5, 7)$

$\overrightarrow{PR} = (20, 26)$

Como los vectores no son proporcionales, los puntos no están alineados.

117 **Halla el área del triángulo cuyos vértices son $(2, 1)$, $(4, 3)$ y $(6, -1)$.**

Llamamos a los puntos:

$P(2, 1)$

$Q(4, 3)$

$R(6, -1)$

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (2, 2)$ $\quad \overrightarrow{PR} = (4, -2)$ $\quad \overrightarrow{QR} = (2, -4)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Hallamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{18}\ u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = 6\ u^2$$

118 Las rectas que contienen los lados de un triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$. Calcula sus vértices y su área.

Hallamos los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 6x + 5y - 24 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 6(-y+5) + 5y - 24 = 0 \rightarrow -y + 6 = 0$$

$y = 6, x = -1$

Las rectas se cortan en el punto $P(-1, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 2(-y+5) + y - 8 = 0 \rightarrow -y + 2 = 0$$

$y = 2, x = 3$

Las rectas se cortan en el punto $Q(3, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 5y - 24 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=-2x+8} 6x + 5(-2x+8) - 24 = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0$$

$x = 4, y = 0 \rightarrow$ Las rectas se cortan en el punto $R(4, 0)$.

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -4) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

$\overrightarrow{PR} = (5, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$

$\overrightarrow{QR} = (1, -2) \rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Hallamos la altura, h, sobre el lado mayor:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sqrt{32}\right)^2 = x^2 + h^2 \\ \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{61} - x\right)^2 + h^2 \end{array}\right\} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{61}}{61}\ u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \dfrac{4\sqrt{61}}{61}}{2} = 2\ u^2$$

119 La recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x-6}{4} = \dfrac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.

Calculamos la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte con el eje X:

$$0 = 3 - 6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow P(4, 0)$$

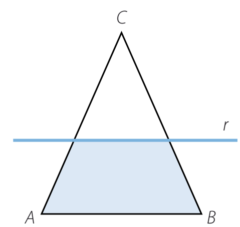
Hallamos el punto de corte con el eje Y:

$$0 = 2 + 4\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow Q(0, 6)$$

Como el triángulo que se forma es rectángulo, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ u^2$$

120 ●●○ **Tenemos un triángulo de vértices $A(4, 9)$, $B(11, 10)$ y $C(9, 4)$. Comprueba que es un triángulo isósceles. Trazamos una recta paralela al lado desigual, pasando por (7, 6), y se forma un trapecio isósceles. Determina su área.**



Comprobamos que el triángulo es isósceles:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$$

Hallamos los puntos de corte de la recta r con los lados AB y AC.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x - 7y + 59 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D\left(\frac{41}{5}, \frac{48}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x + y - 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E(7, 6)$$

Obtenemos el punto medio, M, del segmento BC: $M(10, 7)$

Calculamos el punto de corte de r con el segmento AM:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow M'\left(\frac{38}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

Hallamos la longitud de la base menor y de la altura:

$$\overrightarrow{DE} = \sqrt{\left(7 - \frac{41}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{48}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \sqrt{\left(\frac{38}{5} - 10\right)^2 + \left(\frac{39}{5} - 7\right)^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5}$$

Calculamos el área:

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{\left(\sqrt{40} + \frac{6\sqrt{10}}{5}\right)\frac{4\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{64}{5} = 12{,}8\ u^2$$

121 ●●○ **Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro lado está sobre la recta $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 6\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$. Determínalo y halla el área del triángulo.**

Igualamos el módulo de los vectores que van de la recta hasta los puntos A y B.

$$\sqrt{(1 - 6\lambda - 2)^2 + (1 + 2\lambda - 2)^2} = \sqrt{(1 - 6\lambda + 10)^2 + (1 + 2\lambda + 2)^2}$$

$$\rightarrow \lambda = 1 \rightarrow C(-5, 3)$$

Hallamos las longitudes de los lados: $\overrightarrow{AB} = (-12, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-7, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (5, 5)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-12)^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

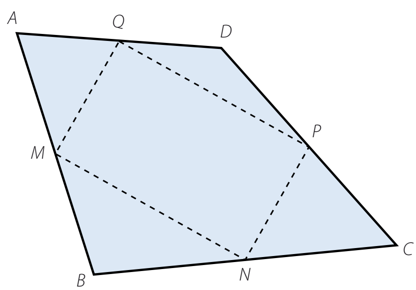
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Determinamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2} = \sqrt{10}\ u$$

Por tanto, el área es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = 20\ u^2$

122 **En un cuadrilátero *ABCD* hemos dibujado los puntos medios de sus lados, *M*, *N*, *P* y *Q*, y los hemos unido formando otro cuadrilátero. Determina las coordenadas de los demás puntos si *A*(7, 9), *M*(5, 6), *P*(9, 6) y *Q*(12, 0).**



Comprueba que se verifica la propiedad de que los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

$$(5, 6) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow B(3, 3)$$

$$(12, 0) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow D(17, -9)$$

$$(9, 6) = \left(\frac{17+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow C(1, 21)$$

$$N(x, y) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+21}{2}\right) \rightarrow N(2, 12)$$

$\overrightarrow{MN} = (-3, 6)$ $\quad \overrightarrow{QP} = (-3, 6)$ $\quad \overrightarrow{MQ} = (-7, -6)$ $\quad \overrightarrow{NP} = (-7, -6)$

Por tanto, se forma un paralelogramo.

123 **Los puntos (0, −2), (1, 1), (5, 2) y (4, −1) son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.**

Llamamos a los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$ y $D(4, -1)$.

Calculamos las ecuaciones de sus diagonales:

$$\frac{x}{5} = \frac{y+2}{4} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$\overrightarrow{AB} = (1, 3)$ $\quad \overrightarrow{DC} = (1, 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (4, 1)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (4, 1)$

Es un paralelogramo.

124 ●●○ **Calcula el centro de un paralelogramo del que conocemos tres vértices: (5, −1), (9, 5) y (−1, −5). ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Por qué? Haz un dibujo en el que se muestren todas las soluciones.**

Llamamos a los puntos $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ y $C(-1, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Hacemos una traslación con origen en C y vector (4, 6), y obtenemos un punto D, que forma un paralelogramo: $D(3, 1)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E:

$$(x,\ y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \to E(4, 0)$$

Hacemos una traslación con origen en C y vector (−4, −6), y obtenemos un punto D', que forma un paralelogramo: $D'(-5, -11)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E':

$$(x,\ y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \to E'(2, -3)$$

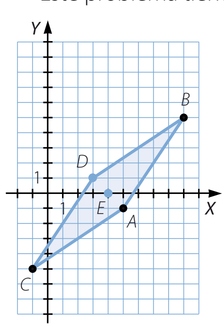
$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

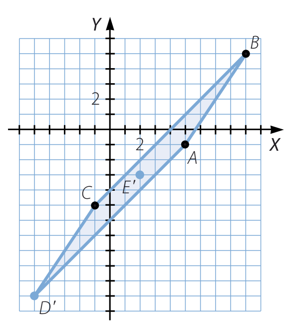
Hacemos una traslación con origen en A y vector (10, 10), y obtenemos un punto D'', que forma un paralelogramo: $D'' = (15, 9)$

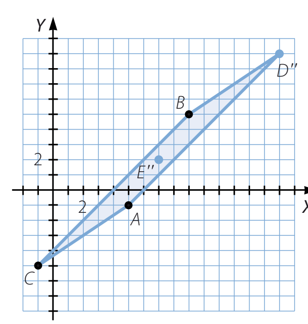
Calculamos el centro del paralelogramo, E'':

$$(x,\ y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \to E''(7, 2)$$

Este problema tiene tres soluciones.







125 ●○○ **Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son (1, 5) y (−3, −7).**

Llamamos a los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, -7)$.

Calculamos el punto medio, M: $M(-1, -1)$

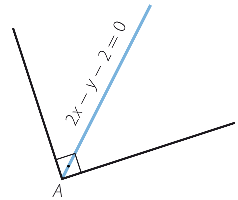
Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, -12)$.

Un vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ es $(-3, 1)$.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+1}{1}$$

126 Un ángulo recto contiene su vértice en el punto $A(3, 4)$ y su bisectriz tiene por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de sus lados.



La bisectriz tiene por vector director (1, 2).

Escribimos la ecuación punto-pendiente de los lados:

$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = -3,\ m = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones son: $3x + y - 13 = 0 \qquad -\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

127 Encuentra una recta que forme un ángulo de 60° con la recta $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}$ y que pase por el punto $(-4, 2)$.

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

Las ecuaciones son: $y - 2 = \frac{-6 - 5\sqrt{13}}{13}(x + 4) \qquad y - 2 = \frac{-6 + 5\sqrt{13}}{13}(x + 4)$

128 Calcula el valor de k para que las tres rectas: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ y $4x + 7y - 5 = 0$ se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.

Hallamos las coordenadas del punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (3, -1)$$

$-3 + 2 \cdot (-1) + k = 0 \rightarrow k = 5$

129 Obtén los ángulos del triángulo cuyos vértices son $(3, -5)$, $(1, 6)$ y $(-3, 2)$.

Llamamos a los puntos $A(3, -5)$, $B(1, 6)$ y $C(-3, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 11) \qquad \overrightarrow{AC} = (-6, 7) \qquad \overrightarrow{CB} = (4, 4)$

$$\cos \alpha = \frac{|-2 \cdot (-6) + 11 \cdot 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 7^2}} \rightarrow \alpha = 30°\ 17'\ 47{,}21''$$

$$\cos \beta = \frac{|-2 \cdot 4 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow \beta = 55°\ 18'\ 17{,}45''$$

$180° - 30°\ 17'\ 47{,}21'' - 55°\ 18'\ 17{,}45'' = 94°\ 23'\ 55{,}34''$

130 Halla un punto de la recta $2x - y + 18 = 0$ que equidiste de los puntos $(3, -1)$ y $(7, 3)$.

Despejamos y de la ecuación de la recta:

$y = 2x + 18$

Los puntos de la recta son de la forma: $(x, 2x + 18)$

Como los puntos deben estar a la misma distancia de la recta, tenemos que:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (2x + 18 - (-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (2x + 18 - 3)^2} \rightarrow x = -4$$

$2 \cdot (-4) + 18 = 10$

El punto es $(-4, 10)$.

131 Halla la ecuación de una recta r que pase por los puntos $(5, -4)$ y $(3, 6)$ y, después, la ecuación de una recta s paralela a r y que esté a 8 unidades de distancia.

$\vec{u}_r = \vec{u}_s = (-2, 10)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 - 2\lambda \\ y = -4 + 10\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{10} \rightarrow 5x + y - 21 = 0$$

Calculamos los puntos que distan 5 unidades de la recta r:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow 5 = \frac{|5 \cdot x + 1 \cdot y - 21|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -5x + 21 - 5\sqrt{26} \\ y = -5x + 21 + 5\sqrt{26} \end{array}\right\}$$

Tomamos los puntos $\left(1, 16 - 5\sqrt{26}\right)$ y $\left(1, 16 + 5\sqrt{26}\right)$.

Las rectas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 - 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 + 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array}\right\}$$

132 Encuentra un punto en el eje de abscisas que esté a la misma distancia del punto $A(5, 4)$ que de la recta r: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-4}{3}$.

Escribimos la ecuación general de la recta, r:

$3x - 4y + 19 = 0$

Tomamos un punto $P(x, 0)$ del eje de abscisas:

$$\sqrt{(5-x)^2 + 16} = \frac{|3x - 4 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow x = 2$$

El punto es $(2, 0)$.

133 **Dados los puntos $P(-3, 2)$ y $Q(5, 6)$, determina la ecuación de la recta que pasa por P y que dista 5 unidades de Q. Esa recta forma un ángulo con la recta que une P y Q. Halla su medida.**

Calculamos las rectas que pasan por P:

$$x + By + C = 0 \xrightarrow{(-3,\,2)} C = 3 - 2B$$

$$x + By + 3 - 2B = 0$$

Hallamos las rectas que distan 5 unidades de Q:

$$d(Q, s) = \frac{|5 + 6B + 3 - 2B|}{\sqrt{1^2 + B^2}} = 5 \rightarrow |4B + 8| = 5\sqrt{1 + B^2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{32 - 5\sqrt{55}}{9} \\ b_2 = \dfrac{32 + 5\sqrt{55}}{9} \end{array}\right\}$$

Las rectas buscadas son:

$$r\colon x + \frac{32 - 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 + 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

$$s\colon x + \frac{32 + 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 - 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

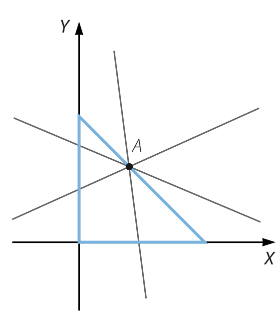
El vector director de la recta que une P con Q es: $\overrightarrow{PQ} = (8, 4) = (2, 1)$

$$\vec{u}_r = \left(\frac{-32 + 5\sqrt{55}}{9}, 1\right) = \left(-32 + 5\sqrt{55}, 9\right)$$

Determinamos el ángulo formado, que es igual para ambas rectas:

$$\cos\alpha = \frac{\left|2 \cdot \left(-32 + 5\sqrt{55}\right) + 1 \cdot 9\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-32 + 5\sqrt{55}\right)^2 + 9^2}} = 0{,}2074 \rightarrow \alpha = 78°\ 1'\ 33{,}69''$$

134 **De todas las rectas que pasan por el punto $A(2, 3)$, calcula la recta que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.**



Las rectas que pasan por A son de la forma:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Estas rectas cortan a los ejes en los puntos:

$$(0, 3 - 2m) \qquad \left(\frac{-3 + 2m}{m}, 0\right)$$

La distancia al origen $(0, 0)$ debe ser igual:

$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m}\right)^2} \rightarrow \text{Hay tres soluciones.}$$

$$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$$

$$m_2 = 1 \longrightarrow y = x + 1$$

$$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

135 Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, 5). Comprueba que esa ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$.

Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos (a, 0) y (0, b), su ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Esta manera de escribir una recta se llama *forma canónica o segmentaria.*

Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r=(3,-5)$

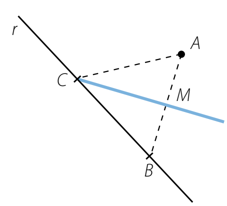
$$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{-5}\rightarrow\frac{x}{3}-1=-\frac{y}{5}\rightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

Hallamos el vector director de la recta:

$\vec{u}_r=(a,-b)$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b}\rightarrow\frac{x}{a}-\frac{a}{a}=-\frac{y}{b}\rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

136 El punto (−4, 2) es el vértice A de un triángulo cuyo lado a se localiza sobre la recta $3x+2y+18=0$. La ecuación de la mediana que parte del vértice C es $x+y+5=0$. Determina los vértices B y C.



Hallamos el punto C, intersección de la recta r y la mediana:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y+18=0\\ x+y+5=0\end{array}\right\}\rightarrow(-8,3)$$

El punto B es de la forma:

$$\left(x,\frac{-3x-18}{2}\right)$$

Y el punto M es de la forma:

$$(t,-t-5)$$

Por tanto, tenemos que:

$$(t,-t-5)=\left(\frac{x-4}{2},\frac{\frac{-3x-18}{2}+2}{2}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}t=\frac{x-4}{2}\\ -t-5=\frac{-3x-18+4}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2\\ t=-3\end{array}\right\}$$

$B(-2,-6)$ $M(-3,-2)$

137 Comprueba que las rectas son paralelas.

$$r: \frac{x-1}{6} = \frac{y+4}{8} \qquad s: -4x + 3y + 6 = 0$$

Demuestra que todos los puntos *M* que se obtienen por el siguiente procedimiento se sitúan sobre una recta, y calcula su ecuación: «Toma un punto *A* de la recta *r* y un punto *B* de *s*, y halla el punto medio *M* del segmento de extremos *A* y *B*».

$\vec{u}_r = (6, 8)$, $\vec{u}_s = (3, 4)$

Como los vectores directores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto *A* de *r* y vemos si verifica las ecuaciones de *s*:

$A(1, -4) \qquad -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 6 \neq 0$

Por tanto, las rectas son paralelas.

Expresamos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 6\lambda \\ y = -4 + 8\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 6\mu \\ y = 2 + 8\mu \end{array}\right\}$$

Los puntos medios son:

$$\left(\frac{1 + 6\lambda + 6\mu}{2}, \frac{-4 + 8\lambda + 8\mu}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 3(\lambda + \mu), -2 + 4(\lambda + \mu)\right)$$

Por tanto, si hacemos $t = \lambda + \mu$, los puntos pedidos están en la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} + 3t \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$$

138 **Tres de los vértices de un rombo son los puntos (2, −1), (5, 3) y (10, 3). Halla el cuarto vértice y calcula su área.**

Calculamos la distancia entre los vértices:

$$\sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = 5$$

$$\sqrt{(10-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{80}$$

$$\sqrt{(10-5)^2 + (3-3)^2} = 5$$

Por tanto, los puntos (10, 3) y (2, 1) son vértices no consecutivos del rombo. En consecuencia, los otros vértices, (x, y) y (5, 3), distan 5 unidades de ellos.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(10-x)^2 + (3-y)^2} = 5 \\ \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5,\ y = 3 \\ x = 7,\ y = -1 \end{array}\right\}$$

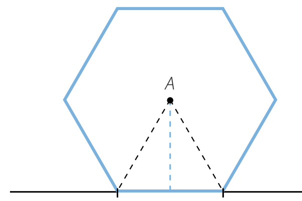
El cuarto vértice es (7, −1).

Calculamos la otra diagonal y su área:

$$\sqrt{(7-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}}{2} = 20\ u^2$$

139 **El centro de un hexágono regular es el punto (6, −2) y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina las coordenadas de los vértices y su área.**



Calculamos la longitud de la apotema:

$$d(A, r) = \frac{|-4 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Hallamos la longitud del lado: $l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow l = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ u$

Determinamos el área: $A = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5}{2} = 50\sqrt{3}\ u^2$

Calculamos los puntos que distan $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de A y pertenecen a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{(6-x)^2 + (-2-y)^2} \\ -4x + 3y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} + 2,\ y_1 = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} + 2,\ y_2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$B\left(\sqrt{3} + 2, 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \qquad C\left(-\sqrt{3} + 2, 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Otros dos vértices son simétricos a los vértices calculados respecto de A.

$$(6, -2) = \left(\frac{\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow D\left(10 - \sqrt{3}, -5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6, -2) = \left(\frac{-\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow E\left(10 + \sqrt{3}, -5 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Para calcular los restantes vértices tenemos en cuenta la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\left(10 + \sqrt{3} - x\right)^2 + \left(-5 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{\left(\sqrt{3} + 2 - x\right)^2 + \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,\ y = -2 \\ x = 2\sqrt{3} + 6,\ y = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\left(10 - \sqrt{3} - x\right)^2 + \left(-5 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{\left(-\sqrt{3} + 2 - x\right)^2 + \left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,\ y = -2 \\ x = -2\sqrt{3} + 6,\ y = -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array}\right.$$

$$F\left(2\sqrt{3} + 6, \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right) \qquad G\left(-2\sqrt{3} + 6, -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

140 Dos vértices no consecutivos de un rombo están en los puntos (3, 1) y (9, 9) y uno de sus lados es paralelo a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{array}\right\}$. Halla las coordenadas de los otros vértices, la longitud de su lado y el área.

Calculamos las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices conocidos y son paralelas a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 9 + \mu \\ y = 9 - 2\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos la mediatriz del segmento que une los vértices dados:

$M(6, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 + 2t \\ y = 5 + t \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de la mediatriz con los lados:

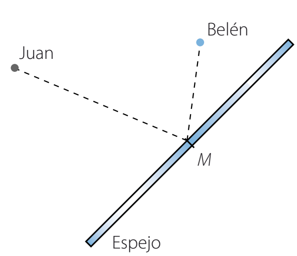
$$\left.\begin{array}{l} 3 + \lambda = 6 + 2t \\ 1 - 2\lambda = 5 + t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ t = -2 \end{array}\right\}$$

El punto pedido es (2, 3):

$$\left.\begin{array}{l} 9 + \mu = 6 + 2t \\ 9 - 2\mu = 5 + t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 1 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

El punto pedido es (12, 8).

141 Juan y Belén se están mirando, uno al otro, a través de un espejo situado según la recta de ecuación $y = -x + 2$. Belén se encuentra en el punto $(-9, -1)$ y Juan en $(-4, 3)$. ¿Qué coordenadas tiene el punto M al que miran?



Hallamos el vector director de la recta dada:

$\vec{u}_r = (1, -1)$

Un vector perpendicular es $\vec{u}_s = (1, 1)$.

La recta, perpendicular al espejo, que pasa por donde está Belén es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -9 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de las dos rectas:

$-1 + \lambda = 9 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = 6 \rightarrow (-3, 5)$

Calculamos el punto simétrico respecto del espejo, B':

$$(-3, 5) = \left(\frac{x-9}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \rightarrow B' = (3, 11)$$

Repitiendo el proceso con el otro punto dado obtenemos J':

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array}\right\}$$

$$3 + \lambda = 4 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \rightarrow J'(-1, 6)$$

Determinamos la recta que pasa por (−9, 1) y por J':

$$\left.\begin{array}{l} x = -9 + 8\lambda \\ y = -1 + 7\lambda \end{array}\right\}$$

Calculamos la recta que pasa por (−4, 3) y por B':

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + 7\mu \\ y = 3 + 8\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} -9 + 8\lambda = -4 + 7\mu \\ -1 + 7\lambda = 3 + 8\mu \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \rightarrow \mu = \frac{1}{5}$$

El punto de corte es: $\left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5}\right)$

142 **Calcula las mediatrices del triángulo cuyos vértices son (−1, 1), (7, −1) y (5, −3). Prueba que se cortan en el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Comprueba que puede trazarse una circunferencia que pasa por los tres vértices, con centro en ese punto. ¿Cuánto medirá el radio?**

Llamamos a los puntos $A(-1, 1)$, $B(7, -1)$ y $C(5, -3)$.

Calculamos el punto medio, A', del lado BC:

$A'(6, -2)$

Hallamos un vector perpendicular al lado BC:

$(-2, 2)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por A' es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+2}{2} \rightarrow x + y - 4 = 0$$

Calculamos el punto medio, C', del lado AB:

$C'(3, 0)$

Hallamos un vector perpendicular al lado AB:

$(1, 4)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por C' es:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{4} \rightarrow 4x-y-12=0$$

Calculamos el punto medio, B', del lado AC:

$B'(2,-1)$

Hallamos un vector perpendicular al lado AC:

$(2, 3)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por B' es:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3} \rightarrow 3x-2y-8=0$$

Determinamos el punto de corte de las mediatrices:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ 4x-y-12=0 \\ 3x-2y-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{array}\right\}$$

El circuncentro es:

$$\left(\frac{16}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Calculamos la distancia del circuncentro a los vértices y comprobamos que es igual.

$$\sqrt{\left(-1-\frac{16}{5}\right)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

$$\sqrt{\left(7-\frac{16}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

$$\sqrt{\left(5-\frac{16}{5}\right)^2+\left(-3-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

Por tanto, el radio mide $\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$.

143 **Halla las medianas del triángulo cuyos vértices son (−4, 6), (3, 0) y (−2, −3). Prueba que se cortan en el baricentro. Comprueba que los vértices de un triángulo tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), y las coordenadas del baricentro son:**

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Llamamos a los puntos $A(-4, 6)$, $B(3, 0)$ y $C(-2, -3)$.

Calculamos el punto medio, A', del lado BC:

$$A'\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

Determinamos la mediana que pasa por AA':

$$\frac{x+4}{-9}=\frac{y-6}{15} \rightarrow 15x+9y+6=0$$

Calculamos el punto medio, B', del lado AC:

$$B'\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$$

Hallamos la mediana que pasa por BB':

$$\frac{x-3}{12}=\frac{y}{-3}\rightarrow -3x-12y+9=0$$

Determinamos el punto medio, C', del lado BA:

$$C'\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$$

Calculamos la mediana que pasa por CC':

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{12}\rightarrow 12x-3y+15=0$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r}15x+9y+6=0\\ -3x-12y+9=0\\ 12x-3y+15=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-1\\ y=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{El baricentro es } (-1,\ 1)$$

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $T(x_3, y_3)$, determinamos el punto medio, P', del lado QT:

$$P'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

Hallamos la mediana que pasa por PP':

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x_2+x_3}{2}-x_1}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y_2+y_3}{2}-y_1}\rightarrow\frac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1}=\frac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1}$$

Calculamos el punto medio, Q', del lado PT:

$$Q'\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

Determinamos la mediana que pasa por QQ':

$$\frac{x-x_2}{\dfrac{x_1+x_3}{2}-x_2}=\frac{y-y_2}{\dfrac{y_1+y_3}{2}-y_2}\rightarrow\frac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2}=\frac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2}$$

Hallamos la intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1}\\[2ex] \dfrac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2}=\dfrac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1}-x_1\\[2ex] x=\dfrac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2}-x_2\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow\frac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1}-x_1=\frac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2}-x_2$$

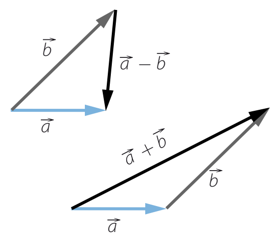
$$\rightarrow y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Sustituyendo, resulta que: $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

PARA FINALIZAR...

144 Calcula el ángulo que deben formar dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para que sus módulos coincidan con el módulo de su diferencia, $\vec{a} - \vec{b}$: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

¿Y para que coincidan con el módulo de su suma, $\vec{a} + \vec{b}$?



$\vec{a} = (x, y)$

$\vec{b} = (z, t)$

$\vec{a} - \vec{b} = (x - z, y - t)$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{z^2 + t^2}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, resulta que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{2} = xz + yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su diferencia deben formar un ángulo de 60°.

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{-2} = xz + yt$$

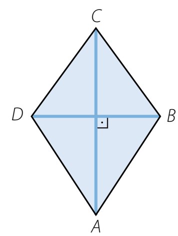
Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su suma deben formar un ángulo de 120°.

145 **Demuestra que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ forman un ángulo recto.**

Deduce de este resultado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.



Aplicamos los resultados de la actividad anterior:

$\vec{u}=(x, y)$

$\vec{v}=(z, t)$

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}=\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2}=\sqrt{x^2+z^2+2xz+y^2+t^2+2yt}$$

$$\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}=\sqrt{x^2+z^2+2xz+y^2+t^2+2yt}\to 0=xz+yt$$

$$\cos\alpha=\frac{xz+yt}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{z^2+t^2}}=0\to\alpha=90°$$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de los lados del rombo, que tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo se obtienen, respectivamente, sumando y restando $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo que las diagonales son perpendiculares.

146 **Si $\vec{u}$ es un vector del plano de módulo 1:**

a) ¿Cuántos vectores $\vec{v}$ hay de módulo 2, tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$?

b) ¿Y tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$?

c) ¿Y tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$?

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\to -1=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\to\cos\alpha=-\frac{1}{2}\to\left.\begin{matrix}\alpha=120°\\ \alpha=240°\end{matrix}\right\}$

Hay dos vectores.

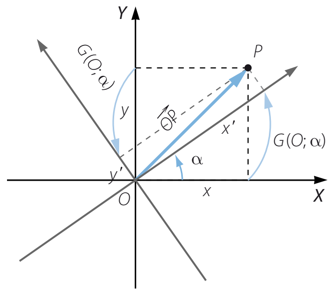
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\to 2=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\to\cos\alpha=1\to\alpha=0°$

Solo hay un vector.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\to -3=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\to\cos\alpha=-\frac{3}{2}\to$ No tiene solución.

No hay ningún vector.

147 **Las coordenadas de un punto P en un sistema cartesiano son (x, y). Halla las coordenadas (x', y') del mismo punto después de girar los ejes, alrededor del origen de coordenadas, un ángulo α.**

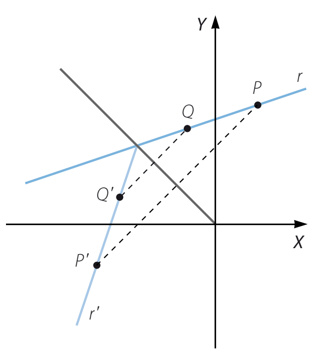


Realizamos un cambio de sistema de referencia con centro en el origen y giro de amplitud α.

$x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$
$y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$

148 **¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta simétrica, respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, a la recta r, de ecuación $y = 3x + 4$?**

a) $3y = x + 4$
b) $3y = x - 4$
c) $y = 3x - 4$
d) $y = 4x + 3$



Calculamos el baricentro, G, y para ello sumamos las coordenadas de los puntos y dividimos entre tres:

$G(-1, 0)$

Para hallar el ortocentro, calculamos una recta perpendicular al lado AB que pase por C:

$$\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 2}{2}$$

Determinamos una recta perpendicular al lado *AC* que pase por *B*:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+4}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el ortocentro:

$$H\left(-\frac{1}{3},-\frac{10}{3}\right)$$

Para hallar el circuncentro, calculamos la recta que pasa por el punto medio del lado *AB* y es perpendicular al mismo:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}$$

Determinamos la recta que pasa por el punto medio del lado *AC* y es perpendicular al mismo:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el circuncentro:

$$O\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Calculamos la recta que pasa por *GH*:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-5}\rightarrow 5x+y+5=0$$

Como *O* verifica las ecuaciones de la ecuación de la recta, los tres puntos están alineados.

Hallamos la distancia *GH*:

$$|GH|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{104}}{3}$$

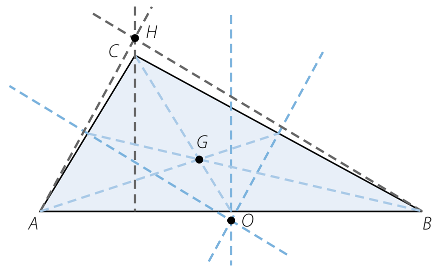
Calculamos la distancia *GO*:

$$|GO|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}+1\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

Por tanto, se verifica la relación, ya que resulta que:

$$|GH|=\frac{\sqrt{104}}{3}=\frac{2\sqrt{26}}{3}=2|GO|$$

149 Dado el triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ y $C(3, -2)$, comprueba que el baricentro G, el ortocentro H y el circuncentro O están en línea recta (recta de Euler) y que verifican la relación $GH = 2GO$.



Calculamos la intersección de la recta dada con la bisectriz del segundo cuadrante:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 4 \\ y = -x \end{array}\right\} \rightarrow (-1, 1)$$

Por tanto, el punto $(-1, 1)$ debe pertenecer a la recta simétrica.

La única ecuación de las rectas dadas que pasa por el punto es:
$3y = x + 4$

6 Lugares geométricos. Cónicas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El rescoldo

Después de Navidad [1922], Jesús Vio tuvo una larga charla con [el profesor] Harold Lardy para orientar el trabajo de la tesis que debía comenzar. Había pensado encaminar su investigación atacando, en la medida de sus fuerzas, el último teorema de Fermat. Le atraía, como a tantos, la sencillez del planteamiento. Lo que Pierre de Fermat había escrito en el margen de la *Arithmetica* de Diofanto, probablemente en 1637, era muy simple: «Es imposible escribir un cubo como la suma de dos cubos o, en general, escribir cualquier potencia mayor que dos como la suma de dos potencias iguales».

Cuando el español le planteó a Lardy su intención de centrar la tesis en el teorema de Fermat, el profesor sonrió, pero no se lo desaconsejó. Estaban sentados en torno a una mesa en la sala de estar contigua a la habitación donde vivía el soltero Lardy. [...] Una pizarra negra con sus tizas completaba la decoración mural. «Comencemos, pues», indicó Lardy y, levantándose, se acercó a la pizarra. Allí escribió la ecuación de Fermat:

$$x^n + y^n = z^n$$

–No existe una terna (x, y, z) de números enteros que, para n mayor que 2, satisfaga esta ecuación –concluyó Lardy.

En lugar de sentarse, el profesor siguió de pie.

–Si me lo permite –continuó Lardy–, le haré una pequeña digresión histórica que quizá le sea de utilidad. [...] Euler, siguiendo el método conocido como «descenso infinito», que el propio Fermat utilizó, aunque no para demostrar esta conjetura, demostró la no existencia de solución para la potencia tres. Así se lo anunció a Goldbach en una carta fechada en agosto de 1753. Un siglo después de la muerte de Fermat, tan sólo se había demostrado la validez de su teorema para las potencias 3 y 4. Si le he de ser sincero –continuó Lardy–, no creo que en este asunto de Fermat se haya avanzado mucho desde entonces. En cualquier caso, le prepararé una bibliografía lo más exhaustiva que pueda acerca de este enigma. Trabaje usted con ella y luego propóngame una vía de ataque, la discutiremos. Creo que ha llegado el momento de que tengamos un encuentro en la cancha de tenis. La he reservado para dentro de media hora. ¿Es tiempo suficiente?

JOAQUÍN LEGUINA

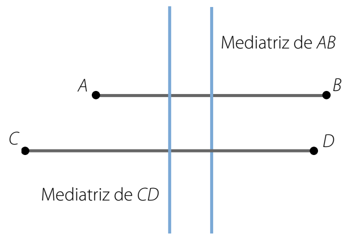
En 1994, Wiles demostró, tras ocho años de intenso trabajo, que el teorema de Fermat es verdadero. Lo más curioso es que, para $n = 2$, la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ tiene infinitas soluciones enteras. En esta ecuación, si consideramos z como una constante, por ejemplo, $z = 5$, obtenemos la ecuación de una figura geométrica que no es una recta.
¿Qué figura crees que puede ser?

$x^2 + y^2 = z^2$

Si $z = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$ es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5, porque los puntos que verifican esta ecuación equidistan del origen de coordenadas una medida constante de 5 unidades.

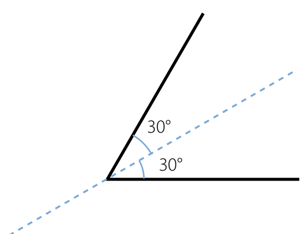
ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Dibuja dos segmentos *AB* y *CD*, paralelos entre sí, de 8 cm y 10 cm, y traza con la escuadra sus mediatrices. ¿Cómo son las mediatrices entre sí?



Las mediatrices son paralelas.

002 Dibuja un ángulo de 60° y traza su bisectriz. Comprueba que el ángulo queda dividido en dos partes iguales.



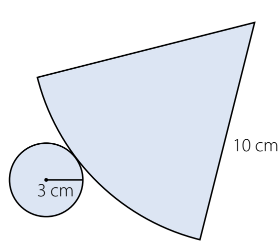
003 Si el radio de una circunferencia mide 12 cm, ¿cuánto medirá su diámetro?

El diámetro medirá el doble: 24 cm.

004 ¿Qué tipo de poliedro es un cubo? ¿Y un ortoedro?

Un cubo es un prisma. Un ortoedro es un prisma también.

005 Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 3 cm y generatriz 10 cm.



006 Halla la ecuación de la recta:

a) Paralela al eje *X* y que pasa por $P(1, 3)$.

b) Paralela al eje *Y* y que pasa por $P(-1, 4)$.

a) $y = 3$ b) $x = -1$

ACTIVIDADES

001 **Si en vez de una superficie cónica se utiliza un cilindro, ¿qué cónicas se pueden obtener?**

Si el plano es perpendicular a la generatriz del cilindro, la sección es una circunferencia.

Si no es perpendicular, la sección es una elipse.

002 **Razona por qué la parábola es una sección cónica que no tiene dos ramas.**

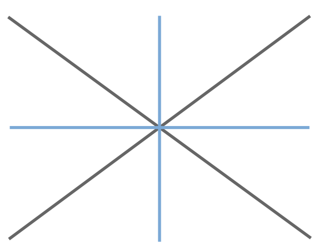
Porque el plano solo corta a uno de los conos de la superficie cónica.

003 **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

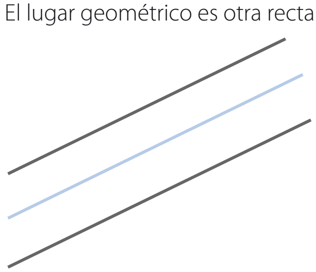
a) Que se cortan.

b) Que son paralelas.

a) El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse.



b) El lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.



004 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación: $x + y = 10$

Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$

005 **Los ejes mayor y menor de una elipse miden, respectivamente, 10 y 6 cm. Halla la distancia que hay entre los dos focos de la elipse y también la distancia que hay hasta los vértices.**

$2a = 10 \text{ cm} \rightarrow a = 5 \text{ cm}$

$2b = 6 \text{ cm} \rightarrow b = 3 \text{ cm}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4 \text{ cm}$

Luego la distancia entre los focos es de 8 cm.

La distancia desde los focos hasta los vértices A y A' es de 1 cm y hasta los vértices B y B' es de 5 cm.

006 **Un punto de una elipse dista de cada uno de los focos 6 y 7 cm, respectivamente, y la longitud del eje menor es 6,6 cm. Calcula la longitud del eje mayor y la distancia entre los focos.**

$2a = d(P, F) + d(P, F') = 6 + 7 = 13 \text{ cm}$

El eje mayor mide 13 cm.

$2a = 13 \text{ cm} \rightarrow a = 6{,}5 \text{ cm}$

$2b = 6{,}6 \text{ cm} \rightarrow b = 3{,}3 \text{ cm}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5{,}6 \text{ cm}$

Así, la distancia entre los focos mide 11,2 cm.

007 **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} c = 5 \\ a = 8 \end{array}\right\} \rightarrow b = \sqrt{39} \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

008 **Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos:**

(−4, 0) (0, −2) (4, 0) (0, 2)

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

009 **Halla los focos y los vértices de las elipses.**

a) $\dfrac{x^2}{121} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{121} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 11 \rightarrow A(11, 0) \quad A'(-11, 0) \\ b = 5 \rightarrow B(0, 5) \quad B'(0, -5) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \rightarrow F\left(4\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-4\sqrt{6}, 0\right)$

b) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{64} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 9 \rightarrow A(9, 0) \quad A'(-9, 0) \\ b = 8 \rightarrow B(0, 8) \quad B'(0, -8) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{17} \rightarrow F\left(\sqrt{17}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{17}, 0\right)$

010 Calcula las excentricidades de estas elipses.

a) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{121}=1$ b) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{9}=1$

a) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{121}=1 \rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{23} \rightarrow e=\dfrac{\sqrt{23}}{12}=0{,}39$

b) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=3 \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{216}=6\sqrt{6} \rightarrow e=\dfrac{6\sqrt{6}}{15}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=0{,}97$

011 En una hipérbola, la distancia entre los vértices es de 8 cm, si $B(0, 3)$ y su punto simétrico es $B'(0, -3)$. Calcula los focos de la hipérbola.

$2a=8 \rightarrow a=4$

$b=3$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=5 \rightarrow F(5, 0) \qquad F'(-5, 0)$

012 Conocidos los focos de una hipérbola: $F(10, 0)$ y $F'(-10, 0)$, y sabiendo que la distancia entre los vértices es de 16 unidades, halla B y B'.

$c=10$

$2a=16 \rightarrow a=8$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b=6 \rightarrow B(0, 6) \qquad B'(0, -6)$

013 Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene dos de sus vértices en $(-6, 0)$ y $(6, 0)$ y que pasa por el punto $\left(36, 7\sqrt{35}\right)$.

$a=6$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b^2=c^2-36$

Así, la ecuación de la hipérbola es de la forma: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{c^2-36}=1$

Como el punto $\left(36, 7\sqrt{35}\right)$ pertenece a la hipérbola:

$$\frac{36^2}{36}-\frac{1.715}{c^2-36}=1 \rightarrow 36-\frac{1.715}{c^2-36}=1 \rightarrow \frac{1.715}{c^2-36}=35 \rightarrow c^2-36=49$$
$$\rightarrow c^2=85 \rightarrow c=\sqrt{85}$$

La ecuación de la hipérbola es: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{49}=1$

014 Halla la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y sus vértices en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} c=2 \\ a=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow b=\sqrt{3} \rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$$

015 Halla los focos y los vértices de la hipérbola que tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1 \to \begin{cases} a = 15 \to A(15, 0) \quad A'(-15, 0) \\ b = 12 \to B(0, 12) \quad B'(0, -12) \end{cases}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{369} = 3\sqrt{41} \to F\left(3\sqrt{41}, 0\right) \qquad F'\left(-3\sqrt{41}, 0\right)$

016 Calcula la excentricidad de las hipérbolas que vienen dadas por estas ecuaciones.

a) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{196} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{196} = 1 \to \begin{cases} a = 15 \\ b = 14 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{421} \to e = \dfrac{\sqrt{421}}{15} = 1{,}36$

b) $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \to \begin{cases} a = 11 \\ b = 6 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{157} \to e = \dfrac{\sqrt{157}}{11} = 1{,}13$

017 Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco $F(0, 2)$.

$p = 4 \to x^2 = 8y$

018 Calcula la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas y foco $F(2, 0)$.

$p = 4 \to y^2 = 8x$

019 Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(-3, 1)$ y que pasa por el origen de coordenadas.

$r = d(P, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10 \to x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

020 Calcula el centro y la longitud del radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

Como $A = -2a$: $2 = -2a \to a = -1$

Como $B = -2b$: $2 = -2b \to b = -1$

Como $C = a^2 + b^2 - r^2$: $2 - r^2 = 0 \to r = \sqrt{2}$

Así, el centro es $C(-1, -1)$ y el radio mide $\sqrt{2}$

021 **Estudia la posición relativa de las circunferencias.**

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < r_2 - r_1 = 2$$

Las circunferencias son interiores.

022 **Encuentra una circunferencia tangente interior a la circunferencia de ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.**

Respuesta abierta.

Una de las circunferencias tangentes interiores es: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

023 **Discute la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.**

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} C(3, -2) \\ r = 3 \end{cases}$$

La distancia del centro al eje de abscisas es: $d(C, r) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$

Al ser menor que el radio, el eje es secante a la circunferencia.

La distancia del centro al eje de ordenadas es: $d(C, s) = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$

Al coincidir con el radio, el eje es tangente a la circunferencia.

024 **Encuentra tres rectas no paralelas, que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.**

Respuesta abierta.

Una recta secante es: $x - y = 0$

Una recta tangente es: $y + 3 = 0$

Una recta exterior es: $x - 7 = 0$

025 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(3, -5)$ y de $B(7, 1)$. ¿De qué figura se trata?**

Sea (x, y) un punto equidistante de A y B:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$\rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

Se trata de una recta, la mediatriz del segmento AB.

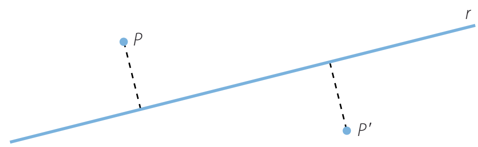
026 Halla el lugar geométrico de los puntos que distan 3 unidades del punto $P(-1, 4)$. ¿De qué figura se trata?

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=3 \rightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=9 \rightarrow x^2+y^2+2x-8y+8=0$$

Esta es la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 4)$ y radio 3.

027 Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta r: $4x-2y+5=0$.



Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces: $\dfrac{|4x-2y+5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=4$

$$\rightarrow |4x-2y+5|=4\sqrt{20} \rightarrow |4x-2y+5|=8\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} 4x-2y+5-8\sqrt{5}=0 \\ -4x+2y-5-8\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

028 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.

a) $3x-4y-26=0$ y $12x+5y+1=0$ b) $-2x+7y+9=0$ y $4x-14y+11=0$

a) $$\frac{|3x-4y-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|12x+5y+1|}{\sqrt{12^2+5^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-4y-26}{5}=\dfrac{12x+5y+1}{13} \\ \dfrac{3x-4y-26}{5}=\dfrac{-12x-5y-1}{13} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 39x-52y-338=60x+25y+5 \\ 39x-52y-338=-60x-25y-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-11y+49=0 \\ 11x-3y-37=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

b) $$\frac{|-2x+7y+9|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}}=\frac{|4x-14y+11|}{\sqrt{4^2+(-14)^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{4x-14y+11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{-4x+14y-11}{2\sqrt{53}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x+14y+18=4x-14y+11 \\ -4x+14y+18=-4x+14y-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x-28y-7=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

029 Determina el lugar geométrico de los puntos que están a doble distancia del punto $P(3, 5)$ que del punto $Q(1, -2)$. ¿Qué figura es?

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2-10y+25=4(x^2-2x+1+y^2+4y+4)$$

$$\rightarrow 3x^2+3y^2-2x+26y-14=0$$

La figura es la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{26}{3}y-\dfrac{14}{3}=0$

030 Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a la recta de ecuación $3x - 5y - 15 = 0$ tenga el mismo valor que la ordenada y.

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico.

$$\frac{|3x - 5y - 15|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = y \rightarrow |3x - 5y - 15| = \sqrt{34}\,y$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y - 15 = \sqrt{34}\,y \\ -3x + 5y + 15 = \sqrt{34}\,y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - \left(5 + \sqrt{34}\right)y - 15 = 0 \\ 3x - \left(5 - \sqrt{34}\right)y - 15 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

031 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano Q tales que el punto medio del segmento PQ: $P(2, 6)$, es un punto de la recta que tiene por ecuación $2x + 4y - 5 = 0$.

Si $Q(x, y)$ es un extremo del segmento PQ, su punto medio es de la forma:

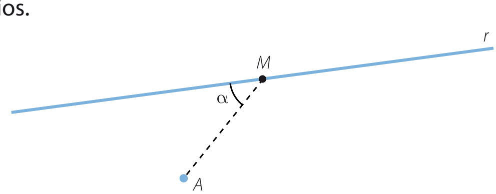
$$\left(\frac{x + 2}{2}, \frac{y + 6}{2}\right)$$

Si este punto pertenece a la recta:

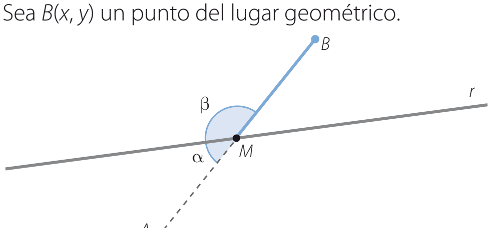
$$2 \cdot \frac{x + 2}{2} + 4 \cdot \frac{y + 6}{2} - 5 = 0 \rightarrow x + 2y + 9 = 0$$

El lugar geométrico es otra recta.

032 Consideramos la recta r: $3x - 2y + 15 = 0$ y el punto $A(-1, 2)$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos B tales que, para cada punto M de la recta, se verifica que $\overline{AM} = \overline{MB}$ y, además, los ángulos que forman dichos segmentos con la recta son suplementarios.



Sea $B(x, y)$ un punto del lugar geométrico.



Si los puntos M verifican las condiciones del enunciado, son los puntos medios de los segmentos AB para cada punto B, siendo: $M\left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{2 + y}{2}\right)$

Como los puntos M pertenecen a la recta r, se verifica que:

$$3 \cdot \frac{-1 + x}{2} - 2 \cdot \frac{2 + y}{2} + 15 = 0 \rightarrow -3 + 3x - 4 - 2y + 30 = 0 \rightarrow 3x - 2y + 23 = 0$$

El lugar geométrico es una recta paralela a r.

033 Halla los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $25x^2+16y^2=1.600$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2+25y^2=900$

f) $x^2+2y^2=16$

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5,0) & A'(-5,0) \\ b=3 \rightarrow B(0,3) & B'(0,-3) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=4 \rightarrow F(4,0) \quad F'(-4,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{4}{5}=0{,}8$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \rightarrow \begin{cases} b=4 \rightarrow B(4,0) & B'(-4,0) \\ a=5 \rightarrow A(0,5) & A'(0,-5) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(0,4) \quad F'(0,-4)$

La excentricidad es: $e=\frac{3}{5}=0{,}6$

c) $25x^2+16y^2=1.600 \rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1 \rightarrow \begin{cases} b=8 \rightarrow A(8,0) & A'(-8,0) \\ a=10 \rightarrow B(0,10) & B'(0,-10) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=6 \rightarrow F(0,6) \quad F'(0,-6)$

La excentricidad es: $e=\frac{6}{10}=0{,}6$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5,0) & A'(-5,0) \\ b=4 \rightarrow B(0,4) & B'(0,-4) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(3,0) \quad F'(-3,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{3}{5}=0{,}6$

e) $9x^2+25y^2=900 \rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow A(10,0) & A'(-10,0) \\ b=6 \rightarrow B(0,6) & B'(0,-6) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=8 \rightarrow F(8,0) \quad F'(-8,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{8}{10}=0{,}8$

f) $x^2+2y^2=16 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1 \rightarrow \begin{cases} a=4 \longrightarrow A(4,0) & A'(-4,0) \\ b=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0,2\sqrt{2}\right) & B'\left(0,-2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=2\sqrt{2} \rightarrow F\left(2\sqrt{2},0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2},0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707$

034 Busca tres puntos de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ y determina sus focos. Comprueba que la suma de las distancias de esos puntos a los focos coincide con el eje mayor.

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow 2a=20 \\ b=6 \end{cases}$$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=8 \rightarrow F(8, 0) \qquad F'(-8, 0)$

Tres puntos de la elipse son:

$$A(10, 0) \rightarrow d(A, F)+d(A, F')=\sqrt{(10-8)^2+(0-0)^2}+\sqrt{(10+8)^2+(0-0)^2}=$$
$$=2+18=20$$

$$B(0, 6) \rightarrow d(B, F)+d(B, F')=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}+\sqrt{(0+8)^2+(-6-0)^2}=$$
$$=10+10=20$$

$$C\left(5, 3\sqrt{3}\right) \rightarrow d(C, F)+d(C, F')=\sqrt{(5-8)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}+\sqrt{(5+8)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}=$$
$$=6+14=20$$

035 Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y (−6, 0) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, −2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (4, 0) y (−4, 0) y dos de sus vértices son (5, 0) y (−5, 0).

a) $2a=20 \rightarrow a=10$

Si $e=0,6 \rightarrow c=6$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=8 \rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

b) $c=6$

Si $e=\frac{1}{3} \rightarrow a=18$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=12\sqrt{2} \rightarrow \frac{x^2}{324}+\frac{y^2}{288}=1$

c) $2a=10 \rightarrow a=5$

Por ser el punto (3, 2) un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{b^2}=1 \rightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{16}{25} \rightarrow b^2=\frac{25}{4} \rightarrow b=\frac{5}{2}$$

Así, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \rightarrow x^2+4y^2=25$$

d) $\left.\begin{array}{l} c=4 \\ a=5 \end{array}\right\}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=3 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

036 Determina la ecuación de una elipse en la que el eje mayor mide el doble que el menor y uno de los focos se halla en (−7, 0).

$c = 7$

$2a = 2 \cdot 2b \rightarrow a = 2b$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 4b^2 = b^2 + 49 \rightarrow b^2 = \dfrac{49}{3} \rightarrow b = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{\frac{196}{3}} + \frac{y^2}{\frac{49}{3}} = 1 \rightarrow 3x^2 + 12y^2 = 196$$

037 Calcula la intersección de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ y la recta $2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 3y - 6\sqrt{2} = 0$.

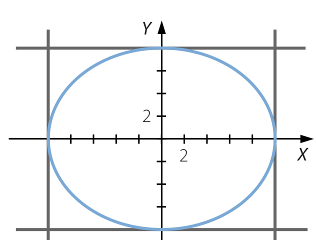
$$\left.\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 = 72 \\ 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 3y - 6\sqrt{2} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = \frac{6\sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x}{3}$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$4x^2 + \left(6\sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x\right)^2 = 72$$
$$\rightarrow 4x^2 + 72 - 24\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 4\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 x^2 = 72$$
$$\rightarrow 4x^2 - 48x + 24\sqrt{2}x + 8x^2 - 8\sqrt{2}x^2 + 4x^2 = 0$$
$$\rightarrow \left(2 - \sqrt{2}\right)x^2 - 3\left(2 - \sqrt{2}\right)x = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $P\left(0, 2\sqrt{2}\right)$ y $Q(3, 2)$

038 Una elipse es tangente a los lados del rectángulo definido por las rectas $y = 8$, $y = -8$, $x = 10$ y $x = -10$. Halla su ecuación y las coordenadas de cinco puntos.



$$\left.\begin{aligned} a = 10 \\ b = 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Cinco puntos de la elipse son: $A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$, $B(0, 8)$, $B'(0, -8)$ y $C\left(5, 4\sqrt{3}\right)$

039 Decide la posición relativa de las rectas respecto de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) $2x+3y-5=0$ b) $-3x+2y-20=0$ c) $3x+10y-15\sqrt{5}=0$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y-5=0\\ 9x^2+25y^2=225\end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{5-2x}{3}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2+25\cdot\frac{25-20x+4x^2}{9}=225\rightarrow 81x^2+625-500x+100x^2=2.025$$
$$\rightarrow 181x^2-500x-1.400=0$$

$\Delta=1.263.600>0\rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{array}{r}-3x+2y-20=0\\ 9x^2+25y^2=225\end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{3x+20}{2}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2+25\cdot\frac{9x^2+120x+400}{4}=225\rightarrow 36x^2+225x^2+3.000x+10.000=900$$
$$\rightarrow 261x^2+3.000x+9.100=0$$

$\Delta=-500.400<0\rightarrow$ La ecuación no tiene solución; por tanto, la elipse y la recta son exteriores.

c) $\left.\begin{array}{r}3x+10y-15\sqrt{5}=0\\ 9x^2+25y^2=225\end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{15\sqrt{5}-3x}{10}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2+25\cdot\frac{1.125-90\sqrt{5}x+9x^2}{100}=225\rightarrow 36x^2+1.125-90\sqrt{5}x+9x^2=900$$
$$\rightarrow 45x^2-90\sqrt{5}x+225=0$$

$\Delta=0\rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la elipse y la recta son tangentes.

040 Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 26.

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+12)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-12)^2}=26$$
$$\rightarrow\sqrt{x^2+(y+12)^2}=26-\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\rightarrow x^2+(y+12)^2=26^2+x^2+(y-12)^2-52\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\rightarrow y^2+144+24y=676+y^2+144-24y-52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}$$
$$\rightarrow 52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=676-48y$$
$$\rightarrow 13\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=169-12y$$
$$\rightarrow 169x^2+169y^2+24.336-4.056y=28.561+144y^2-4.056y$$
$$\rightarrow 169x^2+25y^2=4.225\rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$$

041 Determina los focos, los vértices, las asíntotas y las excentricidades de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

c) $16y^2-25x^2=1.600$

d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2-25y^2=900$

f) $x^2-2y^2=16$

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b=3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=\sqrt{34} \rightarrow F\left(\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{34}}{5}=1{,}16$

b) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \\ b=4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=\sqrt{41} \rightarrow F\left(0, \sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

c) $16y^2-25x^2=1.600 \rightarrow \frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{64}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow A(0, 10) \quad A'(0, -10) \\ b=8 \rightarrow B(8, 0) \quad B'(-8, 0) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=2\sqrt{41} \rightarrow F\left(0, 2\sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{41}}{10}=1{,}28$

d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b=4 \rightarrow B(0, 4) \quad B'(0, -4) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=\sqrt{41} \rightarrow F\left(\sqrt{41}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

e) $9x^2-25y^2=900 \rightarrow \frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b=6 \rightarrow B(0, 6) \quad B'(0, -6) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=2\sqrt{34} \rightarrow F\left(2\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{34}}{10}=1{,}16$

f) $x^2-2y^2=16 \rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1 \rightarrow \begin{cases} a=4 \longrightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0, 2\sqrt{2}\right) \quad B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=2\sqrt{6} \rightarrow F\left(2\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{6}}{4}=1{,}22$

042 Halla dos puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$, determina sus focos y comprueba que la diferencia de las distancias de esos puntos a los focos coincide con el eje focal.

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow 2a=20 \\ b=6 \end{cases}$$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=2\sqrt{34} \rightarrow F\left(2\sqrt{34},0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{34},0\right)$

Dos puntos de la hipérbola son:

$A(10, 0) \rightarrow (d(A, F)-d(A, F'))^2 =$

$$= \left(\sqrt{\left(10-2\sqrt{34}\right)^2+(0-0)^2}-\sqrt{\left(10+2\sqrt{34}\right)^2+(0-0)^2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{236-40\sqrt{34}}-\sqrt{236+40\sqrt{34}}\right)^2 =$$
$$= 236-40\sqrt{34}+236+40\sqrt{34}-2\sqrt{55.696-54.400} =$$
$$= 472-72=400 \rightarrow d(A, F)-d(A, F')=20$$

$A'(-10, 0) \rightarrow (d(A', F)-d(A', F'))^2 =$

$$= \left(\sqrt{\left(-10-2\sqrt{34}\right)^2+(0-0)^2}-\sqrt{\left(-10+2\sqrt{34}\right)^2+(0-0)^2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{236+40\sqrt{34}}-\sqrt{236-40\sqrt{34}}\right)^2 =$$
$$= 236+40\sqrt{34}+236-40\sqrt{34}-2\sqrt{55.696-54.400} =$$
$$= 472-72=400 \rightarrow d(A', F)-d(A', F')=20$$

043 Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.

a) Sus asíntotas son $y=2x$ e $y=-2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5},0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y=\frac{1}{3}x$ e $y=-\frac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29},5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\frac{b}{a}=2 \rightarrow b=2a \qquad c=3\sqrt{5}$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow 45=a^2+4a^2 \rightarrow a^2=9 \rightarrow a=3 \rightarrow b=6 \rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$

b) $c=5 \qquad 2a=8 \rightarrow a=4$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow 25=16+b^2 \rightarrow b^2=9 \rightarrow b=3 \rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

c) $\frac{b}{a}=\frac{1}{3} \rightarrow a=3b$

Por ser el punto $\left(3\sqrt{29},5\right)$ un punto de la hipérbola:

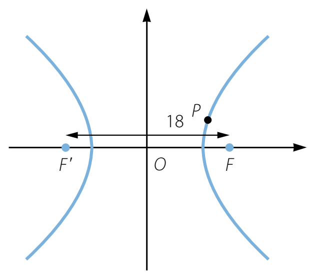
$$\frac{261}{9b^2}-\frac{25}{b^2}=1 \rightarrow \frac{36}{9b^2}=1 \rightarrow b^2=4 \rightarrow b=2 \rightarrow a=6$$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$

d) $c = 6$ $\qquad e = \dfrac{c}{a} = 1{,}2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

044 Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal mide 18 y pasa por el punto *P* (15, 4).



$2a = 18 \rightarrow a = 9$

Por pertenecer el punto (15, 4) a la hipérbola:

$$\frac{225}{81} - \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow 225b^2 - 1.296 = 81b^2$$

$$\rightarrow 144b^2 = 1.296 \rightarrow b = 3$$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

045 El foco de una hipérbola se halla a una distancia de 2 unidades de un vértice y a 18 unidades del otro. Escribe su ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} d(A, F) = 2 \\ d(A', F) = 18 \end{array}\right\} \rightarrow d(A, A') = 16 \rightarrow a = 8$$

Al ser $d(A, F) = 2 \rightarrow c = 10$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = 6 \rightarrow \dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

046 Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 10.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+12)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2} = 10$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+12)^2} = 10 + \sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$

$$\rightarrow x^2 + (y+12)^2 = 10^2 + x^2 + (y-12)^2 + 20\sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$

$$\rightarrow y^2 + 144 + 24y = 100 + y^2 + 144 - 24y + 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$

$$\rightarrow 48y - 100 = 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$

$$\rightarrow 12y - 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$

$$\rightarrow 144y^2 - 600y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 3.600 - 600y$$

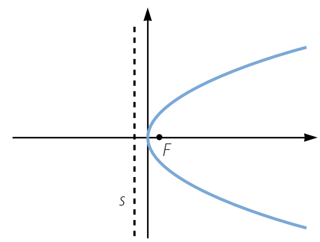
$$\rightarrow 119y^2 - 25x^2 = 2.975 \rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{119} = 1$$

047 Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas. Represéntalas gráficamente.

a) $y^2 = 10x$
b) $y^2 = 7x$
c) $x^2 = 6y$
d) $x^2 = y$
e) $y^2 = -10x$
f) $x^2 = -6y$

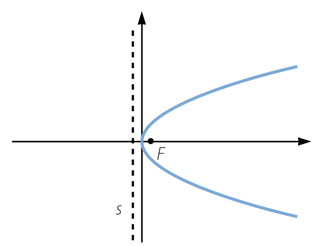
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



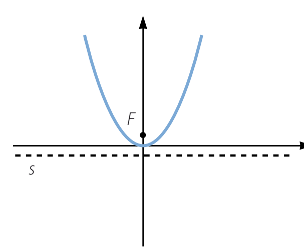
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



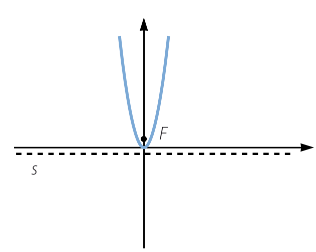
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



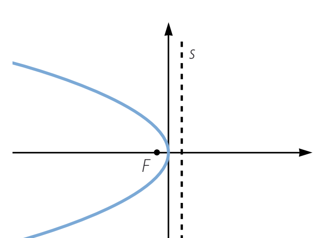
d) $2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



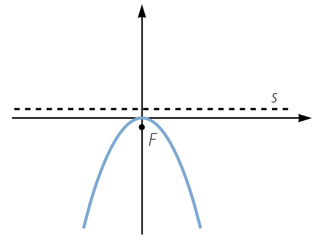
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \frac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



048 Halla la ecuación reducida de una parábola de vértice (0, 0) y directriz horizontal, y que pasa por el punto (−3, 8).

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Como pasa por el punto (−3, 8): $9 = 2p \cdot 8 \rightarrow p = \frac{9}{16} \rightarrow x^2 = \frac{9}{8}y$

049 Busca la ecuación reducida de una parábola de vértice (0, 0) y directriz vertical, sabiendo que pasa por el punto (5, −4).

La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 2px$

Como pasa por el punto (5, −4): $16 = 2p \cdot 5 \rightarrow p = \frac{8}{5} \rightarrow y^2 = \frac{16}{5}x$

050 Obtén los vértices, focos y directrices de las parábolas.

a) $y^2 = 2(x - 3)$
b) $(y - 1)^2 = 4(x - 4)$
c) $x^2 = 6(y - 2)$
d) $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$
e) $x^2 = -4(y + 1)$
f) $(y + 3)^2 = -8(x - 1)$

a) $V(3, 0)$

$2p = 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = \frac{5}{2}$

b) $V(4, 1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(5, 1)$ Directriz: $x = 3$

c) $V(0, 2)$

$2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{2}$

d) $V(3, -1)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(3, 1)$ Directriz: $y = -3$

e) $V(0, -1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(0, -3)$ Directriz: $y = 1$

f) $V(1, -3)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(-1, -3)$ Directriz: $x = 3$

051 Halla la ecuación de estas parábolas.

a) Foco en (3, 0) y directriz $x = -8$.

b) Foco en (0, 2) y directriz $y = -2$.

c) Foco en (3, 1) y directriz $x = -5$.

d) Foco en (3, 1) y directriz $x = 7$.

a) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x+8|$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 16x + 64 \rightarrow y^2 = 22x + 55$

b) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2|$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$

c) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x+5|$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 10x + 25 \rightarrow (y-1)^2 = 16x + 16$

d) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x-7|$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 14x + 49 \rightarrow (y-1)^2 = -8x + 40$

052 Encuentra la ecuación de la parábola con estos datos y determina los elementos que falten (foco, vértice o directriz).

a) Vértice en (2, 3) y directriz $x = -3$.

b) Vértice en (−2, 0) y directriz $x = 6$.

c) Vértice en (3, 1) y foco en (3, 7).

d) Vértice en (3, 1) y foco en (5, 1).

a) La ecuación de la parábola es de la forma: $(y-3)^2 = 2p(x-2)$

Como la directriz es $x = -3 \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, d) = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow (y-3)^2 = 20(x-2)$

El foco de la parábola es: $F(7, 3)$

b) La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = -2p(x+2)$

Como la directriz es $x = 6 \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, d) = 8 \rightarrow p = 16 \rightarrow y^2 = -32(x+2)$

El foco de la parábola es: $F(-10, 0)$

c) La ecuación de la parábola es de la forma: $(x-3)^2 = 2p(y-1)$

$F(3, 7) \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, F) = 6 \rightarrow p = 12 \rightarrow (x-3)^2 = 24(y-1)$

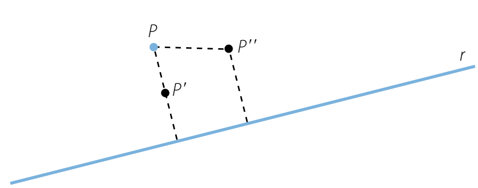
La directriz de la parábola es: $y = -5$

d) La ecuación de la parábola es de la forma: $(y-1)^2 = 2p(x-3)$

$F(5, 1) \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, F) = 2 \rightarrow p = 4 \rightarrow (y-1)^2 = 8(x-3)$

La directriz de la parábola es: $x = 1$

053 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(3, 1)$ y de la recta $r: 3x - 4y + 5 = 0$.



Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2-6x+9+y^2-2y+1} = \frac{|3x-4y+5|}{5}$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1 = \frac{9x^2+16y^2+25+30x-40y-24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2-150x+225+25y^2-50y+25 =$$

$$= 9x^2+16y^2+25+30x-40y-24xy$$

$$\rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-180x-10y+225=0$$

054 **¿Cuál es el vértice de una parábola cuyo foco es (−1, 3) si su directriz es la bisectriz del primer cuadrante?**

Si la directriz es $y = x$, como el eje de la parábola es una recta perpendicular, se verifica que es de la forma: $y = -x + k$

Al ser $F(-1, 3)$ un punto del eje: $3 = 1 + k \rightarrow k = 2$

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = -x+2 \end{array}\right\} \rightarrow P(1, 1) \text{ es el punto de intersección del eje y la directriz.}$$

El vértice de la parábola es el punto medio del segmento PF: $V(0, 2)$

055 **Halla las ecuaciones de las circunferencias que tienen las siguientes características.**

a) Centro en (5, −3) y radio 8.

b) Centro en (−2, −4) y diámetro $\sqrt{20}$.

c) Centro en (0, 0) y radio 3.

d) Centro en (−3, 4) y radio 5.

a) $(x-5)^2+(y+3)^2 = 64 \rightarrow x^2+y^2-10x+6y-30=0$

b) $(x+2)^2+(y+4)^2 = 20 \rightarrow x^2+y^2+4x+8y=0$

c) $x^2+y^2=9$

d) $(x+3)^2+(y-4)^2 = 25 \rightarrow x^2+y^2+6x-8y=0$

056 **Determina la ecuación de una circunferencia con centro en (−1, 6) y que pasa por el punto (3, −3). ¿Está el punto (−2, −8) situado en esa circunferencia?**

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$

Si pasa por el punto $(3, -3)$: $(3+1)^2+(-3-6)^2 = 97 \rightarrow r = \sqrt{97}$

La ecuación simplificada es: $x^2+y^2+2x-12y-60=0$

Sustituimos: $(-2)^2+(-8)^2+2(-2)-12(-8)-60 = 100 \neq 0$

$(-2, -8)$ No pertenece a la circunferencia.

057 Decide si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias y, en caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

a) $x^2+y^2+6x-4y-12=0$
b) $x^2+y^2-2x+10y+21=0$
c) $x^2+y^2-4x+6y+18=0$
d) $x^2+y^2+8x+4y+20=0$
e) $4x^2+4y^2-4x+12y-71=0$
f) $4x^2+4y^2-4x+6y-7=0$

a) $x^2+y^2+6x-4y-12=0 \rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=25$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C(-3, 2)$ y radio 5.

b) $x^2+y^2-2x+10y+21=0 \rightarrow (x-1)^2+(y+5)^2=5$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C(1, -5)$ y radio $\sqrt{5}$.

c) $x^2+y^2-4x+6y+18=0 \rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=-5$

No es una circunferencia.

d) $x^2+y^2+8x+4y+20=0 \rightarrow (x+4)^2+(y+2)^2=0$

No es una circunferencia.

e) $4x^2+4y^2-4x+12y-71=0 \rightarrow x^2+y^2-x+3y-\frac{71}{4}=0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $\frac{9}{2}$.

f) $4x^2+4y^2-4x+6y-7=0 \rightarrow x^2+y^2-x+\frac{3}{2}y-\frac{7}{4}=0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{41}{16}$$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{41}}{4}$.

058 Determina la ecuación de la circunferencia de centro (3, −4) y que es tangente a la recta.

$$3x+4y-18=0$$

$$d(P, r)=\frac{|3\cdot 3+4(-4)-18|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-3)^2+(y+4)^2=25 \rightarrow x^2+y^2-6x+8y=0$

059 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 9), (4, 7) y (−10, −7). Decide si los siguientes puntos están o no en la circunferencia. Si no es así, decide si son puntos interiores o exteriores a la circunferencia sin representarla gráficamente.

a) (−4, −9)
b) (−5, 10)
c) (5, −5)

Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

$$\left.\begin{array}{r} 4+81+2A+9B+C=0 \\ 16+49+4A+7B+C=0 \\ 100+49-10A-7B+C=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A+9B+C=-85 \\ 4A+7B+C=-65 \\ 10A+7B-C=149 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} 2A+9B+C&=-85 \\ A-B&=10 \\ 7A+4B&=16 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rl} 2A+9B+C&=-85 \\ A-B&=10 \\ 7A&=56 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=8 \\ B=-2 \\ C=-83 \end{array} \rightarrow x^2+y^2+8x-2y-83=0$$

a) $(-4)^2 + (-9)^2 + 8(-4) - 2(-9) - 83 = 0 \rightarrow (-4, -9)$ pertenece a la circunferencia.

b) $(-5)^2 + 10^2 + 8(-5) - 2 \cdot 10 - 83 = -18 \neq 0 \rightarrow (-5, 10)$ no pertenece a la circunferencia.

$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 83 = 0 \rightarrow (x+4)^2 + (y-1)^2 = 100 \rightarrow$ Centro: $(-4, 1)$ y radio: 10

$\sqrt{(-5+4)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{82} < 10 \rightarrow$ El punto $(-5, 10)$ es interior.

c) $5^2 + (-5)^2 + 8 \cdot 5 - 2(-5) - 83 = 17 \neq 0 \rightarrow (5, -5)$ no pertenece a la circunferencia.

$\sqrt{(5+4)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{117} > 10 \rightarrow$ El punto $(5, -5)$ es exterior.

060 **Determina el punto de la circunferencia de centro (2, 8) y radio 5 que esté más próximo a cada uno de estos puntos.**

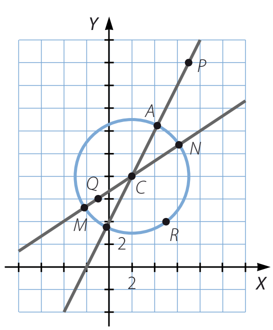
a) $P(7, 18)$

b) $Q(-1, 6)$

c) $R(5, 4)$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$



a) La recta que pasa por P y el centro de la circunferencia es: $2x - y + 4 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $A\left(2+\sqrt{5}, 8+2\sqrt{5}\right)$

b) La recta que pasa por Q y el centro de la circunferencia es: $2x - 3y + 20 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = \frac{2x+20}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow 13x^2 - 52x - 173 = 0 \rightarrow x = \frac{26 \pm 15\sqrt{13}}{13}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $M\left(\dfrac{26 - 15\sqrt{13}}{13}, 24 - 10\sqrt{13}\right)$

c) $5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 16 \cdot 4 + 43 = 0 \rightarrow R$ pertenece a la circunferencia y coincide con el punto pedido.

061 Halla la ecuación de la circunferencia de centro (−4, 2) que es tangente a la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 16x + 6y + 72 = 0$$

$x^2 + y^2 - 16x + 6y + 72 = 0 \rightarrow (x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 1$

La circunferencia tiene centro $C_1(8, -3)$ y radio $r_1 = 1$.

$\sqrt{(8 + 4)^2 + (-3 - 2)^2} = 13 \rightarrow r_2 = 12$

Entonces la circunferencia tangente es:
$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 144 \rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 124 = 0$

062 Obtén la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia de radio 5 y centro (−8, 2) en el punto (−4, −1).

La recta normal pasa por el punto y por el centro de la circunferencia.

Su ecuación es: $3x + 4y + 16 = 0$

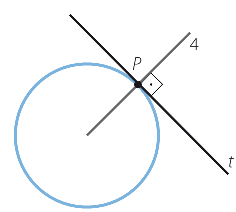
La recta tangente pasa por el punto y es perpendicular a la normal.

Su ecuación es: $4x - 3y + 13 = 0$

063 Escribe la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

en el punto $P(-1, 4)$.



$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$
$\rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25 \rightarrow C(3, 1)$

La recta normal pasa por el punto y por el centro de la circunferencia.

Su ecuación es: $3x + 4y - 13 = 0$

La recta tangente pasa por el punto y es perpendicular a la normal.

Su ecuación es: $4x - 3y + 16 = 0$

064 Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (7, −4) y (4, −1) y cuyo centro se sitúa en la recta $2x + y - 1 = 0$.

Como el centro equidista de los puntos, se encuentra en la mediatriz del segmento que forman.

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 1)^2} \rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 =$$
$$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow x - y - 8 = 0$$

El centro es el punto de intersección de la mediatriz y la recta dada.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(3, -5)$$

$r = \sqrt{(3 - 7)^2 + (-5 + 4)^2} = \sqrt{17}$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 17 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 17 = 0$

065 ●○○ **Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0$ con las rectas.**

a) $r: x + 9y - 16 = 0$ **b) $s: x + y + 2 = 0$** **c) $t: 4x - 5y - 23 = 0$**

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + 9y - 16 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−2, 2)

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

Los puntos de intersección son: (6, −8) y (−3, 1)

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ 4x - 5y - 23 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−3, −7)

066 ●○○ **Decide qué posiciones relativas tienen estas rectas con la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$.**

a) $r: -x + 2y + 11 = 0$ **c) $t: 2x - 3y + 9 = 0$**
b) $s: 3x - 2y - 7 = 0$ **d) $u: 3x + 5y = -2$**

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ -x + 2y + 11 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 5y^2 + 20y + 27 = 0$

$\Delta = -140 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 - 106x + 169 = 0$

$\Delta = 2.448 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la recta y la circunferencia son secantes.

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 2x - 3y + 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 10y + 25 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 3x + 5y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 17x^2 + 89x + 222 = 0$

$\Delta = -7.175 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

067 ●●○ **Obtén el valor del coeficiente C en la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ para que sea tangente a la recta $2x + 3y = 0$.**

$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 + 78x + 9C = 0$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$6.084 - 468C = 0 \rightarrow C = 13$

068 ¿Cuál debe ser el radio de la circunferencia de centro (9, −2) para que sea tangente a la recta $y = -3x + 5$? Halla la ecuación de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{r}(x-9)^2 + (y+2)^2 = r^2\\ y = -3x + 5\end{array}\right\} \to 10x^2 - 60x + 130 - r^2 = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$3.600 - 40(130 - r^2) = 0 \to 40r^2 - 1.600 = 0 \to r = 2\sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-9)^2 + (y+2)^2 = 40 \to x^2 + y^2 - 18x + 4y + 45 = 0$

069 Calcula el valor de B de modo que la recta $3x + By - 6 = 0$ sea tangente a la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r}x^2 + y^2 + 10x + 2y + 1 = 0\\ x = \dfrac{6 - By}{3}\end{array}\right\} \to (B^2 + 9)y^2 + (18 - 42B)y + 225 = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$$(18 - 42B)^2 - 900(B^2 + 9) = 0 \to 4B^2 - 7B - 36 = 0 \to \begin{cases} B = 4\\ B = -\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

070 Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, de radio 3 y centro en (5, −2), y que es paralela a la recta $2x + y - 11 = 0$.

Las rectas paralelas a la recta dada son de la forma: $2x + y + k = 0$

$$\left.\begin{array}{r}(x-5)^2 + (y+2)^2 = 9\\ 2x + y + k = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0\\ y = -2x - k\end{array}\right\}$$

$$\to 5x^2 + (4k - 18)x + k^2 - 4k + 20 = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(4k - 18)^2 - 20(k^2 - 4k + 20) = 0 \to k^2 + 16k + 19 = 0 \to k = -8 \pm 3\sqrt{5}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases} 2x + y - 8 + 3\sqrt{5} = 0\\ 2x + y - 8 - 3\sqrt{5} = 0\end{cases}$

071 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x = 0$ y que es perpendicular a la recta $-4x + y + 8 = 0$.

Las rectas perpendiculares a la recta dada son de la forma: $x + 4y + k = 0$

$$\left.\begin{array}{r}x^2 + y^2 + 10x = 0\\ x = -4y - k\end{array}\right\} \to 17y^2 + (8k - 40)y + k^2 - 10k = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(8k - 40)^2 - 68(k^2 - 10k) = 0 \to k^2 - 10k - 400 = 0 \to k = 5 \pm 5\sqrt{17}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases} x + 4y + 5 + 5\sqrt{17} = 0\\ x + 4y + 5 - 5\sqrt{17} = 0\end{cases}$

072 ●○○ **Obtén la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$ y que pasa por (11, 2). Determina los dos extremos del diámetro.**

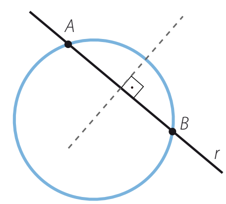
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 29 \rightarrow C(1, -2)$

La ecuación del diámetro es: $\dfrac{x - 11}{10} = \dfrac{y - 2}{4} \rightarrow 2x - 5y - 12 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0 \\ 2x - 5y - 12 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

Los extremos del diámetro son los puntos de intersección: (6, 0) y (−4, −4)

073 ●●○ **Halla la longitud de la cuerda que determina la recta $r: x + y + 1 = 0$ al cortar a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 = 0$. Demuestra que la mediatriz de esa cuerda pasa por el centro de la circunferencia.**



$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Los puntos de intersección son: $A(0, -1)$ y $B(3, -4)$

La longitud de la cuerda es: $d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 + 1)^2} = 3\sqrt{2}$ unidades

El punto medio de la cuerda es: $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Como $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, un vector normal es (1, 1). Así, la ecuación de la mediatriz es:

$y + \dfrac{5}{2} = x - \dfrac{3}{2} \rightarrow x - y - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 29 \rightarrow C(-2, -6)$

Como $-2 + 6 - 4 = 0 \rightarrow$ La mediatriz pasa por C.

074 ●●○ **Las rectas $2x - 3y + 5 = 0$ y $3x + 2y + 1 = 0$ son, respectivamente, la recta tangente y la recta normal a una circunferencia de radio 4 en un punto. Determina el punto y la ecuación de la circunferencia.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (-1, 1) \text{ es el punto de tangencia.}$$

El conjunto de puntos que se encuentran a $\sqrt{13}$ unidades del punto A es:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

Como la normal a la circunferencia pedida pasa por el centro de la misma:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Los puntos de intersección son: (1, −2) y (−3, 4)

Luego las dos circunferencias que cumplen las condiciones son:

$$\left.\begin{array}{r} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0 \\ (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 13 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0 \end{array}\right\}$$

075 Halla la intersección de la circunferencia, de centro (0, 0) y radio 5, con otra circunferencia cuyo centro es (2, 0) y su radio mide 4.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ (x-2)^2+y^2=16 \end{array}\right\} \to 25-x^2=16-(x-2)^2 \to 4x=13 \to x=\frac{13}{4}$$

$$\frac{169}{16}+y^2=25 \to y^2=\frac{231}{16} \to y=\pm\frac{\sqrt{231}}{4}$$

Los puntos de intersección son: $\left(\frac{13}{4}, \frac{\sqrt{231}}{4}\right)$ y $\left(\frac{13}{4}, -\frac{\sqrt{231}}{4}\right)$

076 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

$$C_1: x^2+y^2-2x-y-5=0 \qquad C_2: x^2+y^2-5=0$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-2x-y-5=0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{array}\right\} \to 2x+y+5=5 \to 2x+y=0$$

077 Halla la distancia del centro de la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-24=0$ a cada una de estas rectas, y úsalo para decidir la posición relativa de cada recta con la circunferencia.

a) $r: 2x+y-7=0$

b) $s: 5x+2y-30=0$

c) $t: -x+2y+20=0$

d) $u: x-2=0$

$$x^2+y^2-2x+4y-24=0 \to (x-1)^2+(y+2)^2=29 \to C(1,-2)$$

a) $\dfrac{|2\cdot 1+(-2)-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}<\sqrt{29} \to$ La recta es secante a la circunferencia.

b) $\dfrac{|5\cdot 1+2(-2)-30|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\sqrt{29}=r \to$ La recta es tangente a la circunferencia.

c) $\dfrac{|-1+2(-2)+20|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=3\sqrt{5}>\sqrt{29} \to$ La recta es exterior a la circunferencia.

d) $\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1^2}}=1<\sqrt{29} \to$ La recta es secante a la circunferencia.

078 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5, 4) y (−2, 3) y que tiene un radio de 5 unidades.

La circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=5^2$ pasa por (5, 4) y (−2, 3):

$(5-a)^2+(4-b)^2=5^2 \to a^2+b^2-10a-8b=-16$

$(-2-a)^2+(3-b)^2=5^2 \to a^2+b^2+4a-6b=12$

Restando las dos ecuaciones: $14a+2b=28 \to b=14-7a$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$a^2+(7(2-a))^2-10a-8\cdot 7(2-a)=-16 \to a^2-3a+2=0 \to \begin{cases} a=2 \to b=0 \\ a=1 \to b=7 \end{cases}$$

Existen dos circunferencias que cumplen las condiciones del problema:

$(x-2)^2+y^2=5^2 \to (x-1)^2+(y-7)^2=5^2$

079 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (—3, 7) y (11, 3) y con un radio de 2 unidades. Explica lo que sucede.

La circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=2^2$ pasa por $(-3, 7)$ y $(11, 3)$:

$(-3-a)^2+(7-b)^2=2^2 \rightarrow a^2+b^2+6a-14b=-54$

$(11-a)^2+(3-b)^2=2^2 \rightarrow a^2+b^2-22a-6b=-126$

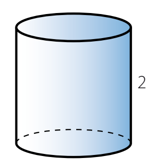
Restando las dos ecuaciones: $28a-8b=72 \rightarrow b=\dfrac{7a-18}{2}$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$a^2+\left(\frac{7a-18}{2}\right)^2+6a-14\cdot\frac{7a-18}{2}=-54 \rightarrow 53a^2-424a+1.044=0$$

$\Delta=-41.552 \rightarrow$ No existe ninguna circunferencia que cumpla estas condiciones a la vez.

080 Halla el volumen de un cilindro cuya base tiene por ecuación $x^2+y^2+6x+10y+9=0$ y cuya altura mide 2 unidades.



$x^2+y^2+6x+10y+9=0 \rightarrow (x+3)^2+(y+5)^2=25 \rightarrow r=5$

El volumen del cilindro es: $V=\pi\cdot r^2\cdot h=50\pi=157{,}08$

081 Obtén las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos que equidistan de (1, 4) y de la recta $3x+4y+1=0$. ¿Será una parábola? ¿Se puede escribir su ecuación? ¿Por qué?

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16}=\frac{|3x+4y+1|}{5}$$

$$\rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=\frac{9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2-50x+25+25y^2-200y+400=9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy$$

$$\rightarrow 16x^2+9y^2-24xy-56x-208y+424=0$$

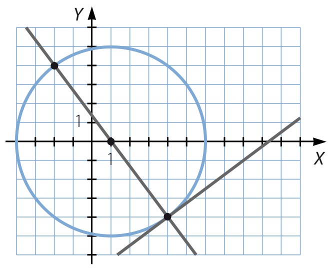
Se trata de una parábola, pero no se puede escribir su ecuación reducida, porque el vértice y el foco no se encuentran situados en uno de los ejes de coordenadas.

082 Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan, a la vez, por los puntos (4, 1) y (—2, 5). ¿De qué figura se trata?

Los centros de las circunferencias se encuentran a la misma distancia de ambos puntos; por tanto, forman la mediatriz del segmento que determinan.

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2} \rightarrow x^2-8x+16+y^2-2y+1=$$
$$=x^2+4x+4+y^2-10y+25 \rightarrow 3x-2y+3=0$$

083 **Obtén la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y - 28 = 0$, sabiendo que su radio mide 5 y que pasa por el punto $(-2, 4)$.**



La recta normal en el punto de tangencia de la recta $3x - 4y - 28 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 4)$ es: $4x + 3y - 4 = 0$

Las dos rectas se cortan en otro punto de la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - 28 = 0 \\ 4x + 3y - 4 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 12x - 16y - 112 = 0 \\ -12x - 9y + 12 = 0 \end{array}\right\} \to (4, -4)$$

Entonces el punto medio del segmento AB es $C(1, 0)$, y el radio de la circunferencia es:

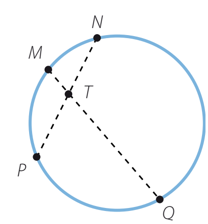
$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (4-0)^2} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 1)^2 + y^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

084 **Si dibujas cuatro puntos sobre una circunferencia y los unes, según se observa en la figura, resulta que:**

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \overline{TN} \cdot \overline{TP}$$

Compruébalo tomando los puntos $M(5, 1)$, $N(4, 2)$, $P(-3, -5)$ y $Q(-2, 2)$ y demostrando que están sobre la misma circunferencia. Halla su ecuación. Después, calcula el punto T y prueba que se verifica la igualdad inicial.



Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 16 + 4 + 4A + 2B + C = 0 \\ 9 + 25 - 3A - 5B + C = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ 4A + 2B + C = -20 \\ 3A + 5B - C = 34 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B \quad = -6 \\ 4A + 3B \quad = 4 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B = -6 \\ 7A = -14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -20 \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Obtenemos la ecuación de la circunferencia que pasa por M, N y P.

Como $(-2)^2 + 2^2 - 2(-2) + 4 \cdot 2 - 20 = 0$, Q pertenece también a la circunferencia.

La recta que pasa por M y Q tiene por ecuación: $\dfrac{x-5}{-7} = \dfrac{y-1}{1} \to x + 7y - 12 = 0$

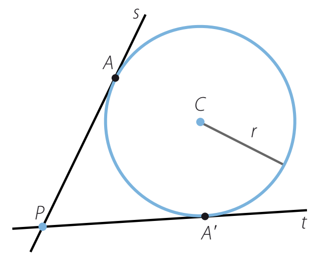
La recta que pasa por N y P tiene por ecuación: $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y-2}{-7} \to x - y - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x + 7y - 12 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \to T\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} \cdot \sqrt{\frac{450}{16}} = \frac{75}{2}$$

$$\overline{TN} \cdot \overline{TP} = \sqrt{\left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-3 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(-5 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1.250}{16}} = \frac{75}{2}$$

085 ●●○ En esta figura hemos trazado las dos rectas tangentes s y t a una circunferencia, de centro C y radio r, trazadas desde un punto P exterior a ella.



Supongamos que $C(-1, 3)$, el radio mide 5 unidades y el punto $P(-9, -3)$.

Las rectas que pasan por P tienen la forma:

$y = -3 + m(x + 9) \rightarrow mx - y + 9m - 3 = 0$

Imponemos que la distancia de C a esa recta sea igual al radio, 5.

$$\left|\frac{(-1)m - 3 + 9m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(8m - 6)^2 = \left(5\sqrt{m^2 + 1}\right)^2$$

que tiene dos soluciones: 0,12 y 2,34; por lo que las ecuaciones de las rectas son:

$$y = 0{,}12x - 1{,}92 \qquad y = 2{,}34x + 18{,}07$$

Considerando todo lo anterior, calcula las dos rectas tangentes a la circunferencia dada que pasan por:

a) El punto (0, 14).

b) El punto (12, 0).

c) Explica lo que sucede al hallar las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto (2, 6).

a) Las rectas que pasan por (0, 14) son de la forma: $mx - y + 14 = 0$

$$\left|\frac{m(-1) - 3 + 14}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 5 \rightarrow \left|\frac{-m + 11}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5 \rightarrow m^2 - 22m + 121 = 25(m^2 + 1)$$

$$\rightarrow 12m^2 + 11m - 48 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -2{,}51 \\ m = 1{,}59 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son: $\begin{cases} -2{,}51x - y + 14 = 0 \\ 1{,}59x - y + 14 = 0 \end{cases}$

b) Las rectas que pasan por (12, 0) son de la forma: $mx - y - 12m = 0$

$$\left|\frac{m(-1) - 3 - 12m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 5 \rightarrow \left|\frac{-13m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5 \rightarrow 169m^2 + 78m + 9 = 25(m^2 + 1)$$

$$\rightarrow 72m^2 + 39m - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0{,}15 \\ m = -0{,}7 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son: $\begin{cases} 0{,}15x - y - 1{,}8 = 0 \\ -0{,}7x - y + 8{,}4 = 0 \end{cases}$

c) $\sqrt{(2 + 1)^2 + (6 - 3)^2} = 3\sqrt{2} < 5 \rightarrow$ El punto es interior a la circunferencia, no pueden trazarse las tangentes.

086 Dadas las rectas r: $3x + 4y + 7 = 0$ y s: $12x - 5y + 7 = 0$, ¿se puede trazar una circunferencia de centro (4, 4) que sea tangente a ambas rectas? ¿Y con centro en el punto (10, 2)? Escribe la ecuación de dicha circunferencia en el caso de que la respuesta haya sido afirmativa.

Circunferencia de centro (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 7 \\ \left|\dfrac{12\cdot 4 - 5\cdot 4 + 7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right| = \dfrac{35}{13} \end{array}\right\} \to$$ No se puede trazar la circunferencia, ya que el centro no se encuentra a la misma distancia de las dos rectas.

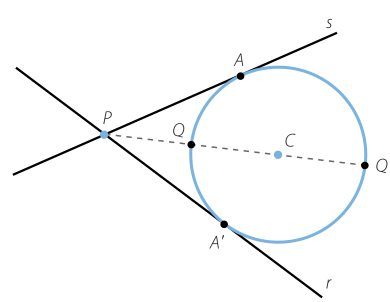
Circunferencia de centro (10, 2):

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{3\cdot 10 + 4\cdot 2 + 7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 9 \\ \left|\dfrac{12\cdot 10 - 5\cdot 2 + 7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right| = 9 \end{array}\right\} \to$$ El centro está a la misma distancia de las dos rectas.

La ecuación de la circunferencia es:

$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 81 \to x^2 + y^2 - 8x - 8y - 49 = 0$

087 Dadas las rectas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$.



a) Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

c) Si llamamos d a la distancia que separa P de C, la distancia de P a Q es $d - r$, y la distancia de P a Q' es $d + r$. Demuestra que $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = (\overline{PA})^2$.

a) $$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{array}\right\} \to 25x^2 - 380x + 1.444 = 0$$

$\Delta = 0 \to$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to 169x^2 - 2.860x + 12.100 = 0$$

$\Delta = 0 \to$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r}3x+4y-10=0\\5x-12y+2=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}9x+12y-30=0\\5x-12y+2=0\end{array}\right\} \rightarrow P(2,1)$

$x^2+y^2-20x+84=0 \rightarrow (x-10)^2+y^2=16 \rightarrow C(10,0)$

$25x^2-380x+1.444=0 \rightarrow x=\dfrac{38}{5} \rightarrow A\left(\dfrac{38}{5},-\dfrac{16}{5}\right)$

$169x^2-2.860x+12.100=0 \rightarrow x=\dfrac{110}{13} \rightarrow A'\left(\dfrac{110}{13},\dfrac{48}{13}\right)$

c) $x^2+y^2-20x+84=0 \rightarrow (x-10)^2+y^2=16 \rightarrow r=4$

$d=\sqrt{(10-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{65}$

$\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}'=\left(\sqrt{65}-4\right)\cdot\left(\sqrt{65}+4\right)=65-16=49$

$\overline{PA}^2=\left(\dfrac{38}{5}-2\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}-1\right)^2=\dfrac{784}{25}+\dfrac{441}{25}=49$

088 **Halla la ecuación de una elipse cuyo centro es (2, 4), tiene un foco en (5, 4) y su excentricidad es $\dfrac{3}{5}$.**

$\left.\begin{array}{l}C(2,4)\\F(5,4)\end{array}\right\} \rightarrow c=3$ $\qquad e=\dfrac{3}{5} \rightarrow a=5$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=4$ $\qquad$ La ecuación es: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$

089 **Escribe, en forma general, la ecuación de la elipse $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$. Halla también sus focos y su excentricidad.**

$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0 \rightarrow 4x^2-8x+4+9y^2+36y+36=36$

$\rightarrow 4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=36 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

El centro de la elipse es $C(1,-2)$.

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{5}$

Por tanto, los focos son: $F\left(1+\sqrt{5},-2\right)$ y $F'\left(1-\sqrt{6},-2\right)$

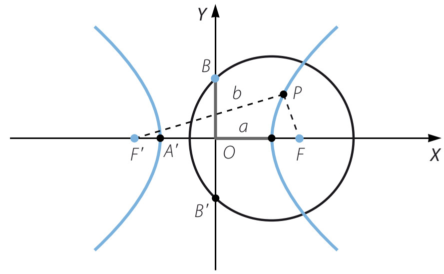
La excentricidad de la elipse es: $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

090 **Una hipérbola de $\dfrac{5}{4}$ de excentricidad tiene su centro en (2, 3) y un foco en (7, 3). Calcula su ecuación.**

$\left.\begin{array}{l}C(2,3)\\F(7,3)\end{array}\right\} \rightarrow c=5$ $\qquad e=\dfrac{5}{4} \rightarrow a=4$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b=3$ $\qquad$ La ecuación es: $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

091 Una hipérbola en la que se cumple que $a = b$ decimos que es equilátera. Supón que tiene su centro en (0, 0) y que el eje focal es horizontal.
Calcula su ecuación y halla las coordenadas de los focos en función de a. Determina las ecuaciones de sus asíntotas.



La ecuación de la hipérbola equilátera es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

Como $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{2}a \rightarrow F\left(\sqrt{2}a, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$

Al ser $a = b$, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm x$

092 Comprueba que la hipérbola, cuyos focos son $\left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ y su constante es $8\sqrt{2}$, es una hipérbola equilátera. Comprueba que (8, 2) está situado en esa hipérbola. Obtén su ecuación.

$$2c = \sqrt{\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 16$$

$$\left.\begin{array}{r} c = 8 \\ a = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

Al ser $a = b$, la hipérbola es equilátera.

$$\sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2} + \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32 = 128 + x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 +$$
$$+ 8\sqrt{2}y + 32 + 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow -16\sqrt{2}x - 16\sqrt{2}y - 128 = 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

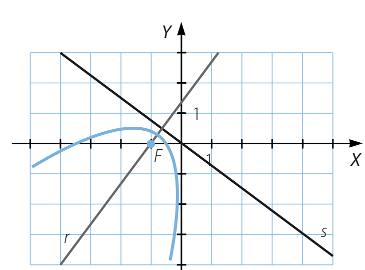
$$\rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = -\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 32 = x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32$$

$\rightarrow 2xy = 32 \rightarrow xy = 16$ es la ecuación de la hipérbola.

$8 \cdot 2 = 16 \rightarrow (8, 2)$ es un punto de la hipérbola.

093 Como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco, emplea la definición para calcular la ecuación de una parábola cuya directriz sea la recta r: $3x + 4y = 0$ y cuyo foco sea $F(-1, 0)$.



$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}\rightarrow\sqrt{x^2+2x+1+y^2}=\frac{|3x+4y|}{5}$$
$$\rightarrow x^2+2x+1+y^2=\frac{9x^2+16y^2+24xy}{25}$$
$$\rightarrow 25x^2+50x+25+25y^2=9x^2+16y^2+24xy$$
$$\rightarrow 16x^2+9y^2-24xy+50x+25=0$$

094 Halla los focos, vértices y directrices de las siguientes parábolas.

a) $y=x^2+2x+1$

b) $4y=-x^2+8x-6$

c) $y=4x^2-8x+12$

d) $y=6x^2+9x-10$

(Recuerda que, en una parábola del tipo $y=ax^2+bx+c$*, la directriz es horizontal y el vértice es un punto de abscisa* $-\frac{b}{2a}$*).*

a) $y=(x+1)^2$

El vértice de la parábola es: $V(-1,0)$

$2p=1\rightarrow p=\frac{1}{2}\rightarrow F\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y=-\frac{1}{4}$

b) $4y-10=-(x^2-8x+16)\rightarrow y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}(x-4)^2$

El vértice de la parábola es: $V\left(4,\frac{5}{2}\right)$

$2p=-\frac{1}{4}\rightarrow p=-\frac{1}{8}\rightarrow F\left(4,\frac{39}{16}\right)$ Directriz: $y=\frac{41}{16}$

c) $y-8=4(x^2-2x+1)\rightarrow y-8=4(x-1)^2$

El vértice de la parábola es: $V(1,8)$

$2p=4\rightarrow p=2\rightarrow F(1,9)$ Directriz: $y=7$

d) $y+\frac{107}{8}=6\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)\rightarrow y+\frac{107}{8}=6\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$

El vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{3}{4},-\frac{107}{8}\right)$

$2p=6\rightarrow p=3\rightarrow F\left(-\frac{3}{4},-\frac{95}{8}\right)$ Directriz: $y=-\frac{119}{8}$

095 Calcula los puntos de intersección de la parábola $y=\frac{3}{16}x^2$ y la circunferencia $x^2+y^2=25$.

$$\left.\begin{array}{r}3x^2-16y=0\\x^2+y^2=25\end{array}\right\}\rightarrow x^2=25-y^2$$

$$3y^2+16y-75=0\rightarrow\begin{cases}y=3\\y=-\frac{25}{3}\end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $(4,3)$ y $(-4,3)$

096 **Determina las posiciones relativas de la parábola $y^2 = 9x$ con las rectas.**

a) $r: 3x + y - 6 = 0$ b) $s: 2x + y + 6 = 0$ c) $t: 3x - 2y + 3 = 0$

En el caso de que las rectas corten a la parábola, halla los puntos de corte.

a) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x + y - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 + 3y - 18 = 0$

$\Delta = 81 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la recta corta a la parábola en dos puntos.

Los puntos de intersección son: (1, 3) y (4, −6)

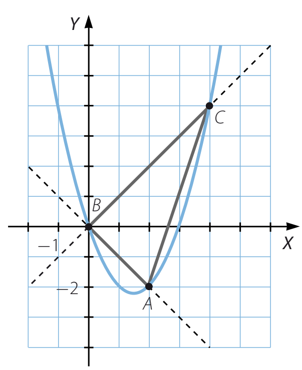
b) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 2x + y + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2y^2 + 9y + 54 = 0$

$\Delta = -351 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta no corta a la parábola.

c) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación solo tiene una solución; por tanto, la recta corta a la parábola en un punto, siendo tangente en el punto (1, 3).

097 **Las bisectrices de los cuatro cuadrantes cortan a la parábola $y = x^2 - 3x$ en tres puntos. Halla el área del triángulo que forman.**



Las bisectrices de los cuatro cuadrantes tienen como ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (4, 4)

$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 2x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (2, −2)

Como el ángulo en el vértice O es recto, el área del triángulo es:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$$

098 **La cónica de ecuación: $9x^2 + 16y^2 + 24xy + 8x - 44y + 24 = 0$ es una parábola cuyo eje es la recta: r: $8x - 6y + 2 = 0$. Determina su foco.**

Sea $F(a, b)$ el foco de la parábola.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{|8x - 6y + 2|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2} = \frac{|8x - 6y + 2|}{10}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = \frac{64x^2 + 36y^2 - 96xy + 32x - 24y + 4}{100}$$

$$100x^2 - 200ax + 100a^2 + 100y^2 - 200by + 100b^2 =$$
$$= 64x^2 + 36y^2 - 96xy + 32x - 24y + 4$$

$$9x^2 + 16y^2 + 24xy - (50a + 8)x - (50b - 6)y + 25a^2 + 25b^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 + 24xy + 8x - 44y + 24 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 8 = -(50a + 8) \\ -44 = -(50b - 6) \\ 24 = 25a^2 + 25b^2 - 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El foco es el punto $F(0, 1)$.

099 **Encuentra los puntos de corte de las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = \frac{1}{3}y$.**

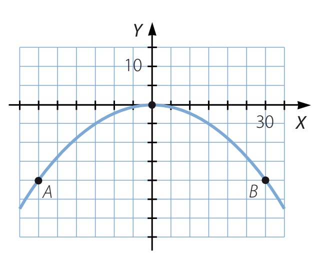
$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x^2 = y \end{array}\right\} \rightarrow 9x^4 - 9x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Los puntos de corte son: $(0, 0)$ y $(1, 3)$

100 **El famoso hombre bala Adal L. White hizo una demostración en una ciudad. Se introdujo en un cañón y fue lanzado al aire, siguiendo una trayectoria de un arco de parábola. Alcanzó una altura máxima de 20 metros y cayó ileso a una distancia de 60 metros del cañón.**

Determina la ecuación de la parábola que describe su trayectoria.

(Puedes suponer que el punto más elevado es el origen de coordenadas)



Si se considera el origen de coordenadas como el punto más elevado, los puntos A y B serían el punto de lanzamiento y de aterrizaje, respectivamente.

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = -2px^2$

Como $(30, -20)$ es un punto de la parábola: $-20 = -2p \cdot 900 \rightarrow p = \frac{1}{90}$

Por tanto, la ecuación de la parábola que describe la trayectoria es: $y = -\frac{1}{45}x^2$

101 Determina el valor de k que hace que la recta $2x + y + k = 0$ sea tangente a la parábola $y^2 = 6x$.

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 6x \\ 2x + y + k &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow (-2x - k)^2 = 6x \rightarrow 4x^2 + (4k - 6)x + k^2 = 0$$

La recta es tangente a la parábola si solo la corta en un punto; por tanto, la ecuación debe tener una única solución.

$$\Delta = (4k - 6)^2 - 16k^2 = 0 \rightarrow -48k + 36 = 0 \rightarrow k = \frac{3}{4}$$

102 Encuentra la ecuación de una parábola de directriz horizontal que pase por los puntos (4, 7), (−8, 7) y (10, 25).

Si la directriz es horizontal, la ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

Entonces:

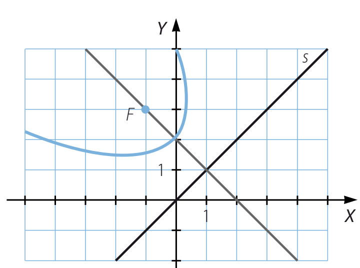
$$\left.\begin{aligned} 7 &= 16a + 4b + c \\ 7 &= 64a - 8b + c \\ 25 &= 100a + 10b + c \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 16a + 4b + c &= 7 \\ 4a - b &= 0 \\ 14a + b &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 16a + 4b + c &= 49 \\ 4a - b &= 0 \\ 6a &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$a = \frac{1}{6} \qquad b = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{5}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $6y = x^2 + 4x + 10$

103 El foco de esta parábola es $F(-1, 3)$ y su directriz es la bisectriz del primer cuadrante. Completa su ecuación.

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x + \boxed{}$$



$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9} = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 - 12y + 18 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 12y + 20 = 0$$

104 Decide qué tipo de cónicas son las siguientes, halla sus elementos y haz una representación gráfica aproximada.

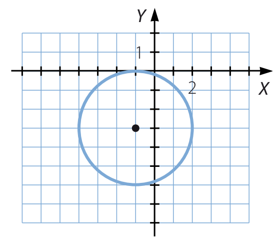
a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$

c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$
$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
La cónica es una circunferencia de centro $C(-1, -3)$ y radio 3.



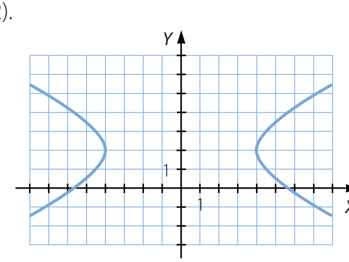
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 4(y - 2)^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

La cónica es una hipérbola de centro $C(0, 2)$.

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4, 2) \\ A'(-4, 2) \end{cases}$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{20}$

$\rightarrow \begin{cases} F\left(\sqrt{20}, 2\right) \\ F'\left(-\sqrt{20}, 2\right) \end{cases}$



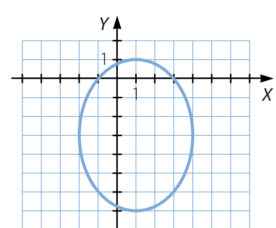
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0 \rightarrow 16(x - 1)^2 + 9(y + 3)^2 = 144$

$\rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1 \rightarrow$ La cónica es una elipse de centro $C(1, -3)$

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(1, 1) \\ A'(1, -7) \end{cases}$

Si $b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \begin{cases} B(-2, -3) \\ B'(4, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow \begin{cases} F\left(1, -3 + \sqrt{7}\right) \\ F'\left(1, -3 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$



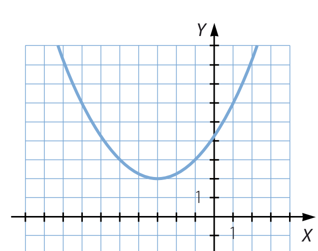
d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 4(y - 2)$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x + 3)^2$

La cónica es una parábola de vértice $V(-3, 2)$.

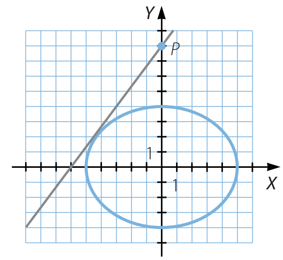
Como $2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(-3, \dfrac{17}{8}\right)$

La directriz es la recta $y = \dfrac{15}{8}$.



105 Calcula la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ en el punto $P(0, 8)$.

(Las rectas que pasan por (0, 8) tienen como ecuación $y = mx + 8$*)*



$$y = mx + 8$$

$$\left.\begin{array}{r} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = mx + 8 \end{array}\right\} \to (16 + 25m^2)x^2 + 400mx + 1.200 = 0$$

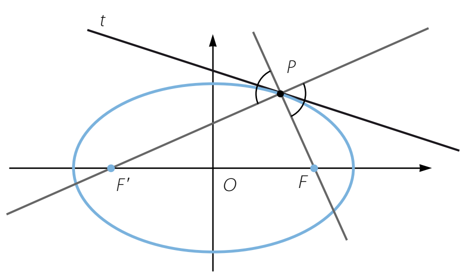
La recta es tangente a la elipse si la ecuación tiene solo una solución, es decir, si el discriminante de la ecuación es igual a cero.

$$\Delta = 160.000m^2 - 4.800(16 + 25m^2) = 40.000m^2 - 76.800 = 0 \to m = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto (0, 8):

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}x - 5y + 40 = 0 \\ 4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0 \end{cases}$$

106 En la figura se observa una propiedad de la recta tangente a una elipse en un punto P. Vemos que es la bisectriz del ángulo formado por la recta P con un foco y la recta que une P con el otro foco.



Usa esta propiedad para calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \end{array}\right\} \to c = 3$$

Los focos son los puntos: $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$

La recta que pasa por el punto y el foco F es: $x - 15y + 45 = 0$

La recta que pasa por el punto y el foco F' es: $31x - 15y - 45 = 0$

Los puntos de la bisectriz equidistan de ambas rectas:

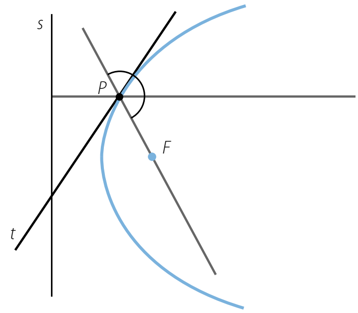
$$\frac{|x-15y+45|}{\sqrt{1^2+(-15)^2}} = \frac{|31x-15y-45|}{\sqrt{31^2+(-15)^2}} \to \begin{cases} \sqrt{593}\,(x-15y+45) = \sqrt{113}\,(31x-15y-45) \\ \sqrt{593}\,(x-15y+45) = -\sqrt{113}\,(31x-15y-45) \end{cases}$$

Simplificando: $\begin{cases} 305{,}18x + 205{,}82y - 1.574{,}17 = 0 \\ 353{,}88x - 524{,}72y + 617{,}46 = 0 \end{cases}$

Como la recta tangente en un punto del primer cuadrante tiene pendiente negativa, la recta tangente pedida es: $305{,}18x + 205{,}82y - 1574{,}17 = 0$

107 Observa la figura. Hemos dibujado una parábola y en ella situamos un punto P. Vemos que la recta tangente a la parábola en ese punto es la bisectriz del ángulo que forman la recta que une P con el foco y la recta perpendicular a la directriz que pasa por P.

Usando esa información, calcula la recta tangente a la parábola $y^2 = 18x$ en el punto (2, 6).



$2p = 18 \rightarrow p = 9 \rightarrow F(9, 0)$

La directriz es la recta: $x + 9 = 0$

La recta que pasa por el punto y el foco es: $6x + 7y - 54 = 0$

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el punto es: $y - 6 = 0$

Los puntos de la bisectriz equidistan de ambas rectas:

$$\frac{|6x + 7y - 54|}{\sqrt{6^2 + 7^2}} = \frac{|y - 6|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

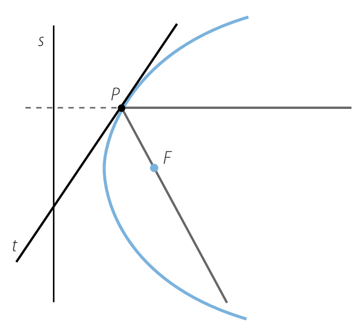
$$\rightarrow \begin{cases} 6x + 7y - 54 = \sqrt{85}(y - 6) \rightarrow 6x - 2{,}21y + 1{,}31 = 0 \\ 6x + 7y - 54 = -\sqrt{85}(y - 6) \rightarrow 6x + 16{,}21y - 109{,}31 = 0 \end{cases}$$

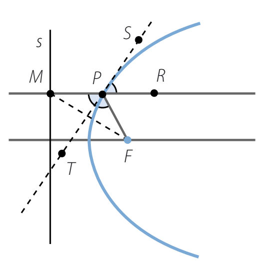
Como la recta tangente en un punto del primer cuadrante tiene pendiente positiva, la recta tangente pedida es: $6x - 2{,}21y + 1{,}31 = 0$

108 Si una señal incide sobre una antena parabólica en dirección perpendicular a su directriz, esta se refleja como si chocara contra la recta tangente en ese punto.

Demuestra que el rayo reflejado pasa siempre por el foco de la parábola.

Esta propiedad es la que confiere su utilidad a las antenas parabólicas, puesto que concentran la señal en un solo punto, el foco.





Se considera un punto F, una recta s y un punto M que pertenezca a ella.

Si se traza la perpendicular a d que pasa por M, esta recta corta a la mediatriz del segmento MF en un punto P, que pertenece a la parábola de foco F y directriz s por ser $\overline{MP} = \overline{PF}$. Como la recta es perpendicular, la medida del segmento MP coincide con la distancia del punto P a la recta s.

Esta mediatriz es la tangente a la parábola de foco F y directriz s. Además, los ángulos $\widehat{RPS}$ y $\widehat{FPT}$ son iguales, por ser los ángulos que forman el rayo que incide y el rayo que se refleja. Y por ser opuestos por el vértice, los ángulos $\widehat{MPT}$ y $\widehat{TPF}$ también son iguales.

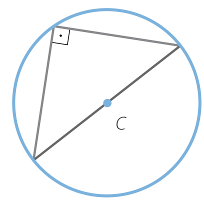
Por tanto, un rayo que incide perpendicularmente a la directriz se refleja pasando por el foco F.

109 Un espejo hiperbólico es tal que la distancia focal mide 26 mm y el eje real 24 mm. Calcula las coordenadas de los vértices y los focos.

$2c = 26 \rightarrow c = 13 \rightarrow F(-13, 0) \quad F'(13, 0)$

$2a = 24 \rightarrow a = 12 \rightarrow A(-12, 0) \quad A'(12, 0)$

110 Un triángulo inscrito en una circunferencia, cuyo lado mayor coincida con un diámetro, es un triángulo rectángulo.



a) Utiliza esta propiedad para calcular el lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de las distancias a $P(3, -3)$ y $Q(-5, 3)$ es 100.

b) Comprueba tus resultados, teniendo en cuenta que conociendo los dos extremos del diámetro puedes calcular el centro y el radio de la circunferencia.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 100$

$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 100$

$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 25$

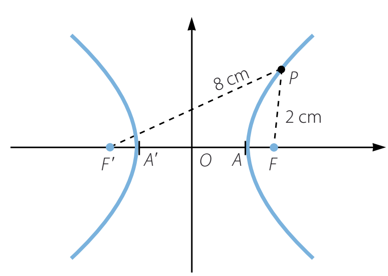
Es una circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 5.

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento: $(-1, 0)$

Y el radio de la circunferencia es la mitad de distancia entre los puntos:

$\sqrt{(-5 - 3)^2 + (3 + 3)^2} = 10$

111 Desde un punto de una hipérbola, los focos están a 2 cm y 8 cm, y el eje imaginario mide 6 cm. Calcula.



a) ¿Cuál es la distancia entre sus vértices?

b) ¿Y la distancia focal?

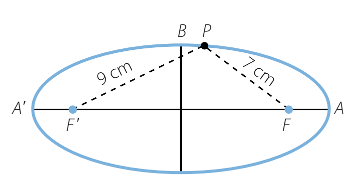
a) $2a = d(P, F) - d(P, F') = 8 - 2 = 6$

b) $2b = 6 \rightarrow b = 3$ cm

Como $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm $\rightarrow 2c = 6\sqrt{2}$ cm

112 Hemos medido la distancia desde un punto de una elipse a sus focos y es de 9 cm y 7 cm, respectivamente. Si la excentricidad es 0,8; ¿cuál es la longitud de sus ejes?



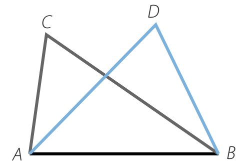
$2a = d(P, F) + d(P, F') = 9 + 7 = 16$ cm

$\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ e = 0{,}8 \end{array}\right\} \rightarrow c = 6{,}4$

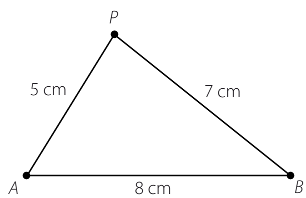
Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4{,}8$ cm $\rightarrow 2b = 9{,}6$ cm

113 **Los dos triángulos de la figura tienen la misma base, *AB*, que mide 8 cm, y sus perímetros miden 20 cm.**

Dibuja otro triángulo con estas propiedades y halla un método para dibujarlos.



Respuesta abierta.



Si P es el tercer vértice de un triángulo en las condiciones del problema, entonces: $d(P, A) + d(P, B) = 12$

Por tanto, para dibujar todos los triángulos hay que trazar la elipse de focos A y B con constante $2a = 12$.

PARA FINALIZAR...

114 **Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(6, 4)$, determina el lugar geométrico de los puntos P tales que el área del triángulo $\widehat{ABP}$ sea 10 de unidades cuadradas.**

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

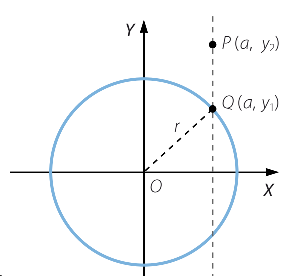
Si el área del triángulo mide 10, entonces la altura debe medir 4.

Sea r es la recta determinada por A y por B: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

$$d(P, r) = 4 \rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 2 = 20 \\ -3x + 4y + 2 = 20 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas paralelas: $\begin{cases} 3x - 4y - 22 = 0 \\ 3x - 4y + 18 = 0 \end{cases}$

115 **Considera un punto Q de una circunferencia con centro en el origen y radio r, y otro punto P con la misma abscisa que Q. Halla el lugar geométrico de los puntos P, sabiendo que la razón de las ordenadas de P y Q es k.**



Sea $C(a, b)$ el centro de una circunferencia tangente a la recta r: $x = a$ que pasa por el punto $B(b, 0)$.

$$d(C, r) = d(C, B) \rightarrow \frac{|x - a|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(x - b)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\rightarrow (x - a)^2 = (x - b)^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 2(b - a)$$

El lugar geométrico es la parábola de foco B y directriz r.

116 Igual que una recta puede expresarse con ecuaciones paramétricas, también puede hacerse con las cónicas.

Comprueba que las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ son de una circunferencia.

b) $\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ son de una elipse.

a) $\left.\begin{array}{l} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - a = r\cos\alpha \\ y - b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\}$

$\to (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\,\text{sen}^2\,\alpha = r^2$

Se trata de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r.

b) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \cos\alpha \\ \dfrac{y}{b} = \text{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$

Las ecuaciones corresponden a la elipse de centro $C(0, 0)$ y constante $2a$.

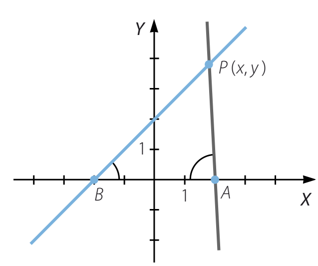
117 Describe el lugar geométrico de los puntos que verifican la ecuación $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0 \to (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) - 5 = 4 - 9$

$\to (x-2)^2 - (y-3)^2 = 0 \to \begin{cases} x - 2 = y - 3 \\ x - 2 = -y + 3 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

118 Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, tales que el producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$ es igual a k.



Identifica el lugar geométrico si:

a) $k = -1$
b) $k = 0$
c) $k = -4$
d) $k = 4$

$\overrightarrow{AP} = (x-2, y) \to m_1 = \dfrac{y}{x-2}$

$\overrightarrow{BP} = (x+2, y) \to m_2 = \dfrac{y}{x+2}$

$\dfrac{y}{x-2} \cdot \dfrac{y}{x+2} = k \to y^2 = k(x^2 - 4)$

a) Si $k = -1 \to y^2 = -x^2 + 4 \to x^2 + y^2 = 4$

El lugar geométrico es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, de radio 2.

b) Si $k = 0 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$

El lugar geométrico es una recta, el eje de abscisas.

c) Si $k = -4 \rightarrow y^2 = -4x^2 + 16 \rightarrow 4x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

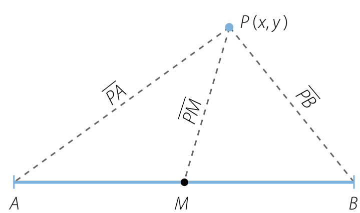
El lugar geométrico es una elipse centrada en el origen de coordenadas.

d) Si $k = 4 \rightarrow y^2 = 4x^2 - 16 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

El lugar geométrico es una hipérbola centrada en el origen de coordenadas.

119 **Consideramos un segmento de extremos *A* y *B*, y su punto medio *M*. Determina el lugar geométrico de los puntos *P*, tales que las distancias entre este punto y *M*, *A* y *B* cumplan la siguiente condición.**

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}}$$



Si $\overline{AB} = 2d$ y $M = (0, 0)$, se puede considerar que $A = (-d, 0)$ y $B = (d, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$\overline{PM} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{PA} = \sqrt{(x + d)^2 + y^2}$

$\overline{PB} = \sqrt{(x - d)^2 + y^2}$

$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} \rightarrow \left(\overline{PM}\right)^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{(x + d)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - d)^2 + y^2}$

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - d^2)^2 + (x + d)^2y^2 + (x - d)^2y^2 + y^4$

$x^4 + 2x^2y^2 = x^4 - 2d^2x^2 + d^4 + x^2y^2 + 2dxy^2 + d^2y^2 + x^2y^2 - 2dxy^2 + d^2y^2$

$2d^2x^2 - 2d^2y^2 = d^4 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{d^2}{2}} - \frac{y^2}{\frac{d^2}{2}} = 1$

Por ser iguales los ejes, el lugar geométrico es una hipérbola equilátera.

7 Funciones

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

En busca de Klingsor

Cierta vez, un reportero preguntó a Einstein:
–¿Existe una fórmula para obtener éxito en la vida?
–Sí, la hay.
–¿Cuál es? –preguntó el reportero, insistente.
–Si A representa al éxito, diría que la fórmula es $A = x + y + z$, en donde x es el trabajo e y la suerte –explicó Einstein.
–¿Y qué sería la z?
Einstein sonrió antes de responder:
–Mantener la boca cerrada.

Un joven norteamericano, Bacon, estudia Física en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y allí conoce a Einstein, del que recuerda algunas anécdotas como esta. Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, se hace espía y viaja a Alemania para encontrar al máximo responsable de las investigaciones atómicas realizadas por los nazis, que se esconde bajo el seudónimo de Klingsor. En sus pesquisas le ayuda un matemático, de nombre Links, que formó parte del equipo de investigación nuclear.

¿Por qué estábamos juntos el teniente Bacon y yo [pensaba Links]? ¿Cuándo nos encontramos por primera vez? ¿Cuál era nuestra misión? ¿Cómo se cruzaron, en fin, nuestras vidas paralelas? Para responder a estos cuestionamientos no me queda más remedio que hablar un poco de mí.

Ubico mi nacimiento en el mapa de mi imaginación como un pequeño punto dibujado en el centro de un plano cartesiano. Hacia arriba, en el eje de las y, está todo lo positivo que me ha ocurrido; en contraposición, hacia abajo descubro mis desventuras, mis retrocesos y mis requiebros. A la derecha, en el eje de las x, encuentro los actos que me definen, aquellos que voluntariamente he convertido en el centro de mi vida –deseos, anhelos, obsesiones–, mientras que, a la izquierda, yacen esas porciones de mi ser que me han modelado contra mi voluntad o mi conciencia, esas partes aparentemente impredecibles o espontáneas que, no puedo negarlo, también me han llevado adonde estoy ahora. ¿Cuál sería el resultado final de un ejercicio como éste? ¿Qué forma aparecería en medio de la hoja? ¿Sería posible trazar las coordenadas que he recorrido a lo largo de mi trayecto? ¿Y obtener, a partir de esa línea, la fórmula que me resuma en cuerpo y alma?

JORGE VOLPI

Juzga la metáfora de Links. ¿Sería posible representar una «vida» mediante una curva en un sistema de coordenadas cartesianas?

No sería posible, ya que los elementos que se describen en el texto no son traducibles a puntos del plano que puedan describir una curva.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Dada la función $f(x) = \log(sen\ x)$:

a) ¿Está definida para $x = \frac{\pi}{2}$? b) ¿Y para $x = \frac{3\pi}{2}$?

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log\left(sen\ \frac{\pi}{2}\right) = \log 1 = 0 \rightarrow$ La función está definida para $x = \frac{\pi}{2}$.

b) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \log\left(sen\ \frac{3\pi}{2}\right) = \log(-1) \rightarrow$ La función no está definida para $x = \frac{3\pi}{2}$, porque no existe el logaritmo de -1.

002 Expresa las siguientes condiciones en forma de intervalo.

a) $-1 \le x < 5$ b) $x \ge 7$ c) $x \le -2$ d) Todos los números reales.

a) $[-1, 5)$ b) $[7, +\infty)$ c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, +\infty)$

003 Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

$f(x) = x^3 - 2x^2$

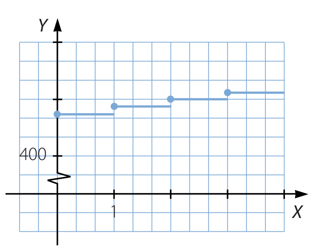
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

004 Dibuja estas funciones e indica de qué tipo son.

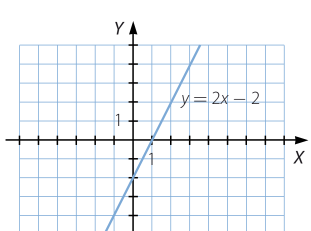
a) Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 €, y por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión.

b) A cada número real le hacemos corresponder su doble menos 2.

a)

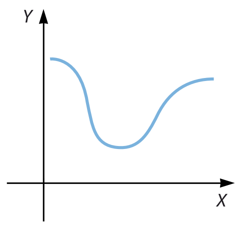


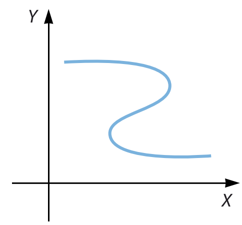
b)



ACTIVIDADES

001 Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

002 Razona, en cada caso, si la relación entre las magnitudes es una función o no.

a) La distancia entre dos ciudades y el tiempo que se tarda en ir de una a otra.

b) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilogramos, y el precio por kilogramo.

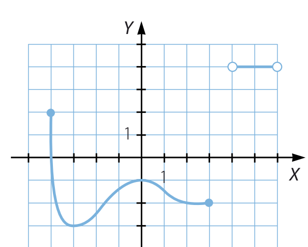
c) La altura de los alumnos de un centro escolar y su edad.

a) No se trata de una función, ya que según sea la distancia entre dos ciudades, el tiempo que se tarda puede tomar valores distintos, dependiendo de la velocidad a la que se circule.

b) Es una función, puesto que para cada cantidad de fruta que se compre hay un precio único según el peso por kilogramo adquirido.

c) No se trata de una función, porque distintos alumnos pueden tener la misma altura, aún siendo de edades distintas.

003 Determina el dominio y el recorrido de esta función.



Dom $f = [-4, 3] \cup (4, 6)$

Im $f = [-3, 2] \cup \{4\}$

004 ¿Cuál es el dominio de estas funciones?

a) $f(x) = \sqrt{x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 16}$

c) $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 9x$

d) $f(x) = \cos x$

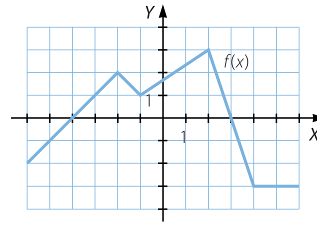
a) Dom $f = [-4, +\infty)$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

c) Dom $f = \mathbb{R}$

d) Dom $f = \mathbb{R}$

005 **¿En qué intervalos es creciente esta función? ¿Y decreciente? En $x = 2$, ¿es cóncava o convexa?**

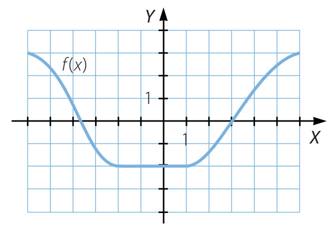


La función es creciente en $(-6, -2) \cup (-1, 2)$.

La función es decreciente en $(-2, -1) \cup (2, 4)$.

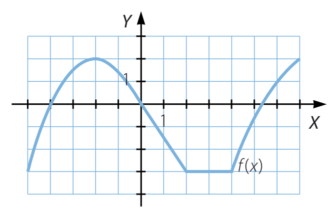
En $x = 2$, la función no es ni cóncava ni convexa.

006 **Estudia el crecimiento de la función.**



La función es decreciente en $(-\infty, -2)$, es constante en $(-2, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.

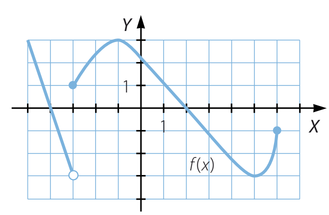
007 **¿En qué puntos de la función hay máximos relativos? ¿Y mínimos relativos? ¿Tiene máximos o mínimos absolutos?**



Existe un máximo relativo en el punto $x = -2$.

No tiene mínimos relativos ni absolutos y no hay máximos absolutos.

008 **Estudia el dominio, el recorrido, el crecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.**



Dom $f = (-\infty, 6]$

Im $f = [-3, +\infty)$

La función es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 5)$ y es creciente en $(-3, -1) \cup (5, 6)$.

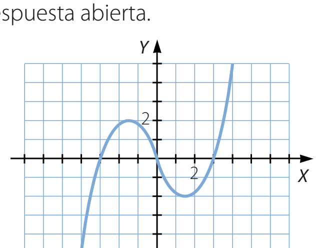
Existe un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo absoluto en $x = 5$. No hay máximos absolutos.

009 **Dibuja la gráfica de una función para que sea:**

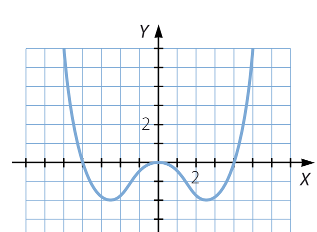
a) Impar. **b) Par.**

Respuesta abierta.

a)



b)



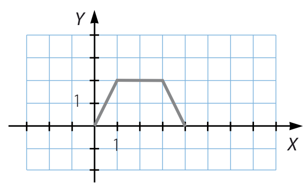
010 **Justifica si estas funciones son simétricas.**

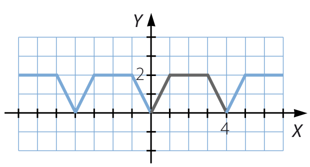
a) $f(x) = \dfrac{x^4+2}{x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^3-3}$

a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4+2}{(-x)^2} = \dfrac{x^4+2}{x^2} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

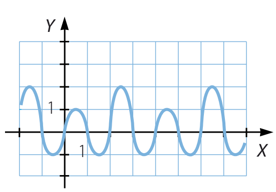
b) $g(-x) = \sqrt{(-x)^3-3} = \sqrt{-x^3-3} \rightarrow g(x)$ no es simétrica.

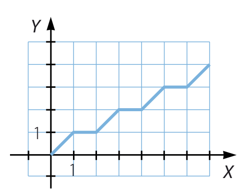
011 **Representa una función periódica tal que el período lo determine esta gráfica.**





012 **Razona si las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.**

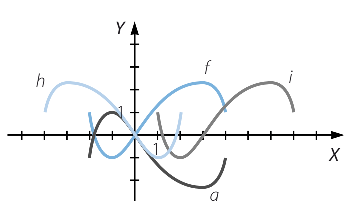
a) 

b) 

a) La función es periódica y su período es 4.

b) La función no es periódica, porque la gráfica no se repite.

013 **Teniendo en cuenta la gráfica de $y = f(x)$, identifica a qué función corresponde cada una de las gráficas que aparecen en la figura.**

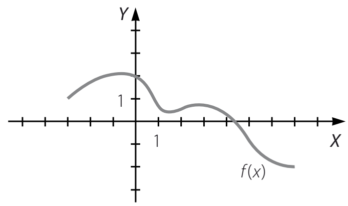


$g(x) = -f(x)$

$h(x) = f(-x)$

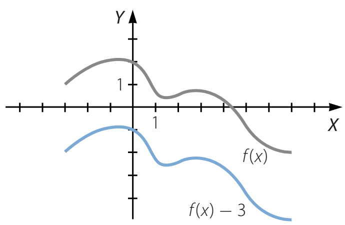
$i(x) = f(x-3)$

014 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, representa estas funciones.

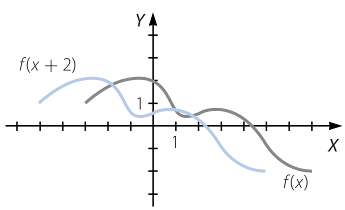


a) $y = f(x) - 3$ b) $y = f(x + 2)$ c) $y = -f(-x)$

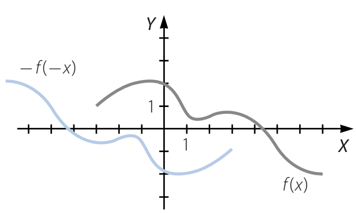
a)



b)



c)



015 Determina el valor de las estas funciones en el punto $x = -5$, si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{x}$.

a) $(f - g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f - g)(x) = x^2 - 3 - \dfrac{x+3}{x}$ $\quad (f - g)(-5) = (-5)^2 - 3 - \dfrac{-5+3}{-5} = \dfrac{108}{5}$

b) $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 3) \cdot \left(\dfrac{x+3}{x}\right) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}{x}$

$(f \cdot g)(-5) = \dfrac{(-5)^3 + 3(-5)^2 - 3(-5) - 9}{-5} = \dfrac{44}{5}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\dfrac{x+3}{x}} = \dfrac{x^3 - 3x}{x+3}$ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(-5) = \dfrac{(-5)^3 - 3(-5)}{-5+3} = 55$

016 Teniendo en cuenta que $f(x)=\sqrt{x^5}$ y $g(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $(f\cdot g)(-4)$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$

a) $(f\cdot g)(x)=\sqrt{x^5}\cdot\dfrac{x^2+3}{x+1}$

No existe $(f\cdot g)(-4)$, porque $\sqrt{(-4)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x^5}}{\dfrac{x^2+3}{x+1}}=\dfrac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$

No existe $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

017 Determina el valor de la composición de funciones que se indica en cada apartado, en $x=-4$, si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(g\circ f)(x)$

c) $(f\circ f)(x)$

d) $(g\circ g)(x)$

a) $(f\circ g)(-4)=f(g(-4))=f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{25}{16}$

b) $(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g(16)=\dfrac{15}{16}$

c) $(f\circ f)(-4)=f(f(-4))=f(16)=256$

d) $(g\circ g)(-4)=g(g(-4))=g\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$

018 Si $f(x)=\sqrt{2x^3}$ y $g(x)=x-4$, halla el valor de estas funciones en los puntos que se indican, determinando primero la composición de funciones correspondiente.

a) $(f\circ g)(5)$

b) $(g\circ f)(5)$

Justifica, a partir de los apartados anteriores, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-4)=\sqrt{2(x-4)^3}$

$(f\circ g)(5)=\sqrt{2}$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{2x^3}\right)=\sqrt{2x^3}-4$

$(g\circ f)(5)=\sqrt{250}-4=5\sqrt{10}-4$

$(f\circ g)(5)\neq(g\circ f)(5)\rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

019 Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$:

a) Determina $g \circ f$, $f \circ g$ y $g \circ g$.

b) Halla las funciones inversas de $f(x)$ y de $g(x)$, y comprueba que $f \circ f^{-1}$ y $g^{-1} \circ g$ dan la función identidad.

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{3x+2}{3x+3}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3 \cdot \frac{x}{x+1} + 2 = \frac{5x+2}{x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

b) $y = 3x + 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x-2}{3} + 2 = x$$

$$y = \frac{x}{x+1} \rightarrow xy + y = x \rightarrow x - xy = y \rightarrow x = \frac{y}{1-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

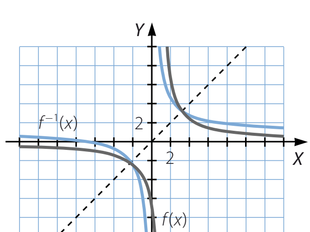
$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}+1} = \frac{x}{x+1-x} = x$$

020 Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \frac{7+x}{x}$.

a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

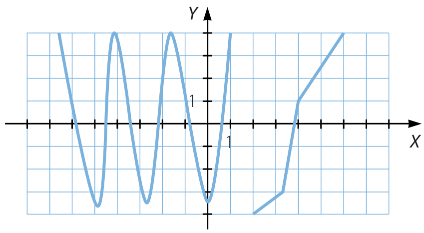
$$y = \frac{7+x}{x} \rightarrow xy = 7 + x \rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$

a) 

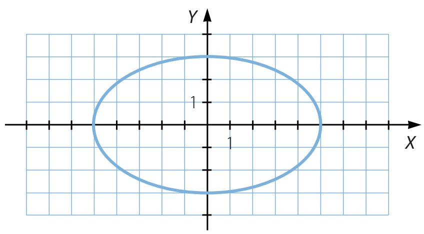
b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

021 Razona si las siguientes gráficas pueden corresponder a una función.

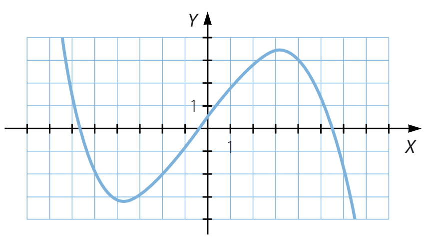
a)



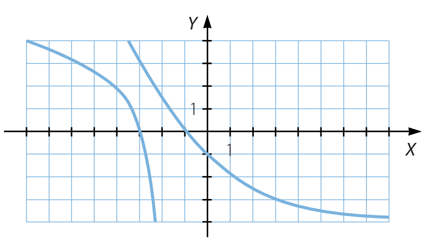
b)



c)



d)



a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque a los valores de x situados entre los vértices de la elipse les corresponden dos valores de y.

c) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

d) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

022 Realiza una tabla y representa estas funciones.

a) Cada número entero lo relacionamos con su número de divisores positivos.

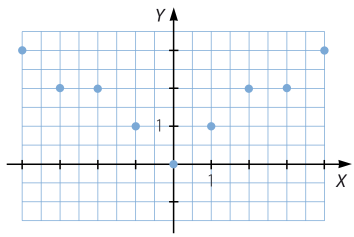
b) Cada número real lo relacionamos con su parte entera.

c) A cada número le hacemos corresponder él mismo menos su valor absoluto.

d) A cada número le corresponde el valor 2.

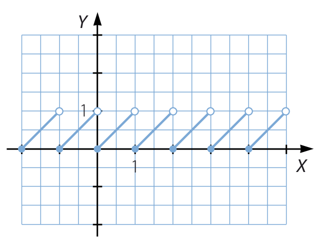
a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	2	1	0	1	2	2	3



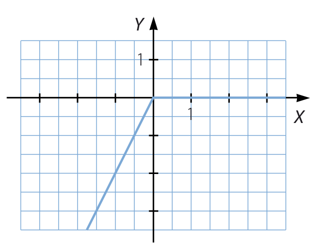
b)

x	−2	−1,6	−1	−0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	−2	−2	−1	−1	0	0	1	1	2



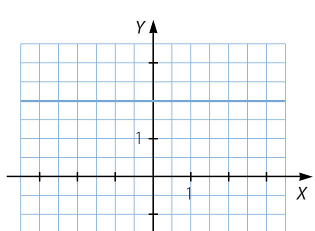
c)

x	−2	−1,6	−1	−0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	−4	−3,2	−2	−0,8	0	0	0	0	0



d)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2



023 A lo largo de un día medimos la longitud, en metros, de la sombra que proyecta una farola desde el amanecer hasta que anochece.

Las medidas, tomadas cada dos horas, desde las 6:00 h, se muestran a continuación.

0	25	17	5	2
6	19	32	0	

a) ¿Crees que las tablas definen una función?

b) En caso afirmativo, identifica sus variables.

a) La tabla define una función porque a cada hora le corresponde una única longitud de la sombra.

b) La variable independiente x corresponde con la hora del día y la variable dependiente y corresponde con la longitud, en metros, de la sombra.

024 Comprueba si los siguientes puntos están en los dominios de cada función.

a) Los puntos $x = 3$, $x = 2$ y $x = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$.

b) Los puntos $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$ para la función $f(x) = \ln(x - 4)$.

c) Los puntos $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$ para la función $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$.

a) $\sqrt{3+1} = 2 \to x = 3 \in \text{Dom } f$

$\sqrt{2+1} = \sqrt{3} \to x = 2 \in \text{Dom } f$

$\sqrt{-5+1} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \to x = -5 \notin \text{Dom } f$

b) $\ln(3-4) = \ln(-1) \notin \mathbb{R} \to x = 3 \notin \text{Dom } f$

$\ln(4-4) = \ln 0 \notin \mathbb{R} \to x = 4 \notin \text{Dom } f$

$\ln(5-4) = \ln 1 = 0 \to x = 5 \in \text{Dom } f$

c) $\dfrac{3 \cdot 2 - 6}{2+2} = 0 \to x = 2 \in \text{Dom } f$

$\dfrac{3(-2)-6}{-2+2} = \dfrac{-12}{0} \notin \mathbb{R} \to x = -2 \notin \text{Dom } f$

$\dfrac{3 \cdot 0 - 6}{0+2} = -3 \to x = 0 \in \text{Dom } f$

025 Estudia si los valores de la ordenada, y, están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) Las ordenadas $y = 3$, $y = 2$ e $y = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{3x-3}$.

b) Las ordenadas $y = 0$, $y = 30$ e $y = -3$ para la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

c) Las ordenadas $y = 1$, $y = \dfrac{13}{6}$ e $y = -7$ para la función $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+2}$.

a) $\sqrt{3x-3} = 3 \to 3x - 3 = 9 \to x = 4 \to y = 3 \in \text{Im } f$

$\sqrt{3x-3} = 2 \to 3x - 3 = 4 \to x = \dfrac{7}{3} \to y = 2 \in \text{Im } f$

$y = -5 \notin \text{Im } f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$ o $x = 3 \rightarrow y = 0 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow x = 8$ o $x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0$

$\rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones $\rightarrow y = -3 \in \text{Im } f$

c) $\dfrac{2x-5}{x+2} = 1 \rightarrow 2x - 5 = x + 2 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 1 \in \text{Im } f$

$\dfrac{2x-5}{x+2} = \dfrac{13}{6} \rightarrow 12x - 30 = 13x + 26 \rightarrow x = -56 \rightarrow y = \dfrac{13}{6} \in \text{Im } f$

$\dfrac{2x-5}{x+2} = -7 \rightarrow 2x - 5 = -7x - 14 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -7 \in \text{Im } f$

026 Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{7}$ b) $f(x) = \dfrac{7}{x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

027 Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ e) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$

b) $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$ d) $y = \sqrt{5 - 2x}$ f) $y = \sqrt{6 + x - x^2}$

a) $\text{Dom } f = [-3, +\infty)$

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

e) $x^2 + 2x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -32 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $6 + x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$\text{Dom } f = [-2, 3]$

028 Escribe el dominio de las funciones.

a) $y = \log_4 (x - 4)$ c) $y = 3^{\ln x}$ e) $y = \ln\left(\dfrac{10}{4-x}\right)$

b) $y = \cos (1 - x)$ d) $y = \text{sen } (x - \pi)$

a) $\text{Dom } f = (4, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

e) $\text{Dom } f = (-\infty, 4)$

029 Analiza el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \log_4 (5 + x)$
b) $y = 2^{3x-6}$
c) $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$
d) $y = 2 - tg\, x$
e) $y = \dfrac{3}{tg\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

a) Dom $f = (-5, +\infty)$
b) Dom $f = \mathbb{R}$
c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$
d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

030 Determina el dominio de las funciones.

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$
b) $y = \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt{x+3}$
c) $y = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

a) Dom $f = [-1, 8]$
b) Dom $f = [-3, +\infty)$
c) Dom $f = \varnothing$

031 Estudia el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y = 5x - 3$
b) $y = 2 + \sqrt{x-1}$
c) $y = \dfrac{3}{x}$
d) $y = 2 - 4^x$
e) $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$
f) $y = \dfrac{2}{x-2}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = [1, +\infty)$
Im $f = [2, +\infty)$

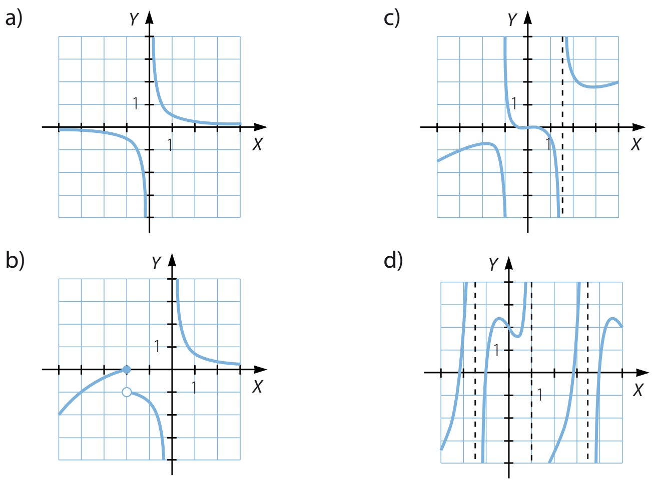
c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$
Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

d) Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = (-\infty, 2)$

e) Dom $f = [-3, 3]$
Im $f = \left[\sqrt{6}, 2\sqrt{3}\right]$

f) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$
Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

032 Estudia las características de las siguientes funciones.



a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

No hay periodicidad.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función no es simétrica ni periódica.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente

en $(-2, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Existe un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Es convexa en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y es cóncava en $(-1, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

La función no es simétrica ni periódica.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1{,}5; 1; 3{,}5\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; -0{,}5) \cup (0{,}5; 1) \cup (1; 3{,}5) \cup (3{,}5; 4{,}5)$ y es decreciente en $(-0{,}5; 0{,}5) \cup (4{,}5; +\infty)$.

Máximo relativo en $x = -0{,}5$ y en $x = 4{,}5$ y mínimo relativo en $x = 0{,}5$.

Es cóncava en $(-\infty; -1{,}5) \cup (0, 1) \cup (1; 3{,}5)$ y es convexa en $(-0{,}5; 0) \cup (3{,}5; 5)$.

La función no es simétrica ni periódica.

033 Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna.

a) ¿Es una función periódica?

b) En caso afirmativo, indica el período.

a) Al depender la superficie visible de las fases en la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, la función es periódica.

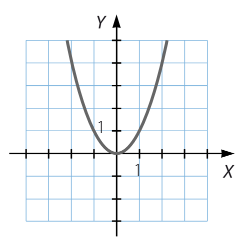
b) El período es de 28 días.

034 Estudia las simetrías de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

035 Dada la gráfica de la función $y = x^2$:



representa estas funciones.

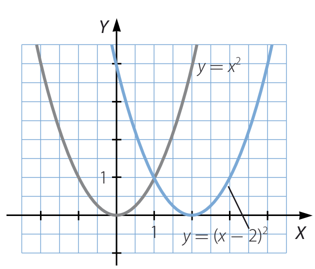
a) $y = (x - 2)^2$

b) $y = x^2 + 3$

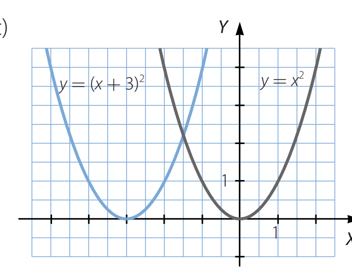
c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = x^2 - 4$

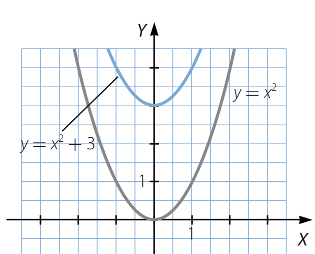
a)



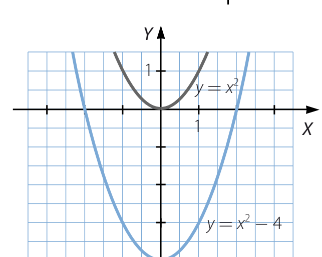
c)



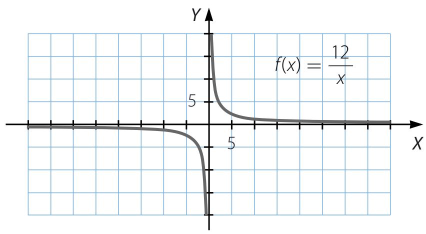
b)



d)



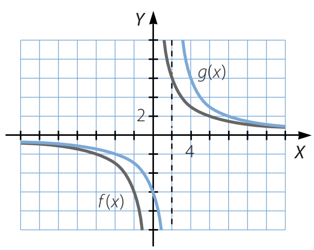
036 ●●○ A partir de la siguiente función:



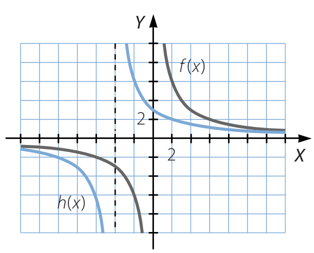
obtén la gráfica de estas funciones.

a) $g(x) = \frac{12}{x-2}$ b) $h(x) = \frac{12}{x+4}$ c) $i(x) = \frac{12}{x} + 1$ d) $j(x) = -\frac{12}{x}$

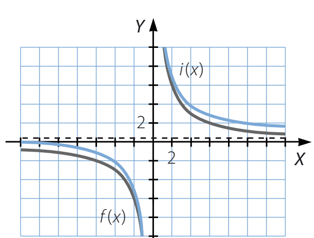
a)



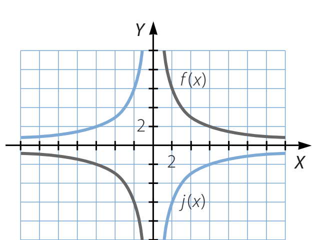
b)



c)



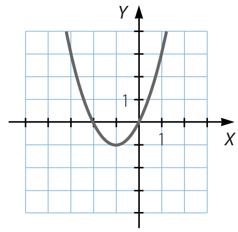
d)



037 ●●○

Con la gráfica de esta función:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

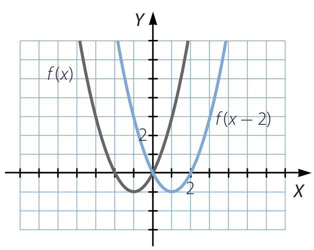


representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x - 2)$ b) $-f(x)$ c) $f(x + 1)$ d) $f(x) + 2$

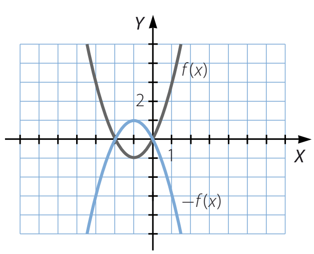
Razona cómo lo haces y calcula su expresión algebraica.

a)



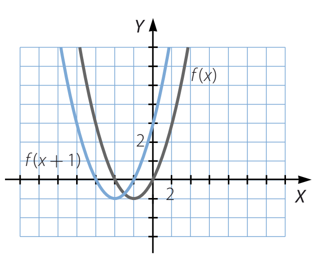
$$f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$$

b)



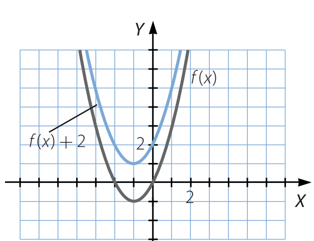
$$-f(x) = -x^2 - 2x$$

c)



$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$$

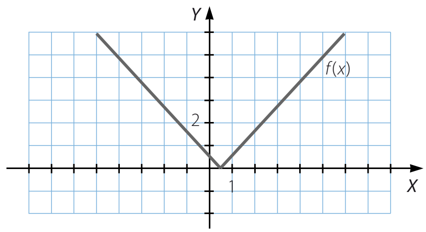
d)



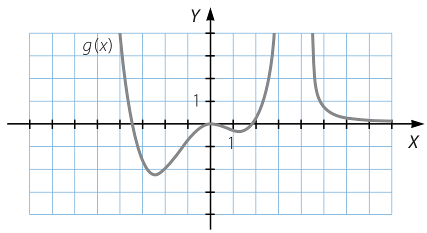
$$f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$$

038 ●●○ A partir de cada gráfica, dibuja la gráfica de las funciones que se indican.

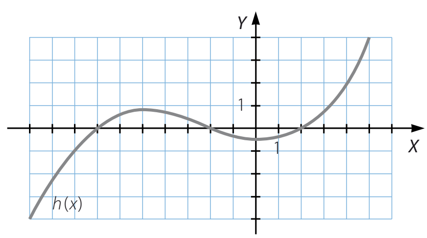
a) $f(-x)$ y $-f(x)$



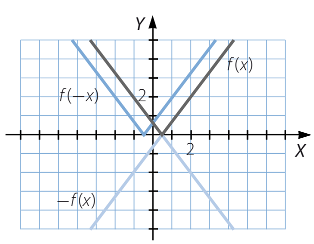
b) $g(x) + 1$ y $g(x) - 3$



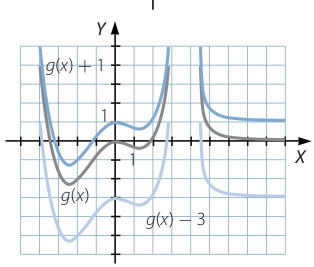
c) $h(x + 1)$ y $h(x - 2)$



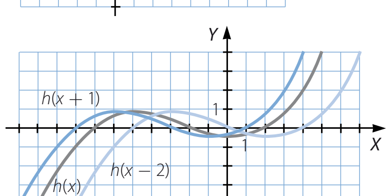
a)



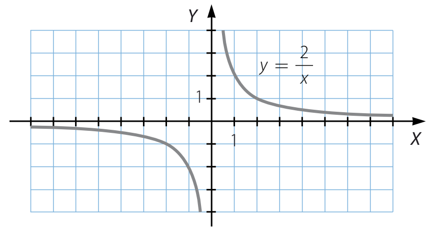
b)



c)



039 La gráfica pertenece a la función $y = \dfrac{2}{x}$.



Construye a partir de ella la gráfica de las funciones.

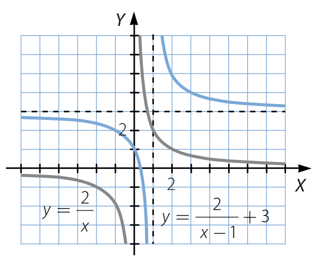
a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 3$

b) $y = 2 - \dfrac{2}{x-3}$

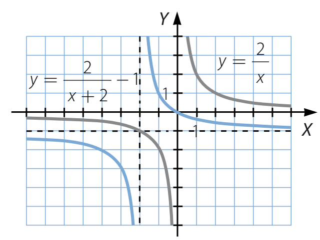
c) $y = \dfrac{2}{x+2} - 1$

d) $y = -1 - \dfrac{2}{x+1}$

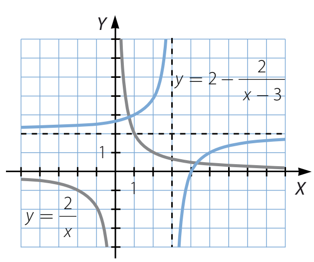
a)



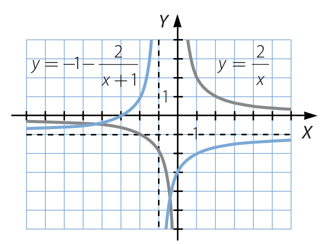
c)



b)



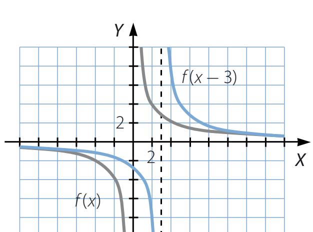
d)



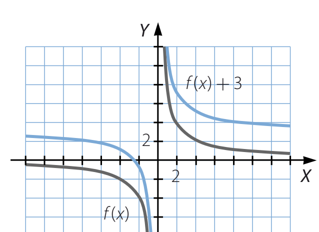
040 Dada la función $f(x) = \dfrac{8}{x}$, determina la expresión algebraica de estas funciones y represéntalas.

a) $f(x-3)$
b) $f(x) + 3$
c) $f(-x)$
d) $-f(x)$

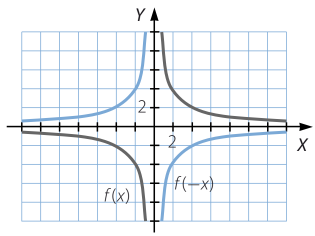
a) $f(x-3) = \dfrac{8}{x-3}$



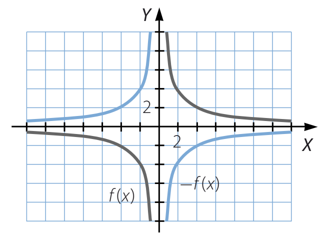
b) $f(x) + 3 = \dfrac{8}{x} + 3$



c) $f(-x) = -\dfrac{8}{x}$



d) $-f(x) = -\dfrac{8}{x}$



041 Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

calcula.

a) $(f+g)(5)$
b) $(f-g)(3)$
c) $(f \cdot g)(0)$
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-2)$
e) $(f \cdot f)(2)$
f) $(g+f)(5)$
g) $(g-f)(3)$
h) $(f + f \cdot g)(0)$
i) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(-2)$
j) $f^2(2)$

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{3}{x^2-1}$ $\qquad (f+g)(5) = \sqrt{7} + \dfrac{1}{8}$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \dfrac{3}{x^2-1}$ $\qquad (f-g)(3) = \sqrt{5} - \dfrac{3}{8}$

c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ $\qquad (f \cdot g)(0) = -3\sqrt{2}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{(x^2-1)\sqrt{x+2}}{3}$ $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)(-2) = 0$

e) $(f \cdot f)(x) = x + 2$ $\qquad (f \cdot f)(2) = 4$

f) $(g+f)(x) = \dfrac{3}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$ $\qquad (g+f)(5) = \dfrac{1}{8} + \sqrt{7}$

g) $(g-f)(x) = \dfrac{3}{x^2-1} - \sqrt{x+2}$ $\qquad (g-f)(3) = \dfrac{3}{8} - \sqrt{5}$

h) $(f + f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ $\qquad (f \cdot g)(0) = -2\sqrt{2}$

i) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{3}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}$

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(-2)$ no es real, porque el denominador de una fracción no puede ser igual a 0.

j) $(f^2)(x) = x + 2$ $\qquad (f^2)(2) = 4$

042 Calcula el dominio de las funciones.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad g(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Utiliza el resultado para calcular el dominio de las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Dom $g = [-5, 5]$

a) Dom $(f + g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

b) Dom $(f \cdot g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

c) Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = (-5, -2] \cup [2, 5)$

d) Dom $\left(\dfrac{g}{f}\right) = [-5, -2) \cup (2, 5]$

043 Dadas las funciones:

$$m(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad n(x) = x + 6 \qquad p(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

define las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(m + n)(x)$

b) $(n + p)(x)$

c) $\left(\dfrac{n}{m}\right)(x)$

d) $(m \cdot n + p)(x)$

a) $(m + n)(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x + 6$

Dom $(m + n) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

b) $(n + p)(x) = x + 6 + \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Dom $(n + p) = \mathbb{R} - \{-1\}$

c) $\left(\dfrac{n}{m}\right)(x) = \dfrac{x + 6}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Dom $\left(\dfrac{n}{m}\right) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

d) $(m \cdot n + p)(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot (x + 6) + \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Dom $(m \cdot n + p) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

044 ●○○ Dadas las funciones:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula las composiciones de funciones.

a) $f \circ g$

b) $g \circ h$

c) $h \circ f$

d) $g \circ f$

e) $h \circ g$

f) $f \circ h$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$

$(f \circ g)(3) = 512$

b) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$

$(g \circ h)(3) = \frac{1}{9}$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2^x) = \frac{1}{2^x}$

$(h \circ f)(3) = \frac{1}{8}$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^{2x}$

$(g \circ f)(3) = 64$

e) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \frac{1}{x^2}$

$(h \circ g)(3) = \frac{1}{9}$

f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

$(f \circ h)(3) = \sqrt[3]{2}$

045 ●●○ Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+1}\right) = 3\sqrt{x+1} - 2$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$\text{Dom }(f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$\text{Dom }(g \circ f) = [-1, +\infty)$

046 Explica de qué manera hay que componer las funciones:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4} \qquad g(x)=5x+1 \qquad h(x)=\frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $m(x)=5\sqrt{x^2+4}+1$ b) $n(x)=25x+6$ c) $p(x)=\dfrac{x+11}{x+1}$

a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x^2+4}\right)=5\sqrt{x^2+4}+1=m(x)$

b) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(5x+1)=5(5x+1)+1=25x+6=n(x)$

c) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{10}{x+1}+1=\dfrac{x+11}{x+1}=p(x)$

047 Determina $f\circ f^{-1}$ y $f^{-1}\circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x)=3x-1$ y $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x+1$

b) $f(x)=2^x$ y $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x)=2^x$ y $f^{-1}(x)=\log_2 x$

d) $f(x)=sen\,x$ y $f^{-1}(x)=arc\,sen\,x$

e) $f(x)=x^2+2$ y $f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

a) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)=3\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)-1=x+2$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(3x-1)=\dfrac{1}{3}(3x-1)+1=x+\dfrac{2}{3}$

Las funciones no son inversas.

b) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)=2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2^x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^x}$

Las funciones no son inversas.

c) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f(\log_2 x)=2^{\log_2 x}=x$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2^x)=\log_2 2^x=x$

Las funciones son inversas.

d) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f(arc\ sen\ x)=sen\ (arc\ sen\ x)=x$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(sen\ x)=arc\ sen\ (sen\ x)=x$

Las funciones son inversas.

e) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\sqrt{x-2}\right)=x-2+2=x$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x^2+2)=\sqrt{x^2+2-2}=x$

Las funciones son inversas.

048

Calcula la función inversa de cada función.

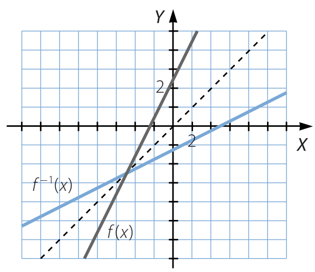
a) $y = 2x + 5$

b) $y = \dfrac{3 - x}{2}$

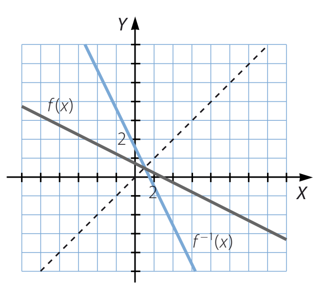
c) $y = \sqrt[3]{2x - 3}$

Comprueba que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

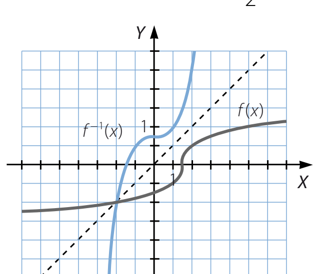
a) $y = 2x + 5 \rightarrow x = \dfrac{y - 5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{2}$



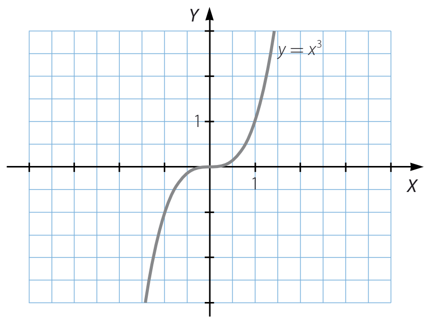
b) $y = \dfrac{3 - x}{2} \rightarrow x = 3 - 2y \rightarrow f^{-1}(x) = 3 - 2x$



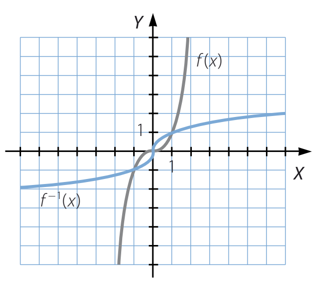
c) $y = \sqrt[3]{2x - 3} \rightarrow x = \dfrac{y^3 + 3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x^3 + 3}{2}$



049 Dada la gráfica de la función $y = x^3$:

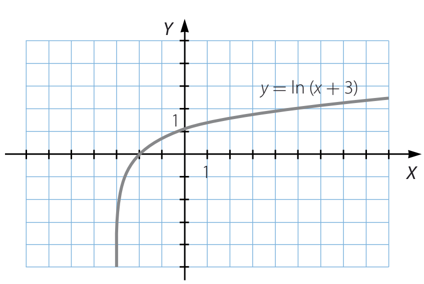


dibuja la gráfica de su función inversa.

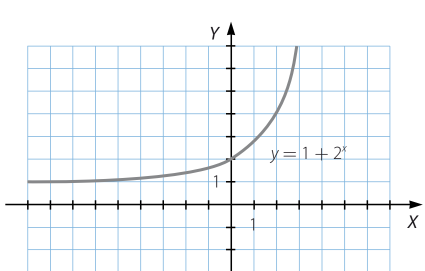


050 Dibuja las funciones inversas.

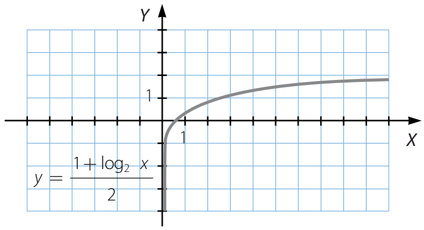
a)



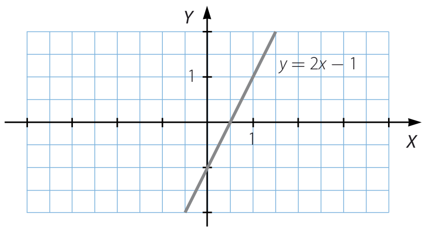
b)



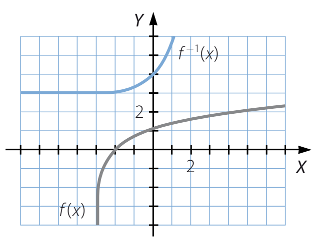
c)


Y
1
1
X
$y = \frac{1 + \log_2 x}{2}$

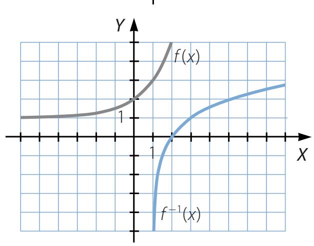
d)


Y
1
$y = 2x - 1$
1
X

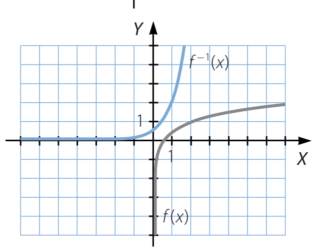
a)


Y
$f^{-1}(x)$
2
2
X
$f(x)$

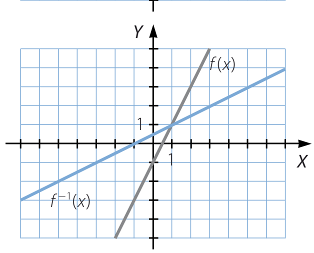
b)


Y
$f(x)$
1
1
X
$f^{-1}(x)$

c)


Y
$f^{-1}(x)$
1
1
X
$f(x)$

d)


Y
$f(x)$
1
1
X
$f^{-1}(x)$

051 Dibuja funciones que cumplan estas propiedades.

a) Su dominio y su recorrido son $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Es creciente y su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

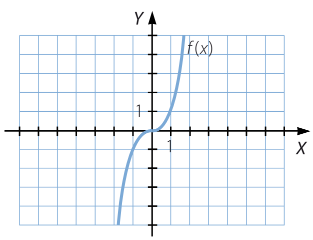
d) Es logarítmica y su dominio es $(3, +\infty)$.

e) Es logarítmica y su dominio es $(-\infty, -2)$.

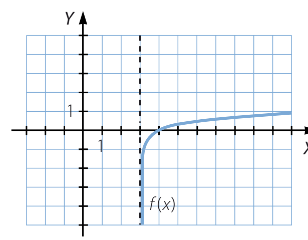
f) Es exponencial y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Respuesta abierta.

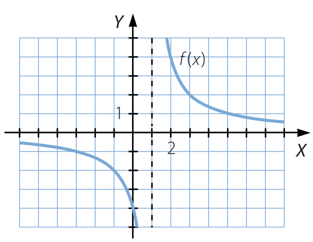
a)



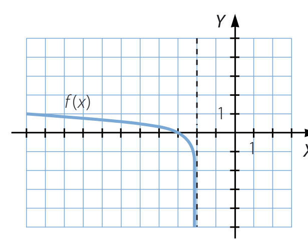
d)



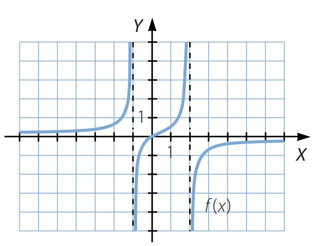
b)



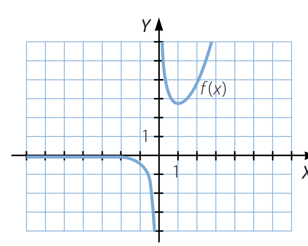
e)



c)



f)

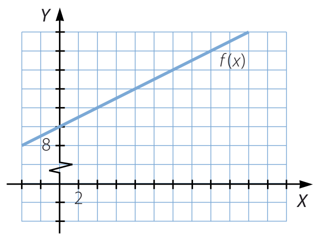


052 En una vivienda pagan 10 euros de gasto fijo y 0,50 euros por cada kilovatio consumido a la empresa que les suministra electricidad.

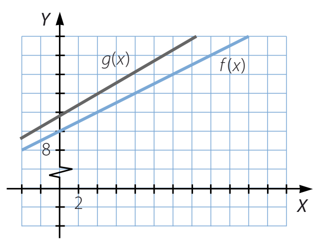
a) Obtén una expresión de la relación que existe entre el consumo y el precio y represéntala.

b) Si a esta cantidad hay que aumentarle el 16 % de IVA, ¿cómo será la ecuación? ¿Qué variación sufre la gráfica?

a) $f(x) = 10 + 0{,}5x$



b) $g(x) = (10 + 0{,}5x) \cdot 1{,}16 = 11{,}6 + 0{,}58x$



La gráfica es otra recta con mayor pendiente que la primera.

053 Halla el dominio de las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$, siendo n un número natural.

Si n es impar: Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

Si n es par: Dom $f = (0, +\infty)$

054 El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la fórmula:

$$r = at^2 + 2{,}8t + 8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo; a es un número fijo, que se denomina coeficiente de atenuación, y r es el nivel de ruido, medido en decibelios.

La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios. ¿Cuál es el coeficiente de atenuación? ¿Cuántos decibelios producirá a los ocho años?

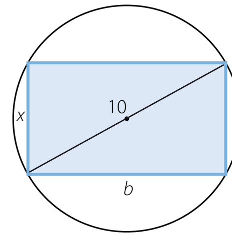
$27 = a \cdot 4^2 + 2{,}8 \cdot 4 + 8 \rightarrow 16a = 7{,}8 \rightarrow a = 0{,}4875$

A los ocho años producirá: $r = 0{,}4875 \cdot 8^2 + 2{,}8 \cdot 8 + 8 = 61{,}6$ decibelios

055 En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de lado x.

a) Expresa el área en función de x. ¿Cuál es su dominio?

b) Realiza un tanteo para determinar el máximo valor que puede tomar esa función. ¿Cuánto medirán los lados del rectángulo en ese caso? ¿Qué tanto por ciento de la superficie del círculo ocupa el rectángulo?



a) Por el teorema de Pitágoras: $10^2 = b^2 + x^2 \rightarrow b = \sqrt{100 - x^2}$

El área del rectángulo viene dada por la función: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

b) Al ser x la medida de un lado, el dominio de la función es: Dom $f = [0, 10]$

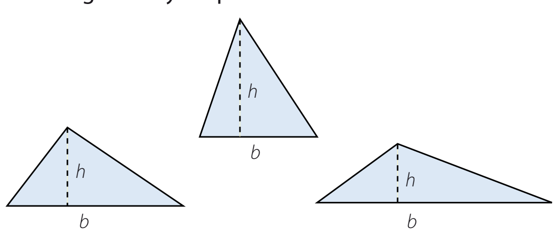
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	9,95	19,59	28,62	36,66	43,3	48	49,98	48	39,23	0

El máximo valor del área es, aproximadamente, 49,98 cm². En ese caso, el lado x mide 7 cm. Así, el otro lado mide: $b = \sqrt{51} = 7{,}14$ cm

El área del círculo mide: $A = \pi r^2 = 78{,}53$ cm²

Como $\frac{49{,}98}{78{,}53} = 0{,}6364$, el área del rectángulo ocupa el 63,64 % de la superficie del círculo.

056 Considera los triángulos cuya superficie mide S.



a) Escribe la expresión algebraica que relaciona la base en función de la altura en estos triángulos.

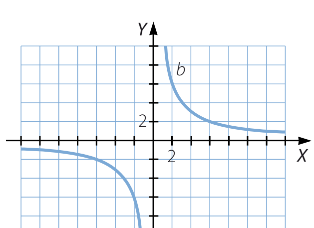
b) ¿Cuál es la función que relaciona la altura en función de la base?

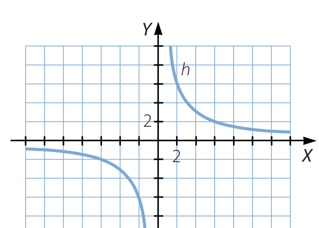
c) Representa ambas funciones.

a) $b = \dfrac{2A}{h}$

b) $h = \dfrac{2A}{b}$

c)





Las dos gráficas son iguales.

PARA FINALIZAR…

057 **Sean las funciones $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.**

Comprueba que se cumple que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} =$$
$$= \frac{2+2}{4} = 1$$

058 **Calcula las funciones inversas de:**

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

Si $z = e^x$:

$$2y = z - \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ e $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Si $z = e^x$:

$$2y = z + \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ e $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

059 **Si la función definida por $f(x) = \dfrac{cx}{2x + 3}$, con $x \neq -\dfrac{3}{2}$, verifica que $f[f(x)] = x$, ¿cuánto vale c?**

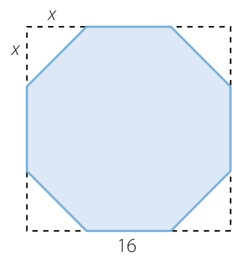
$$f(f(x)) = f\left(\frac{cx}{2x+3}\right) = \frac{c \cdot \dfrac{cx}{2x+3}}{2 \cdot \dfrac{cx}{2x+3} + 3} = \frac{c^2x}{2cx + 6x + 9} = x \rightarrow c^2x = 2cx^2 + 6x^2 + 9x$$

$$\rightarrow c^2x - 2cx^2 - 6x^2 - 9x = 0 \rightarrow c = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 + 24x^3 + 36x^2}}{2x} =$$
$$= x \pm \sqrt{x^2 + 6x + 9} = x \pm \sqrt{(x+3)^2} = x \pm (x+3)$$

Si $c = 2x + 3$: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{2x + 3} = x$

Si $c = -3$: $f(x) = \dfrac{-3x}{2x + 3}$

060 En un cuadrado de 16 cm de lado se suprime, de cada esquina, un triángulo rectángulo e isósceles de cateto x. Expresa el área y el perímetro del polígono resultante en función de x. ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?

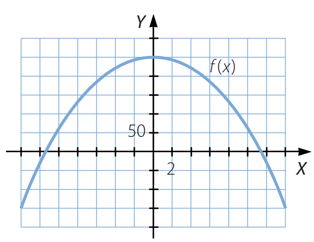


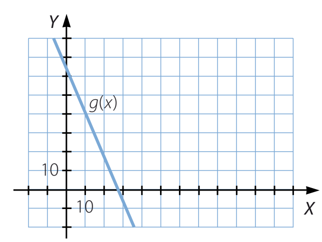
El área de la figura viene dada por la función: $f(x) = 16^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 256 - 2x^2$

La hipotenusa de los triángulos mide: $a^2 = x^2 + x^2 \rightarrow a = \sqrt{2}x$

El perímetro de la figura viene dado por la función:

$$g(x) = 4\sqrt{2}x + 4(16 - 2x) = \left(4\sqrt{2} - 8\right)x + 64$$





Dom $f = \left[0, 8\sqrt{2}\right]$

Im $f = [0, 256]$

Dom $g = \left[0, 8\sqrt{2} + 16\right]$

Im $g = [0, 64]$

061 Un grupo de alumnos de 1.º Bachillerato pide presupuesto en dos agencias de viajes para realizar una excursión.

La primera agencia les hace la siguiente propuesta.

- Si el número de alumnos que va a la excursión es 40 o menos, les cobrará 200 € por alumno.
- Si el número de alumnos es superior a 40 le descontará un 10 % a cada uno de los alumnos que se inscriba.

La oferta de la segunda agencia es:

- Si completan un autobús, con capacidad para 60 personas, el precio será de 150 € por persona. Si alguno de los autobuses no está completo, se incrementará el precio en un 1 % por cada persona que falte para completarlo.

¿Qué agencia les conviene más?

Un descuento del 10 % en el precio de 200 € significa un precio de: $200 \cdot 0{,}9 = 180$ €

Así, la función que representa la propuesta de la primera agencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 40 \\ 180x & \text{si} \quad x > 40 \end{cases}$$

El incremento de un 1 % por cada persona que falte significa que el precio será:

$$150 \cdot \left(1 + \frac{60 - x}{100}\right)x = 150x + 1{,}5(60x - x^2) = 240x - 1{,}5x^2$$

La función que representa la propuesta de la segunda agencia es:

$$g(x) = \begin{cases} 240x - 1{,}5x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 60 \\ 150x & \text{si} \quad x \ge 60 \end{cases}$$

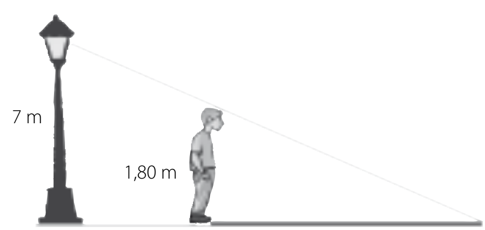
Los puntos de intersección de ambas funciones son:

- Si $0 \le x \le 40 \rightarrow 200x = 240x - 1{,}5x^2 \rightarrow 1{,}5x^2 - 40x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{80}{3} = 26{,}\widehat{6} \end{cases}$
- Si $40 < x < 60 \rightarrow 180x = 240x - 1{,}5x^2 \rightarrow 1{,}5x^2 - 60x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$
- Si $x \ge 60 \rightarrow 180x = 150x \rightarrow x = 0$

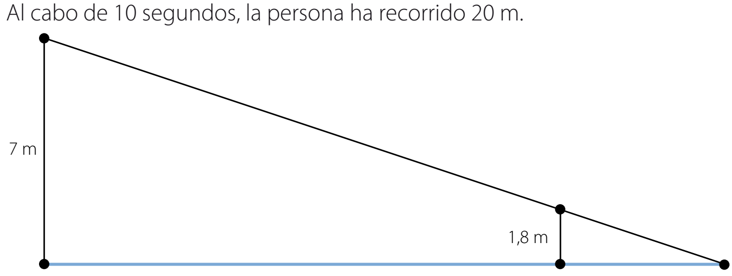
Por tanto, la primera agencia resulta más conveniente si el número de alumnos es menor o igual a 26. A partir de 27 alumnos, es más económica la segunda agencia.

062 **Una farola tiene 7 m de altura. En su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a andar en línea recta, alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s. Al cabo de 10 segundos, ¿cuál será la longitud de su sombra?**

Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo, *t*, que se camina.



Al cabo de 10 segundos, la persona ha recorrido 20 m.



Como la farola y la persona forman ángulos rectos con el suelo, sus alturas determinan dos lados paralelos de triángulos que se encuentran en posición de Tales.

$$\frac{7}{1{,}8} = \frac{20}{s} \rightarrow s = \frac{1{,}8 \cdot 20}{7} = 5{,}14 \text{ m}$$

La función que expresa la longitud de la sombra en función del tiempo es:

$$f(t) = \frac{1{,}8 \cdot 2t}{7} = \frac{3{,}6t}{7}$$

8 Funciones elementales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El árbol de la ciencia

Al decir Andrés [estudiante de medicina] que la vida, según su profesor Letamendi, es una función indeterminada entre la energía individual y el cosmos, y que esta función no puede ser más que suma, resta, multiplicación y división, y que no pudiendo ser suma, ni resta, ni división, tiene que ser multiplicación, uno de los amigos de Sañudo [estudiante de ingeniería] se echó a reír.

–¿Por qué se ríe usted? –le preguntó Andrés sorprendido.

–Porque en todo eso que dice usted hay una porción de sofismas y de falsedades. Primeramente hay muchas más funciones matemáticas que sumar, restar, multiplicar y dividir.

–¿Cuáles?

–Elevar a potencia, extraer raíces... Después, aunque no hubiera más que cuatro funciones matemáticas primitivas, es absurdo pensar que en el conflicto de estos dos elementos, la energía de la vida y el cosmos, uno de ellos, por lo menos, heterogéneo y complicado, porque no haya suma, ni resta, ni división, ha de haber multiplicación. Además, sería necesario demostrar por qué no puede haber suma, por qué no puede haber resta y por qué no puede haber división. Después habría que demostrar por qué no puede haber dos o tres funciones simultáneas. No basta decirlo.

–Pero eso lo da el razonamiento.

–No, no; perdone usted –replicó el estudiante–. Por ejemplo, entre esa mujer y yo puede haber varias funciones matemáticas: suma, si hacemos los dos una misma cosa ayudándonos; resta, si ella quiere una cosa y yo la contraria y vence uno de los dos contra el otro; multiplicación, si tenemos un hijo, y división si yo la corto en pedazos a ella o ella a mí.

–Eso es una broma –dijo Andrés.

–Claro que es una broma –replicó el estudiante–, una broma por el estilo de las de su profesor; pero que tiende a una verdad, y es que entre la fuerza de la vida y el cosmos hay un infinito de funciones distintas: sumas, restas, multiplicaciones, de todo, y que además es muy posible que existan otras funciones que no tengan expresión matemática.

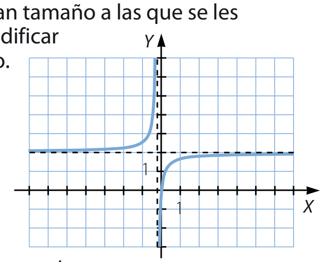
Pío Baroja

Existen algunas proteínas de gran tamaño a las que se les pueden unir hormonas para modificar su función en el cuerpo humano.

Este mecanismo está regulado por la fórmula

$$y = \frac{10kx}{1 + kx},$$

siendo y la concentración de hormonas unidas, la concentración total de hormonas y k una constante. Representa esta función para $k = 1$.



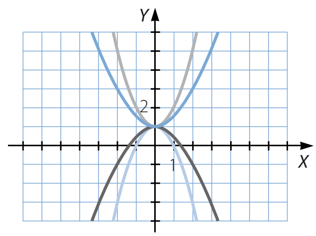
ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(-2, 3)$.

$$m = -\frac{1}{2}$$

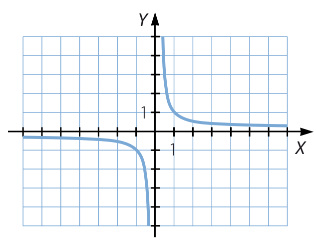
002 Dibuja sobre unos ejes de coordenadas algunas parábolas que tengan como vértice el punto (0, 1).

Respuesta abierta.



003 Dibuja, sobre unos ejes de coordenadas, una hipérbola de vértices (1, 1) y (−1, −1) y con asíntotas $y = 0$ y $x = 0$.

Respuesta abierta.



004 Calcula las siguientes razones trigonométricas.

a) $sen\ \frac{3\pi}{4}$ b) $cos\ \frac{4\pi}{3}$ c) $tg\ \frac{3\pi}{2}$ d) $sen\ \frac{10\pi}{6}$ e) $cos\ \frac{9\pi}{4}$ f) $tg\ \frac{5\pi}{2}$

a) $sen\ \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $cos\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

c) $tg\ \frac{3\pi}{2}$ no existe.

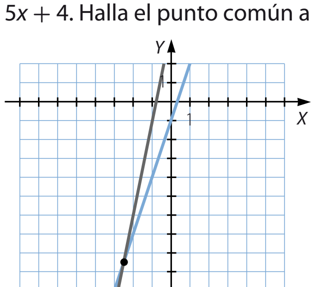
d) $sen\ \frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $cos\ \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $tg\ \frac{5\pi}{2}$ no existe.

ACTIVIDADES

001 Representa, sobre los mismos ejes de coordenadas, las funciones $y = 3x - 1$ e $y = 5x + 4$. Halla el punto común a las dos gráficas.

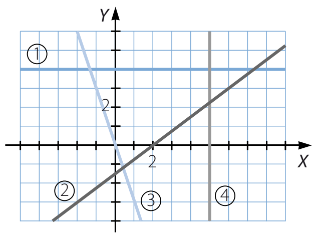


El punto de intersección es:

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

002 **Dibuja todos los tipos de rectas que conoces y encuentra aquellos que no corresponden a una función. Escribe sus ecuaciones.**

Respuesta abierta.



① $y = 4$ es una función constante.

② $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ es una función afín.

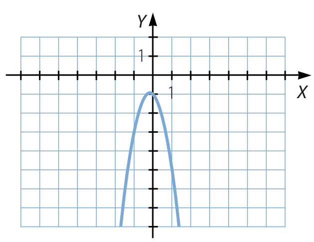
③ $y = -3x$ es una función lineal.

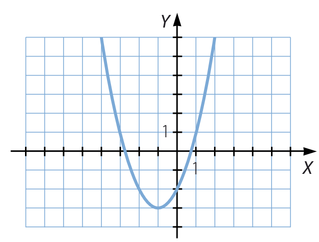
④ $x = 4$ no es una función.

003 **Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.**

a) $y = -3x^2 - x - 1$ **b)** $y = x^2 + 2x - 2$

a) $V\left(-\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$ b) $V(-1, -3)$

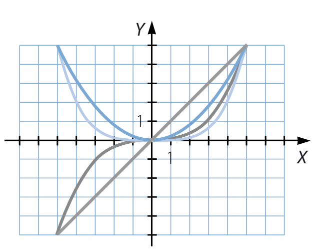




004 **Representa en el intervalo [−1, 1], con una escala que sea lo suficientemente grande, las funciones.**

$$f(x) = x \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^3 \qquad f(x) = x^4$$

Describe sus propiedades.



En todas las funciones, el dominio es $\mathbb{R}$ y el punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

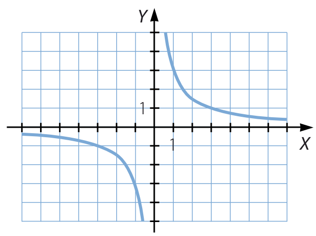
Las funciones de exponente par son decrecientes para los valores negativos de x, son crecientes para los valores positivos, tienen un máximo absoluto en $x = 0$ y son simétricas respecto del eje de ordenadas.

Las funciones de exponente impar son crecientes, no tienen máximos ni mínimos y son simétricas respecto del origen de coordenadas.

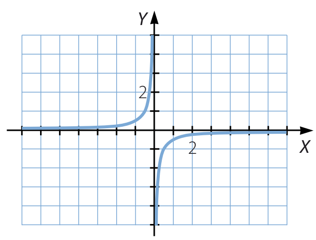
005 Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = -\frac{1}{2x}$

a)



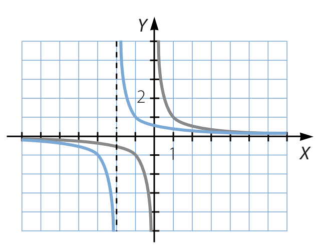
b)



006 Representa estas funciones racionales, y relaciónalas con las funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{1}{x+2}$ b) $y = \frac{1}{x^2}$

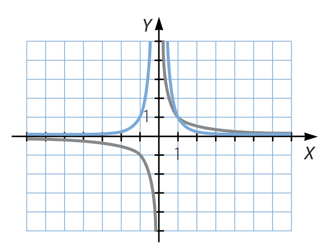
a)



Es una traslación horizontal de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x+2) = \frac{1}{x+2}$$

b)



Es el producto por sí misma de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x^2}$$

007 Halla el dominio de las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $g = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

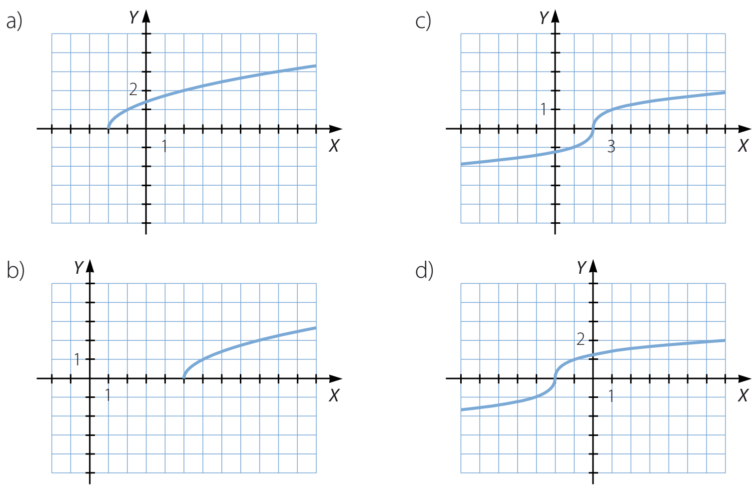
008 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$

b) $g(x) = \sqrt{x-4}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

d) $i(x) = \sqrt[3]{x+2}$



009 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1{,}2^x$

b) $g(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

c) $h(x) = 0{,}8^x$

d) $i(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

a) $1{,}2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $\dfrac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

c) $0{,}8 < 1 \rightarrow h(x)$ es decreciente.

d) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow i(x)$ es creciente.

010 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -2^x$

b) $y = 2^{-x}$

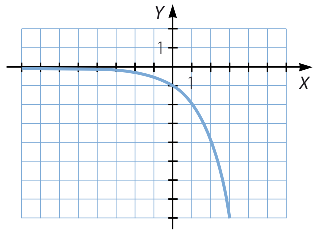
c) $y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

d) $y = 0{,}1^x$

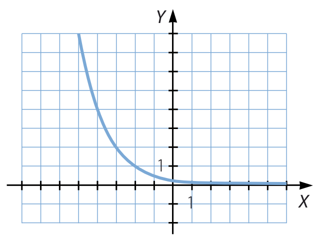
e) $y = -2^{-x}$

f) $y = 2^{\frac{x}{3}}$

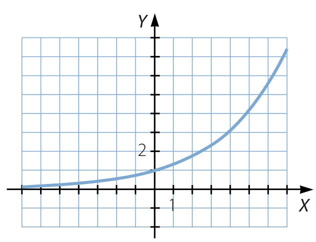
a)



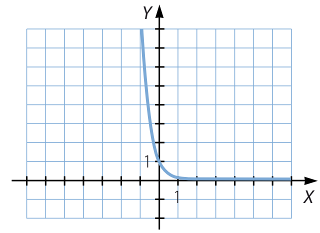
b)



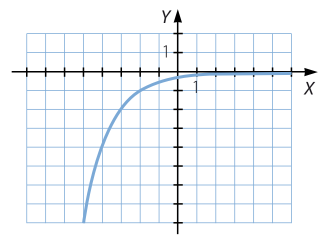
c)



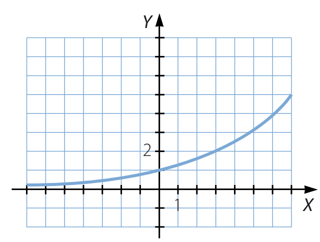
d)



e)



f)



011 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = \log_{1,2} x$
c) $h(x) = \log_7 x$
e) $j(x) = \log_{\sqrt{3}} x$
b) $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$
d) $i(x) = \log_{0,8} x$
f) $k(x) = \log_{8,2} x$

a) $1,2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $\dfrac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

c) $7 > 1 \rightarrow h(x)$ es creciente.

d) $0,8 < 1 \rightarrow i(x)$ es decreciente.

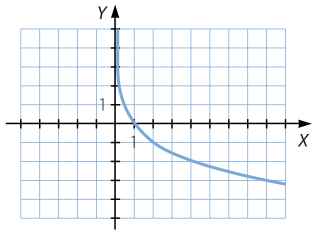
e) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow j(x)$ es creciente.

f) $8,2 > 1 \rightarrow k(x)$ es creciente.

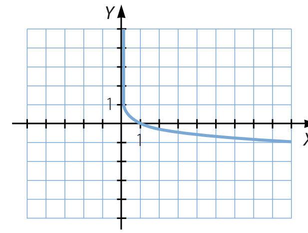
012 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -\log_2 x$
c) $y = \log_{\frac{4}{3}} x$
e) $y = -\log_2 (-x)$
b) $y = \log_2 (-x)$
d) $y = \log_{0,1} x$
f) $y = \log_2 \left(\dfrac{x}{3}\right)$

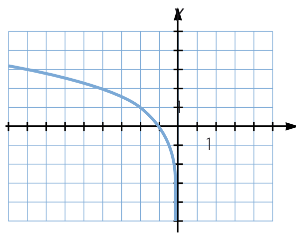
a)



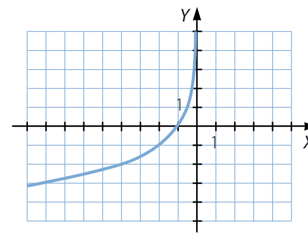
d)



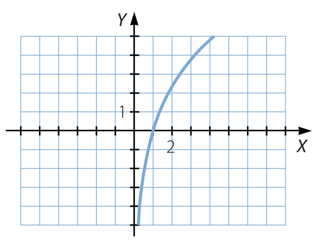
b)



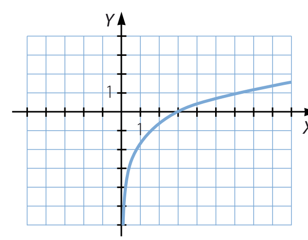
e)



c)



f)



013 Describe las características de estas funciones.

a) $f(x) = sen\ (x - 1)$

b) $g(x) = (sen\ x) - 1$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-1, 1]$

La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = 1 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = 1 + \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

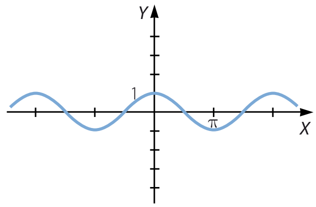
b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = [-2, 0]$

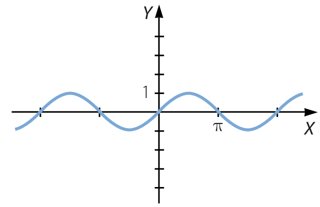
La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

014 Representa las funciones y di qué observas.

a) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $g(x) = cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) 

b) 

$f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ x$ $\qquad$ $g(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\ x$

015 **Describe las características de estas funciones.**

a) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ **b)** $g(x) = tg\ (x + 1)$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y simétrica respecto del origen de coordenadas.

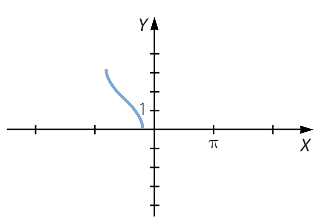
b) Dom $g = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\qquad$ Im $g = \mathbb{R}$

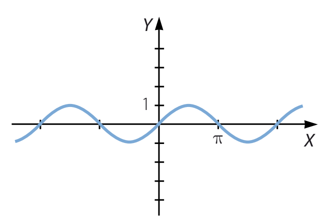
La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y no es simétrica.

016 **Representa las funciones inversas.**

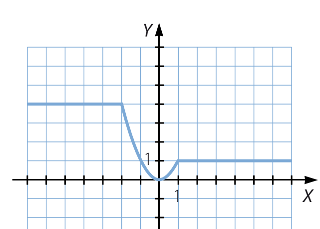
a) $f(x) = arc\ cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ **b)** $g(x) = arc\ sen\ (x - \pi)$

a) 

b) 

017 **Representa gráficamente esta función definida a trozos.**

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Describe sus principales características.

Dom $f = \mathbb{R}$ $\qquad$ Im $f = [0, 4]$

La función es continua, no es periódica ni simétrica.

Es decreciente en $(-2, 0)$ y es creciente en $(0, 1)$. Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

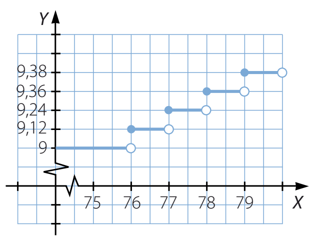
018 En un contrato mensual de telefonía móvil se factura a 0,12 € por minuto. Si el consumo no llega a 9 €, entonces se abona esa cantidad.

a) Halla la expresión de la función que relaciona el consumo, en minutos, y el importe de la factura mensual, en euros.

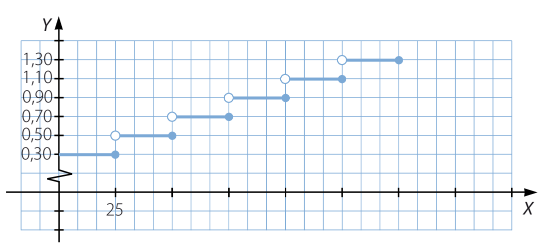
b) Representa la función.

a)
$$f(x) = \begin{cases} 9 & \text{si} \quad 0 \leq x < 76 \\ 9{,}12 & \text{si} \quad 76 \leq x < 77 \\ 9{,}24 & \text{si} \quad 77 \leq x < 78 \\ 9{,}36 & \text{si} \quad 78 \leq x < 79 \\ 9{,}38 & \text{si} \quad 79 \leq x < 80 \\ \dots \end{cases}$$

b)



019 El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.



020 La función que asocia a cada número su parte decimal es:

$$f(x) = x - [x]$$

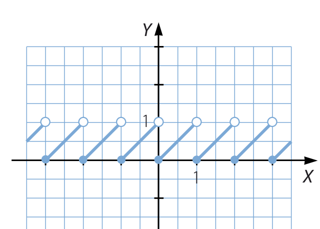
Representa la función y analiza sus propiedades.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, 1)$

La función no es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de período 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.
No tiene máximos ni mínimos.



021 Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.

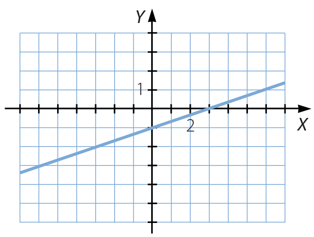
a) $y = \dfrac{x - 3}{3}$

b) $y = -x + 4$

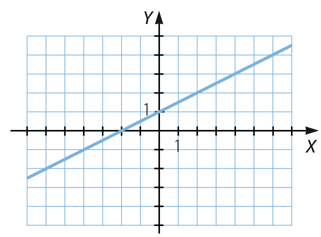
c) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

d) $y = -2x$

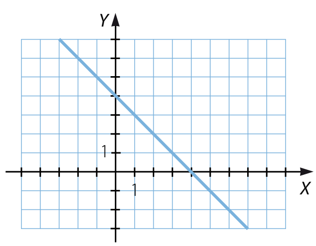
a)



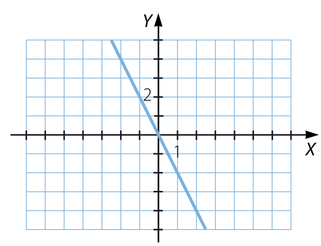
c)



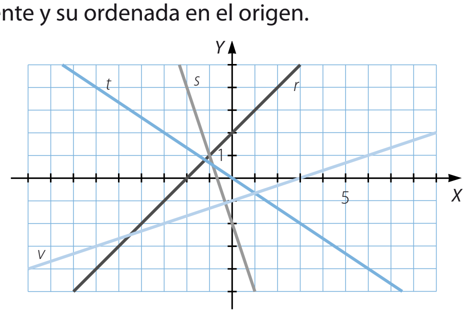
b)



d)



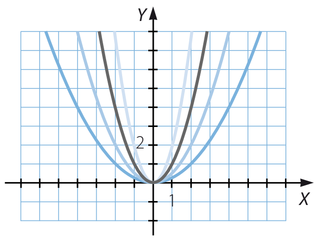
022 Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.



$r: y = x + 2$	$m = 1$	$n = 2$
$s: y = -3x - 2$	$m = -3$	$n = -2$
$t: y = -\dfrac{2}{3}x$	$m = -\dfrac{2}{3}$	$n = 0$
$u: y = \dfrac{1}{3}x - 1$	$m = \dfrac{1}{3}$	$n = -1$

023 Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2.

a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = 2x^2$ d) $y = \frac{1}{4}x^2$



La abertura es menor cuando el coeficiente es mayor.

024 Halla los vértices y los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b) $g(x) = -2x^2 + x - 1$ c) $h(x) = -x^2 - 2$

a) $V(1, 1)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, 2)$

b) $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, -1)$

c) $V(0, -2)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, -2)$

025 Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 3x$

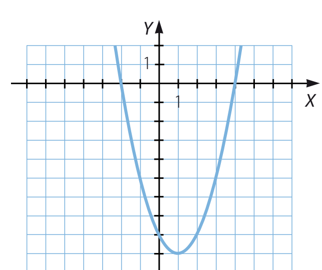
c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

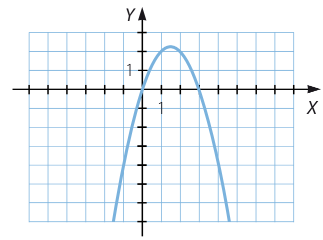
a) $V(1, -9)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -8)$



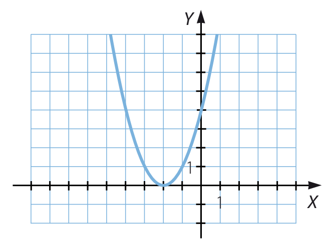
b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$



Puntos de corte con el eje X: (0, 0) y (3, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

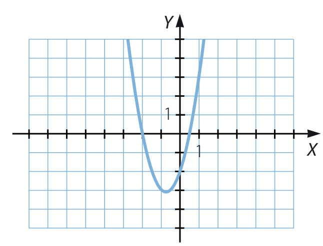
c) $V(-2, 0)$



Punto de corte con el eje X: (−2, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 4)

d) $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$



Puntos de corte con el eje X: (−2, 0) y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: (0, −2)

026 **Representa la función $y = x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de estas funciones polinómicas.**

a) $y = (x - 2)^2$

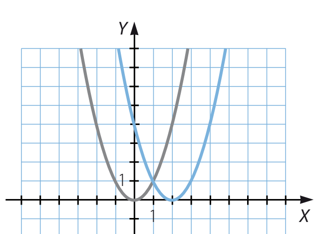
b) $y = x^2 + 3$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = x^2 - 4$

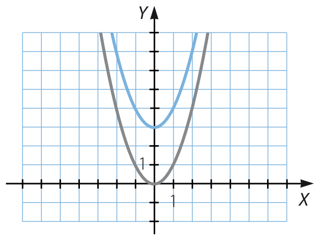
¿Qué relación guardan las gráficas de las últimas cuatro funciones con la gráfica de la primera?

a)



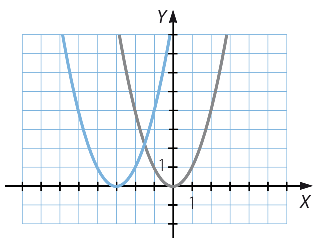
La función se traslada horizontalmente 2 unidades a la derecha.

b)



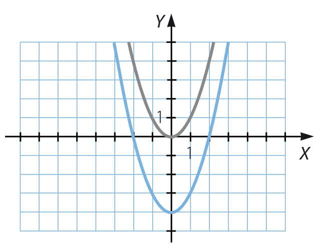
La función se traslada verticalmente 3 unidades hacia arriba.

c)



La función se traslada horizontalmente 3 unidades a la izquierda.

d)



La función se traslada verticalmente 4 unidades hacia abajo.

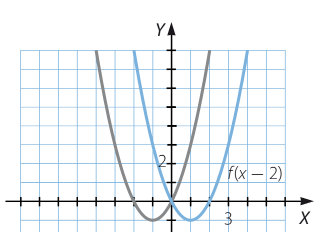
027 ●●○ **Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén la expresión algebraica de las siguientes funciones y represéntalas.**

a) $f(x - 2)$ **c) $f(x + 1)$**

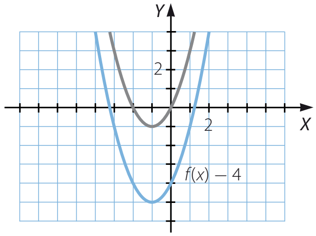
b) $f(x) - 4$ **d) $f(x) + 2$**

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

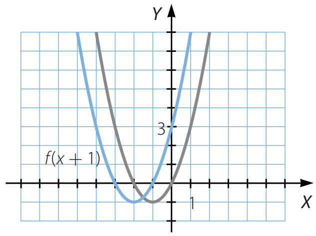
a) $f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$



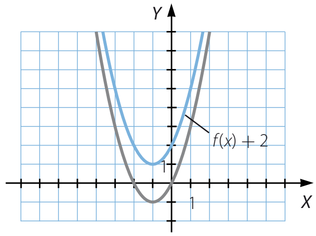
b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$



028 ●●○ Considera las siguientes funciones.

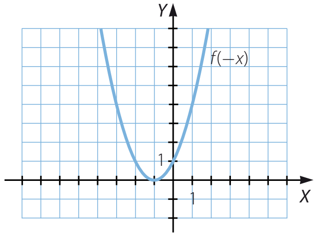
$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad g(x) = (x - 1)^2 \qquad h(x) = 3x$$

Calcula la expresión algebraica de la función que se indica en cada apartado, y represéntala gráficamente.

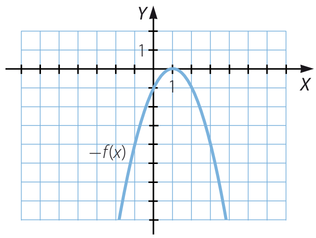
a) $f(-x)$ c) $g(-x)$ e) $h(-x)$

b) $-f(x)$ d) $-g(x)$ f) $-h(x)$

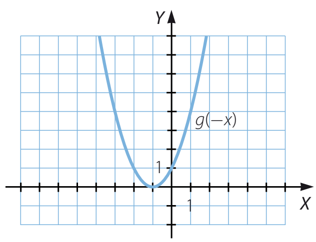
a) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$



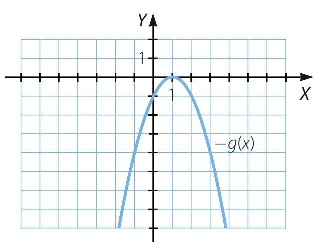
b) $-f(x) = -x^2 + 2x - 1$



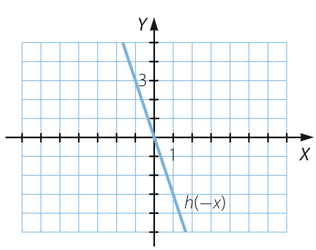
c) $g(-x) = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$



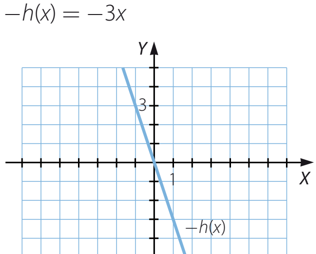
d) $-g(x) = -(x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$



e) $h(-x) = 3(-x) = -3x$



f) $-h(x) = -3x$



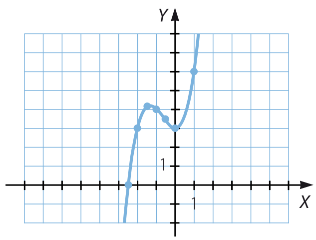
029 ●●○ Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de las funciones.

a) $y = x^3 + 2x^2 + 3$

b) $y = -x^3 + 6x + 1$

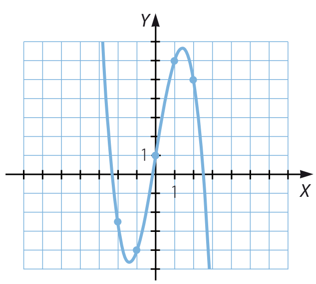
a)

x	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}125$	3	$4{,}125$	4	$3{,}375$	3	6	19



b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	-3	-4	1	6	5	-8



030 ●○○ Halla los puntos donde cortan las siguientes funciones polinómicas al eje X.

a) $y = 3x + 9$

b) $y = -2x + 5$

c) $y = 6x^2 + 17x - 3$

d) $y = 8x^2 + 10x - 3$

e) $y = 2x^2 + x + 3$

a) $x = -3$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = -3, x = \frac{1}{6}$

d) $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{2}$

e) No tiene puntos de corte.

031 ●○○ Halla los puntos donde estas funciones cortan al eje X.

a) $y = (x - 1)(x + 2)$

b) $y = (2x - 1)^2$

c) $y = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$

a) $x = 1, x = -2$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 2, x = -3, x = -\frac{1}{2}$

032

Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$

b) $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$

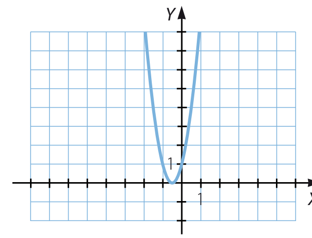
c) $y = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

d) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

e) $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

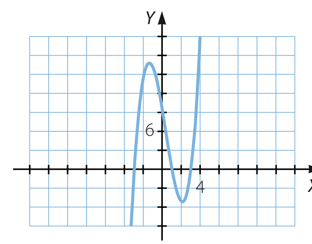
a) Punto de corte con el eje X: $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$



b) Puntos de corte con el eje X:
$(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$

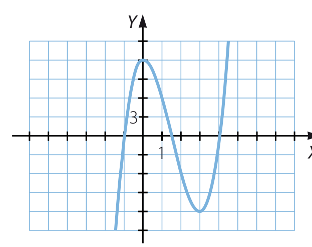
Punto de corte con el eje Y: $(0, 9)$



c) Puntos de corte con el eje X:

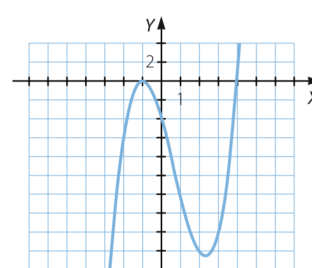
$(-1, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 12)$



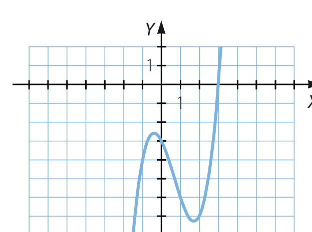
d) Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



e) Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$



033

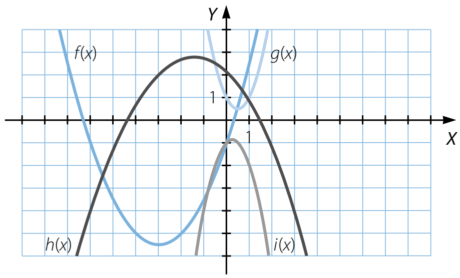
Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

d) $y = -2x^2 + x + 1$



a) $y = f(x)$, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.

b) $y = h(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.

c) $y = g(x)$, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.

d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.

034

Representa funciones de la forma $y = ax^2 - 3x + 2$ con distintos valores de a, y estudia su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

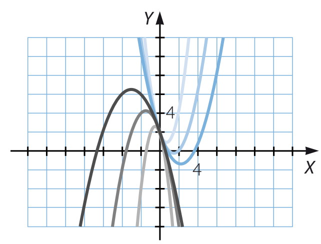
Si $a = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$

Si $a = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -1 \rightarrow i(x) = -x^2 - 3x + 2$

Si $a = -3 \rightarrow j(x) = -3x^2 - 3x + 2$



La abertura de las parábolas es menor cuanto mayor es el valor absoluto de a.

035

Representa funciones de la forma $y = x^2 + bx + 2$ con distintos valores de b, y explica cómo varían en función del parámetro.

Respuesta abierta.

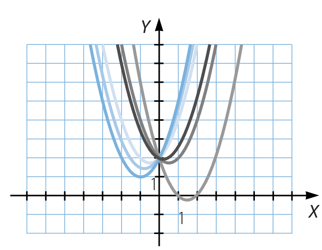
Si $b = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + x + 2$

Si $b = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

Si $b = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Si $b = -1 \rightarrow i(x) = x^2 - x + 2$

Si $b = -3 \rightarrow j(x) = x^2 - 3x + 2$



La abertura de las parábolas es mayor cuanto mayor es el valor absoluto de b.

036 Representa funciones de la forma $y = x^2 + 2x + c$ con distintos valores de c, y analiza su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

Si $c = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1$

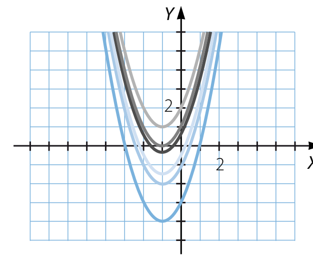
Si $c = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

Si $c = 2 \rightarrow h(x) = x^2 + 2x + 2$

Si $c = -\frac{1}{2} \rightarrow i(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

Si $c = -1 \rightarrow j(x) = x^2 + 2x - 1$

Si $c = -3 \rightarrow k(x) = x^2 + 2x - 3$



Todas las parábolas tienen la misma abertura. Se trasladan verticalmente, hacia arriba si c es positivo, y hacia abajo si c es negativo.

037 Escribe funciones con las siguientes características.

a) Una parábola que corte al eje X en $x = 3$ y $x = 5$.

b) Una parábola que corte al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.

c) Una parábola que corte dos veces al eje X en $x = 2$.

d) Una función cúbica que corte al eje X en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.

e) Una función cúbica que corte al eje X dos veces en $x = 2$ y una vez en $x = -1$.

f) Una función cúbica que corte una vez al eje X en $x = 5$.

g) Una función polinómica de cuarto grado que corte al eje X en $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.

h) Una función de cuarto grado que solo corte dos veces al eje de abscisas, en $x = -2$ y en $x = 5$.

Respuesta abierta.

a) $y = (x - 3)(x - 5)$

b) $y = (x + 2)(x - 1)$

c) $y = (x - 2)^2$

d) $y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

e) $y = (x - 2)^2(x + 1)$

f) $y = (x - 5)^3$

g) $y = (x + 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

h) $y = (x + 2)^2(x - 5)^2$

038 Explica las diferentes situaciones que pueden producirse al determinar dónde corta al eje X una función polinómica de cuarto grado.

Para determinar los puntos de corte con el eje X se iguala la expresión de la función a cero. Entonces se obtiene una ecuación polinómica de cuarto grado que puede tener como máximo cuatro soluciones. Por tanto, la función puede no cortar el eje, o cortarlo una, dos, tres o cuatro veces, según el número de raíces del polinomio.

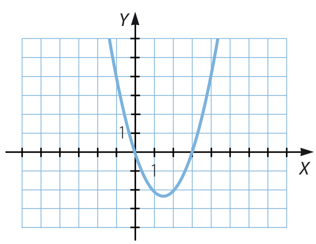
039 ●●○ **Obtén la expresión algebraica y representa la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1, -2)$, $B(2, -2)$ y $C(3, 0)$.**

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a + b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} a + b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \\ 2a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{array}$$

La expresión de la función es: $f(x) = x^2 - 3x$



040 ●●● **Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.**

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$

b) $A(-1, 0)$, $B(0, -1)$ y $C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$

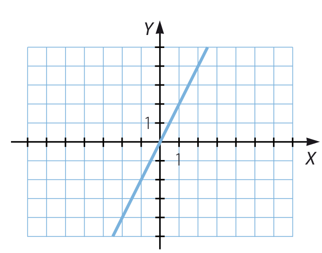
d) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$

e) $A(-2, 3)$, $B\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $C(2, 2)$

f) $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ y $C(4, -3)$

a) Los puntos A, B y C están alineados.

La función que pasa por ellos es: $f(x) = 2x$

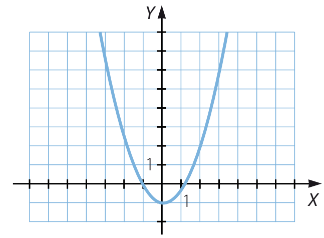


b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} a - b + c = 0 \\ c = -1 \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a - b = 1 \\ 3a + 2b = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{4}{5} \\ b = -\dfrac{1}{5} \end{array}$$

La expresión de la función es:

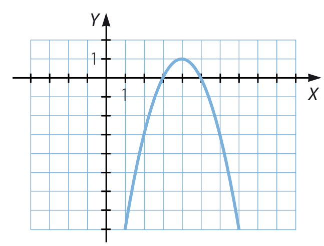
$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - 1$$



c) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \qquad = 1 \\ 16a + 2b \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \qquad = 1 \\ 2a \qquad\quad = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{array}$$

La expresión de la función es:
$f(x) = -x^2 + 8x - 15$



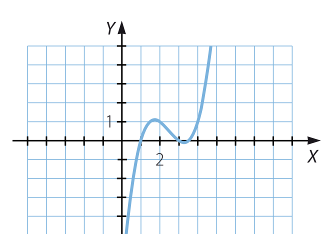
d) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \qquad = 1 \\ 13a + 4b + c \qquad = 0 \\ 63a + 15b + 3c \qquad = 1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \qquad = 1 \\ 6a + b \qquad = -1 \\ 21a + 3b \qquad = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \qquad = 1 \\ 6a + b \qquad = -1 \\ 3a \qquad\quad = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \\ c = \frac{34}{3} \\ d = -7 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$$

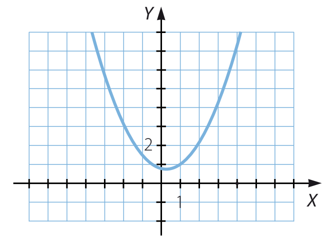


e) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} 4a - 2b + c = 3 \\ \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a - 2b + c = 3 \\ 8a + 12b + 18c = 27 \\ 4b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8a + 2c = 5 \\ 8a + 18c = 30 \\ b = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{15}{64} \\ c = \frac{25}{16} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{15}{64}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{25}{16}$$

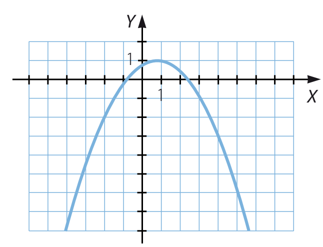


f) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} 4a - 2b + c = -2 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c = 1 \\ 3a - 3b = -3 \\ 15a + 3b = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c = 1 \\ a - b = -1 \\ 18a = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -\frac{7}{18} \\ b = \frac{11}{18} \\ c = \frac{7}{9} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{7}{9}$$



041 ●○○ **¿Cuál es el dominio de estas funciones racionales?**

a) $f(x) = \dfrac{7}{(x+7)(x-4)}$ b) $g(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$

a) $\mathbb{R} - \{-7, 4\}$ b) $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$

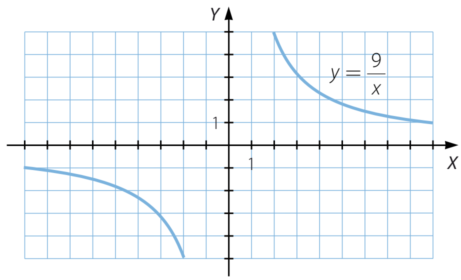
042 ●●○ **Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, determina la expresión algebraica de las siguientes funciones.**

a) $g(x) = f(x-3)$ c) $g(x) = f(x) - 2$ e) $g(x) = f(-x)$
b) $g(x) = f(x+1)$ d) $g(x) = f(x) + 3$ f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$ c) $g(x) = \dfrac{2}{x} - 2 = \dfrac{2-2x}{x}$ e) $g(x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ d) $g(x) = \dfrac{2}{x} + 3 = \dfrac{2+3x}{x}$ f) $g(x) = -\dfrac{2}{x}$

043 ●●○ Observa la gráfica de la función $y = \dfrac{9}{x}$.



Representa las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{9}{x-3}$

b) $y = \dfrac{9}{x} - 3$

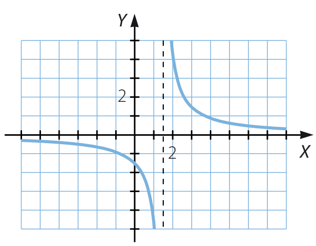
c) $y = -\dfrac{9}{x}$

d) $y = \dfrac{9}{x+2}$

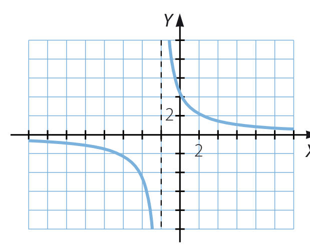
e) $y = \dfrac{9}{x} + 2$

f) $y = -\dfrac{9}{x-1}$

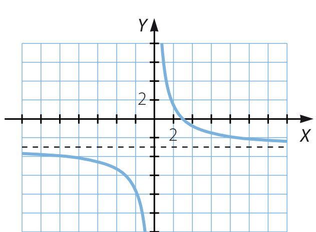
a)



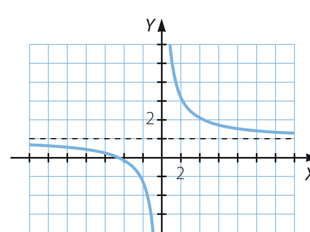
d)



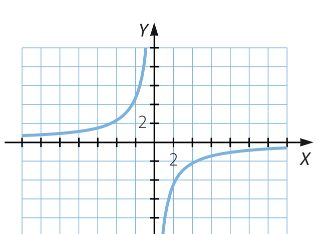
b)



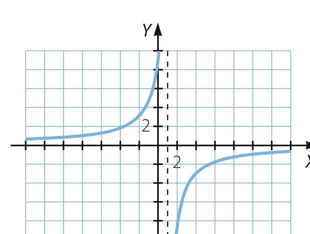
e)



c)



f)

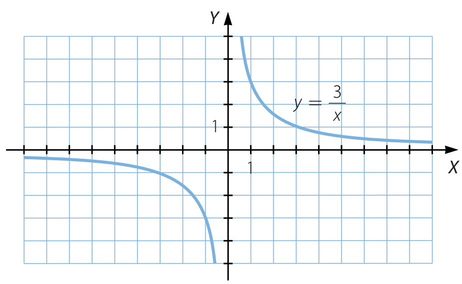


044 Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones y la de $y = \frac{12}{x}$.

a) $y = \frac{12}{x+4}$ b) $y = \frac{12}{x} - 2$ c) $y = \frac{12}{x} + 1$ d) $y = -\frac{12}{x}$

a) La función se desplaza horizontalmente 4 unidades a la izquierda.
b) La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
c) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
d) La función es simétrica a la inicial y el eje de simetría es el eje de ordenadas.

045 La gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ es:



Encuentra la relación que tienen estas funciones con la función $y = \frac{3}{x}$ y represéntalas.

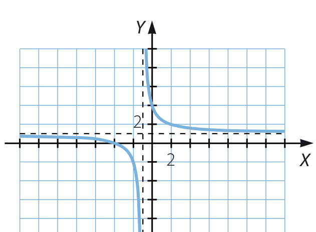
a) $y = \frac{x+4}{x+1}$. Ten en cuenta que: $y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$.

b) $y = \frac{2x-5}{x-1}$

c) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$

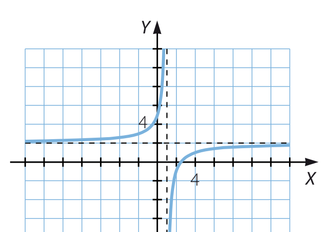
d) $y = \frac{-x-5}{x+2}$

a)



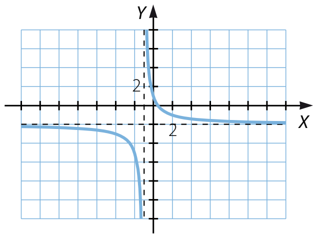
$y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$

b)



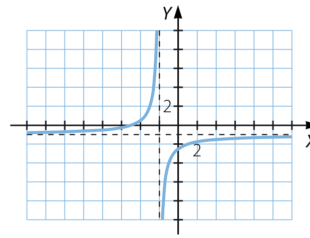
$y = \frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$

c)



$$y = \frac{-2x+1}{x+1} = \frac{3}{x+1} - 2$$

d)



$$y = \frac{-x-5}{x+2} = -1 - \frac{3}{x+2}$$

046 Determina el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 7$

b) $g(x) = -\sqrt{x} + 5$

c) $h(x) = \sqrt{x+7}$

d) $i(x) = -\sqrt{x+5}$

a) Dom $f = [0, +\infty)$

b) Dom $g = [0, +\infty)$

c) Dom $h = [-7, +\infty)$

d) Dom $i = [-5, +\infty)$

047 Halla el dominio de las siguientes funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^4 - 81}$

c) $h(x) = \sqrt[4]{1 - x^3}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

c) Dom $h = (-\infty, -1]$

048 ¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?

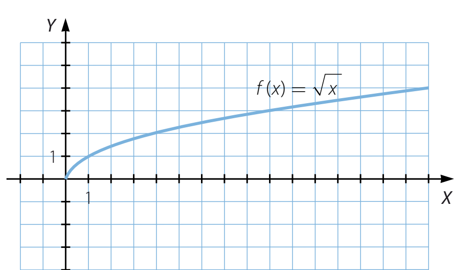
a) $f(x) = \dfrac{7x}{2 - \sqrt{x-5}}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$

a) Dom $f = [5, 9) \cup (9, +\infty)$

b) Dom $g = [-1, 15) \cup (15, +\infty)$

049 La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x-2)$

b) $f(x+3)$

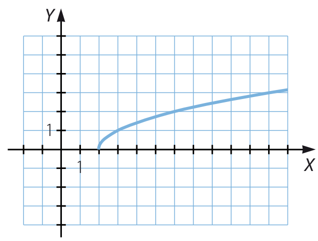
c) $1 + f(x)$

d) $-f(x)$

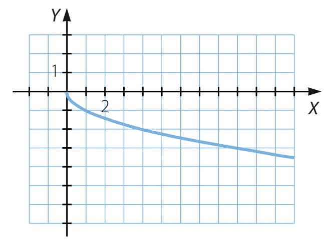
e) $-1 - f(x)$

f) $f(x) - 2$

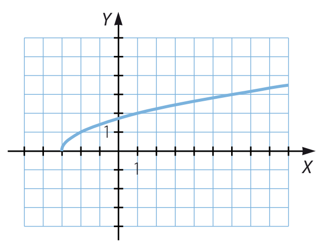
a) $f(x-2)=\sqrt{x-2}$



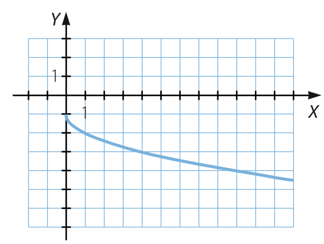
d) $-f(x)=-\sqrt{x}$



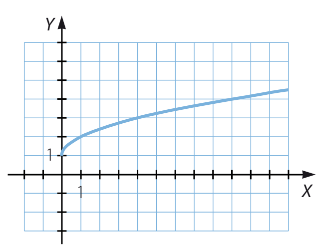
b) $f(x+3)=\sqrt{x+3}$



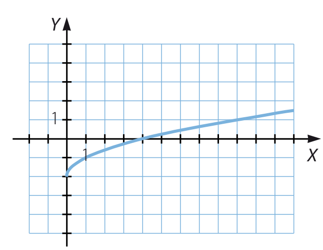
e) $-1-f(x)=-1-\sqrt{x}$



c) $1+f(x)=1+\sqrt{x}$



f) $f(x)-2=\sqrt{x}-2$

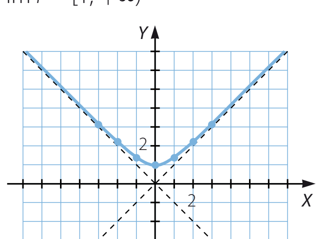


050 ●○○ Con ayuda de la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función $y=\sqrt{x^2+1}$. Determina su dominio y su recorrido.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2,23	1,41	1	1,41	2,23

Dom $f=\mathbb{R}$

Im $f=[1,+\infty)$



051 A partir de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2+1}$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones con radicales.

a) $y = 1 + \sqrt{x^2+1}$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2+1}$

c) $y = 1 - \sqrt{x^2+1}$

d) $y = \sqrt{x^2+2x+2}$

a) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
b) La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
c) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia abajo.
d) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba y se dibuja abierta hacia abajo con la misma abertura.

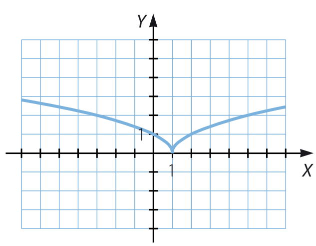
052 Calcula el dominio de estas funciones.

a) $y = \sqrt[4]{(x-1)^2}$

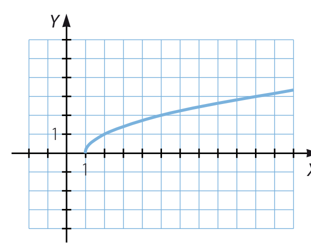
b) $y = \sqrt{x-1}$

Utiliza el resultado para probar que las funciones no son iguales y represéntalas gráficamente.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

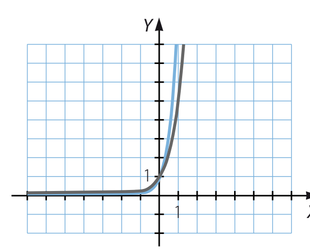


b) Dom $f = [1, +\infty)$



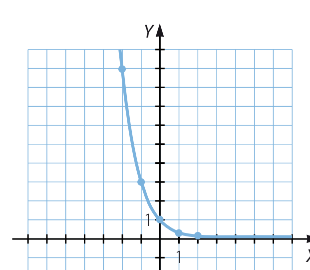
053 Representa la gráfica de las funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$. A partir de ellas, razona cómo será la gráfica de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$.

Las gráficas de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$ también son crecientes y pasan por el punto (0, 1), pero su crecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto mayor es el valor de la base.

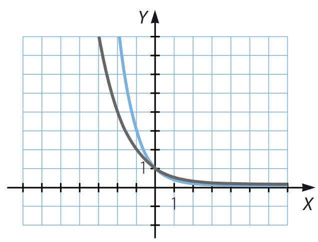


054 Ayúdate de la calculadora y realiza una tabla de valores para representar la función exponencial $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	9	3	1	0,33	0,11

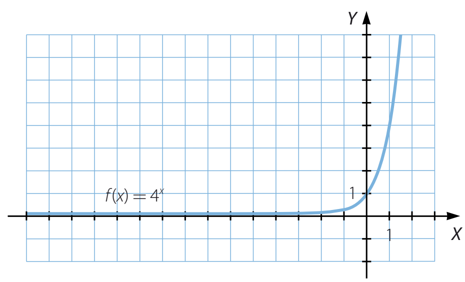


055 Representa las funciones $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. A partir de las gráficas, ¿cómo serán las gráficas de las funciones $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$?



Las gráficas de las funciones $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$ también son decrecientes y pasan por el punto (0, 1), pero su decrecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto menor es el valor de la base.

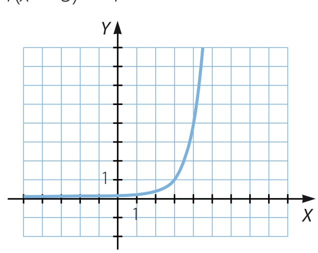
056 Esta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 4^x$.



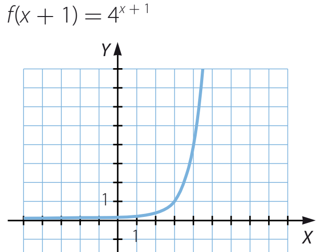
Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 3)$
b) $f(x + 1)$
c) $4 + f(x)$
d) $-f(x)$
e) $2 - f(x)$
f) $f(x) - 2$

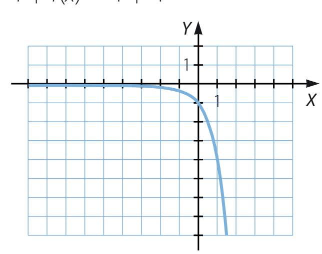
a) $f(x - 3) = 4^{x-3}$



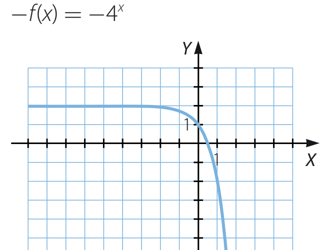
b) $f(x + 1) = 4^{x+1}$



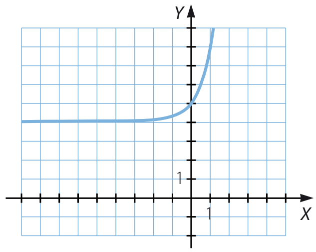
c) $4 + f(x) = 4 + 4^x$



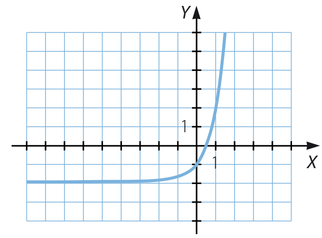
d) $-f(x) = -4^x$



e) $2 - f(x) = 2 - 4^x$



f) $f(x) - 2 = 4^x - 2$



057 A partir de la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$

b) $y = 3^x$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

e) $y = 3^{x+2}$

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

a) La función se traslada horizontalmente 3 unidades hacia la derecha.

b) $y = 3^x = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^x = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)^{-1}$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas.

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)^{-1}$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) La función se traslada horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda.

e) $y = 3^{x+2} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{x+2} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right)^{-1}$

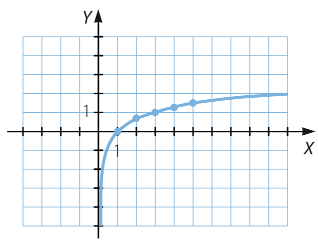
Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}\right)^{-1}$

Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

058 Con la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función logarítmica $y = \log_3 x$.

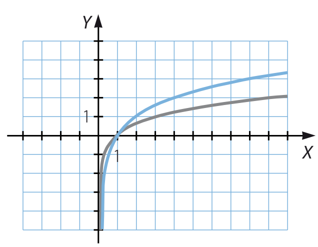
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0,63	1	1,26	1,46



059 Representa la gráfica de las funciones.

$$y = \log_2 x \qquad y = \log_3 x$$

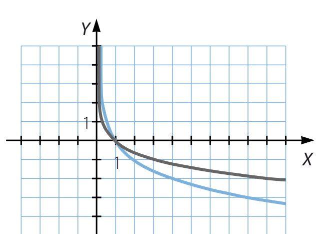
Deduce, a partir de ellas, cómo será la gráfica de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$.



Las gráficas de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$ también son crecientes y pasan por el punto (1, 0), pero su crecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto mayor es el valor de la base.

060 Representa las funciones $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

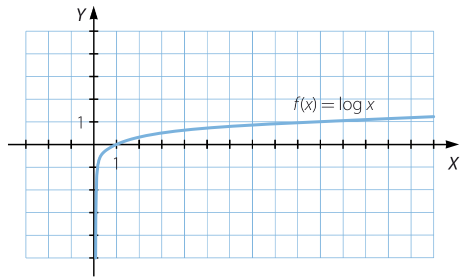
¿Cómo serán las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$?



Las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ también son decrecientes y pasan por el punto (1, 0), pero su decrecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto menor es el valor de la base.

061 ●●○

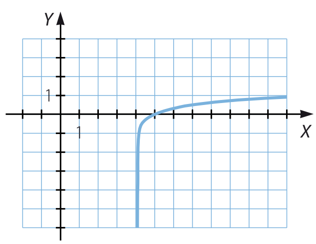
Esta es la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log x$.



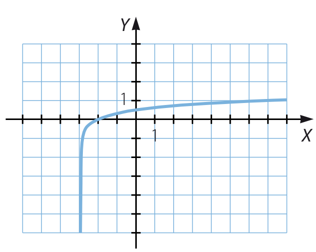
Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 4)$
b) $f(x + 3)$
c) $4 + f(x + 1)$
d) $-f(x)$
e) $2 - f(x - 2)$
f) $f(2 - x)$

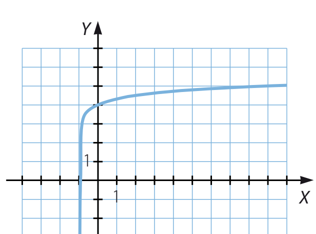
a) $f(x - 4) = \log (x - 4)$



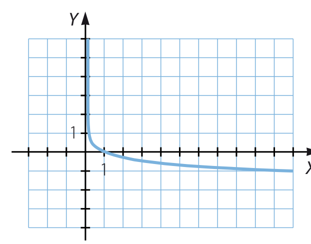
b) $f(x + 3) = \log (x + 3)$



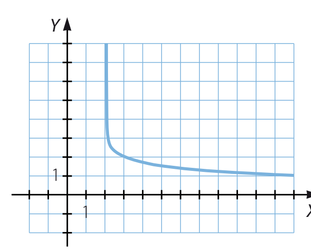
c) $4 + f(x + 1) = 4 + \log (x + 1)$



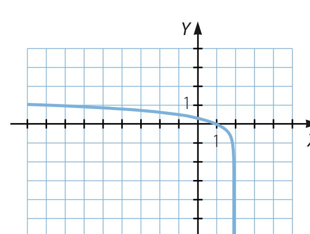
d) $-f(x) = -\log x$



e) $2 - f(x - 2) = 2 - \log (x - 2)$



f) $f(2 - x) = \log (2 - x)$



062 A partir de la gráfica de la función logarítmica $y = \log_3 x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \log_3 3x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $y = \log_3 \left(\frac{1}{x}\right)$

d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{x}\right)$

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$

f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9}\right)$

a) $y = \log_3 3x = 1 + \log_3 x$

La función se traslada verticalmente 1 unidad hacia arriba.

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x$

La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas.

c) La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) $y = \log_3 \left(\frac{3}{x}\right) = 1 - \log_3 x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente1 unidad hacia arriba.

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x = \log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} x = -1 + \log_{3^{-1}} x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente 1 unidad hacia abajo.

f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9}\right) = \log_3 x - 2$

La función se traslada verticalmente 2 unidades hacia abajo.

063 Dibuja la gráfica de $y = \cos x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de las siguientes funciones.

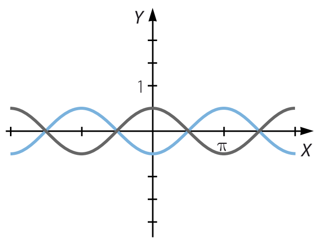
a) $y = -\cos x$

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

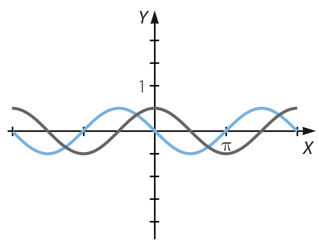
c) $y = 1 + \cos x$

d) $y = \cos(-x)$

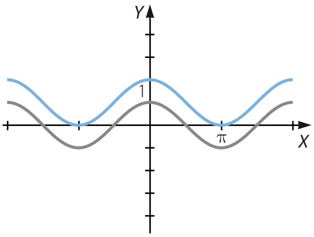
a)



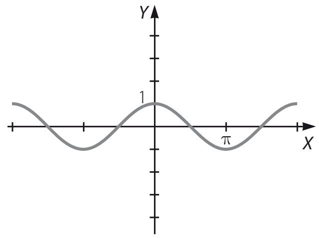
b)



c)



d)



064 Dibuja la gráfica de $y = sen\ x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de estas funciones.

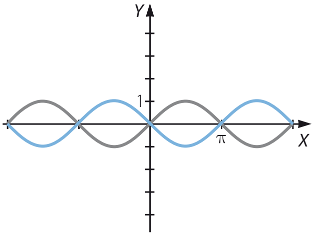
a) $y = -sen\ x$

b) $y = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

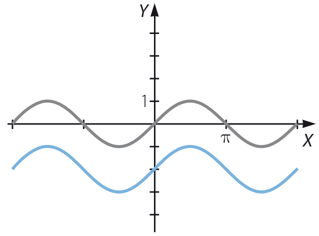
c) $y = -2 + sen\ x$

d) $y = -sen\ (-x)$

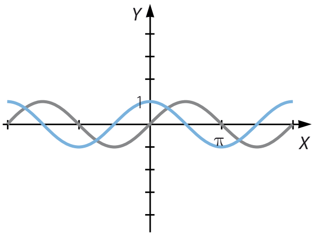
a)



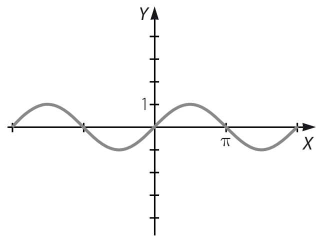
c)



b)



d)



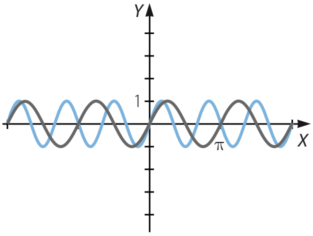
065 Realiza una gráfica y estudia las características de estas funciones.

$y = sen\ 2x \qquad y = sen\ 3x$

A partir de lo anterior explica cómo serán las gráficas de las funciones:

a) $y = sen\ 4x$

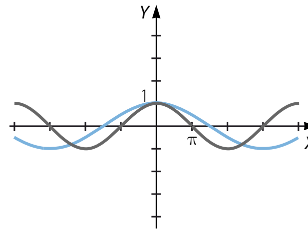
b) $y = sen\ 6x$



Las gráficas de las funciones $y = sen\ 4x$ e $y = sen\ 6x$ tienen el mismo dominio y recorrido y son periódicas, pero el período es mayor cuanto mayor es el valor por el que se multiplica la variable independiente x.

066 Representa y estudia las características de estas funciones.

$y = cos\ \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ $y = cos\ \dfrac{x}{3}$



Explica, a partir del estudio anterior, cómo serán las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = cos\ \dfrac{x}{5}$ $\qquad$ b) $y = cos\ \dfrac{x}{6}$

a) La gráfica de la función $y = cos\ \dfrac{x}{5}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 10π.

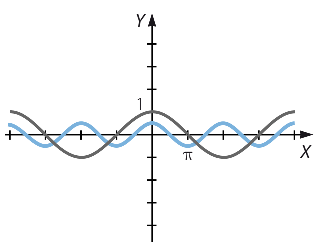
b) La gráfica de la función $y = cos\ \dfrac{x}{6}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 6π.

067 Ayudándote de su gráfica, comprueba que estos pares de funciones no son iguales.

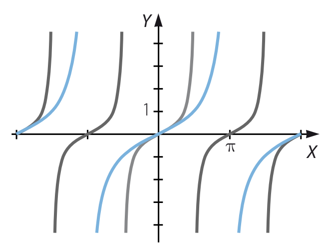
a) $y = cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{cos\ x}{2}$ $\qquad$ c) $y = tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{tg\ x}{2}$

b) $y = sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \dfrac{sen\ x}{2}$

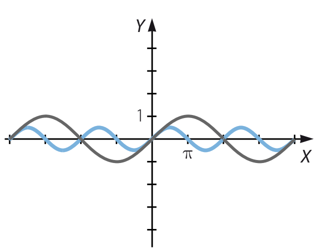
a)



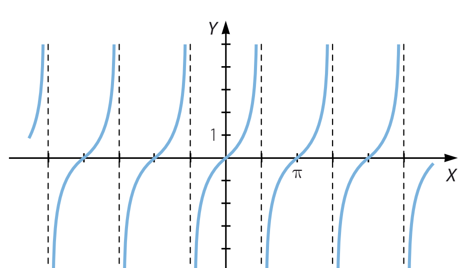
c)



b)



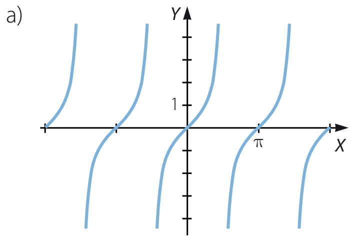
068 Esta es la gráfica de la función trigonométrica $y = tg\ x$.

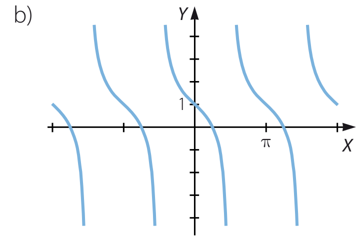


Utiliza la gráfica anterior para construir las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = tg\,(x + \pi)$

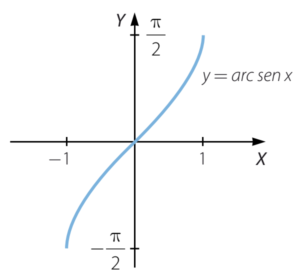
b) $y = 1 - tg\,x$





069

A continuación puedes ver la gráfica de la función $y = arc\ sen\ x$.



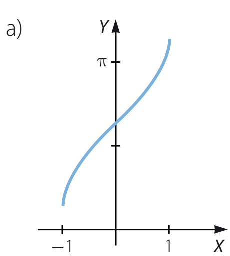
Realiza las gráficas de las funciones.

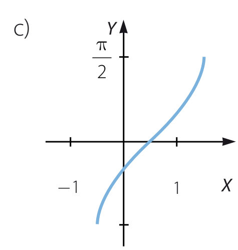
a) $y = 2 + arc\ sen\ x$

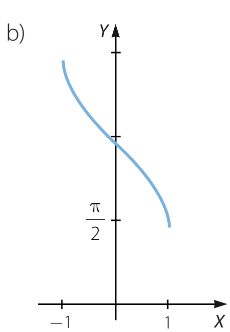
b) $y = 3 - arc\ sen\ x$

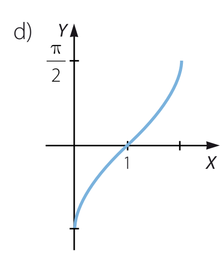
c) $y = arc\ sen\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

d) $y = arc\ sen\ (x - 1)$









070 ●●○ Esta es la gráfica de la función $y = arc\ cos\ x$.

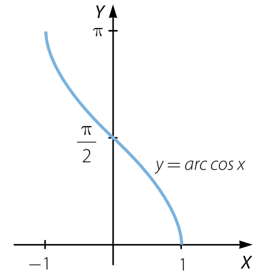
Realiza las gráficas de las funciones.

a) $y = 2 + arc\ cos\ x$

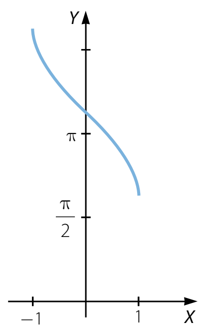
b) $y = 3 - arc\ cos\ x$

c) $y = arc\ cos\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

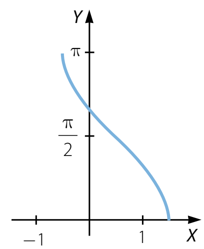
d) $y = arc\ cos\ (x - 1)$



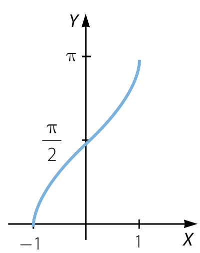
a)



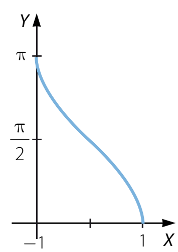
c)



b)



d)



071 ●●○ Observa la gráfica de la función $y = arc\ tg\ x$.

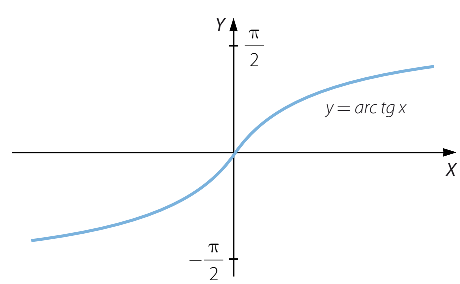
Realiza las gráficas de las funciones.

a) $y = 2 + arc\ tg\ x$

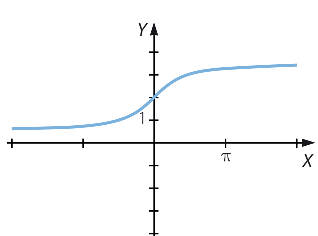
b) $y = 3 - arc\ tg\ x$

c) $y = arc\ tg\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

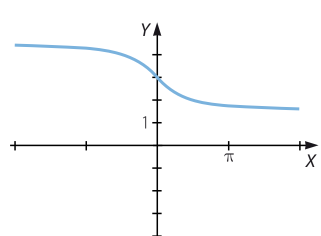
d) $y = arc\ tg\ (x - 1)$



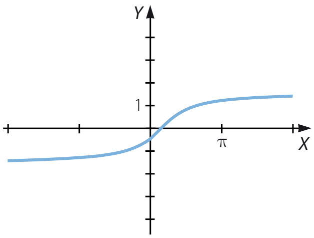
a)



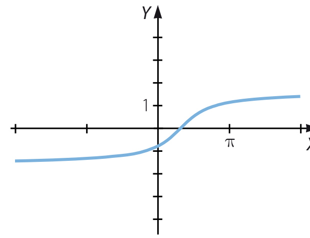
b)



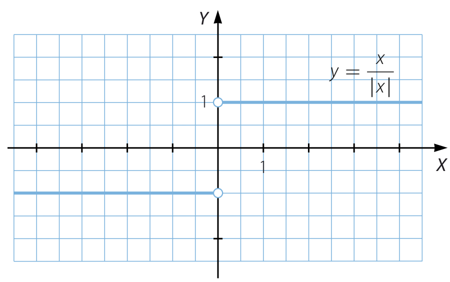
c)



d)



072 La función cuya expresión algebraica es $y = \dfrac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos.

a) ¿Cuánto vale si $x = 3$? b) ¿Y si $x = -5$? c) ¿Y si $x = -3{,}4$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) $f(3) = 1$ b) $f(-5) = -1$ c) $f(-3{,}4) = -1$

073 Representa y describe las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

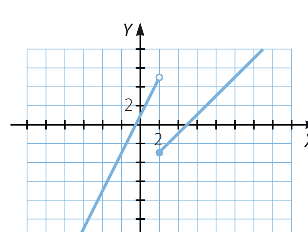
a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

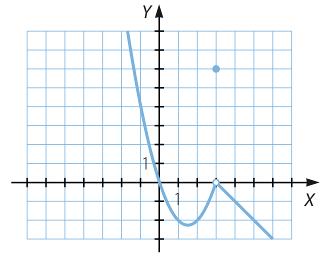
No es continua en $x = 2$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = \left[-\dfrac{9}{4}, +\infty\right)$



La función es creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

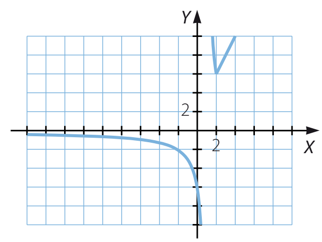
y es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

Tiene un mínimo absoluto en $x = \dfrac{3}{2}$.

No es continua en $x = 3$, y este es un punto de discontinuidad evitable.

No tiene asíntotas. No es simétrica ni periódica.

c) Dom $h = \mathbb{R} - \{1\}$ Im $h = (-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$



La función es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

No es continua en $x = 1$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

No es simétrica ni periódica.

074 ●●○ **Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$ Im $f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

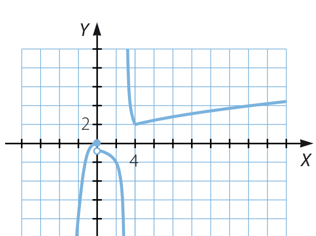
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

No es continua en $x = 0$, ni en $x = 3$, y el punto $x = 0$ es de discontinuidad inevitable de salto finito, y el punto $x = 3$ es de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.



b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = (0, 2]$

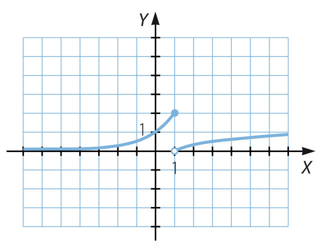
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

No es continua en $x = 1$, y este punto es de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.

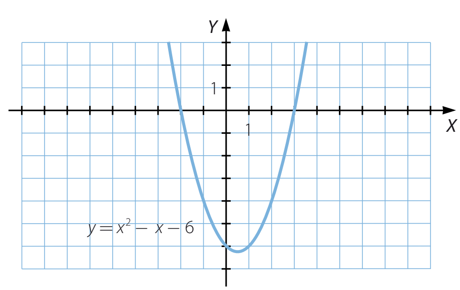


075 Escribe como funciones definidas a trozos.

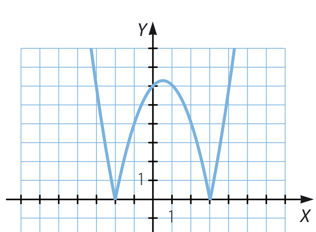
a) $y = |x + 2|$ b) $y = |12 - 3x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si } x \leq 4 \\ -12 + 3x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

076 Observa la gráfica de la función $y = x^2 - x - 6$.



Realiza la gráfica de $y = |x^2 - x - 6|$.



077 Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a −1, completando las tablas.

Izquierda de −1	−2	−1,5	−1,1	−1,05
$f(x)$	2	2,25	2,09	2,0475

Derecha de −1	0	−0,5	−0,9	−0,95
$f(x)$	3	3,5	3,9	3,95

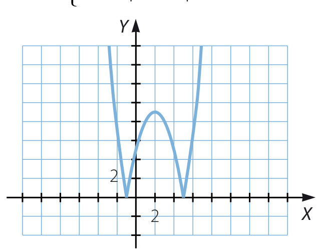
Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de −1.

Por la izquierda de −1 los valores de la función se acercan a 2, y por la derecha se acercan a 4.

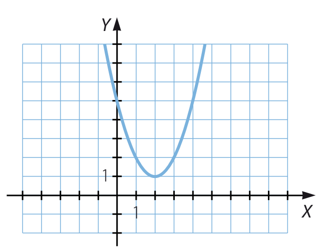
078 Escribe como una función definida a trozos y representa las funciones.

a) $y = |x^2 - 4x - 5|$
b) $y = |x^2 - 4x + 5|$
c) $y = |2x^2 - 7x + 3|$
d) $y = |-x^2 + 4x - 5|$

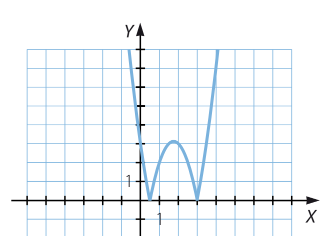
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \le -1,\ x \ge 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x < 5 \end{cases}$



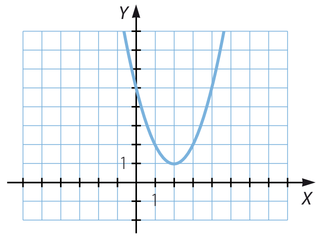
b)



c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 & \text{si } x \le \dfrac{1}{2},\ x \ge 3 \\ -2x^2 + 7x - 3 & \text{si } \dfrac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$



d)



079 ●●●

Expresa como una función definida a trozos.

a) $y = |x| + |x + 2|$

b) $y = |x + 1| - |1 - x|$

c) $y = |x - 1| - |1 - x|$

d) $y = |2x + 1| - |2 - x|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 2 & \text{si} \quad -2 < x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2} < x \leq 2 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

080 ●○○

El número de alumnos afectados por una epidemia de gripe se obtiene a partir de la función:

$$f(x) = \frac{30x}{x + 2}$$

siendo x el número de días transcurridos desde el comienzo de la epidemia.

a) ¿Cuántos afectados hubo el primer día?

b) ¿En qué momento el número de afectados fue 15?

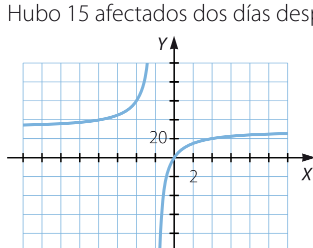
c) Representa la función y comprueba los resultados que has obtenido en los apartados anteriores.

a) $f(1) = 10$ afectados

b) $\dfrac{30x}{x + 2} = 15 \rightarrow 30x = 15x + 30 \rightarrow 15x = 30 \rightarrow x = 2$

Hubo 15 afectados dos días después del comienzo de la epidemia.

c)



081 Un capital de 5.000 € está depositado en un banco, y produce un interés anual del 2 %.

a) ¿Cuánto dinero hay al cabo de un año?
b) ¿Y a los dos años?
c) ¿Y a los *n* años?

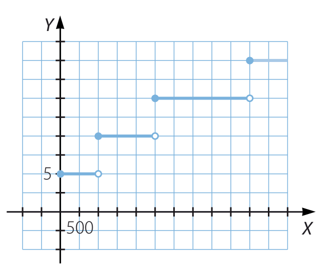
a) 5.100 € b) 5.202 € c) $C = 5.000 \cdot 1{,}02^n$

082 La tabla recoge el interés que ofrece un banco al ingresar dinero durante un año.

Dinero (€)	Interés (%)
Hasta 1.000	5
De 1.000 a 2.500	10
De 2.500 a 5.000	15
Más de 5.000	20

a) Representa la función que determina el interés obtenido dependiendo del dinero que se ingresa. ¿De qué tipo de función se trata?
b) Si se ingresan 1.800 €, ¿cuánto dinero tendré al final del año?
c) ¿Y si ingreso 500 €?

a)



Se trata de una función definida a trozos.

b) $1.800 \cdot 1{,}1 = 1.980$ €
c) $500 \cdot 1{,}05 = 525$ €

083 Encuentra las funciones inversas de estas funciones.

a) $y = 3x - 1$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = sen\ 2x$
d) $y = \dfrac{1 + tg\ x}{2}$
e) $y = arc\ cos\ (x - 2)$
f) $y = \ln\ (x + 3)$
g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x$
h) $y = \dfrac{1 + \log_3 x}{5}$
i) $y = |x - 1|$
j) $y = x$

a) $y = 3x - 1 \rightarrow y + 1 = 3x \rightarrow x = \dfrac{y+1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

b) $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2$

c) $y = sen\ 2x \rightarrow 2x = arc\,sen\,y \rightarrow x = \dfrac{arc\,sen\ y}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{arc\,sen\ x}{2}$

d) $y = \dfrac{1 + tg\,x}{2} \rightarrow 2y - 1 = tg\,x \rightarrow x = arc\,tg\,(2y-1) \rightarrow f^{-1}(x) = arc\,tg\,(2x-1)$

e) $y = arc\,cos(x-2) \rightarrow cos\,y = x - 2 \rightarrow x = 2 + cos\,y \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + cos\,x$

f) $y = \ln(x+3) \rightarrow x + 3 = e^y \rightarrow x = e^y - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$

g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x \rightarrow 5^x = \dfrac{y-3}{4} \rightarrow x = \log_5\left(\dfrac{y-3}{4}\right) \rightarrow f^{-1}(x) = \log_5\left(\dfrac{x-3}{4}\right)$

h) $y = \dfrac{1+\log_3 x}{5}\ 5y = 1 + \log_3 x \rightarrow \log_3 x = 5y - 1 \rightarrow x = 3^{5y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x-1}$

i) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \rightarrow x = y + 1 \\ y = -x + 1 \rightarrow x = -y + 1 \end{array}\right\} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

j) $y = x \rightarrow x = y \rightarrow f^{-1}(x) = x$

084 ●●●

Una granja de caracoles ha ajustado sus gastos de producción por x kilogramos de caracoles según la función:

$$G(x) = 2.000 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Sus ingresos se rigen por la fórmula:

$$I(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000}x^2 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Averigua cuál es el número de kilogramos de caracoles con el que se obtiene el beneficio máximo.

Los beneficios de la granja se obtienen a partir de la función:

$$f(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000}x^2 + \frac{1}{200.000}x^3 - 2.000 - \frac{1}{200.000}x^3 =$$

$$= 6.000 + 2x - \frac{1}{1.000}x^2$$

Se trata de una función cuadrática, por lo que su gráfica es una parábola.
Al ser el coeficiente de x^2 un valor negativo la parábola está abierta hacia abajo.
Entonces la función alcanza su máximo en el vértice de la misma:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2.000 \text{ kg}$$

085 Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales tras un *tsunami* sigue aproximadamente la fórmula: $P = 1 + \dfrac{110}{t^2 + 10}$ $t \in (0, 30)$ donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el *tsunami*.

a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?

b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2.000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?

a) 11.000 personas

b) 1.243 personas

c) $1 + \dfrac{110}{t^2 + 10} = 2 \to t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \to t^2 - 100 = 0 \to t = \pm 10$

Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

086 La evolución de una población viene determinada por la función $P(t) = 100 \cdot 2^t$, y la de los alimentos que necesitan sigue la función $A(t) = 1.000t + 1.000$.

a) ¿Cuánta población había al principio? ¿Y alimentos?

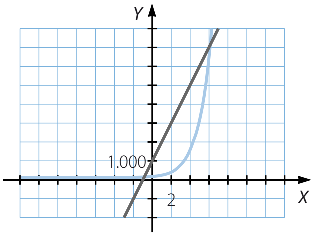
b) ¿Y después de 2 años?

c) ¿A partir de qué año la población tendrá menos alimentos de los que son necesarios?

a) $P(0) = 100$ $A(0) = 1.000$

b) $P(2) = 400$ $A(2) = 3.000$

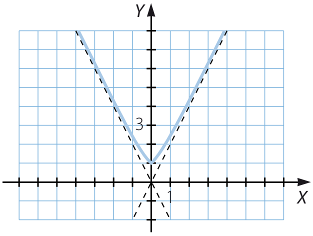
c)



A partir del sexto año.

PARA FINALIZAR...

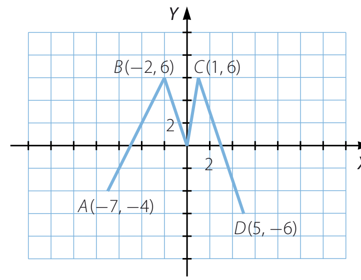
087 Razona para qué valor de x se hace mayor la diferencia $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$.



La diferencia alcanza el mayor valor para $x = 0$.

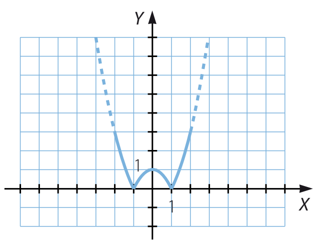
088 La función $f(x)$ está formada por cuatro segmentos.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(x)] = 6$?



Como $f(1) = f(-2) = 6$, las soluciones de la ecuación son los valores para los que las ordenadas son iguales a 1 y a −2. En total hay seis puntos que cumplen estas condiciones, es decir, la ecuación tiene seis soluciones.

089 Calcula los valores máximo y mínimo (extremos absolutos) que puede alcanzar la función $f(x) = |1 - x^2|$ en el intervalo $[-2, 2]$.

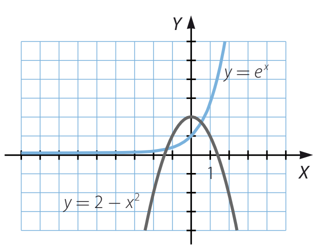


En el intervalo $[-2, 2]$, el máximo valor es 4, ya que los puntos $x = 2$ y $x = -2$ son los máximos absolutos, y el mínimo valor es 0, porque los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son los mínimos absolutos.

090 ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

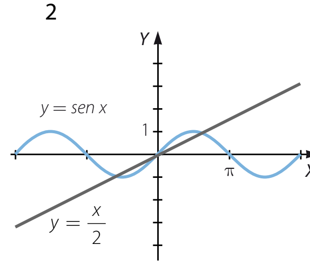
a) $e^x = 2 - x^2$ b) $\ln x = -x$ c) $\text{sen } x = \dfrac{x}{2}$

a)



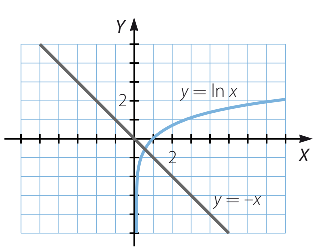
Tiene dos soluciones.

c)



Tiene tres soluciones.

b)



Tiene una solución.

091 Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 cm. Entre las 12 horas y las 12 horas y 30 minutos:

a) Expresa el ángulo que forman en función del tiempo, t, medido en minutos.

b) Halla el área del triángulo creado al unir sus extremos en función de t. ¿Puede tomar el valor cero? ¿A qué hora alcanza su mayor valor?

c) Expresa la distancia entre los extremos de las agujas en función de t.

a) Como la manecilla que marca las horas tarda 12 horas en completar una vuelta (2π radianes), su velocidad es: $v_h = \frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360}$ rad/min

Análogamente, la velocidad de la otra manecilla es: $v_m = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad/min

El ángulo que forman ambas manecillas es la diferencia entre los ángulos recorridos por cada una, en función del tiempo t transcurrido:

$$\alpha = \frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{360}t = \frac{11\pi}{360}t \text{ rad}$$

b) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = 300\ sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right)$

Esta función se anula si el ángulo mide $k\pi$ radianes, con $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo de tiempo dado esta condición solo se cumple a las 12 horas ($\alpha = 0$).

Como el mayor valor de la función seno se alcanza cuando el ángulo mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, hay que calcular a qué hora el ángulo formado tiene esta amplitud:

$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 16{,}36$ El área es máxima a las 12 horas y 16,36 minutos.

c) Por el teorema del coseno, la distancia entre las agujas es:

$$d = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} = \sqrt{1.300 - 1.200\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} =$$
$$= 10\sqrt{13 - 12\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)}$$

092 **La temperatura media diaria, medida en grados Celsius, en una ciudad, durante el año pasado, viene dada por la siguiente función.**

$$T = \frac{5}{9}\left[13 - 23\ cos\ \frac{2\pi}{365}(t - 32)\right]$$

donde t es el tiempo en días, correspondiendo $t = 1$ al 1 de enero, y el ángulo está medido en radianes. Halla la temperatura correspondiente a los días 1 de enero y 10 de agosto. Calcula las temperaturas máxima y mínima del año.

Para calcular la temperatura del 1 de enero: $t = 1 \rightarrow T = -3{,}77$ grados

Para calcular la temperatura del 10 de agosto: $t = 222 \rightarrow T = 19{,}89$ grados

Como en la expresión dada, el coseno del ángulo está multiplicado por un número negativo, la función alcanza el máximo si su amplitud es de π radianes.

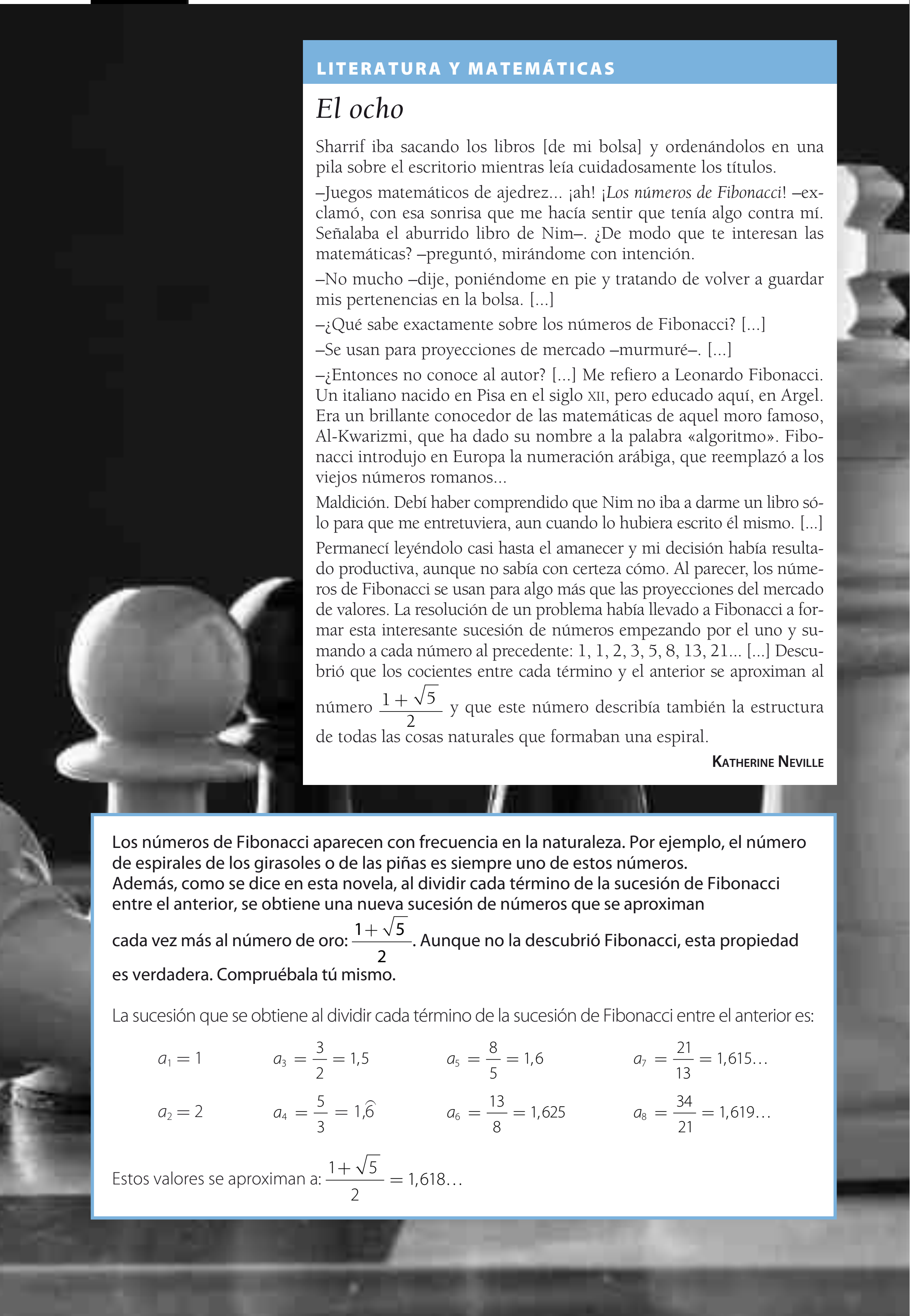
$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = \pi \rightarrow t = 214{,}5$ días

Por tanto, la temperatura máxima es: $T = 20$ grados

Análogamente, la función alcanza el mínimo si dicho ángulo mide 0 radianes.

$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = 0 \rightarrow t = 32$ Así, la temperatura mínima es: $T = -5{,}55$ grados

9 Límite de una función



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El ocho

Sharrif iba sacando los libros [de mi bolsa] y ordenándolos en una pila sobre el escritorio mientras leía cuidadosamente los títulos.

–Juegos matemáticos de ajedrez... ¡ah! ¡*Los números de Fibonacci*! –exclamó, con esa sonrisa que me hacía sentir que tenía algo contra mí. Señalaba el aburrido libro de Nim–. ¿De modo que te interesan las matemáticas? –preguntó, mirándome con intención.

–No mucho –dije, poniéndome en pie y tratando de volver a guardar mis pertenencias en la bolsa. [...]

–¿Qué sabe exactamente sobre los números de Fibonacci? [...]

–Se usan para proyecciones de mercado –murmuré–. [...]

–¿Entonces no conoce al autor? [...] Me refiero a Leonardo Fibonacci. Un italiano nacido en Pisa en el siglo XII, pero educado aquí, en Argel. Era un brillante conocedor de las matemáticas de aquel moro famoso, Al-Kwarizmi, que ha dado su nombre a la palabra «algoritmo». Fibonacci introdujo en Europa la numeración arábiga, que reemplazó a los viejos números romanos...

Maldición. Debí haber comprendido que Nim no iba a darme un libro sólo para que me entretuviera, aun cuando lo hubiera escrito él mismo. [...]

Permanecí leyéndolo casi hasta el amanecer y mi decisión había resultado productiva, aunque no sabía con certeza cómo. Al parecer, los números de Fibonacci se usan para algo más que las proyecciones del mercado de valores. La resolución de un problema había llevado a Fibonacci a formar esta interesante sucesión de números empezando por el uno y sumando a cada número al precedente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... [...] Descubrió que los cocientes entre cada término y el anterior se aproximan al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y que este número describía también la estructura de todas las cosas naturales que formaban una espiral.

KATHERINE NEVILLE

Los números de Fibonacci aparecen con frecuencia en la naturaleza. Por ejemplo, el número de espirales de los girasoles o de las piñas es siempre uno de estos números.
Además, como se dice en esta novela, al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior, se obtiene una nueva sucesión de números que se aproximan cada vez más al número de oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aunque no la descubrió Fibonacci, esta propiedad es verdadera. Compruébala tú mismo.

La sucesión que se obtiene al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior es:

$a_1 = 1$ $\quad a_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\quad a_5 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ $\quad a_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615\ldots$

$a_2 = 2$ $\quad a_4 = \frac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$ $\quad a_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625$ $\quad a_8 = \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots$

Estos valores se aproximan a: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Escribe los términos 14, 123 y 2.345 de estas sucesiones.

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$ b) $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$

a) $a_{14} = 156$ $a_{123} = 14.762$ $a_{2.345} = 5.491.992$

b) $a_{14} = \dfrac{18}{29}$ $a_{123} = \dfrac{127}{247}$ $a_{2.345} = \dfrac{2.349}{4.691}$

002 Factoriza este polinomio: $P(x) = 7x^5 + 14x^4 - 35x^3 - 42x^2$

$P(x) = 7x^2(x-2)(x+1)(x+3)$

003 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$ c) $\dfrac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)}$ d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2}$

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)} = \dfrac{x^2(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = x(x+2)$

c) $\dfrac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)} = \dfrac{y^2(x-2)^2}{x(x-2)} = \dfrac{y^2(x-2)}{x}$

d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2} = \dfrac{(x+3)(x-3)(y+4)(y-4)}{2xy(x-3)(y+4)^2} = \dfrac{(x+3)(y-4)}{2xy(y+4)}$

004 Resuelve estas operaciones y simplifica el resultado.

a) $(x+1) - \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$ b) $(2x-2) - \dfrac{x-1}{3x}$

a) $(x+1) - \dfrac{x^2-3x+1}{x-1} = \dfrac{x^2-1-x^2+3x-1}{x-1} = \dfrac{3x-2}{x-1}$

b) $(2x-2) - \dfrac{x-1}{3x} = \dfrac{6x^2-6x-x+1}{3x} = \dfrac{6x^2-7x+1}{3x}$

ACTIVIDADES

001 Obtén el término general de estas sucesiones.

a) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{15}, \dfrac{11}{45}, \ldots$ b) $\dfrac{3}{1}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{-1}{9}, \dfrac{-3}{16}, \ldots$

a) $a_n = \dfrac{4n-1}{5 \cdot 3^{n-1}}$ b) $a_n = \dfrac{-2n+5}{n^2}$

002 Con tu calculadora, halla los cinco primeros términos de la sucesión recurrente $a_n = \dfrac{a_{n-1}+3}{a_{n-1}+1}$, siendo $a_1 = 1$, y determina el número al que se aproxima.

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = 2$ $\quad a_3 = \dfrac{5}{3} = 1,\widehat{6}$ $\quad a_4 = \dfrac{7}{4} = 1,75$ $\quad a_5 = \dfrac{19}{11} = 1,\widehat{72}$

Los términos de la sucesión se aproximan a: $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

003 Con ayuda de tu calculadora, halla el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$ b) $a_n = n^2$ c) $a_n = n^2 - n^3$ d) $a_n = 0,2^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

004 Escribe sucesiones de números reales que cumplan que su límite, cuando n tiende a infinito, es:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe

Respuesta abierta.

a) $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$ b) $a_n = 4 - n$ c) $a_n = n^2 + 3$ d) $a_n = (-1)^{n+1}$

005 Calcula estos límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^4}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,5^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^4} = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,5^n = 0$

006 Halla los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes.

a) $\dfrac{8n}{2n^2+3n-1}$ b) $\dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{2n^2+3n-1} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}} = 1$

007 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4+3}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2+7}{2n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4+3}\right) = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+2}} = \sqrt{3}$

b) $\lim \ln \dfrac{n^2+7}{2n} = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right) = 0$

008 **Calcula estos límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{2n^4+1}+\dfrac{-n^3}{3n^3+n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+1}{2n^3+n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{2n^4+1}+\dfrac{-n^3}{3n^3+n+1}\right)=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+1}{2n^3+n}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}=3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}=1$

009 **Explica por qué no son indeterminaciones.**

a) $\infty\cdot\infty$ b) $\dfrac{0}{\infty}$ c) $\dfrac{\infty}{0}$ d) ∞^1

a) El producto de valores muy grandes resulta un valor aún más grande.

b) Al dividir cero entre cualquier número distinto de él, el resultado es cero.

c) El cociente de un valor muy grande entre un número muy próximo a cero es un valor aún más grande.

d) Cualquier número elevado a uno es el mismo número.

010 **Pon ejemplos de límites que produzcan indeterminaciones de los tipos.**

a) $0\cdot\infty$ b) 1^∞ c) ∞^0 d) 0^0

Respuesta abierta.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \ln n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-4)^{\frac{1}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

011 **Calcula los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones que puedan presentar.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}=\dfrac{1}{2}$

012 **¿Presentan indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ estas sucesiones? En caso afirmativo, halla el límite.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-n^2}}{n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5-n^2}}{n}$

a) No es una indeterminación, porque la raíz cuadrada no está definida para valores grandes de n.

b) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5-n^2}}{n} = 0$

013 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^4-n^3+3n^2-n-1}{2n^3-2n^2-n+1} = -\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2n^2+2}{n^3+n} = -1$$

014 **Halla estos límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7} + \sqrt{3n^2+n}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{\sqrt{n^2-4} + \sqrt{n^2-3n}} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{4n^2+\sqrt{n^2+5}} = \frac{3}{4}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7} + \sqrt{3n^2+n}\right) = +\infty$

015 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$

016 Halla estos límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{5} = e^{5}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}}\right]^{\frac{3(3n-2)}{2n}} = e^{\frac{9}{2}}$

017 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{3}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{3} = 2^3 = 8$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \frac{3}{8}$

018 Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x+3}\right)^{x}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x+3}\right)^{x} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2+1}{2x-1}}\right]^{\frac{x(2x-1)}{x^2+1}} = e^{2}$$

Límite de una función

019 Calcula los límites laterales en el punto $x = 3$ de:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x - 3) = 0 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 + 1) = 10$$

020 Halla los límites laterales en $x = 0$ de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

021 Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$ en $x = 2$ y en $x = 5$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \to \dfrac{24}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

022 Razona si existe o no el límite de la función $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3} + \dfrac{x + 3}{x - 2}$ en $x = 2$, en $x = 3$ y en $x = 4$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \to \dfrac{5}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{37}{6}$ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{53}{14}$

023 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \to \dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x - 1)^2}{(x - 1)(x - 2)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{8}{3}$$

024 Calcula $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x - 1}$ si $m = 2$ y $m = 3$.

¿Puedes determinar el límite para un valor m cualquiera?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) = m$$

025 Pon un ejemplo de una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:

$$x = 1 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

026 Halla las asíntotas verticales de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

027 **¿Puede ocurrir que una función tenga una asíntota horizontal y otra oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$? Razona la respuesta.**

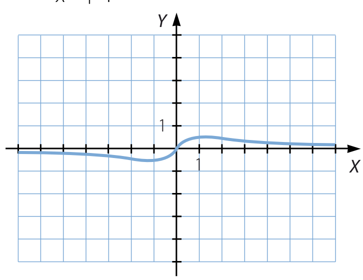
No puede ocurrir, ya que si tiene una asíntota horizontal se verifica que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$

Y si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, la función no tiene asíntota oblicua.

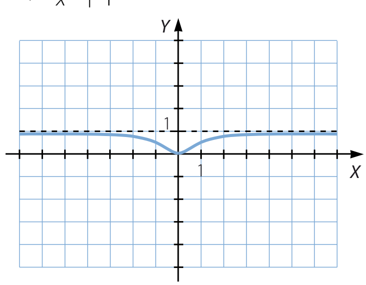
028 **Calcula sus asíntotas y representa las funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

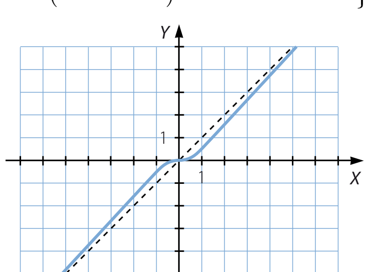
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.



c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3+x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota oblicua: $y = x$.



029 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

a) $f(x) = x^{-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ c) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $\text{Dom } f = [4, +\infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $[4, +\infty)$.

c) $\text{Dom } f = (-1, 1) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, 1)$.

030 **Halla m y n para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$ si se verifica que: $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = m + n \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow m + n = 2$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si se verifica que: $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3m + n \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \\ f(3) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow 3m + n = 4$$

$$\left.\begin{array}{r} m + n = 2 \\ 3m + n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}$$

031 **Estudia la continuidad de la función que asigna a cada número su parte entera.**

$$y = [x]$$

Especifica los tipos de discontinuidades que presenta esta función.

La función no es continua para todos los valores enteros. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

032 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 2.$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 0.$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$$

Como $\exists\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 4} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 4.$$

La discontinuidad es inevitable de salto finito.

033 **Halla el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:**

a) 1, −1, 1, −1, … **b) 1, 2, 4, 8, …**

a) $a_n = (-1)^{n-1}$

b) $a_n = 2^{n-1}$

034 **Con ayuda de la calculadora, halla el límite de esta sucesión definida de forma recurrente.**

$$a_1 = 1 \qquad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = \dfrac{5}{7} = 0{,}71428\ldots$

$a_3 = \dfrac{29}{41} = 0{,}70731\ldots$

$a_4 = \dfrac{169}{239} = 0{,}70711\ldots$

$a_5 = \dfrac{985}{1.393} = 0{,}707106\ldots$

Los términos de la sucesión se aproximan a: $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 0{,}7071\ldots$

035 **Calcula el límite de la siguiente sucesión con ayuda de la tabla.**

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n + 1}$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n	2,18	24,74	249,74	2.499,74	24.999,74

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

036 Comprueba la igualdad con ayuda de la tabla.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-6n}{2n+1} = -3$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n	−2,36	−2,93	−2,993	−2,9993	−2,9999

037 Halla los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right)$

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n^2-3n+6}{n^2-4n+3} = +\infty$$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3-7n+6}{3n^2+9n} = -\infty$$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-7}{2n+1} = 2$$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{13}{6(n+2)} = 0$$

038 ●●○ Obtén los resultados de:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} \to \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} \to \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6} = 0$

039 Determina los límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{n+\sqrt{n^2+4n-1}}=-2$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^2+n+31}{\sqrt{4n^2+n+31}+3n}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=0$$

040 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-3)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}=0$

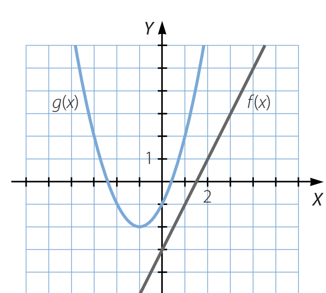
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

041 Representa las funciones.

$$f(x)=2x-3 \qquad g(x)=x^2+2x-1$$

A partir de la gráfica, calcula los siguientes límites.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

042 ○○○ Calcula.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x) = -\infty$

043 ○○○ Determina los límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3) = -\infty$

044 ○○○ Halla los límites.

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} |-2t^2 + 5|$

b) $\lim\limits_{t\to-\infty} |t^3 + 6t + 3|$

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} |-2t^2 + 5| = +\infty$

b) $\lim\limits_{t\to-\infty} |t^3 + 6t + 3| = +\infty$

045 ○○○ Calcula los límites, y comprueba el resultado con tu calculadora.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x} = -\dfrac{5}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3} = -\infty$

046 Halla estos límites con ayuda de la calculadora, y comprueba el resultado obtenido.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x} = 0$

047 Escribe, en cada caso, un polinomio, $P(x)$, para obtener los resultados indicados cuando calculamos el límite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+6x-1}{P(x)}$$

a) 4 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 1

Respuesta abierta.

a) $P(x) = 2x^2+x+1$

b) $P(x) = \dfrac{8}{5}x^2+x+1$

c) $P(x) = 2x^3+x$

d) $P(x) = x+1$

e) $P(x) = -1$

f) $P(x) = 8x^2$

048 Encuentra el valor de:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right) \to \infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right) \to \infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}} = 0$

049 Halla los límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right) \to \infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+10x^2+4x+2}{x^2+2x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x}-\frac{2x^2+1}{2x-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x^2-4x}=0$$

050 Obtén los resultados de:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}=-\infty$

051 Determina.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

052 Determina los límites, calculando previamente sus límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4-2x}{x^2-2x}$

b) $\lim\limits_{x\to3}(1+2x)^x$ e) $\lim\limits_{x\to2}\ln\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}$ f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5}{\sqrt{4+x}}$

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}=0$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4-2x}{x^2-2x}=2$

b) $\lim\limits_{x\to3}(1+2x)^x=343$ e) $\lim\limits_{x\to2}\ln\left(\dfrac{x+1}{3}\right)=0$

c) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}=\sqrt{3}$ f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5}{\sqrt{4+x}}=5$

053 Con ayuda de la calculadora, completa la tabla y comprueba que si $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -0{,}5$.

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0	−0,38	−0,48	−0,49	−0,501	−0,51	−0,63

054 Calcula los límites indicados en la función.

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 6^+} g(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} (2x+4) = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x^2 - 2x + 1) = 25$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (2x+4) = 12$

d) $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x+4) = 10$

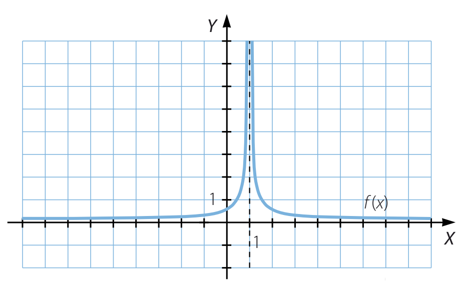
e) $\lim\limits_{x \to 6^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} (x^2 - 2x + 1) = 25$

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 - 2x + 1) = 9$

055 Observa las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y halla los siguientes límites.

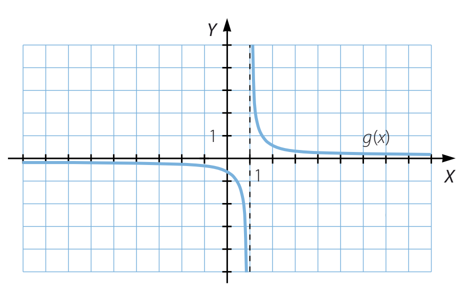
a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$



b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$



a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$

056 Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{9-x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2} \to \dfrac{10}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+6}{x-2} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+6}{x-2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{9-x^2} \to \dfrac{3}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3}{9-x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{9-x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} \to \dfrac{24}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} \to \dfrac{2}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$

057 Halla los límites.

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -1$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \to \dfrac{1}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \to -\dfrac{1}{0}$ $\quad \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

058 Dada la función $f(x)$ definida a trozos, encuentra los límites.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{9}{x-1} & \text{si } -2 \le x < 3 \\ x^2+6x-32 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -3$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -3$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{9}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -5$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

059 Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$$

060 Resuelve los límites.

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

a) $$\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

c) $$\lim_{x\to -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(3x^2 - 1)}{(x+4)(x^2 + 3x + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{47}{6}$$

d) $$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2 - 4x - 5)}{(x-5)(x^2 + 2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 2} = 0$$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{4x-8}\to-\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}=-\infty$$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x}=2$$

061 Dada la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

d) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{2x-1}{x-2}=\frac{5}{4}$$

062 Encuentra el límite de la función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 3.

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-3x^2}$$

Especifica el valor de los límites laterales, si es necesario.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3-3x^2}\to\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-3}=0$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4}{x^3-3x^2}\to\frac{81}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^4}{x^3-3x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^4}{x^3-3x^2}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 3}\frac{x^4}{x^3-3x^2}.$$

063 Determina el límite, y comprueba el resultado con la calculadora.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)\to\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10x}{x+2}=-10$$

064 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x)=\frac{4x^2-5x}{2x^2+7}$$

x	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	−0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	−1	−10	−100	−1.000	−10.000
$f(x)$	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

¿Es cierto que $y=2$ es una asíntota? Cuando x tiende a $+\infty$, ¿está la función por encima o por debajo de la asíntota? ¿Qué sucede cuando x tiende a $-\infty$?

Sí, es cierto que $y=2$ es una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

065 Decide si la función $y=\frac{3-2x}{x+1}$ tiene alguna asíntota horizontal, y sitúa la función respecto de esa asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{x+1}=-2\to\text{ La función tiene una asíntota horizontal: } y=-2.$$

Si $x=1.000$, $f(x)>-2$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x=-1.000$, $f(x)<-2$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

066 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$	−7	−17	−97	−997	−9.997	−99.997

x	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	100.003	10.003	1.003	103	23

¿Es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical? Cuando x tiende a 3 por la izquierda, ¿la rama infinita de la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$? ¿Qué sucede cuando x tiende a 3 por la derecha?

Sí, es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical.
Cuando x tiende a 3 por la izquierda, la rama infinita de la función tiende a $-\infty$.
Cuando x tiende a 3 por la derecha, la rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

067 **Decide si la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ tiene alguna asíntota vertical, y estudia sus ramas infinitas próximas a esas asíntotas.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 4.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

068 **Observa la tabla de valores de la función.**

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$$

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	27,06	206,09	2.006,009	20.006,0009

Esta es la tabla de valores de la recta $y = 2x + 6$.

x	10	100	1.000	10.000
$y = 2x + 3$	26	206	2.006	20.006

¿Es cierto que la recta es una asíntota de la otra función? ¿Qué posición tienen cuando x tiende a $+\infty$? Investiga la posición relativa de ambas cuando x tiende a $-\infty$.

Sí, es cierto que $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.
Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x - 3 > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

069 Comprueba si la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua de la función $y = \dfrac{x^2 + 5x}{x + 2}$. En caso afirmativo, decide la posición que ocupa una respecto de la otra.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 + 5x}{x + 2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x + 2} = 3 \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota oblicua: } y = x + 3.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - x - 3 < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x - 3 > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

070 Calcula las asíntotas oblicuas de las funciones y su posición relativa respecto de ellas.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{2 + x}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 4}{x^2 - x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 4}{x - 1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 + 2x}{x - 1} = 2 \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota oblicua: } y = 2x + 2.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - 2x - 2 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x - 2 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 4}{2x + x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 4}{2 + x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 - 4x}{x - 1} = -4 \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota oblicua: } y = 2x - 4.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - 2x + 4 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x + 4 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

071 Determina todas las asíntotas de las funciones, y sitúa sus ramas infinitas.

a) $f(x) = \dfrac{2 - 6x}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x - 5}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-6x}{x+3} \to \dfrac{20}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2-6x}{x+3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2-6x}{x+3} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -3.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-6x}{x+3} = -6 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = -6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) > -6$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000 \to f(x) < -6$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} \to \dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2x}{x^2+x} = 3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2+2x}{x+1} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{La función tiene una asíntota} \\ \text{oblicua: } y = 3x - 1.\end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - 3x + 1 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 3x + 1 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4x^3}{x-5} \to \dfrac{500}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{4x^3}{x-5} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{4x^3}{x-5} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 5.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3}{x-5} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3}{x^2-5x} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{x-1} \to \dfrac{3}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} \to \dfrac{8}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} \to \dfrac{27}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 3.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-5x+6} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3-5x^2+6x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-5x+6} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-6x}{x^2-5x+6} = 5 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{La función tiene una} \\ \text{asíntota oblicua:} \\ y = x + 5.\end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - x - 5 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x - 5 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

f) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0 \rightarrow \text{La función tiene una asíntota horizontal: } y = 0.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

072 ●●● **Obtén todas las ramas infinitas y las asíntotas de las funciones, y decide la posición que tienen entre sí.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{2}{5}\right\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

Las dos ramas infinitas de la función tienden a $+\infty$.

$$\lim_{x \to \frac{2}{5}} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{-1{,}736}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{5}^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{5}^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \frac{2}{5}.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\frac{1}{5} \to \text{La función tiene una asíntota horizontal: } y = -\frac{1}{5}.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) < -\frac{1}{5}$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) > -\frac{1}{5}$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \to \frac{7}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-2^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-2^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \to \frac{-5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^3 - 8x} = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x + 1}{2x^2 - 8} = 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{La función tiene} \\ \text{una asíntota oblicua:} \\ y = \dfrac{1}{2}x.\end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

c) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^3 + 8x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8} - \dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-11x + 1}{2x^2 + 8} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

La función tiene una asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$\lim_{x\to-4} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} \rightarrow \frac{-35}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-4^-} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-4^+} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -4.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

073 ●●● **Halla las asíntotas de estas funciones, y la posición de las ramas infinitas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12 - 8}{x^2 + x - 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x - 2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} \rightarrow \frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3}=+\infty \to$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+3x}=+\infty \to$$ La función no tiene asíntota oblicua.

b) Dom $f=\mathbb{R}-\{-3, 2\}$

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}\to\frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-3^-}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-3^+}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=+\infty\end{array}\right\}\to$$ La función tiene una asíntota vertical en $x=-3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-4x+4)}{(x-2)(x+3)}=0$$

$\to$ La función no tiene asíntota vertical en $x=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=+\infty \to$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3+x^2-6x}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^2+18x-8}{x^2+x-6}=-7\end{array}\right\}$$

$\to$ La función tiene una asíntota oblicua: $y=x-7$.

Si $x=1.000$, $f(x)-x+7>0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x=-1.000$, $f(x)-x+7<0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

c) Dom $f=\mathbb{R}-\{2\}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-4x+4)}{x-2}=0\to$$ La función no tiene asíntota vertical en $x=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}=+\infty \to$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-2x}=+\infty \to$$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \to \frac{-64}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical}$$

en $x = -2$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+2)} = 0 \to \text{La función}$$

no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 4x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 16x - 8}{x^2 - 4} = -6 \end{array}\right\}$$

$\to$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x + 6 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x + 6 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2} = 0 \to \text{La función no tiene asíntota}$$

vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2 + 8x - 8}{x^2 - 4x + 4} = -2 \end{array}\right\} \to \text{La función}$$

tiene una asíntota oblicua: $y = x - 2$.

$f(x) - x + 2 = 0 \to$ La expresión de la función coincide con la ecuación de la asíntota salvo en $x = 2$.

f) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + 4x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x^2 + 8x - 8}{x^2 + 4} = -6 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x + 6 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x + 6 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

074 ●●○ **Calcula las ramas infinitas y asíntotas de las funciones.**

a) $y = x^2 + 5x - 1$ b) $y = 2^x - 1$ c) $y = \log x$ d) $y = tg\, x$

a) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 5x - 1) = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

b) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} (2^x - 1) = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 1}{x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

c) Dom $f = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

La rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\, x \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg\, x = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \frac{\pi}{2}.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos que no pertenecen al dominio son asíntotas del mismo tipo.

Por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

075 Encuentra las asíntotas de las funciones.

a) $y = \dfrac{|2x-3|}{x}$ b) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x} & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-2x+3}{x} & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x+3}{x} \to \dfrac{3}{0}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-2x+3}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2x+3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{x} = 2 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 2$.

Si $x = 1.000$, $f(x) < 2$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+3}{x} = -2 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = -2$.

Si $x = -1.000$, $f(x) < -2$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

b) Dom $f = (-2, 2)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

La rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

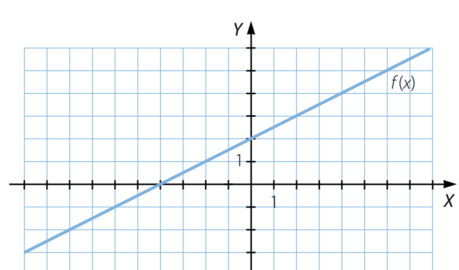
La rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

Dado el dominio de la función, no tienen sentido los límites en el infinito, y la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

076 Observa la gráfica de la función y determina estos límites.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Estudia la continuidad de la función $f(x)$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 3} f(x) = 3,5$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

La función es continua salvo en $x = 2$, ya que no existe $f(2)$.

077 **Completa la tabla para la función.**

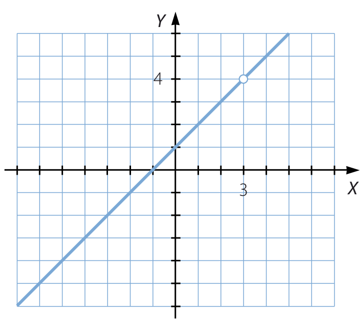
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

Comprueba que su límite, cuando x tiende a 3, es: $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

¿Cuánto vale $f(3)$? Haz una representación de la función.
¿Qué diferencia hay entre las gráficas de $f(x)$ y de $y = x + 1$?

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

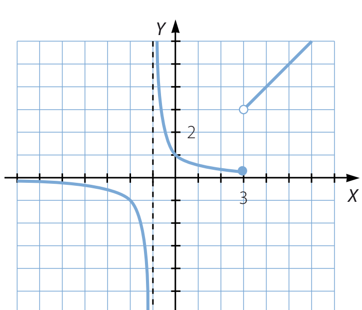
No existe $f(3)$.



La gráfica de $f(x)$ coincide con la gráfica de la recta $y = x + 1$, salvo en el punto $x = 3$.

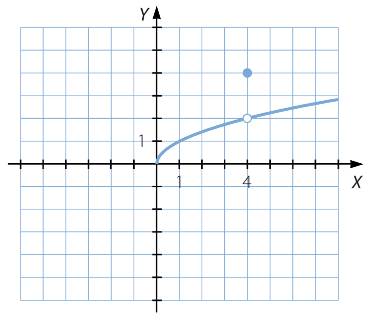
078 **Dibuja una función que sea continua, salvo en $x = -1$, que tenga un salto infinito y que tenga en $x = 3$ un salto finito.**

Respuesta abierta.



079 Dibuja una función cuyo domino sea $[0, +\infty)$, y que presente un punto de discontinuidad evitable en $x = 4$.

Respuesta abierta.



080 Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 12}$

c) $y = \sqrt{4+x}$

d) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

e) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12}$

f) $y = \sqrt{x-5}$

g) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

h) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x}{x+3} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -3} f(x), \text{ y } x = -3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) $\text{Dom } f = [-4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

d) $\text{Dom } f = [-4, 1] \to$ No hay puntos de discontinuidad.

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x), \text{ y } x = 3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} \to \frac{6}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 4} f(x) \text{, y } x = 4 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

f) Dom $f = [5, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

g) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

h) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

081 **Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.**

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{si } x < 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \\ sen\,(x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

a) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+3) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

b) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x-1} = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x) \text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

c) $f(3) = -2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \big(\ln(x-2)\big) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} sen\,(x-3) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 3} f(x) = 0$$

Como $f(3) \neq \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

d) $f(3) = -12$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-15) = -12\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)\text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

Como $f(3) \neq \lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

082 ¿Qué valor debe tomar *a* para que las funciones sean continuas?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ -2x-7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq -2 \\ ax-2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} tg\,\dfrac{-\pi}{2x} & \text{si } x \leq -2 \\ \log(ax+7) & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = a$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3}{x+1} = -3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-2x-7) = -3\end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

La función es continua si $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) \to a = -3$.

b) $f(-2) = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2^{x-1} = \dfrac{1}{8} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax-2) = -2a-2\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } \frac{1}{8} = -2a-2 \to a = -\frac{17}{16}$$

c) $f(-2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} tg\,\dfrac{-\pi}{2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \log(ax+7) = \log(-2a+7)\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } 1 = \log(-2a+7) \to a = -\frac{3}{2}$$

083 ●●○ **Razona si la siguiente función es continua en $x = 3$ y en $x = 0$.**

$$y = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ \dfrac{12}{x} + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$f(3) = 7$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x} + 3 = 7 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2^x - 1) = 7 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to 3} f(x)$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{12}{x} + 3\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{12}{x} + 3\right) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

084 ●●○ **Estudia la continuidad en todo el dominio de las funciones.**
Determina los puntos de discontinuidad que presenta cada una de ellas.

a) $y = sen\,(x + \pi)$

b) $y = \ln\,(x + e)$

c) $y = tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 2^{x-3}$

a) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

b) Dom $f = (-e, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to \pi} f(x), \text{ la función no es continua en } x = \pi.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos en los que falla el dominio son puntos de discontinuidad inevitable de salto infinito.

d) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

085 Investiga si las funciones son continuas.

a) $f(x)=\begin{cases}\log(x+7) & \text{si } x<3\\ 1 & \text{si } x=3\\ \dfrac{5}{x+2} & \text{si } x>3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}} & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } x=-1\\ x+1 & \text{si } x>-1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2-x} & \text{si } x<1\\ 5 & \text{si } x=1\\ 2^{x+1}+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

a) Si $x<3$: $f(x)=\log(x+7)\rightarrow \text{Dom } f=(-7,3)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x=3$: $f(3)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\log(x+7)\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{5}{x+2}=1\end{array}\right\}\rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$$

Como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función es continua en $x=3$.

Si $x>3$: $f(x)=\dfrac{5}{x+2}\rightarrow \text{Dom } f=(3,+\infty)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $(-7,+\infty)$.

b) Si $x<-1$: $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}}\rightarrow \text{Dom } f=\left[-\dfrac{5}{3},-1\right)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x=-1$: $f(-1)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}}=1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0\end{array}\right\}\rightarrow$$

No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, y la función no es continua en $x=-1$. Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

Si $x>-1$: $f(x)=x+1\rightarrow \text{Dom } f=(-1,+\infty)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $\left[-\dfrac{5}{3},-1\right)\cup(-1,+\infty)$.

c) Si $x < 1$: $f(x) = \dfrac{5}{2-x} \rightarrow$ Dom $f = (-\infty, 1) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x = 1$: $f(1) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{5}{2-x} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2^{x+1} + 1) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

Si $x > 1$: $f(x) = 2^{x+1} + 1 \rightarrow$ Dom $f = (1, +\infty) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

086 ●●○ **Estudia la continuidad de la siguiente función.**

$$g(t) = \begin{cases} \log(t+7) & \text{si } t < 3 \\ 2 & \text{si } t = 3 \\ \dfrac{4}{7-t} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Si presenta puntos de discontinuidad, estudia el límite cuando *t* tiende a ellos y decide qué tipos de discontinuidades son.

Si $t < 3$: $g(x) = \log(t+7) \rightarrow$ Dom $f = (-7, 3) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $t = 3$: $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 3^-} g(t) = \lim\limits_{t\to 3^-} \log(t+7) = 1 \\ \lim\limits_{t\to 3^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 3^+} \dfrac{4}{7-t} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{t\to 3} g(t) = 1$$

Como $g(3) = \lim\limits_{t\to 3} g(t)$, la función es continua en $t = 3$.

Si $t > 3$: $g(t) = \dfrac{4}{7-t} \rightarrow$ Dom $f = (3, +\infty) - \{7\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 7^-} g(t) = \lim\limits_{t\to 7^-} \dfrac{4}{7-t} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to 7^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 7^+} \dfrac{4}{7-t} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{t\to 7} g(t) \text{ y la función no es continua en } t = 7.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $(-7, 7) \cup (7, +\infty)$.

087 ●●● **Estudia la continuidad de las funciones.**

a) $y = [x]$ (Parte entera de x)

b) $y = \dfrac{x}{|x|}$

c) $y = |x^2 - 1|$

d) $y = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

a) La función es continua salvo en los números enteros.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to a} f(x).$$

Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x) \text{, y la función no es continua en } x = 0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Si $x = -1$: $f(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$$

Como $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, la función es continua en $x = -1$.

Si $x = 1$: $f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \dfrac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

No existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

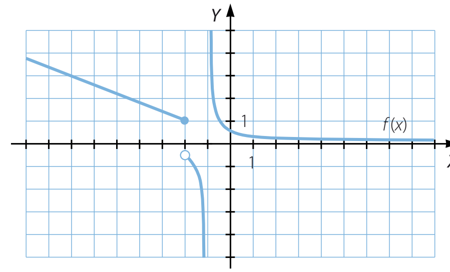
088 Observa la gráfica de la función y determina los límites que se indican.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe.

089 Calcula los límites indicados en la función definida a trozos.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 5x + 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 5x + 1) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (3x^2 - 5x + 6) = 14$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 5x + 6) = +\infty$

090 Calcula $\lim\limits_{x \to 3} (f \circ g)$, siendo las funciones:

$$g(x) = x + 2 \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \frac{(x+2)^2 - 1}{2(x+2)^2 - 10(x+2)} = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12}$$

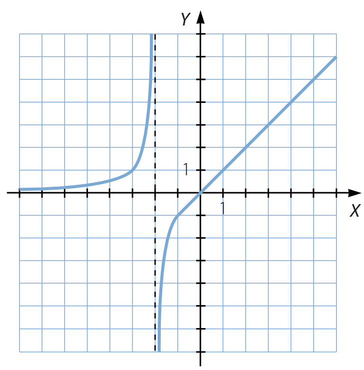
$$\lim_{x \to 3}\big(f \circ g(x)\big) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} \to \frac{24}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite.}$$

091 Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

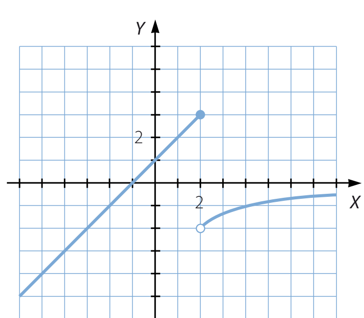
Respuesta abierta.



092 Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \to 2^+} g(x) = -2$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

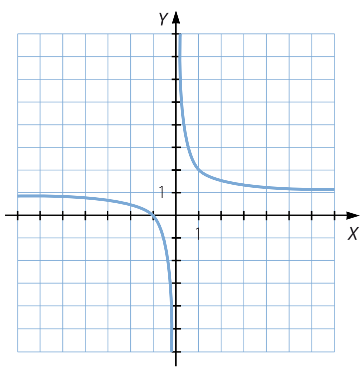
Respuesta abierta.



093 Construye la gráfica aproximada de una función que cumpla estas condiciones.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

Respuesta abierta.



094 Representa tres funciones que cumplan que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ y cada una de estas condiciones.

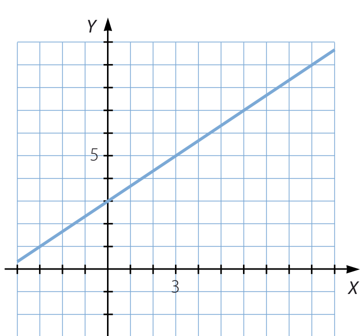
a) $f(3) = 5$

b) $f(3)$ no existe.

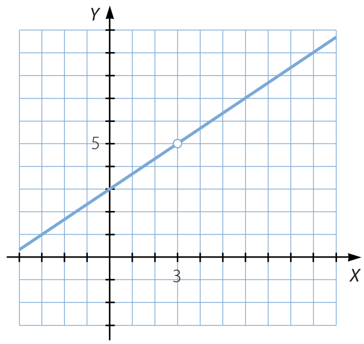
c) $f(3) = 2$

Respuesta abierta.

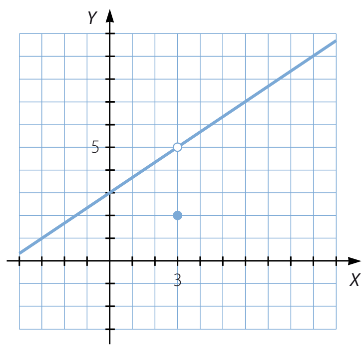
a)



b)



c)



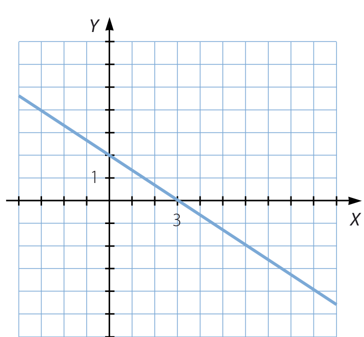
095

Dibuja una función continua que cumpla que $f(x)$ es negativa si $x > 3$ y es positiva si $x < 3$.

a) ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$? ¿Y $f(3)$?

b) ¿Hay un posible resultado? Razona la respuesta.

Respuesta abierta.



a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$f(3) = 0$

b) Sí, porque si la función es continua tiene que verificarse que: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

096 ●●○ **Halla las asíntotas de estas funciones.**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

Razona las diferencias entre ambas funciones.

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \to \frac{9}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \to \frac{0}{0}$$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = 0 \to$ La función no tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = 1 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Dom $g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} \to \frac{16}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = 1 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen distintas asíntotas verticales, porque los valores que anulan el denominador en cada una de ellas son diferentes.

097 Escribe una función racional para cada caso.

a) Que tenga $x = 2$ y $x = -3$ como únicas asíntotas.

b) Sus únicas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

c) Sus asíntotas son $x = 4$ e $y = 2x - 1$.

Respuesta abierta.

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-2)(x+3)}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x}{x-4}$

098 Calcula el valor de a para que el límite tenga valor finito: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{x-1} - ax$.
Con ese valor de a, halla b para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax - b = 0$$

¿Qué relación existe entre la función $y = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$ y la recta $y = ax + b$?

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x-1} - ax\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3-ax^2+ax}{x-1}$$

El límite tiene valor finito si el grado del numerador es menor o igual que el denominador, por lo que $a = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x-1} - 2x - b\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+2x-bx+1}{x-1} = 2 - b = 0 \to b = 2$$

La recta $y = 2x + 2$ es la asíntota oblicua de la función $y = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$.

099 Se ha estimado que la población de zorros en una finca se rige por la fórmula $z = 100\,\dfrac{6t^2+3}{2+t^2}$, donde z representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.
El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros seis meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(100\cdot\frac{6t^2+3}{2+t^2}\right) = 600$$

La población de zorros tenderá a estabilizarse.

Límite de una función

100 ●●●

La famosa fórmula $M = \dfrac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa M de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s).

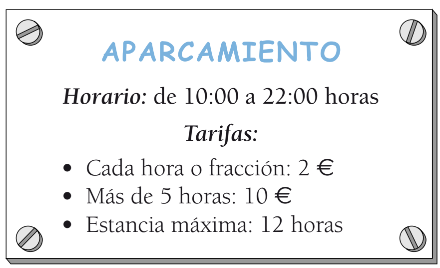
Calcula el límite de la masa M cuando v tiende a c. A la vista de ese resultado, ¿crees que un cuerpo puede alcanzar esa velocidad?

$$\lim_{v \to c} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty$$

Para que la velocidad llegara a ser la de la luz el cuerpo debería tener una masa infinita.

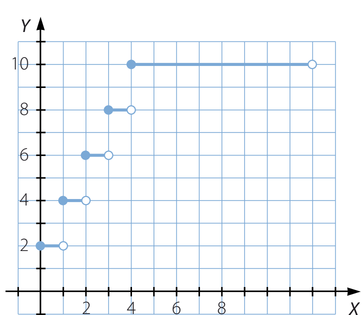
101 ●●●

Representa mediante una función definida a trozos la tarifa de un aparcamiento.



a) Estudia su continuidad.

b) Clasifica los puntos de discontinuidad, si los tuviera.



a) La función no es continua en:

$x = 10$

$x = 11$

$x = 12$

$x = 13$

$x = 14$

b) Los puntos son de discontinuidad inevitable de salto finito.

PARA FINALIZAR…

102 **Calcula el valor de k para que el siguiente límite sea un número real: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+kx+2}{x^2-4}$**

Para el valor de k obtenido, ¿cuánto vale el límite?

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+kx+2}{x^2-4} \to \frac{2k+6}{0}$$

Si $k=-3$, entonces la indeterminación es: $\dfrac{0}{0}$

Así, el límite vale: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{4}$

103 **Calcula los límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sen\,\dfrac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \cdot cos\ x$

Aunque no sepamos el valor que toman el seno y el coseno de un ángulo cuando el ángulo tiende a infinito, sí sabemos que es una cantidad acotada, pues tanto el seno como el coseno de un ángulo tienen un valor comprendido en $[-1, 1]$, y al multiplicar por cero una cantidad acotada, el resultado es cero.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sen\,\dfrac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot cos\ x = 0$

104 **¿Qué ocurrirá con las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ si el coeficiente a tiende a cero y los coeficientes b y c son constantes, siendo $b \neq 0$?**

Las soluciones de la ecuación son de la forma: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\lim_{a\to 0} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{a\to 0} \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to \frac{-2b}{0} \to \infty$$

$$\lim_{a\to 0} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)} =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = -\frac{c}{b}$$

105 **Comprueba que $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ no existe.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

106 **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 0 \\ 5^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 5^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 2^x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} x^2 \cdot sen\,\dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 2^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 5^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2^x = 1 \end{array}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x} \right) = 0$$

Al ser $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, la función es continua en $x = 0$.

Así, la función es continua en $\mathbb{R}$.

107 **Demuestra que la recta de ecuación $y = \dfrac{b}{a}x$ es una asíntota de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \to y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$\to y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

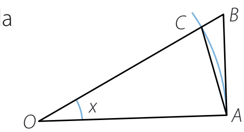
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right) = 0$$

108 **Si medimos el ángulo x en radianes, demuestra que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$.**

Si el ángulo x se mide en grados sexagesimales, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{\pi}{180}$.

Como la medida de la longitud del arco está comprendida entre la longitud de los segmentos AC y AB, entonces el área del sector circular está comprendida entre el área de los triángulos.



Área de $\widehat{OAC}$ < Área de sector < Área $\widehat{OAB}$

$$\frac{R \cdot R \text{ sen } x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{R \cdot R \text{ tg } x}{2}$$

$$\frac{R^2 \text{ sen } x}{2} < R^2 \cdot \frac{x}{2} < \frac{R^2 \text{ tg } x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\dfrac{R^2}{2}$: $\text{sen } x < x < \text{tg } x$

Dividimos entre *sen x*: $\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \dfrac{x}{\text{sen } x} < \dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } x}$

$$\to \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \to 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Hacemos límites con $x \to 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} 1 > \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} > \lim\limits_{x\to 0} \cos x \to 1 > \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} > 1 \to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Si x viene medido en grados:

$$\frac{R \cdot R \text{ sen } x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{360} < \frac{R \cdot R \text{ tg } x}{2} \to \frac{R^2 \text{ sen } x}{2} < \frac{\pi R^2}{360} \cdot x < \frac{R^2 \text{ tg } x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\dfrac{R^2}{2}$: $\text{sen } x < \dfrac{\pi}{180} \cdot x < \text{tg } x$

Dividimos entre *sen x*:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} \to 1 < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\to 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Hacemos límites con $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} 1 > \lim_{x\to 0} \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x \to 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > 1$$

$$\to \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Y despejando, resulta que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{\pi}{180}$

10 Derivada de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La ciudad Rosa y Roja

Aquella princesa de largos y dorados cabellos estaba alarmada al observar que cada día muchos se quedaban enredados en su peine. Pero, para su tranquilidad, la cuenta se mantenía siempre alrededor de los ciento cincuenta mil cabellos, pese a que se le caían unos cincuenta diarios, por lo que no parecía probable que fuera a perder su dorado atributo.

Llegado el momento de tomar esposo, la princesa declaró que sólo se casaría con quien adivinara la longitud de su cabellera. Eran datos sobradamente conocidos el número de sus cabellos y los que perdía diariamente, así como el hecho de que nunca se los cortaba, ya que la augusta melena era uno de los temas de conversación más frecuentes en palacio. Así que el astrónomo real, que la amaba en silencio, se presentó ante la princesa (que para confundir a sus pretendientes se recogía el pelo en un enorme moño) y le dijo:

–Si tenéis ciento cincuenta mil cabellos y se os caen unos cincuenta diarios, dentro de tres mil días se habrán caído todos los que ahora adornan vuestra cabeza (aunque, naturalmente, para entonces tendréis otros ciento cincuenta mil, que os habrán ido saliendo al mismo ritmo que se os caen, puesto que la cuenta diaria demuestra que el número de vuestros cabellos permanece constante). Lógicamente, los últimos en caer serán los que hoy mismo os han salido, lo que equivale a decir que la vida media de un cabello es de tres mil días. Puesto que el cabello humano (incluso el principesco) crece a razón de un centímetro al mes, y tres mil días son cien meses, vuestra cabellera debe medir en su punto de máxima longitud (ya que en realidad tenéis cabellos de todas las medidas) aproximadamente un metro.

La princesa se casó con el astrónomo, que, acostumbrado a contar las estrellas, pasó a ocuparse personalmente del cómputo de los cabellos, uniendo al rigor del científico la solicitud del esposo.

CARLO FRABETTI

**Al suponer que la «velocidad» de crecimiento del cabello es constante: 1 cm/mes, la función que relaciona la longitud, en cm, del cabello (l) y el tiempo, en meses, transcurrido (t) es $l = t$. Si la velocidad de crecimiento fuera de 2 cm/mes, la fórmula sería $l = 2t$.
Pero esta velocidad no es siempre constante. Imagina que, por efecto de un *crecepelo*, la relación entre la longitud y el tiempo viene expresada por la fórmula $l = 3\sqrt{t}$. Determina la velocidad de crecimiento entre los meses 2.° y 7.°, 2.° y 6.°, 2.° y 4.°. ¿Es constante?**

$$\frac{l(7) - l(2)}{7 - 2} = \frac{3\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}{5} = 0{,}73$$

$$\frac{l(6) - l(2)}{6 - 2} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4} = 0{,}77$$

$$\frac{l(4) - l(2)}{4 - 2} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} = 0{,}87$$

La velocidad de crecimiento no es constante.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Determina cuáles de estos vectores son paralelos y cuáles son perpendiculares a $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) $\vec{v}_1 = (-6, 3)$
b) $\vec{v}_2 = (-2, -4)$
c) $\vec{v}_3 = (8, -4)$

a) $\vec{v}_1 = 3\vec{v} \rightarrow$ Los vectores son paralelos.
b) $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow$ Los vectores son perpendiculares.
c) $\vec{v}_3 = -4\vec{v} \rightarrow$ Los vectores son paralelos.

002 El ángulo que forma una recta con el eje de abscisas, ¿puede medir más de 180°? ¿Por qué?

No, porque si la inclinación de la recta sobrepasa la inclinación del eje, la semirrecta que queda por encima del mismo determina el ángulo menor de 180° que hay que considerar para calcular la pendiente.

003 Calcula la ecuación punto-pendiente de una recta que pasa por el punto $A(-3, 6)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (2, -4)$.

$y - 6 = -2(x + 3)$

004 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = -\dfrac{5}{x-1}$
b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
c) $h(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.
b) $g(x)$ es continua en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
c) $h(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

005 Dadas las funciones $f(x) = (2x - 1)^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, calcula $(g \circ f)(2)$ y $(f \circ g)(2)$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(2x-1)^2] = \sqrt{(2x-1)^2 - 2} = \sqrt{4x^2 - 4x - 1} \rightarrow (g \circ f)(2) = \sqrt{7}$
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(2\sqrt{x-2} - 1\right)^2 \rightarrow (f \circ g)(2) = 1$

006 Si la función $f(x)$ crece en el intervalo $(-10, -2)$ y decrece en el intervalo $(-2, 22)$, ¿qué ocurre en el punto $x = -2$?

En $x = -2$ la función presenta un máximo.

Derivada de una función

ACTIVIDADES

001 Halla la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x^3 + x$ en los siguientes intervalos.

a) [0, 1] b) [2, 3]

a) $T.V.M.\ ([0,\ 1]) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 0}{1} = 2$

$T.V.M.\ ([0,\ 1]) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 0}{1} = 2$

b) $T.V.M.\ ([2,\ 3]) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dfrac{12 - 6}{1} = 6$

$T.V.M.\ ([2,\ 3]) = \dfrac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \dfrac{30 - 10}{1} = 20$

002 La cotización de una acción sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana (0 = lunes, 1 = martes, …). Halla la tasa de variación media de esa cotización de lunes a viernes.

$T.V.M.\ ([0,\ 4]) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \dfrac{1{,}32 - 1}{4} = 0{,}08$

003 Calcula la derivada de estas funciones en $x = 1$.

a) $f(x) = 4x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4(1+h) + 2 - 6}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 + 4h - 4}{h} = 4$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - (1+h)^2}{h(1+h)^2} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - 1 - 2h - h^2}{h(1+h)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2 - h}{(1+h)^2} = -2$

004 Halla la derivada de las funciones en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (3 + 3h + h^2) = 3$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} \to$ No existe.

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \dfrac{1}{2}$

005 **Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+2-6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (4+h) = 4$$

La pendiente de la recta tangente es 4.

006 **¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = -1$?**

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3+1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1+3h-3h^2+h^3+1}{h} = \lim_{h\to 0} (3-3h+h^2) = 3$$

La pendiente de la recta tangente es 3.

007 **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto $P(-1, 2)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal?**

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-4h+2h^2-2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (-4+2h) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -4(x+1) \rightarrow y = -4x - 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = \frac{1}{4}(x+1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

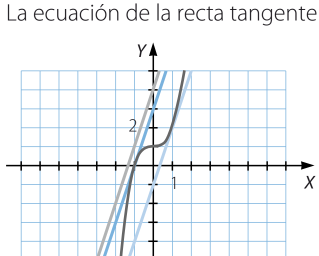
008 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Comprueba que son paralelas a la recta $y = 3x + 4$.**

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3+1-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3+3h+h^2) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 3(x-1) \rightarrow y = 3x - 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1+3h-3h^2+h^3+1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3-3h+h^2) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 3(x+1) \rightarrow y = 3x + 3$



009 Halla la función derivada de $f(x) = 4x + 2$, aplicando la definición de derivada de una función en un punto. A partir del resultado que has obtenido, calcula la derivada de $f(x)$ en estos puntos.

a) $x = 2$ b) $x = -7$

Comprueba que obtienes el mismo resultado que si utilizas la definición de derivada en un punto.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) + 2 - (4x+2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x + 4h - 4x}{h} = 4$$

a) $f'(2) = 4$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(2+h) + 2 - 10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = 4$$

b) $f'(7) = 4$

$$f'(7) = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(7+h) + 2 - 30}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{28 + 4h - 28}{h} = 4$$

010 ¿Cuál es la función derivada de estas funciones?

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2x^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

011 Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = 2x^3 + x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^3 + (x+h)^2 - (2x^3 + x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3 + 6hx^2 + 6h^2x + 2h^3 + x^2 + 2hx + h^2 - 2x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx^2 + 6h^2x + 2h^3 + 2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6x^2 + 6hx + 2h^2 + 2x + h) =$$

$$= 6x^2 + 2x$$

012 Calcula la derivada de estas funciones, y comprueba que se cumple que el resultado es igual a la suma de las derivadas de las funciones que las forman.

a) $f(x) = 7x + 2x^2$ b) $f(x) = x^{-2} + 3x$

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{7(x+h) + 2(x+h)^2 - (7x + 2x^2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{7x + 7h + 2x^2 + 4hx + 2h^2 - 7x - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{7h + 4hx + 2h^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (7 + 4x + 2h) = 7 + 4x$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{7(x+h) - 7x}{h} + \lim_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{7x + 7h - 7x}{h} +$

$+ \lim_{h\to 0} \dfrac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2}{h} = 7 + \lim_{h\to 0} (4x + 2h) = 7 + 4x$

b) $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-2} + 3(x+h) - (x^{-2} + 3x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} + 3x + 3h - \dfrac{1}{x^2} - 3x}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 3hx^4 + 6h^2x^3 + 3h^2x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{3x^4 + 6hx^3 + 3hx^2 - 2x - h}{(x+h)^2x^2} = \dfrac{3x^4 - 2x}{x^4} = \dfrac{3x^3 - 2}{x^3}$

$g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h} + \lim_{h\to 0} \dfrac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} +$

$+ \lim_{h\to 0} \dfrac{3x + 3h - 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} + 3 =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{-2x - h}{h(x+h)^2x^2} + 3 = \dfrac{-2x}{x^4} + 3 = \dfrac{3x^3 - 2}{x^3}$

013 **Halla la derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición de derivada del producto de un número por una función.**

a) $f(x) = 8x^3$ b) $f(x) = 4\sqrt{x}$ c) $f(x) = -5x^2$

a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$

$f'(x) = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$

b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

$f'(x) = -5 \cdot 2x = -10x$

014 **Calcula el producto de las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 1$, y después halla su derivada. Comprueba que el resultado es el mismo que si aplicamos la fórmula de la derivada del producto de funciones.**

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - 4(x+h) - 4 - (x^3 + x^2 - 4x - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 + x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h - 4 - x^3 - x^2 + 4x + 4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h - 4) =$$

$$= 3x^2 + 2x - 4$$

Aplicando la fórmula: $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h} \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) + 1 - (x+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot 1 = 2x(x+1) + x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 4$$

015 **Halla las derivadas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x + 5$. ¿Cuál es la derivada del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$? ¿Y la derivada del cociente $\frac{g(x)}{f(x)}$?**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) + 5 - (-x + 5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x - h + x}{h} = -1$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{2x \cdot (-x + 5) - (x^2 + 1)(-1)}{(-x + 5)^2} = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(-x + 5)^2}$$

$$\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{(-1)(x^2 + 1) - (-x + 5) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 10x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

016 **Calcula la derivada de esta función, indicando los pasos que sigues para hallarla.**

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Se aplica la derivada de la suma de funciones, la derivada de la función potencial ($n = 2$), la derivada del producto de un número por una función y la derivada de la función identidad: $f'(x) = 2x^{2-1} + 2 \cdot 1 = 2x + 2$

017 **Halla la derivada de la siguiente función: $f(x) = \frac{x - 3}{2x^5}$**

Se aplica la derivada del cociente de funciones. Para derivar la función del numerador se usa la derivada de la suma de funciones, la derivada de la función identidad y la derivada de la función constante. Para obtener la derivada del denominador se aplica la derivada del producto de un número por una función y la derivada de la función potencial ($n = 5$):

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2x^5 - (x - 3) \cdot 2 \cdot 5x^4}{(2x^5)^2} = \frac{-8x^5 + 30x^4}{4x^{10}} = \frac{-4x + 15}{2x^6}$$

018 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\,sen\,x + 3\,cos\,x$ b) $f(x) = (5x^2 \cdot sen\,x) + (x \cdot cos\,x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot cos\,x + 3 \cdot (-sen\,x) = 5\,cos\,x - 3\,sen\,x$

b) $f'(x) = (5 \cdot 2x \cdot sen\,x + 5x^2 \cdot cos\,x) + (1 \cdot cos\,x + x \cdot (-sen\,x)) =$
$= 10x\,sen\,x + 5x^2\,cos\,x + cos\,x - x\,sen\,x$

019 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \cdot tg\,x$ b) $f(x) = 3x^2 - arc\,sen\,x$

a) $f'(x) = e^x \cdot tg\,x + e^x \cdot (1 + tg^2\,x) = e^x\,(1 + tg\,x + tg^2\,x)$

b) $f'(x) = 6x - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

020 Halla la derivada de estas funciones aplicando la regla de la cadena.

a) $f(x) = \ln\,(cos\,x)$ c) $f(x) = (x^4 + 2)^9$

b) $f(x) = cos\,(\ln x)$ d) $f(x) = x\sqrt{2x^3 + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{cos\ x} \cdot (-sen\ x) = -tg\ x$

b) $f'(x) = -sen\ (\ln\ x) \cdot \dfrac{1}{x}$

c) $f'(x) = 9(x^4 + 2)^8 \cdot 4x^3 = 36x^3(x^4 + 2)^8$

d) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x^3 + 1} + x \cdot \dfrac{1}{2}(2x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x^2 =$
$= \sqrt{2x^3 + 1} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{2x^3 + 1}} = \dfrac{5x^3 + 1}{\sqrt{2x^3 + 1}}$

021 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = sen\,\sqrt{x^2 + 3x}$ c) $f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

b) $f(x) = 3\,sen\,x^2 + 2\,sen^2\,x$ d) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

a) $f'(x) = cos\,\sqrt{x^2 + 3x} \cdot \dfrac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3) = \dfrac{(2x + 3)\,cos\,\sqrt{x^2 + 3x}}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$

b) $f'(x) = 3 \cdot cos\ x^2 \cdot 2x + 2 \cdot 2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x = 6x \cdot cos\ x^2 + 4 \cdot sen\ x\ cos\ x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1 + x}{1 - x}} \cdot \dfrac{1 \cdot (1 - x) - (1 + x) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \dfrac{2}{1 - x^2}$

$f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot 2(\sqrt{x} + 1) \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

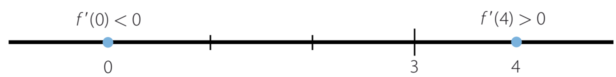
022 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = 8x + x^2$

a) $f'(x) = 2x - 6$

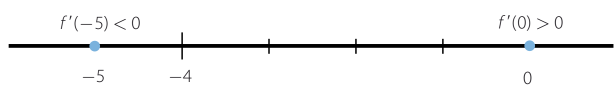
$2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$



La función es decreciente en $(-\infty, 3)$ y es creciente en $(3, +\infty)$.

b) $f'(x) = 8 + 2x$

$8 + 2x = 0 \rightarrow x = -4$



La función es decreciente en $(-\infty, -4)$ y es creciente en $(-4, +\infty)$.

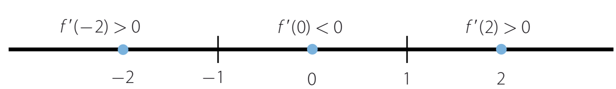
023 Determina los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = 2 - x$

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es decreciente en $(-1, 1)$.

Presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

b) $f'(x) = -1 < 0$

La función es decreciente en $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

024 Calcula los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 2}$

c) $f(x) = x^3 - 12x$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

a) $f'(x) = 4x^3 - 8x$

$4x^3 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$f''(x) = 12x^2 - 8$

$f''\left(-\sqrt{2}\right) = 16 > 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{2}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -8 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

$f''\left(\sqrt{2}\right) = 16 > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{2}$ tiene un mínimo.

b) $f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2 + 2)^2}$

$\dfrac{-16x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{-16(x^2 + 2)^2 + 16x \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4} = \dfrac{48x^2 - 32}{(x^2 + 2)^3}$

$f''(0) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = -12 < 0 \rightarrow$ En $x = -2$ tiene un máximo.

$f''(2) = 12 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^3 + 1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \dfrac{-x^4 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$

$\dfrac{-x^4 + 2x}{(x^3 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^4 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{(-4x^3 + 2)(x^3 + 1)^2 - (-x^4 + 2x) \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \dfrac{2x^6 - 14x^3 + 2}{(x^3 + 1)^3}$

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un mínimo.

$f''\left(\sqrt[3]{2}\right) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt[3]{2}$ tiene un máximo.

025 **Si la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto (1, 5), determina los valores de a y b. ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?**

$f'(x) = 3x^2 + a$

Si la función tiene un mínimo en $x = 1$: $f'(1) = 0 \rightarrow 3 + a = 0 \rightarrow a = -3$

Como el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de la función $f(x)$, se verifica que: $f(1) = 5$

Al ser $f(x) = x^3 - 3x + b$, se tiene que: $1 - 3 + b = 5 \rightarrow b = 7$

Por tanto, la expresión de la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ tiene un máximo.

026 **Halla los máximos y mínimos de $f(x) = sen^2\, x$ en $[0, 2\pi]$.**

$f'(x) = 2\ sen\ x\ cos\ x$

$$2\ sen\ x\ cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \\ cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$f''(x) = 2(cos^2\ x - sen^2\ x)$

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un mínimo.

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{\pi}{2}$ tiene un máximo.

$f''(\pi) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = \pi$ tiene un mínimo.

$f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{3\pi}{2}$ tiene un máximo.

027 **Representa estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

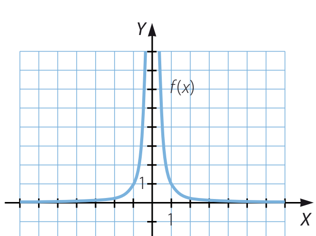
No hay puntos de corte con los ejes.

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

Si $x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

Si $x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} \to \dfrac{1}{0}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} \to \dfrac{2}{0}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \end{array}\right\}$

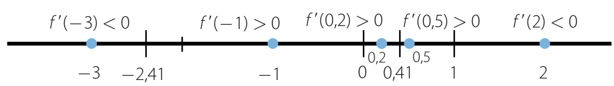
$x = 0$ es una asíntota vertical. $\qquad$ $x = 1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1 \to y = 1$ es una asíntota horizontal.

No hay puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - x) - (x^2+1) \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

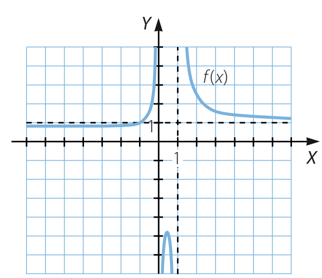
$$\frac{-x^2-2x+1}{(x^2-x)^2} = 0 \to -x^2-2x+1 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -2{,}41) \cup (0{,}41; 1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-2{,}41; 0) \cup (0; 0{,}41)$

Mínimo: $(-2{,}41; 0{,}82)$

Máximo: $(0{,}41; -4{,}82)$

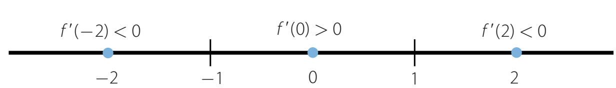


c) Dom $f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+x+1} = 0 \to y = 0$ es una asíntota horizontal.

Punto de corte: $(0, 0)$

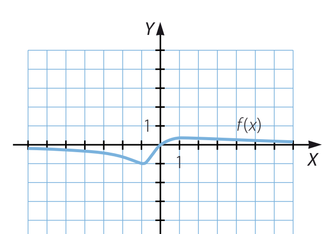
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} = 0 \to 1 - x^2 = 0 \to x = \pm 1$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 1)$.

Mínimo: $(-1, -1)$

Máximo: $(1; 0{,}33)$



d) Dom $f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2 + 3} = 0 \rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

No hay puntos de corte con los ejes.

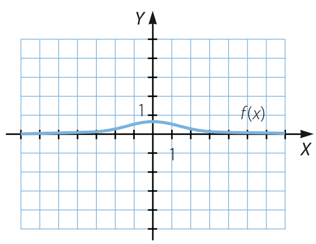
$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$-\frac{4x}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Si $x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

Si $x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

Máximo: (0; 0,66)



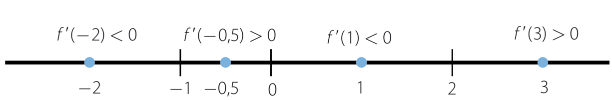
028 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$

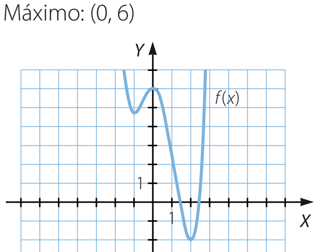
$$3x^3 - 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ y es creciente en $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

Mínimos: (−1; 4,75) y (2, −2)

Máximo: (0, 6)



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x - 1} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

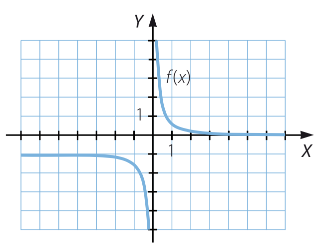
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \to y = -1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

No hay puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No hay máximos ni mínimos.



029 **Halla dos números naturales positivos cuya suma sea 60 y sabiendo que la suma de uno más el cuadrado del otro es la mayor posible.**

$x + y = 60 \to y = 60 - x$

$f(x) = 60 - x + x^2$

$f'(x) = -1 + 2x$

$$-1 + 2x = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -2 < 0 \to \text{En } x = \frac{1}{2} \text{ tiene un máximo.}$$

Los números son: $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{119}{2}$

030 **El área de un rectángulo es de 100 cm². Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?**

$$x \cdot y = 100 \rightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$$

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 200 = 0 \rightarrow x = \pm 10$$

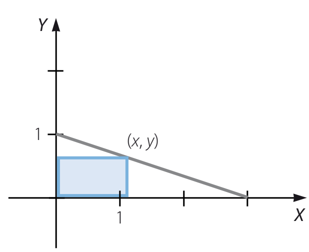
$$f''(x) = \frac{400}{x^3}$$

$f''(10) > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ tiene un mínimo.

Como el valor de x corresponde a la medida de un lado, no puede ser $x = -10$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $x = y = 10$ cm. Se trata de un cuadrado de 10 cm de lado.

031 **Una pieza con forma de triángulo rectángulo tiene un cateto cuya longitud es 1 m y el otro cateto mide 3 m. Determina el rectángulo de lados paralelos a los catetos y cuya área sea la mayor posible que se puede obtener de ella.**

Si el triángulo se apoya sobre los ejes de coordenadas, los vértices coinciden con los puntos (0, 0), (3, 0) y (0, 1).



Entonces el rectángulo de lados paralelos a los catetos tiene un vértice sobre la recta que contiene a la hipotenusa:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-1} \rightarrow x + 3y = 3$$

$$x = 3 - 3y$$

$$f(y) = (3 - 3y)y = 3y - 3y^2$$

$$f'(y) = 3 - 6y$$

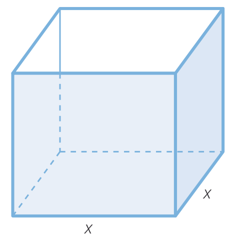
$$3 - 6y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$f''(y) = -6 < 0 \rightarrow$ En $y = \frac{1}{2}$ tiene un máximo.

$$x = 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Así, los lados del rectángulo miden $\frac{1}{2}$ m y $\frac{3}{2}$ m.

032 **Se han construido cajas de cartón, de base cuadrada y sin tapa, cuya capacidad es de 1 m³. Si queremos mantener el volumen, pero modificar la base, ¿cuáles serán sus dimensiones para minimizar el gasto de cartón empleado?**



$$x^2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$$

$$2x - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

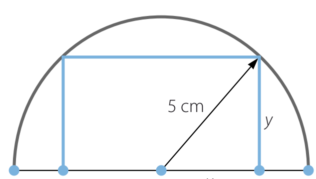
$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^3}$$

$f''\left(\sqrt[3]{2}\right) > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt[3]{2}$ tiene un mínimo.

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

La arista de la base mide $\sqrt[3]{2}$ m y la altura del ortoedro es $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ m.

033 **Sabemos que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia es el cuadrado. ¿Sucederá lo mismo si consideramos una semicircunferencia? Para comprobarlo, halla las dimensiones de un rectángulo de área máxima, inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, sabiendo que su base está situada sobre el diámetro.**



$$x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{25 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow 25 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{25 - x^2} - (25 - 2x^2)\dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}}{25 - x^2} = \frac{2x^3 - 75x}{(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$f''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \rightarrow$ En $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ tiene un máximo.

Como el valor de x corresponde a la medida de un lado, no puede ser $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$$y = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Se trata de un cuadrado cuyo lado mide $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm; por tanto, también se verifica en la semicircunferencia.

Derivada de una función

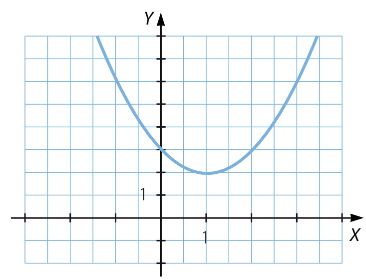
034 Determina la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 2x + 6$ en el intervalo [1, 3].

$$T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

035 ¿Cuál es la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{12}{x}$ en el intervalo [1, 4]?

$$T.V.M.\ ([1,\ 4]) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 12}{3} = -3$$

036 Calcula la tasa de variación media en los intervalos indicados para la siguiente función.



a) [1, 2]

b) [1, 3]

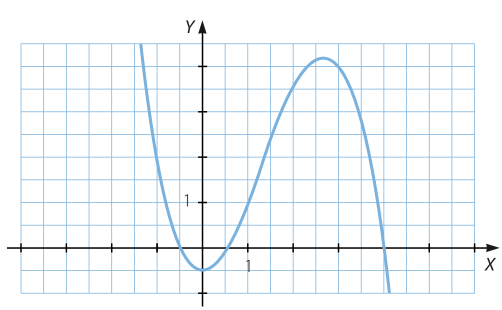
c) [2, 3]

a) $T.V.M.\ ([1,\ 2]) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{3 - 2}{1} = 1$

b) $T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{6 - 2}{2} = 2$

c) $T.V.M.\ ([2,\ 3]) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dfrac{6 - 3}{1} = 3$

037 Determina la tasa de variación media de esta función en cada uno de los intervalos.



a) [−1, 1] b) [1, 3] c) [−1, 3]

a) $T.V.M.\ ([-1,\ 1]) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{1 - 2}{2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{4 - 1}{2} = \dfrac{3}{2}$

c) $T.V.M.\ ([-1,\ 3]) = \dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \dfrac{4 - 2}{4} = \dfrac{1}{2}$

038 Halla la tasa de variación media de la función $y = 2x^2 - x$ en el intervalo $[2, 2 + h]$. Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media de la función en los siguientes intervalos.

a) [2, 3] b) [2, 5] c) [2, 8]

$$T.V.M.\ ([2,\ 2+h]) = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{2(2+h)^2 - (2+h) - 6}{h} =$$
$$= \frac{8 + 8h + 2h^2 - 2 - h - 6}{h} = 7 + 2h$$

a) $T.V.M.\ ([2, 3]) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$

b) $T.V.M.\ ([2, 5]) = 7 + 2 \cdot 3 = 13$

c) $T.V.M.([2, 8]) = 7 + 2 \cdot 6 = 19$

039 Calcula el valor de a de modo que la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x + ax - 5$ en el intervalo [0, 2] sea 1.

$$T.V.M.\ ([0,\ 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{4 + 2a - 5 - (-5)}{2} = \frac{4 + 2a}{2} = 2 + a = 1 \rightarrow a = -1$$

040 Encuentra dos funciones polinómicas de segundo grado que pasen por los puntos (0, 4) y (3, 10). Comprueba que la tasa de variación media en el intervalo [0, 3] es la misma para las dos funciones.

Respuesta abierta.

La función es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), se verifica que: $c = 4$

Al pasar también por el punto (3, 10), se cumple que: $9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$

Sean $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ las funciones pedidas.

$$T.V.M.\ ([0,\ 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3-0} = \frac{10-4}{3} = 2$$

$$T.V.M.\ ([0,\ 3]) = \frac{g(3) - g(0)}{3-0} = \frac{10-4}{3} = 2$$

041 ¿Por qué la tasa de variación media de la función $y = 2x - 3$ en cualquier intervalo es siempre 2?

Porque la gráfica de la función es una recta de pendiente 2, y esta indica su variación en cualquier intervalo.

042 El espacio recorrido por un objeto, en metros, se expresa con la fórmula: $e = 4t^2 + 2t + 1$

a) ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y 7 segundos?

a) A los 4 segundos: $e = 73$ m A los 7 segundos: $e = 211$ m

b) $T.V.M.\ ([4, 7]) = \dfrac{211 - 73}{7 - 4} = 46$ m/s

043 Aplica la definición de derivada en un punto para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.

a) $y = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $y = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $y = \dfrac{4x+3}{2}$ en $x = -1$

d) $y = \dfrac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $y = (x-1)^2$ en $x = -2$

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)-1-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6+3h-6}{h} = 3$$

b) $$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2+3+h-12}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2+h-9}{h} = \lim_{h\to 0} (7+h) = 7$$

c) $$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4(-1+h)+3}{2}+\dfrac{1}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4+4h+3+1}{2h} = 2$$

d) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{6}{1+h}-6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6-6-6h}{h(1+h)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6}{1+h} = -6$$

e) $$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h-1)^2-9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9-6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} (-6+h) = -6$$

044 Calcula, utilizando la definición de derivada en un punto, $f'(2)$ y $f'(0)$ para la siguiente función: $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2-(2+h)+3-9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8+8h+2h^2-2-h-6}{h} = \lim_{h\to 0} (7+2h) = 7$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2-h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0} (2h-1) = -1$$

045 Si $f(x) = \dfrac{x+6}{3}$, determina a partir de la definición de derivada en un punto las siguientes derivadas.

a) $f'(-3)$ b) $f'(2)$

a) $f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-3+h+6}{3} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h+3-3}{3h} = \dfrac{1}{3}$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2+h+6}{3} - \dfrac{8}{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h+8-8}{3h} = \dfrac{1}{3}$

046 Obtén la pendiente de la recta tangente a la función $y = 3x^2 + 2x$ en el punto de abscisa $x = 5$.

$f'(x) = 6x + 2 \rightarrow f'(5) = 32$

La pendiente de la recta tangente es 32.

047 Halla la derivada de la función $y = -t^2 + 2t$ en el punto $t = 8$.

$f'(t) = -2t + 2 \rightarrow f'(8) = -14$

048 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la expresión.

$$e = \frac{2}{3}t^2 + t$$

Calcula la velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos.

$f'(t) = \dfrac{4}{3}t + 1 \rightarrow f'(3) = 5$

La velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos es de 5 m/s.

049 Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2$ en el punto de abscisa 1.

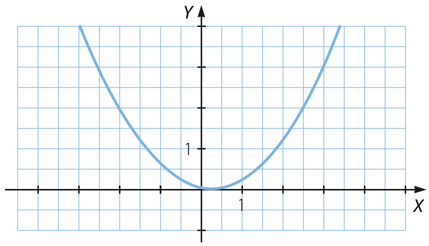
$f(1) = 3$

$f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$

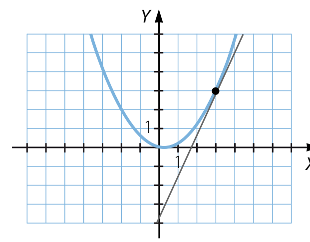
La ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 3$

Derivada de una función

050 Demuestra gráficamente que la derivada de esta función en el punto de abscisa 3 tiene un valor comprendido entre 2 y 3.



La derivada de la función en el punto $x = 3$ es la pendiente de la recta tangente, y observando el dibujo de la misma se obtiene que, por cada unidad en horizontal, el avance vertical está comprendido entre 2 y 3 unidades.



051 A partir de la definición, calcula las funciones derivadas de las funciones que se indican.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{4}$

c) $y = x^3$

d) $y = 2x^2 - 3x$

e) $y = \dfrac{12}{x}$

f) $y = (3x^2 + 2)^2$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = 2$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(x+h) - 1}{4} - \dfrac{2x - 1}{4}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{4h} = \frac{1}{2}$$

c) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$$

d) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - (2x^2 - 3x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 3) = 4x - 3$$

e) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{12}{x+h} - \dfrac{12}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12x - 12x - 12h}{hx(x+h)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-12}{x(x+h)} = -\frac{12}{x^2}$$

f) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(3(x+h)^2 + 2)^2 - (3x^2 + 2)^2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{9(x+h)^4 + 12(x+h)^2 + 4 - 9x^4 - 12x^2 - 4}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{9x^4 + 36hx^3 + 54h^2x^2 + 36h^3x + 9h^4 + 12x^2 + 24hx + 12h^2 - 9x^4 - 12x^2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} (36x^3 + 54hx^2 + 36h^2x + 9h^3 + 24x + 12h) = 36x^3 + 24x$

052 **Obtén, aplicando la definición, la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 4$, y calcula la derivada en estos puntos.**

a) $f'(1)$ **b) $f'(-3)$** **c) $f'(2)$**

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 4 - (x^2 - 2x + 4)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2hx + h^2 - 2x - 2h + 4 - x^2 + 2x - 4}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 2) = 2x - 2$

a) $f'(1) = 0$ b) $f'(-3) = -8$ c) $f'(2) = 2$

053 **A partir de la definición, encuentra la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x + 2$, y calcula $f'(0)$, $f'(-1)$ y $f'(3)$. Decide el tipo de crecimiento de la función en los puntos de abscisa 0, −1 y 3.**

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 2 - (x^2 + 2x + 2)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h + 2 - x^2 - 2x - 2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 2) = 2x + 2$

$f'(0) = 2 > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 0$.

$f'(-1) = 0 \rightarrow$ No se puede decir si la función tiene un mínimo o un máximo en $x = -1$.

$f'(3) = 8 > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 3$.

054 **La función derivada de $y = \ln x$ es $y' = \dfrac{1}{x}$. Utiliza el resultado para determinar la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto de abscisa 1.**

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$

055 **Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x + \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.**

$y' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - 6 = \dfrac{5}{4}(x - 4) \rightarrow y = \dfrac{5}{4}x + 1$

La ecuación de la recta normal es:

$y - 6 = -\dfrac{4}{5}(x - 4) \rightarrow y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{46}{5}$

056 ¿Es horizontal la recta tangente a la función $y = x^3 + x^2$ en el origen de coordenadas? Si es cierto, ¿cuál será la ecuación de la recta normal?

$y' = 3x^2 + 2x$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

Esta recta es horizontal; por tanto, la recta normal es: $x = 0$

057 ¿Es cierto que la curva $y = x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$ tiene una tangente horizontal en el punto (1, 0)?

$$y' = 2x\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{3} = x^2 - x$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 0(x - 1) \rightarrow y = 0$

Es una recta horizontal.

058 ¿Se verifica que la recta tangente a la curva $y = (x^2 - x)(2x + 1)$, en el punto de abscisa -1, es paralela a la recta $14x - 2y - 3 = 0$?

$y' = (2x - 1)(2x + 1) + (x^2 - x) \cdot 2 = 6x^2 - 2x - 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 7(x + 1) \rightarrow y = 7x + 7$

$$14x - 2y - 3 = 0 \rightarrow y = 7x - \frac{3}{2}$$

Como las pendientes de las rectas son iguales, se verifica que son paralelas.

059 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = \cos x$ en el punto de abscisa π.

$y' = -\operatorname{sen} x$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = 0(x - \pi) \rightarrow y = -1$

Esta recta es horizontal; por tanto, la recta normal es: $x = \pi$

060 ¿Cuánto tiene que valer a para que la función $f(x) = x \ln x - ax$ tenga, en el punto de abscisa e, una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

La bisectriz del primer cuadrante es: $y = x$

Esta recta y la recta tangente son paralelas si sus pendientes son iguales.

La pendiente de la recta tangente a la función, en $x = e$, es:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a \rightarrow f'(e) = 2 - a$$

Entonces, tenemos que: $2 - a = 1 \rightarrow a = 1$

061 Halla la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $y = 2^{3x-8}$ en $x = 3$ b) $y = x^2 \ln(x + 3)$ en $x = -2$ c) $y = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

a) $y' = 2^{3x-8} \cdot 3$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6(x - 3) \rightarrow y = 6x - 16$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = -\frac{1}{6}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{2}$

b) $y' = 2x \ln(x+3) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x+3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 4(x+2) \rightarrow y = 4x + 8$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = -\dfrac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$

c) $y' = 6(3x-5)^5 \cdot 3 = 18(3x-5)^5$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 18(x-2) \rightarrow y = 18x - 35$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\dfrac{1}{18}(x-2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{18}x + \dfrac{10}{9}$

062 ●●○ **Determina la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.**

a) $y = \sqrt{2x+6}$ **en** $x = 5$

b) $y = sen\,(2x + \pi)$ **en** $x = 0$

c) $y = tg\,\dfrac{\pi - x}{2}$ **en** $x = \pi$

a) $y' = \dfrac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = \dfrac{1}{4}(x-5) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 16$

b) $y' = cos\,(2x+\pi) \cdot 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -2(x-0) \rightarrow y = -2x$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

c) $y' = \left(1 + tg^2\,\dfrac{\pi - x}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x-\pi) \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = 2(x-\pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$

063 ●●○ **Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, que son paralelas a la recta de ecuación $6x - 2y + 1 = 0$.**

$6x - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = 3x + \dfrac{1}{2}$

Esta recta y las rectas tangentes son paralelas si sus pendientes son iguales.

$y' = 3x^2 + 6x + 3$

$3x^2 + 6x + 3 = 3 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Si $x = 0$, la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 3(x-0) \rightarrow y = 3x + 4$

Si $x = -2$, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 3(x+2) \rightarrow y = 3x + 8$

064 Halla los puntos en los que la función $y = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ tiene rectas tangentes de pendiente −2. Determina también la ecuación de dichas rectas tangentes.

$$y' = 3x^2 + 8x + 2$$

$$3x^2 + 8x + 2 = -2 \rightarrow 3x^2 + 8x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Si $x = -\frac{2}{3}$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{31}{27} = -2\left(x + \frac{2}{3}\right) \rightarrow y = -2x - \frac{5}{27}$$

Si $x = -2$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 5 = -2(x + 2) \rightarrow y = -2x + 1$$

065 Aplica las reglas de derivación a la función $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para calcular:

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa −1, 0 y 3.

c) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 3.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

b) $f'(-1) = 11$
$f'(0) = 2$
$f'(3) = 11$

c) $y - 1 = 11(x - 3) \rightarrow y = 11x - 32$

066 Emplea las reglas de derivación para calcular la función derivada de:

$$f(x) = (2x + 3)(x - 2)$$

A partir del resultado obtenido, determina:

a) $f'(2)$ $\quad f'\left(-\frac{3}{2}\right)$ $\quad f'(-2)$ $\quad f'\left(\frac{1}{3}\right)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = -2$.

c) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 2$.

$$f'(x) = 2(x - 2) + (2x + 3) \cdot 1 = 4x - 1$$

a) $f'(2) = 7$

$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -7$

$f'(-2) = -9$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

b) $y - 4 = -9(x + 2) \rightarrow y = -9x - 26$

c) $y - 0 = 1(x - 2) \rightarrow y = x - 2$

067 Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$
b) $y = \log_3 x$
c) $y = 2^x$
d) $y = \sqrt{6x^5}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 5$

b) $y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$

c) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

d) $y' = \dfrac{1}{2}(6x^5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 30x^4 = \dfrac{15x^4}{\sqrt{6x^5}} = \dfrac{15x^2}{\sqrt{6x}}$

068 Utiliza las reglas de derivación para hallar la función derivada de estas funciones.

a) $y = \sqrt[5]{x}$
b) $y = 4^{2x}$
c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 8}{2}$
d) $y = \dfrac{1}{x^4}$
e) $y = \dfrac{2x + 5}{7}$
f) $y = (6x)^4$

a) $y' = \dfrac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

b) $y' = 4^{2x} \cdot \ln 4 \cdot 2$

c) $y' = \dfrac{2x - 3}{2}$

d) $y' = \dfrac{-4x^3}{(x^4)^2} = -\dfrac{4}{x^5}$

e) $y' = \dfrac{2}{7}$

f) $y' = 4(6x)^3 \cdot 6 = 24(6x)^3$

069 Halla la derivada de estas operaciones de funciones.

a) $y = (x - 2)(x^2 + 3x)$
b) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
c) $y = x^2 \log x - 1$
d) $y = \dfrac{8}{2x - 1}$
e) $y = \ln x + e^x$
f) $y = \sqrt[3]{x}\sqrt{x}$
g) $y = x^2 \cdot 2^x$
h) $y = \dfrac{3x + 4}{2x - 1}$

a) $y' = 1 \cdot (x^2 + 3x) + (x - 2)(2x + 3) = 3x^2 + 2x - 6$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) $y' = 2x \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x \ln 10} = 2x \log x + \dfrac{x}{\ln 10}$

d) $y' = \dfrac{-8 \cdot 2}{(2x - 1)^2} = -\dfrac{16}{(2x - 1)^2}$

e) $y' = \dfrac{1}{x} + e^x$

f) $y' = \left(\dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x + 3x}{6\sqrt[6]{x^7}} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

g) $y' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2$

h) $y' = \dfrac{3(2x - 1) - (3x + 4) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = -\dfrac{11}{(2x - 1)^2}$

070 Calcula la derivada de las siguientes operaciones de funciones.

a) $y = \dfrac{\ln x + 4}{e^x}$

b) $y = \dfrac{x - 8}{\sqrt{x}}$

c) $y = (x^2 + 2)\log_2 x$

d) $y = \dfrac{\ln x}{e^x} + 4$

e) $y = 5e^x - 3^x$

f) $y = \dfrac{x^4}{x - 1}$

a) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - (\ln x + 4)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x(\ln x + 4)}{xe^x}$

b) $y' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{x} - (x - 8)\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{x - 8}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x + 8}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = 2x \cdot \log_2 x + (x^2 + 2) \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \dfrac{x^2 + 2}{x \ln 2}$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x \ln x}{xe^x}$

e) $y' = 5e^x - 3^x \cdot \ln 3$

f) $y' = \dfrac{4x^3(x - 1) - x^4 \cdot 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{3x^4 - 4x^3}{(x - 1)^2}$

071 Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = \operatorname{sen} x \cos x$

b) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $y = \sec x \operatorname{cosec} x$

d) $y = x \operatorname{tg} x$

e) $y = x \operatorname{arc\,cos} x$

f) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

a) $y' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{x^3}$

c) $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \left(-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

d) $y' = 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = x + \operatorname{tg} x + x \operatorname{tg}^2 x$

e) $y' = 1 \cdot \operatorname{arc\,cos} x + x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \operatorname{arc\,cos} x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y' = -\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$

072 Calcula la derivada de las siguientes operaciones donde intervienen funciones trigonométricas.

a) $y = 2x + arc\ sen\ x + arc\ cos\ x$

b) $y = (1 + x^2)\ arc\ tg\ x$

c) $y = \ln x \cdot tg\ x$

d) $y = e^x\ sen\ x$

e) $y = \dfrac{cos\ x}{2 - x}$

a) $y' = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$

b) $y' = 2x \cdot arc\ tg\ x + (1+x^2) \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = 1 + 2x\ arc\ tg\ x$

c) $y' = \dfrac{1}{x} \cdot tg\ x + \ln x \cdot (1 + tg^2\ x)$

d) $y' = e^x \cdot sen\ x + e^x \cdot cos\ x = e^x(sen\ x + cos\ x)$

e) $y' = \dfrac{-sen\ x(2-x) - cos\ x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{(x-2)\ sen\ x + cos\ x}{(2-x)^2}$

073 Determina las derivadas que se indican.

a) $f(x) = \ln x$ $\quad f''(x)$ y $f'''(x)$

b) $f(x) = x^5$ $\quad f'(x)$ y $f''(x)$

c) $f(x) = x^5 - 3x^4$ $\quad f'''(x)$ y $f^{IV}(x)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

b) $f'(x) = 5x^4 \rightarrow f''(x) = 20x^3$

c) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 \rightarrow f''(x) = 20x^3 - 36x^2 \rightarrow f'''(x) = 60x^2 - 72x$
$\rightarrow f^{IV}(x) = 120x - 72$

074 Calcula las seis primeras derivadas de las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$.

$y = sen\ x \rightarrow y' = cos\ x \rightarrow y'' = -sen\ x \rightarrow y''' = -cos\ x \rightarrow y^{IV} = sen\ x$
$\rightarrow y^{V} = cos\ x \rightarrow y^{VI} = -sen\ x$

$y = cos\ x \rightarrow y' = -sen\ x \rightarrow y'' = -cos\ x \rightarrow y''' = sen\ x \rightarrow y^{IV} = cos\ x$
$\rightarrow y^{V} = -sen\ x \rightarrow y^{VI} = -cos\ x$

075 Halla el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{kx - 5}{2x + 3}$ cumpla que $f'(-1) = 19$.

$f'(x) = \dfrac{k \cdot (2x+3) - (kx-5) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{3k + 10}{(2x+3)^2}$

$f'(-1) = 3k + 10 = 19 \rightarrow k = 3$

076 Escribe las funciones que componen las siguientes funciones y halla la derivada en cada caso.

a) $y = \log_3 (2x + 1)$
b) $y = (3x^2 - 3x + 1)^4$
c) $y = sen\, \sqrt{x}$
d) $y = arc\ tg\, e^x$
e) $y = 2^{3x-4}$
f) $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$
g) $y = cos \ln x$
h) $y = 3^{cos\, x}$

a) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 2x + 1$

$$y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3} \cdot 2 = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$$

b) $f(x) = x^4$ y $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$

$$y' = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$$

c) $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$y' = cos\ \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{cos\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = arc\ tg\ x$ y $g(x) = e^x$

$$y' = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

e) $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3x - 4$

$$y' = 2^{3x-4} \cdot \ln 2 \cdot 3$$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$

$$y' = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2 - 1)^3}}$$

g) $f(x) = cos\ x$ y $g(x) = \ln x$

$$y' = -sen \ln x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{sen \ln x}{x}$$

h) $f(x) = 3^x$ y $g(x) = cos\ x$

$$y' = 3^{cos\, x} \cdot \ln 3 \cdot (-sen\ x)$$

077 Calcula la función derivada de estas funciones, aplicando la regla de la cadena.

a) $y = \ln (x^2 - 5x)$
b) $y = 2^{3x-5}$
c) $y = \sqrt{x^2 + x}$
d) $y = \sqrt{\log_3 x}$

a) $$y' = \frac{1}{x^2 - 5x} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}$$

b) $$y' = 2^{3x-5} \cdot \ln 2 \cdot 3$$

c) $$y' = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

d) $$y' = \frac{1}{2}(\log_3 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \frac{1}{2\sqrt{\log_3 x}} \cdot \frac{1}{x \ln 3}$$

078 Aplica la regla de la cadena para determinar la función derivada de estas funciones.

a) $y = \ln tg\, x$
b) $y = cos\, \sqrt{x}$
c) $y = \log_2 x^2$
d) $y = sen\,(cos\, x)$
e) $y = arc\, tg\, x^2$
f) $y = tg\, \ln x$
g) $y = cos\, \sqrt{x}$
h) $y = \log_2^2 x$
i) $y = cos\,(sen\, x)$
j) $y = arc\, tg^2\, x$

a) $y' = \dfrac{1}{tg\; x} \cdot (1 + tg^2\; x)$

b) $y' = \dfrac{1}{2}(cos\; x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-sen\; x) = -\dfrac{sen\; x}{2\sqrt{cos\; x}}$

c) $y' = \dfrac{1}{x^2 \cdot \ln 2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x \ln 2}$

d) $y' = cos\; (cos\; x) \cdot (-sen\; x)$

e) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

f) $y' = (1 + tg^2\; \ln\; x) \cdot \dfrac{1}{x}$

g) $y' = \left(-sen\; \sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{sen\; \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

h) $y' = 2 \log_2\; x \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$

i) $y' = -sen\; (sen\; x) \cdot cos\; x$

j) $y' = 2\; arc\; tg\; x \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

079 Halla los coeficientes y exponentes desconocidos para que se verifique que las funciones y sus derivadas se corresponden.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a \ln x + bx$ $\quad g'(x) = \dfrac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \dfrac{a^x}{x^b}$ $\quad h'(x) = a^x \left(\dfrac{\ln 2}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

d) $i(x) = \dfrac{x}{\sqrt[b]{x}}$ $\quad i'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

a) $a = 2, b = -3$
b) $a = 3, b = -5$
c) $a = 2, b = 1$
d) $b = 3$

080 Deriva las siguientes funciones.

a) $y = x^2 \cdot 2^{x^2}$

b) $y = 5^{x \ln x}$

c) $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$

d) $y = \dfrac{e^{\ln x}}{x}$

e) $y = \ln (xe^x)$

f) $y = \ln x \cdot e^x$

a) $y' = 2x \cdot 2^{x^2} + x^2 \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot 2x = 2^{x^2+1}(x + x^3 \ln 2)$

b) $y' = 5^{x \ln x} \cdot \ln 5 \cdot \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = 5^{x \ln x} \cdot \ln 5 \cdot (\ln x + 1)$

c) $y' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

d) $y' = \dfrac{e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - e^{\ln x} \cdot 1}{x^2} = 0$

e) $y' = \dfrac{1}{xe^x} \cdot (e^x + xe^x) = \dfrac{x+1}{x}$

f) $y' = \dfrac{1}{x} \cdot e^x + \ln x \cdot e^x$

081 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = (2x+1)^3 \cdot 3^x$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^3}}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{\sqrt{x^3}}$

d) $y = \dfrac{2x-3}{e^x}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$

f) $y = x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

a) $y' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 \cdot 3^x + (2x+1)^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = [6 + (2x+1) \ln 3] \cdot (2x+1)^2 \cdot 3^x$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x^2-3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2x \cdot x^3 - (x^2-3) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-x^2+9}{2x^4} \cdot \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$

c) $y' = \dfrac{2x \cdot \sqrt{x^3} - (x^2-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = \dfrac{4x^3 - 3x(x^2-3)}{2x^2\sqrt{x^3}} = \dfrac{x^2+9}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $y' = \dfrac{2 \cdot e^x - (2x-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{5-2x}{e^x}$

e) $y' = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x^3 - \sqrt{x^2-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2 - 3(x^2-3)}{x^4\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{-2x^2+9}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

f) $y' = 2x + \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = 2x + \dfrac{9x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = 2x + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

082 Calcula la derivada de estas funciones trigonométricas.

a) $y = \cos \dfrac{1}{x}$

b) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $y = \left(\cos \dfrac{1}{x}\right) x$

e) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{\cos x}$

f) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

g) $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} \cos x}$

h) $y = x \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

a) $y' = -\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

c) $y' = -\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

d) $y' = \left(-\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \cdot x + \cos \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}$

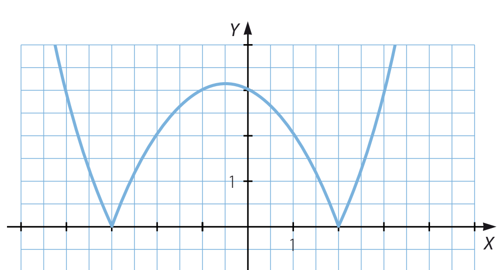
e) $y' = \cos \dfrac{x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

f) $y' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $y' = \dfrac{1 \cdot \operatorname{sen} (\cos x) - x \cos (\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 (\cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen} (\cos x) + x \cos (\cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 (\cos x)}$

h) $y' = 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + x \cdot \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + \dfrac{x}{2(1+x)\sqrt{x}}$

083 Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable, razónalo.

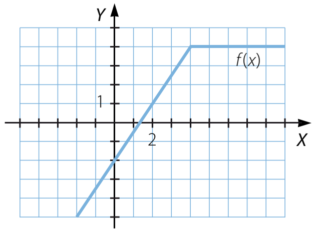


La función es continua en $\mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$, porque en los puntos $x = -3$ y $x = 2$ la gráfica presenta «picos», es decir, en estos puntos no puede determinarse una tangente a la función, ya que las pendientes en los puntos que están a su izquierda y a su derecha tienen distinto signo.

Derivada de una función

084 Dibuja una función continua que no sea derivable en el punto de abscisa $x = 4$, que en el resto del dominio sea derivable y que su derivada se anule si x es mayor o igual que 4.

Respuesta abierta.



085 Estudia si las siguientes funciones son continuas y derivables en los puntos en los que la función cambia su expresión algebraica.

a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ 4x^2 - \frac{3}{2}x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) $f(2) = 13$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (4x + 5) = 13 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(4x^2 - \dfrac{3}{2}x\right) = 13 \end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13$$

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 2 \\ 8x - \dfrac{3}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = \dfrac{29}{2} \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = 2\text{, porque los valores no coinciden.}$$

b) $g(-1) = -5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 6x) = -5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x^2 + 8x + 1) = -5 \end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x \to -1} g(x) = -5$$

$g(-1) = \lim\limits_{x \to -1} g(x) \to g(x)$ es continua en $x = -1$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ 4x + 8 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(-1^-) = 4 \\ g'(-1^+) = 4 \end{array}\right\} \to \text{La función es derivable en } x = -1.$$

086 ¿Son continuas y derivables las funciones en todos los puntos de su dominio?

a) $y = |x^2 - 4|$

b) $y = |x^2 + 1|$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, la función es continua. Se estudian los puntos en los que la función cambia de expresión:

$f(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x^2 + 4) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \exists \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$$

$f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$f(x)$ es continua en $x = -2$.

$f(2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$$

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$f(x)$ es continua en $x = 2$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -2 \\ -2x & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, la función es derivable. Se estudian los puntos en los que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\}$$

La función no es derivable en $x = -2$, porque los valores no coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\}$$

La función no es derivable en $x = 2$, porque los valores no coinciden.

b) $g(x) = |x^2 + 1| = x^2 + 1$

Por ser polinómica, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

087 Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9 & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 4x & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 2^{10-x} - 2 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

a) Si $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, la función es continua. Se estudia el punto en el que la función cambia de expresión:

$f(-2) = 14$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2 - 5x) = 14 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (3x^2 - 2x - 2) = 14 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) = 14$$

$f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) \to f(x)$ es continua en $x = -2$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si} \quad x < -2 \\ 6x - 2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, la función es derivable. Se estudia el punto en el que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -9 \\ f'(-2^+) = -14 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = -2\text{, porque los valores no coinciden.}$$

b) Si $x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$, la función es continua. Se estudian los puntos en los que la función cambia de expresión:

$h(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 + 2x - 9) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x^2 - 4x) = 6 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to 3} h(x) = 6$$

$h(3) = \lim\limits_{x\to 3} h(x) \to h(x)$ es continua en $x = 3$.

$h(5) = 30$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2x^2 - 4x) = 30 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} (2^{10-x} - 2) = 30 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to 5} h(x) = 30$$

$h(5) = \lim\limits_{x\to 5} h(x) \to h(x)$ es continua en $x = 5$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 4x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ -2^{10-x} \cdot \ln 2 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$, la función es derivable. Se estudian los puntos en los que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 8 \\ f'(3^+) = 8 \end{array}\right\} \to \text{La función es derivable en } x = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5^-) = 16 \\ f'(5^+) = -32 \ln 2 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = 5\text{, porque los valores no coinciden.}$$

Luego la función es derivable en $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

088 Decide si estas funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $y = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$
En $x = 1$

b) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
En $x = -2$

c) $y = 2^x + 3\ln x - 8$
En $x = 4$

d) $y = 2x + 3\sqrt{x}$
En $x = 9$

a) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1$
$f'(1) = -1 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en $x = 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$
$f'(-2) = \dfrac{7}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = -2$.

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{3}{x}$
$f'(4) = 16\ln 2 + \dfrac{3}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 4$.

d) $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$
$f'(9) = \dfrac{5}{2} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 9$.

089 Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal.

a) $y = 3x^2 - 15x + 13$

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

e) $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

La tangente es horizontal si la pendiente es igual a cero.

a) $y' = 6x - 15$
$6x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

b) $y' = 6x^2 + 6x - 36$
$6x^2 + 6x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

c) $y' = 6x^2 + 6x + 6$

$6x^2 + 6x + 6 = 0 \to x^2 + x + 1 = 0$

La ecuación no tiene solución, por lo que no hay puntos que tengan tangente horizontal.

d) $y' = \dfrac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \to x^2 + 2x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $y' = \dfrac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

$\dfrac{-4}{(x-2)^2} = 0 \to -4 = 0$

La ecuación no tiene solución, y no hay puntos que tengan tangente horizontal.

090 **¿En qué puntos de las gráficas de estas funciones es horizontal la tangente? Decide si son máximos o mínimos.**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \to x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(2) = 2 > 0 \to$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -2 < 0 \to$ En $x = 0$ tiene un máximo.

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2}$

$\dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \to 4x - x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{8}{(2-x)^3}$

$f''(0) = 1 > 0 \to$ En $x = -1$ tiene un mínimo.

$f''(4) = -1 < 0 \to$ En $x = 1$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 9)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 9) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{18}{x^3}$

$f''(-3) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

$f''(3) = \dfrac{2}{3} > 0 \rightarrow$ En $x = 3$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 + 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2}$

$\dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{(4x^3 + 24x)(x^2 + 4)^2 - (x^4 + 12x^2) \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \dfrac{96x - 8x^3}{(x^2 + 4)^3}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

091 **Sea la función $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.**

a) Determina los máximos y mínimos de la función.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$

$12x^2 + 30x - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 + 5x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$

$f''(x) = 24x + 30$

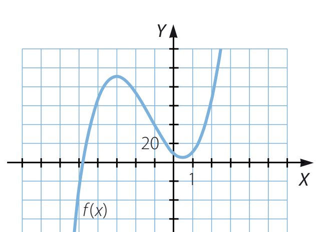
$f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 42 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo.

$f''(-3) = -42 < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c)



092 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

a) Encuentra los máximos y mínimos de la función.

b) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

c) Construye un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

$$\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow 3x^2 - x^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2 - x^4)\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{3}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{3}$ tiene un máximo.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$ No hay asíntota horizontal.

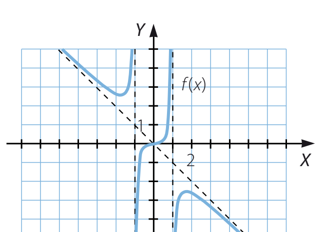
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x - x^3} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntota oblicua: $y = -x$

Si $x = 1.000 \rightarrow f(x) - (-x) < 0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000 \rightarrow f(x) - (-x) > 0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

c)



093 Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$

Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas. Haz también un esbozo de la gráfica de la función.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-4) - x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

No hay máximos ni mínimos, $f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

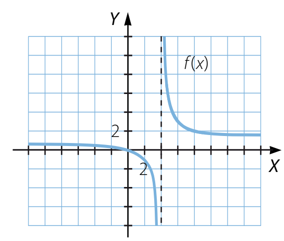
Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Si $x = 1.000 \rightarrow f(x) > 1$
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000 \rightarrow f(x) < 1$
Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.



094 Obtén los vértices de las siguientes parábolas, teniendo en cuenta que la tangente es horizontal en ellos.

a) $y = 3x^2 - 6x + 1$

b) $y = 3x^2 + x + 9$

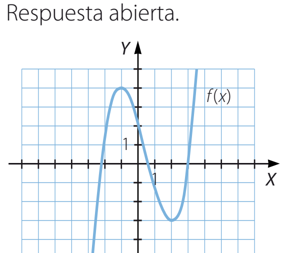
a) $y' = 6x - 6$
$6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow V(1, -2)$

b) $y' = 6x + 1$
$$6x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{6} \rightarrow V\left(-\frac{1}{6}, \frac{107}{12}\right)$$

095 Representa una función continua y derivable cuya derivada se anule en los puntos (−1, 4) y (2, −3), y que cumplan estas condiciones.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Respuesta abierta.



096 Dada la función $y = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

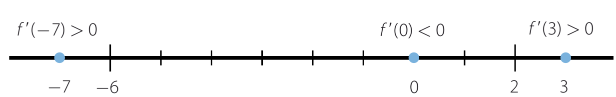
c) Si $x = 0 \rightarrow y = 29$

Si $y = 0 \rightarrow x^3 + 6x^2 - 36x + 29 = 0 \rightarrow (x - 1)(x^2 + 7x - 29) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{165}}{2} \end{cases}$$

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$

$3x^2 + 12x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$



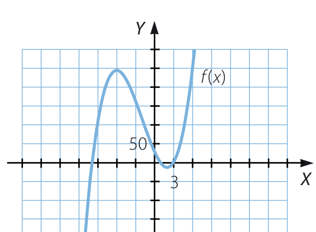
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-6, 2)$.

e) Mínimo: $(2, -11)$

Máximo: $(-6, 245)$

f)



097 ●●●

Estudia y representa las funciones polinómicas.

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

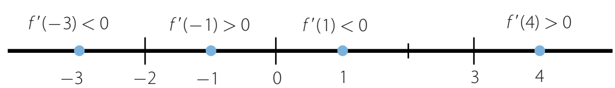
c) $y = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

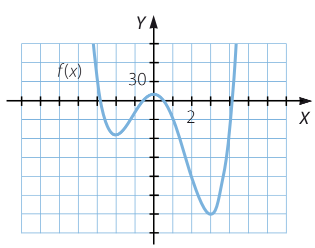
$$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

Mínimos: $(-2, -54)$ y $(3, -179)$

Máximo: $(0, 10)$



b) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

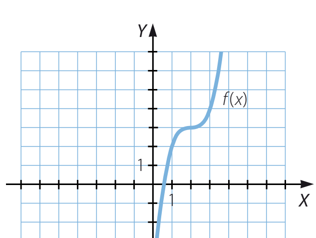
$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(2) = 0 \rightarrow$ En $x = 2$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(x) = 6x - 12.$

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$.

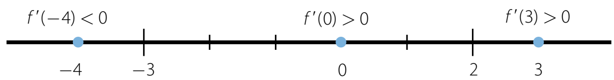


c) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 96x + 144$

$12x^3 - 12x^2 - 96x + 144 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$



$f(x)$ es creciente en $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -3)$.

Mínimo: $(-3, -301)$

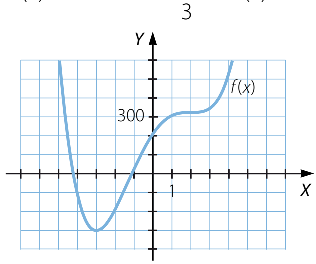
$f''(x) = 36x^2 - 24x - 96$

$36x^2 - 24x - 96 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $-\dfrac{4}{3} < x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$.

$f''(x) < 0$ si $x < -\dfrac{4}{3} \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$.



098 Dada la función $y = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = 3 \rightarrow y = 3$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

c) Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

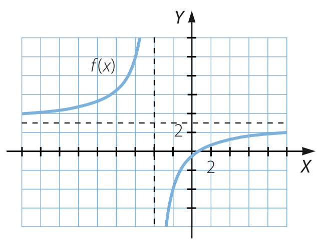
Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

d) $f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x-2)}{(x+4)^2} = \frac{14}{(x+4)^2}$

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

e) La función no tiene máximos ni mínimos.

f)



099 Estudia y representa estas funciones racionales.

a) $y = \frac{5x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3}$

c) $y = \frac{x^2}{2-x}$

d) $y = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{5x+1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{5x+1}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{x-2} = 5 \rightarrow y = 5$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

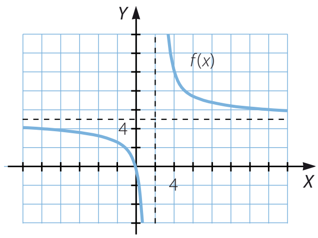
Punto de corte con el eje X: $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{5(x-2) - (5x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-11}{(x-2)^2}$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

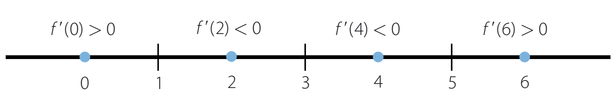
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x - 3} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x + 1$$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

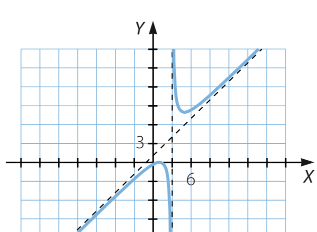
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 3) - (x^2 - 2x + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3) \cup (3, 5)$.

Máximo: $(1, 0)$ Mínimo: $(5, 8)$



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{2-x} = -\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

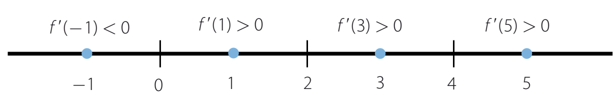
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = -1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{2-x} = -2 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x - 2$$

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

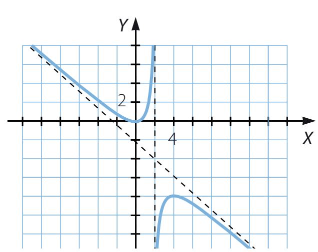
$$f'(x) = \frac{2x(2-x) + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

$$4x - x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Máximo: $(4, -8)$ Mínimo: $(0, 0)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2 - 4}{x^2 + x - 6} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

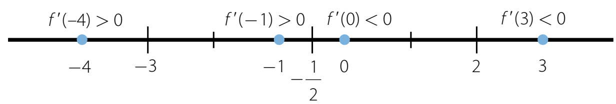
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: (1, 0) y (−2, 0)

Punto de corte con el eje Y: $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

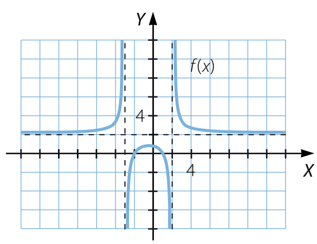
$$f'(x) = \frac{-16x - 8}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$-16x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \frac{1}{2}\right)$ y es decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Máximo: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{18}{25}\right)$



100 ●●● **Representa estas funciones racionales, analizando sus características.**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $y = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $y = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

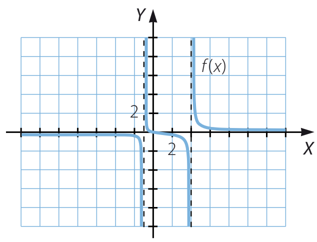
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (3, 0)

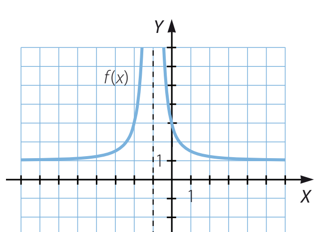
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$-4x - 4 = 0 \rightarrow x = -1 \notin$ Dom f

$f'(x) > 0$ si $x < -1 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

$f'(x) < 0$ si $x > -1 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty\end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+5}{x^2-3x-4} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

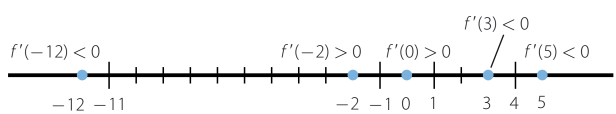
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(-5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$

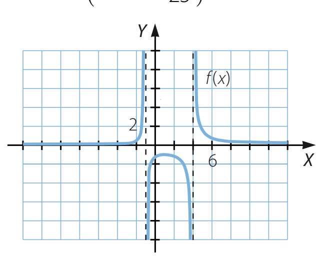
$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4-(x+5)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2}$$

$$\frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2} = 0 \to -x^2-10x+11 = 0 \to \begin{cases} x = -11 \\ x = 1 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-11, -1) \cup (-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -11) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Mínimo: $\left(-11, -\dfrac{1}{25}\right)$ Máximo: $(1, -1)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

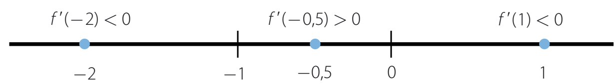
$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+2}{x^2} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $\left(-\sqrt{2}-2, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}-2, 0\right)$

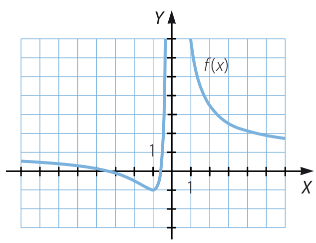
$$f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-4x-4}{x^3}$$

$-4x - 4 = 0 \rightarrow x = -1$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 0)$.

Mínimo: $(-1, 1)$



e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2+x-6} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

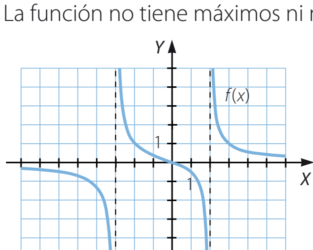
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-6) - 2x(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2x^2-12}{(x^2+x-6)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



f) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

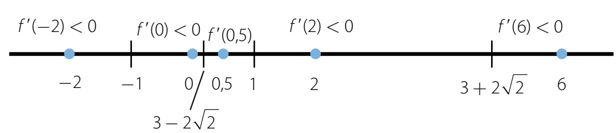
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x-3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2}$$

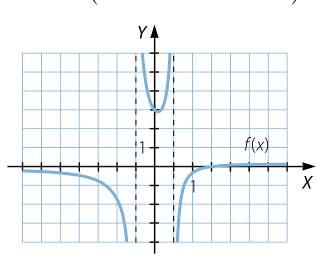
$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$

y es creciente en $\left(3 - 2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Máximo: $\left(3 + 2\sqrt{2}, \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$ Mínimo: $\left(3 - 2\sqrt{2}, \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)$



101 ●○○ **Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.**

a) Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media en los intervalos [1, 3], [1, 5] y [1, 8].

b) Calcula el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1 + h]$, y comprueba que equivale a $f'(1)$.

$$T.V.M.\ ([1, 1+h]) = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{2(1+h)^2-2(1+h)+3-3}{h} =$$
$$= \frac{2+4h+2h^2-2-2h}{h} = 2h+2$$

a) $T.V.M.\ ([1,3]) = 2\cdot 2+2 = 6$
$T.V.M.\ ([1,5]) = 2\cdot 4+2 = 10$
$T.V.M.\ ([1,8]) = 2\cdot 7+2 = 16$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \lim\limits_{h\to 0} (2h+2) = 2 \qquad f'(x) = 4x-2 \rightarrow f'(1) = 2$

102 A partir de la definición, halla la función derivada de estas funciones.

a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = \dfrac{1}{x}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h+1-(x+1)}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{h(x+h)x} =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x+h)x} = -\dfrac{1}{x^2}$

103 Las siguientes funciones se pueden expresar como composición de otras funciones más sencillas. Halla sus funciones derivadas de dos modos diferentes, y compara los resultados que obtienes.

a) $y = 2^{3x+5}$ b) $y = (x^2+7x)^2$ c) $y = \ln(3x)$ d) $y = \log_3 \dfrac{x^2}{3}$

a) $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3x+5 \qquad y' = 2^{3x+5}\cdot \ln 2\cdot 3$
$y = 2^{3x}\cdot 2^5 \rightarrow y' = 2^{3x}\cdot \ln 2\cdot 3\cdot 2^5 = 2^{3x+5}\cdot \ln 2\cdot 3$

b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2+7x \qquad y' = 2(x^2+7x)(2x+7) = 4x^3+42x^2+98x$
$y = (x^2+7x)\cdot(x^2+7x) \rightarrow y' = (2x+7)\cdot(x^2+7x)+(x^2+7x)\cdot(2x+7) =$
$= 4x^3+42x^2+98x$

c) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = 3x \qquad y' = \dfrac{1}{3x}\cdot 3 = \dfrac{1}{x}$

$y = \ln(3x) = \ln 3+\ln x \rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{3} \qquad y' = \dfrac{1}{\frac{x^2\cdot \ln 3}{3}}\cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2}{x\cdot \ln 3}$

$y = \log_3 \dfrac{x^2}{3} = 2\log_3 x-\log_3 3 = 2\log_3 x-1 \rightarrow y' = 2\cdot \dfrac{1}{x\cdot \ln 3} = \dfrac{2}{x\cdot \ln 3}$

Los resultados obtenidos coinciden.

Derivada de una función

104 Obtén las funciones derivadas de estas funciones utilizando la regla de la cadena.

a) $y = e^{\ln x}$

b) $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^4 - 3\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 + 5\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2}{x}\right) + 3$

c) $y = sen\,\dfrac{x}{2}$

d) $y = \ln(x^2e)$

a) $y' = e^{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$

b) $y' = \left[4\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 - 9\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 + 10\left(\dfrac{2}{x}\right) - 4\right] \cdot \left(-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\dfrac{64}{x^5} + \dfrac{72}{x^4} - \dfrac{40}{x^3} + \dfrac{8}{x^2}$

c) $y' = cos\,\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

d) $y' = \dfrac{1}{x^2e} \cdot 2xe = \dfrac{2}{x}$

105 Determina el valor de la expresión *a* para que la función no sea derivable en el punto $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 3x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$f(3) = 13$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 13 \end{array}\right\} \to$ Si $a \neq 13$, la función no es continua y no es derivable.

106 Completa la siguiente función para que sea derivable en todo el conjunto $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 2 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, la función tiene que ser continua: $f(2) = 2b + 4$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2b + 4 \end{array}\right\} \to$ Si $6 = 2b + 4$, la función es continua $\to b = 1$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 5 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \to$ La función no es derivable.

107 La recta cuya ecuación es $y = 9x - 14$ es tangente a la función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en qué punto son tangentes y halla el valor de k. ¿Hay una sola solución? La función tiene dos puntos en los que la tangente es horizontal. Hállalos y escribe la ecuación de esas rectas.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Cuando la recta dada es tangente: $3x^2 - 3 = 9 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $x = 2 \rightarrow y - (2 + k) = 9(x - 2) \rightarrow y = 9x - 16 + k \rightarrow k = 2$

Si $x = -2 \rightarrow y - (-2 + k) = 9(x + 2) \rightarrow y = 9x + 16 + k \rightarrow k = -2$

Luego hay dos soluciones válidas.

Cuando la tangente es horizontal, se cumple que: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Si $x = 1 \rightarrow y - (-2 + k) = 0 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -2 + k$

Si $x = -1 \rightarrow y - (2 + k) = 0 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2 + k$

108 ¿Es cierto que la función $y = x^3$ es siempre creciente? ¿Qué ocurre en el origen de coordenadas?

$f'(x) = 3x^2$

Si $x \neq 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ La función no es creciente ni decreciente en este punto.

109 Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función.

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo (8, 17).

a) ¿Cuál es el consumo a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?

b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?

c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

a) $E(10) = 4{,}5$

$E(16) = 3{,}6$

b) $E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$

$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 15 \end{cases}$

$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$

$E''(9) = -0{,}18 < 0 \rightarrow$ En $t = 9$ tiene un máximo.

$E''(15) = 0{,}18 > 0 \rightarrow$ En $t = 15$ tiene un mínimo.

Por tanto, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas.

c) Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas.

Del mismo modo, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

110 ●●●

Un investigador está probando la acción de un medicamento sobre una bacteria. Ha comprobado que el número de bacterias, N, varía con el tiempo, t, una vez suministrado el medicamento, según la función:

$$N = 20t^3 - 510t^2 + 3.600t + 2.000$$

a) ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

b) En ese momento, ¿el número de bacterias está creciendo o disminuyendo?

c) ¿Cuál es el momento en que la acción del producto es máxima?

d) ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

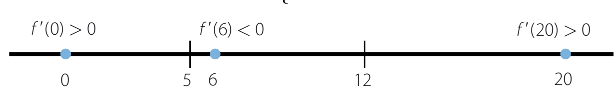
e) ¿Y en qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

a) Si $t = 0 \rightarrow N = 2.000$ bacterias

Si $t = 10 \rightarrow N = 7.000$ bacterias

b) $N' = 60t^2 - 1.020t + 3.600$

$$60t^2 - 1.020t + 3.600 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$



El número de bacterias crece hasta las 5 horas y vuelve a crecer a partir de las 12 horas. Este número decrece entre las 5 horas y las 12 horas.

c) El medicamento alcanza su máxima acción a las 12 horas.

d) El efecto del medicamento empieza a notarse a partir de las 5 horas.

e) El medicamento empieza a perder su efecto a partir de las 12 horas.

111 ●●○

¿Cuál es la ecuación de una parábola que pasa por el punto (0, 9) y en el punto (2, 9) tiene como recta tangente $y - 6x + 3 = 0$?

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como la parábola pasa por el punto $(0, 9) \rightarrow c = 9$

Y como también pasa por el punto $(2, 9) \rightarrow 4a + 2b + 9 = 9 \rightarrow 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a$

Así, resulta que: $f(x) = ax^2 - 2ax + 9 \rightarrow f'(x) = 2ax - 2a$

Si $y = 6x - 3$ es la tangente en el punto $x = 2$, entonces:

$f'(2) = 6 \rightarrow 4a - 2a = 6 \rightarrow a = 3$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

112 ●●○

Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es: $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto $(2, 5) \rightarrow f(2) = 5$

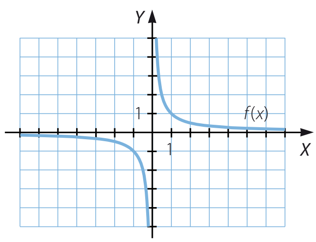
$$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

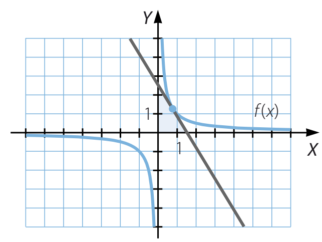
113 Representa la función $y = \frac{1}{x}$.

a) Considera un punto cualquiera de la función que esté en el primer cuadrante. Comprueba que la recta tangente a la función en ese punto forma un triángulo con los semiejes positivos.

b) Demuestra que, independientemente del punto que se escoja, el área de ese triángulo es siempre la misma.



a)



b) Si $a > 0$, entonces $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ es un punto de la función en el primer cuadrante.

Como $y' = -\frac{1}{x^2}$, la ecuación de la recta tangente en $x = a$ es:

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

Las coordenadas de los puntos de corte de la tangente con los ejes determinan la base y la altura del triángulo.

$$\text{Si } x = 0 \to y - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \to y = \frac{2}{a}$$

$$\text{Si } y = 0 \to 0 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} \to \frac{1}{a^2}x = \frac{2}{a} \to x = 2a$$

Así, el área del triángulo es: $A = \dfrac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = 2\ u^2$, independientemente del valor de a.

114 La recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Halla el valor de la función y de su derivada en el punto de abscisa 2.

$$y = 5x - 7 \to y - 3 = 5(x - 2) \to \begin{cases} f(2) = 3 \\ f'(2) = 5 \end{cases}$$

115 Explica cuánto valen $f'(0)$ y $g'(0)$ en las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. *(Puedes hacer la gráfica de las funciones, si es necesario).*

Dom $f = (0, +\infty) \to f'(0)$ no existe porque la función no está definida en $x = 0$.

Dom $g = [0, +\infty) \to g'(0)$ no existe porque la función no está definida para valores menores que 0 y no existe $g'(0^-)$.

116 La función derivada de una parábola es una recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Halla la abscisa del vértice de esa parábola.

Como la ecuación de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, su derivada es $y' = 2ax + b$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-6} \rightarrow y = 3x - \frac{5}{2}$$

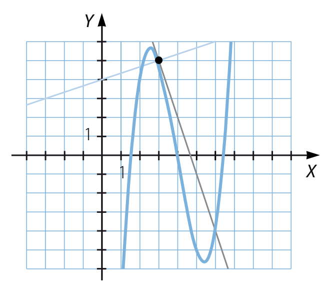
Igualando coeficientes, resulta:

$$2ax = 3x \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{5}{2}$$

La abscisa del vértice es: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \dfrac{5}{6}$

117 Si trazamos la recta tangente y la recta normal a la función $y = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punto (3, 5) se forma, con los semiejes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina su área.



$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$$

$$f'(3) = -3$$

La ecuación de la recta tangente en (3, 5) es:

$$y - 5 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 14$$

Y la ecuación de la recta normal es:

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$$

El cuadrilátero tiene como vértices: (0, 0), (0, 4), (3, 5) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Para calcular su área se descompone en tres figuras:

- El rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (3, 4) y (3, 0) mide 12 u^2.
- El triángulo de vértices (4, 0), (3, 4) y (3, 5) mide $\frac{3}{2}u^2$.
- El triángulo de vértices (3, 5), (3, 0) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$ mide $\frac{25}{6}u^2$.

Luego el área del cuadrilátero es: $12 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{25}{6} = \dfrac{53}{3}u^2$

118 Sea una función que no es continua en $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

Demuestra que la función no puede ser derivable en ese punto estudiando el límite.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Si la función es derivable en $x = 3$ entonces existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = l \to \lim_{h\to 0} (f(3+h)-f(3)) = l \lim_{h\to 0} h$$

$$\to \lim_{h\to 0} (f(3+h)-f(3)) = 0 \to \lim_{h\to 0} f(3+h) = \lim_{h\to 0} f(3)$$

Esto no es cierto, porque la función no es continua en $x = 3$, y la función no puede ser derivable en este punto.

119 **Considera una parábola general expresada de la forma:**

$$y = ax^2 + bx + c$$

a) **Como en el vértice la tangente será horizontal, la derivada se anula en ese punto. Compruébalo y despeja el valor de x.**

b) **Encuentra también el valor de y, aplicándolo a la parábola $y = -2x^2 + 8x + 4$.**

a) $y' = 2ax + b$

$2ax + b = 0 \to x = -\dfrac{b}{2a}$

b) $x = -\dfrac{b}{2a} \to y = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$

PARA FINALIZAR...

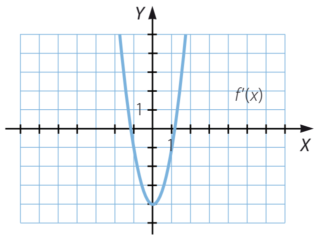
120 **Sea $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{sen\ x}{1+cos\ x}$. Estudia si $f(x)$ y $f'(x)$ son constantes.**

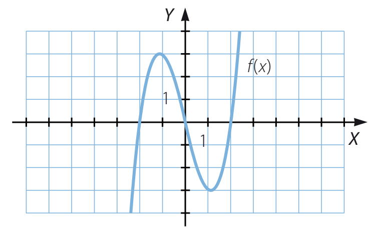
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{sen\ x}{1+cos\ x}\right)^2} \cdot \frac{cos\ x(1+cos\ x)+sen^2 x}{(1+cos\ x)^2} = \frac{cos\ x+1}{(1+cos\ x)^2+sen^2\ x} =$$

$$= \frac{cos\ x+1}{1+2\ cos\ x+cos^2\ x+sen^2\ x} = \frac{cos\ x+1}{2\ cos\ x+2} = \frac{1}{2}$$

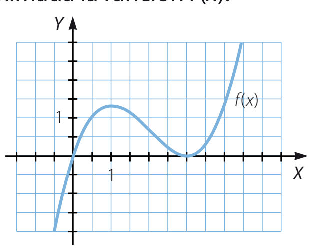
Al ser $f'(x)$ constante y no nula, la función $f(x)$ no es constante.

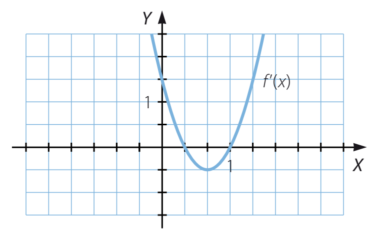
121 Dada la gráfica de una función $f(x)$, representa la función $f'(x)$ de forma aproximada.





122 Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente, representa de forma aproximada la función $f(x)$.





123 Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, es decir, $(g \circ f)(x) = x$, ¿se verifica que $(g' \circ f')(x) = x$?

No se verifica. Si se consideran las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, se tiene que son inversas ya que cumplen que: $(g \circ f)(x) = x$

Sin embargo, resulta que: $(g' \circ f')(x) = g'(f'(x)) = g'(3x^2) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{9x}} \neq x$

Luego $f'(x)$ y $g'(x)$ no son funciones inversas.

124 Se define el ángulo de dos curvas en un punto común como el ángulo formado por sus rectas tangentes en ese punto.
Aplícalo a las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow (0, 0)$ es el punto de intersección de las curvas.

La recta tangente en este punto a la primera curva es: $y = 0$

La recta tangente en el mismo punto a la segunda curva es: $x = 0$

Como las rectas son perpendiculares, el ángulo que forman las dos curvas mide 90°.

125 Verifica que si un polinomio tiene una raíz doble, también lo es de su derivada.
Resuelve la ecuación $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es doble.

Si un polinomio tiene una raíz doble a, entonces: $f(x) = (x - a)^2 \cdot p(x)$

$$f'(x) = 2(x - a) \cdot p(x) + (x - a)^2 \cdot p'(x) = (x - a)[2p(x) + (x - a) \cdot p'(x)]$$

Por tanto, a es también una raíz de la derivada.

Sea $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$.

Como $f'(x) = 36x^2 - 32x + 7$, resulta que: $36x^2 - 32x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{7}{18} \end{cases}$

Y como una de las raíces es doble coincide con una de las anteriores:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2 - 10x + 2)$$

$$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\dfrac{1}{2}$ (doble) y $\dfrac{1}{3}$

126 **¿Cómo debe descomponerse un número positivo *a* en la suma de dos números no negativos para que la suma de los cuadrados de los dos sumandos sea mínima? ¿Y para que sea máxima?**

Sea x tal que $0 \le x \le a$, de modo que $a = x + (a - x)$.

$f(x) = x^2 + (a - x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(a - x) \cdot (-1) = 4x - 2a \qquad 4x - 2a = 0 \rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

$f''(x) = 4 \qquad f''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 4 > 0 \rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ es un mínimo.

Luego si el número a se descompone en $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}$, la suma de los cuadrados es mínima. Al ser $f(x) = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ una parábola abierta hacia arriba, como $0 \le x \le a$, la suma de los cuadrados es máxima si $x = 0$ o si $x = a$, es decir, si el número se descompone en $a + 0$.

127 **Demuestra que la tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio en ese punto.**

Sea una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Si $y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Entonces la ecuación de la recta tangente en un punto (a, b) es: $y - b = -\dfrac{a}{b}(x - a)$

La recta determinada por el radio de la circunferencia que pasa por este punto es:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Las rectas son perpendiculares ya que: $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-\dfrac{a}{b}}$

11 Integrales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

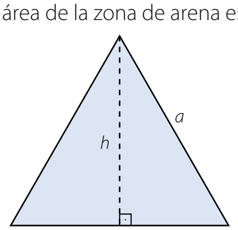
Los pilares de la Tierra

Raschid era uno de sus mecenas. [...] A pesar de ser un comerciante, tenía un poderoso intelecto y una curiosidad abierta a todos los campos. [...] Había simpatizado de inmediato con Jack, que cenaba en su casa varias veces por semana.
–¿Qué nos han enseñado esta semana los filósofos? –le preguntó Raschid tan pronto como empezaron a comer.
–He estado leyendo a Euclides. –Los *Elementos de Geometría* de Euclides era uno de los primeros libros traducidos.
–Euclides es un extraño nombre para un árabe –apuntó Ismail, hermano de Raschid.
–Era griego –le explicó Jack–. Vivió antes del nacimiento de Cristo. Los romanos perdieron sus escritos, pero los egipcios los conservaron, de manera que han llegado hasta nosotros en árabe.
–¡Y ahora los ingleses están traduciéndolos al latín! –exclamó Raschid–. Resulta divertido.
–Pero ¿qué has aprendido? –le preguntó el prometido de una de las hijas de Raschid.
Jack vaciló por un instante. Resultaba difícil de explicar. Intentó exponerlo de manera práctica.
–Mi padrastro, el maestro constructor, me enseñó diversas operaciones geométricas; por ejemplo, a dibujar un cuadrado dentro de otro, de manera que el más pequeño sea la mitad del área del grande.
–¿Cuál es el objetivo de esas habilidades?
–Esas operaciones son esenciales para proyectar construcciones. Echad un vistazo a este patio. El área de las arcadas cubiertas que lo rodean es exactamente igual al área abierta en el centro. La mayor parte de los patios pequeños están construidos de igual manera, incluidos los claustros de los monasterios. Ello se debe a que esas proporciones son las más placenteras. Si el centro fuera mayor, parecería una plaza de mercado, y si fuese más pequeño, daría la impresión de un agujero en el tejado. [...]
–¡Nunca pensé en ello! –exclamó Raschid, a quien nada le gustaba más que aprender algo nuevo.

KEN FOLLETT

Un arquitecto quiere diseñar un jardín en un terreno cuadrado de 70 m de lado. En él pondrá una zona de arena con forma de triángulo equilátero, y alrededor estará la zona de césped. Si desea que las dos zonas tengan la misma superficie, ¿qué altura debe tener el triángulo?

Si el terreno tiene 70 m de lado, el área mide 4.900 m^2.
El área de la zona de arena es igual al área de la zona de césped si mide 2.450 m^2.



$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$$

$$2.450 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}h \cdot h}{2} \rightarrow 2.450 = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \rightarrow h = \sqrt{2.450\sqrt{3}} = 65{,}14 \text{ m}$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x^2 - 6$

b) $f(x) = -\ln \dfrac{x^2-3}{2} - 2\,sen\ 5x$

c) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{e^{x-1}}{x^3+2}$

d) $f(x) = \sqrt{tg^2\ 3x - arc\ cos\ \dfrac{x^4}{2}}$

a) $f'(x) = 10x$

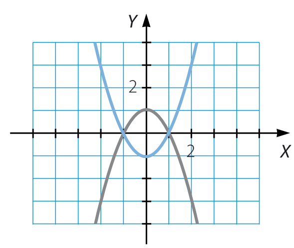
b) $f'(x) = -\dfrac{1}{\dfrac{x^2-3}{2}} \cdot x - 2\cos\ 5x \cdot 5 = -\dfrac{2x}{x^2-3} - 10\cos\ 5x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{x-1}}{x^3+2}\right)^2} \cdot \dfrac{e^{x-1}(x^3+2) - e^{x-1}\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} = \dfrac{e^{x-1}(x^3-3x^2+2)}{(x^3+2)^2 + e^{2x-2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{tg^2\ 3x - arc\cos\dfrac{x^4}{2}}} \cdot \left(6\,tg\,3x(1+tg^2\ 3x) + \dfrac{2x^3}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^2}}\right)$

002 Identifica la ecuación de estas parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = -x^2 + 1$



a) Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba y tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$.

b) Como $a = -1 < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

003 Determina los puntos de corte en cada caso.

a) $f(x) = 3x^2 - 4$
   $g(x) = x$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$
   $g(x) = 4x^2 + x - 8$

a) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 - 4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ y $(-1, -1)$

b) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 + 2x - 6 = 4x^2 + x - 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(2, 10)$ y $(-1, -5)$

ACTIVIDADES

001 La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es una función primitiva de la función $f(x) = e^{3x}$. Halla los valores de las constantes k y n si $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0 \rightarrow k \cdot e^0 + n = 0 \rightarrow k + n = 0 \rightarrow n = -k$$

002 La pendiente de la recta tangente a una curva, en un punto de abscisa x, es $6x$. Halla de qué función se trata, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente de la recta tangente en un punto es: $f'(x) = 6x$
Entonces, resulta que: $f(x) = 3x^2 + k$
Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \rightarrow k = 0$
Así, la función es: $f(x) = 3x^2$

003 Si $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\,dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx$

c) $\int \left[\frac{1}{2} f(x) - 2g(x)\right] dx$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx$

a) $$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + k + G(x) + k = F(x) + G(x) + k$$

b) $$\int [2f(x) - g(x)]\,dx = 2\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = 2(F(x) + k) - (G(x) + k) = 2F(x) - G(x) + k$$

c) $$\int \left[\frac{1}{2} f(x) - 2g(x)\right] dx = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx - 2\int g(x)\,dx = \frac{1}{2}(F(x) + k) - 2(G(x) + k) = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$$

d) $$\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = -\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = -(F(x) + k) + b(G(x) + k) = -F(x) + bG(x) + k$$

004 Dada la serie de funciones: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3 \dots$, calcula:

a) Su derivada.
b) ¿Qué expresión general tendrá la derivada de $f(x) = x^n$?
c) ¿Cuál será la integral de $f(x) = x^n$?

a) $f_1'(x) = 1$, $f_2'(x) = 2x$, $f_3'(x) = 3x^2, \dots$

b) $f'(x) = nx^{n-1}$

c) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

005 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x^2 + x)\,dx$ c) $\int (x^3 - 2)\,dx$ e) $\int (2x^2 - 3x + 5)\,dx$

b) $\int \sqrt{x^3}\,dx$ d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx$ f) $\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

a) $\int (x^2 + x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$

b) $\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

c) $\int (x^3 - 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x + k$

d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2x^2} + k$

e) $\int (2x^2 - 3x + 5)\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + k$

f) $\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \ln|x| - x + k$

006 Halla estas integrales..

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\,dx$ c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\,dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx$ d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\,dx$

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\,dx = \frac{(x^2 + 3)^5}{5} + k$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx = \ln|x^2 - 1| + k$

c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\,dx = \frac{(x^3 - 2)^2}{18} + k$

d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 6| + k$

007 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx$ c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$ d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx$

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = 2 \cdot \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + k = \frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2} + k$

b) $\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1} + k$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}}{\ln \frac{5}{2}} + k$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + e^{x-1} + k$

008 Halla estas integrales.

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\,dx$ c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$ d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\,dx = \frac{5^{x^2+1}}{\ln 5} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{10 \ln 3} + k$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 4e^{\frac{x}{2}+2} + k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x \cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + k$

009 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int sen\ 2x\,dx$ c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\,dx$

b) $\int cos\ (x+1)\,dx$ d) $\int sen\ (-x)\,dx$

a) $\int sen\ 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,cos\ 2x + k$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\,dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

b) $\int cos\ (x+1)\,dx = sen\ (x+1) + k$

d) $\int sen\ (-x)\,dx = cos\ (-x) + k$

010 Halla estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2(x+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int -3\,sen\,(2x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)\cdot cos\,(x^2+2x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\,(x^2-3)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2\,(x+1)}\,dx = tg\,(x+1)+k$

b) $\displaystyle\int -3\,sen\,(2x+1)\,dx = \frac{3}{2}\,cos\,(2x+1)+k$

c) $\displaystyle\int (x+1)\cdot cos\,(x^2+2x)\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,(x^2+2x)+k$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\,(x^2-3)}\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,(x^2-3)+k$

011 Resuelve estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,arc\ sen\,5x+k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = arc\ tg\,(x-3)+k$

012 Halla la solución de las integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x-3)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\,arc\ tg\,3x^2+k$

013 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_2^7 (x^2 + 2x - 1)\,dx$ b) $\int_{-4}^{2} e^{2x}\,dx$

a) $F(x) = \int (x^2 + 2x - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x$

$$\int_2^7 (x^2 + 2x - 1)\,dx = F(7) - F(2) = \frac{469}{3} - \frac{14}{3} = \frac{455}{3}$$

b) $F(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_{-4}^{2} e^{2x}\,dx = F(2) - F(-4) = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-8}$$

014 Comprueba la siguiente igualdad.

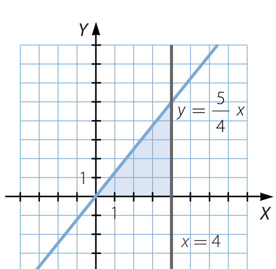
$$\int_2^6 (x^2 + x + 1)\,dx = \int_2^4 (x^2 + x + 1)\,dx + \int_4^6 (x^2 + x + 1)\,dx$$

$F(x) = \int (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

$$\int_2^6 (x^2 + x + 1)\,dx = F(6) - F(2) = 96 - \frac{20}{3} = \frac{268}{3}$$

$$\int_2^4 (x^2 + x + 1)\,dx + \int_4^6 (x^2 + x + 1)\,dx = F(4) - F(2) + F(6) - F(4) =$$
$$= \frac{100}{3} - \frac{20}{3} + 96 - \frac{100}{3} = \frac{268}{3}$$

015 Halla el área del triángulo rectángulo que tiene como vértices (0, 0), (4, 0) y (4, 5), utilizando integrales definidas.



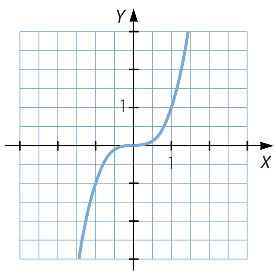
El triángulo está limitado por el eje X y las rectas $x = 4$ e $y = \frac{5}{4}x$.

Así, el área es:

$$\int_0^4 \frac{5}{4}x\,dx = \left[\frac{5}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 10$$

016 Calcula las integrales definidas $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ y $\int_{0}^{1} x^3\,dx$. Explica los resultados obtenidos.

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \qquad \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$



La función es simétrica respecto del origen de coordenadas. Así, la primera integral da como resultado cero porque el área corresponde a dos regiones iguales, una por encima del eje y otra por debajo. Los valores son iguales, pero de signo contrario, y se anulan.

017 Determina el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo $[-2, 2]$.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \qquad F(x) = \int (x^2 - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^2 - 1)\,dx\right| =$$

$$= |F(-1) - F(-2)| + |F(1) - F(-1)| + |F(2) - F(1)| =$$

$$= \left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| = 4$$

018 Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$ y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$.

$$f(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \qquad F(x) = \int sen\ x\,dx = -cos\ x$$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\pi} sen\ x\,dx\right| = |F(\pi) - F(0)| = |1 + 1| = 2$$

019 Determina el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en el intervalo $[-3, 4]$.

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 4 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$F(x) = \int (x^2 - 4 - (x + 2))\,dx = \int (x^2 - x - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)\,dx\right| + \left|\int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\,dx\right| + \left|\int_{3}^{4} (x^2 - x - 6)\,dx\right| = |F(-2) - F(-3)| +$$

$$+ |F(3) - F(-2)| + |F(4) - F(3)| = \left|\frac{22}{3} - \frac{9}{2}\right| + \left|-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3} + \frac{27}{2}\right| = \frac{53}{2}$$

020 **Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.**

$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = -x^2 + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$$F(x) = \int (x^2 - (-x^2 + 2))\, dx = \int (2x^2 - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

$$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = \left|-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}$$

021 **Comprueba si las funciones $F(x)$ son primitivas de $f(x)$.**

a) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ $\quad f(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 9{,}5$ $\quad f(x) = 6x - 12x^2 - \frac{3}{2}x^2$

c) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

d) $F(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ $\quad f(x) = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x) = \ln \dfrac{x^2}{x + 1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x + 2}{x(x + 1)}$

a) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x)$ no es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 6x^2 - 2x - 3$

c) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

d) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x\, (-\operatorname{sen} x) =$
$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x+1}} \cdot \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$
$= \dfrac{x^2 + 2x}{x^2(x+1)} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

022 **Comprueba si $y = \dfrac{3x+1}{x}$ e $y = \dfrac{x+1}{x}$ son primitivas de la función $y = -\dfrac{1}{x^2}$.**
En caso afirmativo, encuentra otra primitiva.

Las dos funciones son primitivas porque:

$$y = \frac{3x+1}{x} \rightarrow y' = \frac{3x - (3x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x+1}{x} \rightarrow y' = \frac{x - (x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = \dfrac{2x+1}{x}$

023 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\, dx$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\, dx$

c) $\int \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\, dx$

e) $\int \left(-\frac{3}{7}x^5 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right) dx$

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\, dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + k$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\, dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + k$

c) $\int \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx = \frac{x^5}{15} - \frac{x^3}{4} - x^2 + k$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\, dx = \frac{3x^4}{40} + \frac{13x^3}{30} - \frac{x}{5} + k$

e) $\int \left(-\frac{3}{7}x^5 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right) dx = -\frac{x^6}{14} + \frac{x^4}{20} - \frac{7x^3}{12} + k$

024 Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{3}{x}\, dx$

b) $\int \frac{5}{x^2}\, dx$

c) $\int -\frac{7}{x^3}\, dx$

d) $\int -\frac{2}{x^5}\, dx$

e) $\int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} - 2x\right) dx$

a) $\int \frac{3}{x}\, dx = 3 \ln |x| + k$

b) $\int \frac{5}{x^2}\, dx = -\frac{5}{x} + k$

c) $\int -\frac{7}{x^3}\, dx = \frac{7}{2x^2} + k$

d) $\int -\frac{2}{x^5}\, dx = \frac{1}{2x^4} + k$

e) $\int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} - 2x\right) dx = -\frac{1}{x^2} - 3 \ln |x| - x^2 + k$

025 Calcula las integrales.

a) $\int (sen\ x + 2\ cos\ x)\ dx$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\ dx$

d) $\int (2^x + e^x)\ dx$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\ dx$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\ dx$

a) $\int (sen\ x + 2\ cos\ x)\ dx = -cos\ x + 2\ sen\ x + k$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 5\ arc\ sen\ x + k$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\ dx = -3\ arc\ tg\ x + k$

d) $\int (2^x + e^x)\ dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + k$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\ dx = 12\sqrt{x} + k$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\ dx = 2\sqrt{1-3x} + k$

026 Determina las siguientes integrales.

a) $\int \left(3x - \frac{1}{x} - 3\ cos\ x\right) dx$

b) $\int \left(\frac{sen\ x}{3} + \frac{3^x}{5}\right) dx$

c) $\int \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{4}{4x-3}\right) dx$

e) $\int \left(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x+3}} + \frac{6}{\sqrt{2x+5}}\right) dx$

g) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{9}{\sqrt{2x+1}} + 4\right) dx$

h) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x^2}\ dx$

j) $\int \frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\ dx$

k) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\ dx$

l) $\int \frac{3}{\sqrt{3-2x^2}}\ dx$

m) $\int (tg^2\ x + 1)\ sen\ x\ dx$

a) $\displaystyle\int\left(3x-\frac{1}{x}-3\cos x\right)dx=\frac{3x^2}{2}-\ln|x|-3\,sen\,x+k$

b) $\displaystyle\int\left(\frac{sen\,x}{3}+\frac{3^x}{5}\right)dx=-\frac{\cos x}{3}+\frac{3^x}{5\ln 3}+k$

c) $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^2}+\frac{12}{1+x^2}\right)dx=\frac{4}{x}+12\,arc\,tg\,x+k$

d) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{4}{4x-3}\right)dx=2\ln|x+3|-\ln|4x-3|+k$

e) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right)dx=2\ln|x+3|+2\sqrt{x-3}+k$

f) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{x+3}}+\frac{6}{\sqrt{2x+5}}\right)dx=4\sqrt{x+3}+6\sqrt{2x+5}+k$

g) $\displaystyle\int\left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{\sqrt{2x+1}}+4\right)dx=6\,arc\,sen\,x-9\sqrt{2x+1}+4x+k$

h) $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{6}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+k=\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}+k$

i) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}-2\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\right)dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx-2\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+k=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+k$

j) $\displaystyle\int\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\,dx=\frac{3}{56}\int 8x(4x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{56}\cdot\frac{(4x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+k=\frac{9x^2\sqrt[3]{4x^2}}{56}+k$

k) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx=-\frac{1}{4(e^{2x}+1)^2}+k$

l) $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx=\int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\frac{2x^2}{3}\right)}}\,dx=\int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{3}{\sqrt{2}}\,arc\,sen\,\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}+k=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,arc\,sen\,\frac{\sqrt{6}\,x}{3}+k$

m) $\displaystyle\int(tg^2\,x+1)\,sen\,x\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,sen\,x\,dx=\frac{1}{\cos x}+k$

027 Dadas las funciones $f(x) = 6x - 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4x$, comprueba si se verifica que:

$$\int f(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 \qquad \int g(x)\,dx = x^3 - 2x^2$$

En caso afirmativo, determina si se cumple que:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

b) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

c) $\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$

d) ¿Cómo comprobarías si $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$ sin hacer ninguna integral?

$$(3x^2 - x + 2)' = 6x - 1 \qquad (x^3 - 2x^2)' = 3x^2 - 4x$$

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int (3x^2 + 2x - 1)\,dx = x^3 + x^2 - x + k$

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 + x^3 - 2x^2 = x^3 + x^2 - x + 2$$

La igualdad se verifica si $k = 2$.

b) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int (-3x^2 + 10x - 1)\,dx = -x^3 + 5x^2 - x + k$

$$\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 - x^3 + 2x^2 = -x^3 + 5x^2 - x + 2$$

La igualdad se verifica si $k = 2$.

c) $\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx = \int (18x^3 - 27x^2 + 4x)\,dx = \frac{9x^4}{2} - 9x^3 + 2x^2 + k$

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = (3x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2) = 3x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

La igualdad no se verifica.

d) La igualdad no se verifica, utilizando el apartado anterior:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \frac{1}{\int g(x)\,dx} = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

028

La derivada de la función $y = sen^2\, x$ es $y' = 2\, sen\, x\, cos\, x$, es decir,
$\int 2\, sen\, x\, cos\, x\, dx = sen^2\, x + k$.

En general, como $(f^2(x))' = 2\, f(x)\, f'(x)$, tenemos que $\int 2\, f(x)\, f'(x)\, dx = f^2\,(x) + k$.

Usa lo anterior para calcular las siguientes integrales.

a) $\int 2(x^2 - 1)2x\ dx$

b) $\int 2(x^2 + 3x)(2x + 3)\ dx$

c) $\int \frac{2}{1 + x^2}\ arc\ tg\ x\ dx$

d) $\int \frac{\ln\ x}{x}\ dx$

e) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$

f) $\int 4^x\ \ln\ 2\ dx$

g) $\int e^{4x+4}\ dx$

h) $\int \frac{tg\ x}{cos^2\ x}\ dx$

a) $\int 2(x^2 - 1)2x\ dx = (x^2 - 1)^2 + k$

b) $\int 2(x^2 + 3x)(2x + 3)\ dx = (x^2 + 3x)^2 + k$

c) $\int \frac{2}{1 + x^2} arc\ tg\ x\ dx = (arc\ tg\ x)^2 + k$

d) $\int \frac{\ln\ x}{x}\ dx = \frac{1}{2}\ \ln^2\ x + k$

e) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\ arc\ sen^2\ x + k$

f) $\int 4^x\ \ln\ 2\ dx = \int 2^x \cdot 2^x\ \ln\ 2\ dx = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + k$

g) $\int e^{4x+4}\ dx = \int e^{2x+2} \cdot e^{2x+2}\ dx = \frac{1}{4} \cdot e^{4x+4} + k$

h) $\int \frac{tg\ x}{cos^2\ x}\ dx = \frac{1}{2}\ tg^2\ x + k$

029 Si derivas la función $y = \ln \cos x$, obtienes $y = \frac{-\text{sen } x}{\cos x}$ o, lo que es lo mismo, $\int \frac{-\text{sen } x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| + k$.

En general, se verifica que $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + k$.

Usa lo anterior para calcular las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

b) $\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx$

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tg } x}\,dx$

d) $\int \frac{5}{15x+3}\,dx$

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln|x^2+3x| + k$

b) $\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2+3| + k$

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tg } x}\,dx = \ln|\text{arc tg } x| + k$

d) $\int \frac{5}{15x+3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|15x+3| + k$

030 Expresa las integrales como funciones logarítmicas.

a) $\int \frac{1}{2x+2}\,dx$

b) $\int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

d) $\int \frac{4}{2x+1}\,dx$

e) $\int \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

f) $\int \text{tg } 3x\,dx$

a) $\int \frac{1}{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| + k$

b) $\int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx = \ln|\text{sen } x| + k$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \ln|e^x+4| + k$

d) $\int \frac{4}{2x+1}\,dx = 2\ln|2x+1| + k$

e) $\int \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx = x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$

f) $\int \text{tg } 3x\,dx = \int \frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + k$

031 Observa que la derivada de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es $y' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, y que, por tanto:

$$\int -\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)} + k$$

Usa lo anterior para calcular estas integrales.

a) $\displaystyle\int -\frac{\ln 2}{2^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^2\ x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{(e^x+5)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$

f) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{(cos\ x + 3)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int -\frac{\ln 2}{2^x}\,dx = \frac{1}{2^x} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^2\ x}\,dx = \frac{1}{cos\ x} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{(e^x+5)^2}\,dx = -\frac{3}{e^x+5} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{1}{cos\ x + sen\ x} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}\,dx = \frac{1}{x^2-x} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{(cos\ x + 3)^2}\,dx = \frac{1}{cos\ x + 3} + k$

032 El resultado de las siguientes integrales es una función del tipo $y = \dfrac{1}{f(x)}$. Determínalas.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2\ x}\,dx$

c) $\displaystyle\int -\frac{\ln 3}{x\ln^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx = -\frac{1}{\ln x} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2\ x}\,dx = -\frac{1}{tg\ x} + k$

c) $\displaystyle\int -\frac{\ln 3}{x\ln^2 x}\,dx = \frac{\ln 3}{\ln x} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\,dx = \int\left(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+\ln x)^2}\right)dx =$

$\displaystyle = \int\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{(x+\ln x)^2}\right)dx = -\frac{1}{x+\ln x} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = -\frac{1}{x\ cos\ x + sen\ x} + k$

033 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{1}^{3} (2x^2 + 8x + 1)\, dx$

c) $\int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx$

b) $\int_{2}^{4} (6x^2 + 4x - 2)\, dx$

d) $\int_{-6}^{-1} (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx$

a) $F(x) = \int (2x^2 + 8x + 1)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 4x^2 + x$

$$\int_{1}^{3} (2x^2 + 8x + 1)\, dx = F(3) - F(1) = \frac{171}{3} - \frac{17}{3} = \frac{154}{3}$$

b) $F(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x$

$$\int_{2}^{4} (6x^2 + 4x - 2)\, dx = F(4) - F(2) = 152 - 20 = 132$$

c) $F(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx = \frac{x^4}{8} - 4x^3 - \frac{3x^2}{2}$

$$\int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx = F(3) - F(-2) = -\frac{891}{8} - 28 = -\frac{1.115}{8}$$

d) $F(x) = \int (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x$

$$\int_{-6}^{-1} (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx = F(-1) - F(-6) = \frac{25}{12} - 840 = -\frac{10.055}{12}$$

034 Resuelve.

a) $\int_{2}^{5} \frac{4}{x+2}\, dx$

e) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

b) $\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\, dx$

f) $\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx$

c) $\int_{2}^{4} \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx$

g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx$

d) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\, dx$

h) $\int_{1}^{2} \frac{4}{x^5}\, dx$

a) $F(x) = \int \frac{4}{x+2}\, dx = 4 \ln |x+2|$

$$\int_2^5 \frac{4}{x+2}\, dx = F(5) - F(2) = 4 \ln 7 - 4 \ln 4 = 4 \ln \frac{7}{4}$$

b) $F(x) = \int \frac{6}{x^2}\, dx = -\frac{6}{x}$

$$\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\, dx = F(-3) - F(-5) = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

c) $F(x) = \int \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln |x-1| - \frac{4}{x}$

$$\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx = F(4) - F(2) = 7 - \ln 3 - \ln 1 = 7 - \ln 3$$

d) $F(x) = \int \frac{2}{1+x^2}\, dx = 2\ arc\ tg\ x$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\, dx = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e) $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\ arc\ sen\ x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

f) $F(x) = \int \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx = 16\sqrt{x+4}$

$$\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx = F(3) - F(-1) = 16\sqrt{7} - 16\sqrt{3}$$

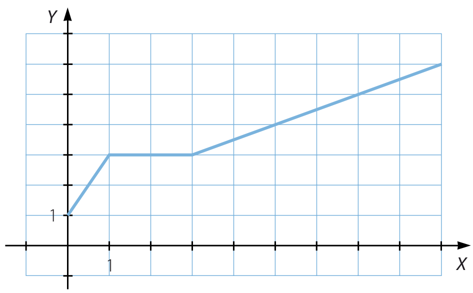
g) $F(x) = \int (3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx = -3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -3 - 5 = -8$$

h) $F(x) = \int \frac{4}{x^5}\, dx = -\frac{1}{x^4}$

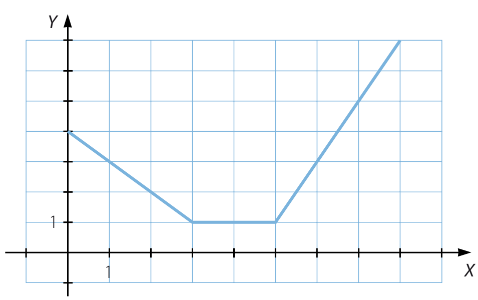
$$\int_1^2 \frac{4}{x^5}\, dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$$

035 Completa la tabla referida a la gráfica de la función.



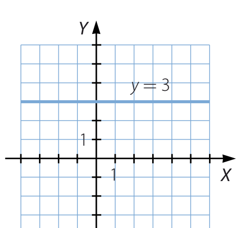
x	1	2	3	4	5	6
Área entre 0 y x	2	5	8	$\frac{45}{4}$	15	$\frac{77}{4}$

036 Completa la tabla con la función representada en el gráfico.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	$\frac{7}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$

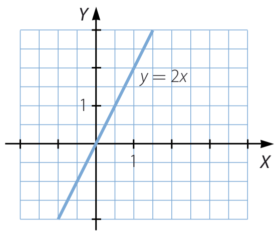
037 Representa la función $y = 3$, y completa la tabla de su función integral. Determina la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	3	6	9	12	15

La expresión analítica de la función es: $y = 3x$

038 Representa la función $y = 2x$, y completa la tabla de su función integral. Halla la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	1	4	9	16	25

La expresión analítica de la función es: $y = x^2$

039 Halla el área encerrada bajo la gráfica y el eje X en el intervalo [0, 2]. ¿Y en los intervalos [2, 5] y [5, 8]? Hazlo también en los intervalos [1, 3] y [4, 7].

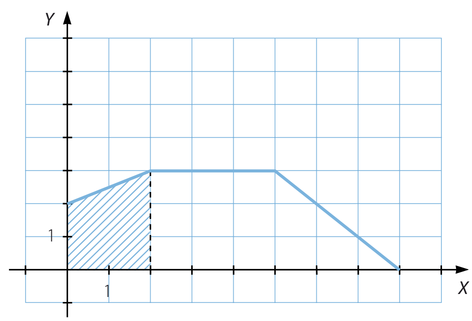
$$A([0, 2]) = 4 + \frac{2 \cdot 1}{2} = 5$$

$$A([2, 5]) = 3 \cdot 3 = 9$$

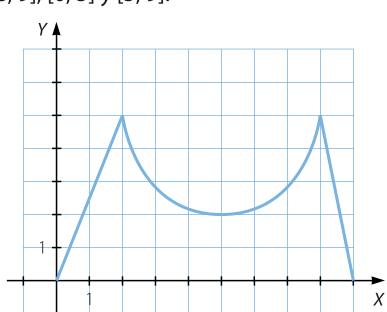
$$A([5, 8]) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$A([1, 3]) = 2 + \frac{3}{4} + 3 = \frac{23}{4}$$

$$A([4, 7]) = 3 + 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 7$$



040 Determina el área que queda situada bajo la función y sobre el eje X en los intervalos [0, 2], [2, 5], [2, 8], [8, 9], [0, 5] y [5, 9].



$$A([0, 2]) = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

$$A([2, 5]) = \frac{60 - 9\pi}{4}$$

$$A([2, 8]) = \frac{60 - 9\pi}{2}$$

$$A([8, 9]) = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$A([0, 5]) = 5 + \frac{60 - 9\pi}{4} = \frac{80 - 9\pi}{4}$$

$$A([5,9]) = \frac{60 - 9\pi}{4} + \frac{5}{2} = \frac{70 - 9\pi}{4}$$

041 Determina el área de la región comprendida entre la función, el eje X y las abscisas indicadas.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x$ $\quad x = 2$ y $x = 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$ $\quad x = 1$ y $x = 3$

c) $f(x) = 5^x$ $\quad x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\quad x = 3$ y $x = 8$

e) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = \pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$

a) $F(x) = \int (3x^2 - 2x)\, dx = x^3 - x^2$

$$\text{Área} = |F(4) - F(2)| = |48 - 4| = 44$$

b) $F(x) = \int (x^3 - x^2 + 5x + 1)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} + x$

$$\text{Área} = |F(3) - F(1)| = \left|\frac{147}{4} - \frac{41}{12}\right| = \frac{100}{3}$$

c) $F(x) = \int 5^x\, dx = \dfrac{5^x}{\ln 5}$

$$\text{Área} = |F(2) - F(-1)| = \left|\frac{25}{\ln 5} - \frac{1}{5\ln 5}\right| = \frac{124}{5\ln 5}$$

d) $F(x) = \int \dfrac{4}{x^2}\, dx = -\dfrac{4}{x}$

$$\text{Área} = |F(8) - F(3)| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right| = \frac{5}{6}$$

e) $F(x) = \int sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Área} = \left|F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(\pi)\right| = |1 - 0| = 1$$

042 Comprueba que las funciones son negativas en el intervalo indicado. Halla el área de la zona definida en ese intervalo por la función y el eje de abscisas.

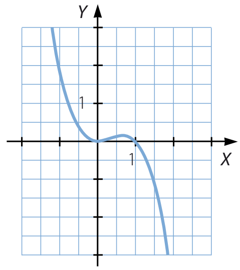
a) $f(x) = x^2 - x^3$ $\quad$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ $\quad$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x + 2}$ $\quad$ en $[-7, -5]$

d) $f(x) = cos\,(\pi + x)$ $\quad$ en $[-1, 1]$

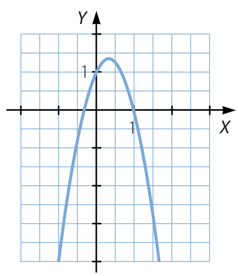
a)



$$F(x) = \int (x^2 - x^3)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\text{Área} = \left|F(2) - F(1)\right| = \left|-\frac{4}{3} - \frac{1}{12}\right| = \frac{17}{12}$$

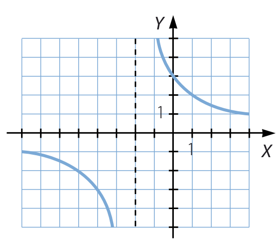
b)



$$F(x) = \int (1 + 2x - 3x^2)\,dx = x + x^2 - x^3$$

$$\text{Área} = \left|F(4) - F(2)\right| = \left|-44 + 2\right| = 42$$

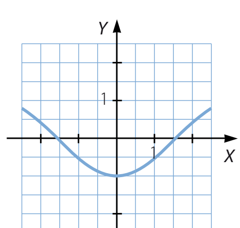
c)



$$F(x) = \int \frac{6}{x+2}\,dx = 6\ln\left|x+2\right|$$

$$\text{Área} = \left|F(-5) - F(-7)\right| = \left|6\ln 3 - 6\ln 5\right| = 6\ln\frac{3}{5}$$

d)



$$F(x) = \int \cos(\pi + x)\,dx = \operatorname{sen}(\pi + x)$$

$$\text{Área} = \left|F(1) - F(-1)\right| = \left|\operatorname{sen}(\pi + 1) - \operatorname{sen}(\pi - 1)\right| = 1{,}68$$

043 Calcula el área de la zona limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que se indican. Ten en cuenta que las funciones pueden cortar al eje X.

a) $f(x) = 3x^2 + 16x - 12$ $\qquad x = -7$ y $x = 0$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$ $\qquad x = -1$ y $x = 5$

c) $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20$ $\qquad x = -1$ y $x = 3$

d) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad x = 0$ y $x = \pi$

e) $f(x) = 4^x - 4$ $\qquad x = 0$ y $x = 2$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 16x - 12)\, dx = x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$\left|\int_{-7}^{-6} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| + \left|\int_{-6}^{0} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| =$$

$$= \left|F(-6) - F(-7)\right| + \left|F(0) - F(-6)\right| = \left|144 - 133\right| + \left|0 - 144\right| = 155$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 + 6x - 20)\, dx + \int_{2}^{5} (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \left|F(2) - F(-1)\right| + \left|F(5) - F(2)\right| =$$

$$= \left|-\frac{68}{3} - \frac{67}{3}\right| + \left|\frac{175}{3} + \frac{68}{3}\right| = 126$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{19x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} - 20x$$

$$\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)\right| + \left|F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{445}{96} - \frac{154}{3}\right| + \left|30 + \frac{445}{96}\right| = \frac{4.349}{48}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|-1 - 0\right| + \left|0 + 1\right| = 2$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow 4^x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

$$F(x) = \int (4^x - 4)\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 4x$$

$$\left|\int_0^1 (4^x - 4)\, dx\right| + \left|\int_1^2 (4^x - 4)\, dx\right| = \left|F(1) - F(0)\right| + \left|F(2) - F(1)\right| =$$

$$= \left|\frac{4}{\ln 4} - 4 - \frac{1}{\ln 4}\right| + \left|\frac{16}{\ln 4} - 8 - \frac{4}{\ln 4} + 4\right| = 6{,}48$$

044 Halla el área de la región que queda definida entre las funciones y el eje *X*.

a) $y = (x - 2)(2x + 1)$
b) $y = (3 + x)(2 - 5x)$
c) $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
d) $y = x^3 - x^2 - 21x + 45$
e) $y = (x + 3)(2x - 1)(3x + 2)$

a) $f(x) = 0 \rightarrow (x - 2)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x - 2)(2x + 1)\, dx = \int (2x^2 - 3x - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x$$

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x^2 - 3x - 2)\, dx\right| = \left|F(2) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{14}{3} - \frac{13}{24}\right| = \frac{125}{24}$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow (3 + x)(2 - 5x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = -3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (3 + x)(2 - 5x)\, dx = \int (-5x^2 - 13x + 6)\, dx = -\frac{5x^3}{3} - \frac{13x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{\frac{2}{5}} (-5x^2 - 13x + 6)\, dx\right| = \left|F\left(\frac{2}{5}\right) - F(-3)\right| = \left|\frac{94}{75} + \frac{63}{2}\right| = \frac{4.913}{150}$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$\left|\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx\right| =$$

$$= \left|F(1) - F(-2)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| = \left|\frac{17}{4} + 16\right| + \left|-16 - \frac{17}{4}\right| = \frac{81}{2}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 - 21x + 45)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{21x^2}{2} + 45x$$

$$\left|\int_{-5}^{3} (x^3 - x^2 - 21x + 45)\,dx\right| = \left|F(3) - F(-5)\right| = \left|\frac{207}{4} + \frac{3.475}{12}\right| = \frac{1.024}{3}$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow (x + 3)(2x - 1)(3x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (x + 3)(2x - 1)(3x + 2)\,dx = \int (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx =$$

$$= \frac{3x^4}{2} + \frac{19x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-\frac{2}{3}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx\right| =$$

$$= \left|F\left(-\frac{2}{3}\right) - F(-3)\right| + \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{214}{81} + 27\right| + \left|-\frac{191}{96} - \frac{214}{81}\right| = \frac{88.837}{2.592}$$

045 ●●○ Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$
b) $x = 3$ y $x = 7$
c) $x = -1$ y $x = 4$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$$F(x) = \int (4x+1)\,dx = 2x^2 + x$$

$$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x+1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{0} (4x+1)\,dx\right| = \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(0) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|0 + \frac{1}{8}\right| = \frac{5}{4}$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow -x + 6 = 0 \rightarrow x = 6$

$$F(x) = \int (-x+6)\,dx = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{3}^{6} (-x+6)\,dx\right| + \left|\int_{6}^{7} (-x+6)\,dx\right| = \left|F(6) - F(3)\right| + \left|F(7) - F(6)\right| =$$

$$= \left|18 - \frac{27}{2}\right| + \left|\frac{35}{2} - 18\right| = 5$$

c) $$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x+1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{1} (4x+1)\,dx\right| + \int_{1}^{4} (-x+6)\,dx =$$

$$= \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|3 + \frac{1}{8}\right| + \left|16 - \frac{11}{2}\right| = 16$$

046 ●●○ **Sea la función $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$**

Determina el área de la región limitada por esta curva, el eje X y las rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$ b) $x = 3$ y $x = 7$ c) $x = -1$ y $x = 4$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 6x - 3)\,dx = x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\left|\int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| = \left|F(0) - F(-1)\right| = \left|0 - 5\right| = 5$$

b) $$F(x) = \int \frac{6}{x}\,dx = 6 \ln|x|$$

$$\left|\int_{3}^{7} \frac{6}{x}\,dx\right| = \left|F(7) - F(3)\right| = \left|6 \ln 7 - 6 \ln 3\right| = 6 \ln \frac{7}{3}$$

c) $\left|\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2+6x-3)\,dx\right| + \left|\int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2+6x-3)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} \frac{6}{x}\,dx\right| =$

$= \left|F(-1+\sqrt{2})-F(-1)\right| + \left|F(1)-F(-1+\sqrt{2})\right| + \left|F(4)-F(1)\right| =$

$= \left|5-4\sqrt{2}-5\right| + \left|1-(5-4\sqrt{2})\right| + \left|6\ln 4 - 6\ln 1\right| = 8\sqrt{2}+5+6\ln 4$

047 Halla el área de la región limitada por estas curvas.

a) $y = x^2+5x+8$ $\quad y = x+8$
b) $y = 6-x-x^2$ $\quad y = -2x$
c) $y = -x^2-6x-5$ $\quad y = -2x^2-12x-10$
d) $y = x^3-2x^2+x$ $\quad y = x^3-3x^2+3x$

a) $x^2+5x+8 = x+8 \rightarrow x^2+4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=0 \end{cases}$

$F(x) = \int (x^2+5x+8-(x+8))\,dx = \int (x^2+4x)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x^2$

$\left|\int_{-4}^{0} (x^2+4x)\,dx\right| = \left|F(0)-F(-4)\right| = \left|0-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}$

b) $6-x-x^2 = -2x \rightarrow x^2-x-6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

$F(x) = \int (6-x-x^2-(-2x))\,dx = \int (-x^2+x+6)\,dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x$

$\left|\int_{-2}^{3} (-x^2+x+6)\,dx\right| = \left|F(3)-F(-2)\right| = \left|\frac{27}{2}+\frac{22}{3}\right| = \frac{125}{6}$

c) $-x^2-6x-5 = -2x^2-12x-10 \rightarrow x^2+6x+5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases}$

$F(x) = \int (-x^2-6x-5-(-2x^2-12x-10))\,dx = \int (x^2+6x+5)\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}+3x^2+5x$

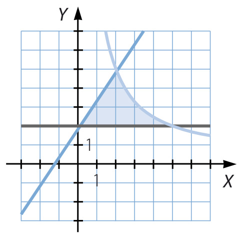
$\left|\int_{-5}^{-1} (x^2+6x+5)\,dx\right| = \left|F(-1)-F(-5)\right| = \left|-\frac{7}{3}-\frac{25}{3}\right| = \frac{32}{3}$

d) $x^3-2x^2+x = x^3-3x^2+3x \rightarrow x^2-2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

$F(x) = \int (x^3-2x^2+x-(x^3-3x^2+3x))\,dx = \int (x^2-2x)\,dx = \frac{x^3}{3}-x^2$

$\left|\int_{0}^{2} (x^2-2x)\,dx\right| = \left|F(2)-F(0)\right| = \left|-\frac{4}{3}-0\right| = \frac{4}{3}$

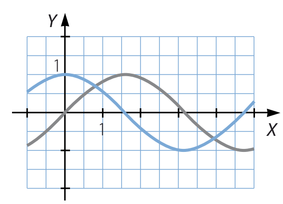
048 ●○○ Halla el área de la región limitada por las funciones $y = \dfrac{10}{x}$, $y = \dfrac{3}{2}x + 2$ e $y = 2$.



$$\left|\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x + 2 - 2\right) dx\right| + \left|\int_2^5 \left(\frac{10}{x} - 2\right) dx\right| = \left|\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2\right| + \left|\left[10 \ln |x| - 2x\right]_2^5\right| =$$

$$= |3 - 0| + |10 \ln 5 - 10 - (10 \ln 2 - 4)| = 10 \ln \frac{5}{2} - 3$$

049 ●●○ Las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ determinan regiones del plano, que son la repetición de una figura. Determina el área de la figura base.

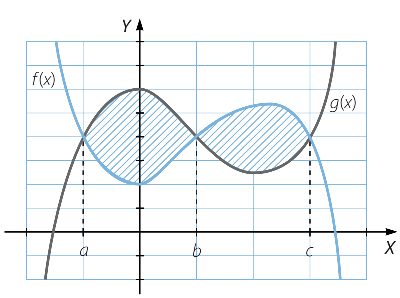


$$sen\, x = cos\, x \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$F(x) = \int (sen\, x - cos\, x)\, dx = -cos\, x - sen\, x$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\, x - cos\, x)\, dx\right| = \left|F\left(\frac{5\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\sqrt{2} + \sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$$

050 ●●○ El área de la región limitada por las dos curvas de la figura se indica por una de las siguientes expresiones. Di cuál es la expresión.



a) $\displaystyle\int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx$

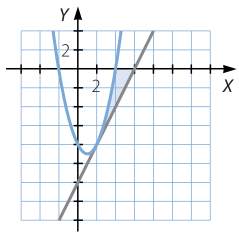
b) $\displaystyle\int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx$

c) $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$

d) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$

La expresión es la del apartado c).

051 Dibuja la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ y su recta tangente por el punto de abscisa 2. Halla el área de la región limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.



Como $y' = 2x - 2$, la recta tangente es:

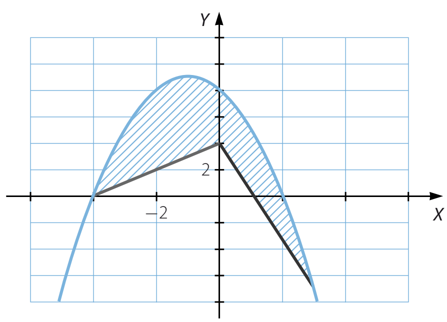
$$y + 8 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 12$$

$$F(x) = \int (x^2 - 2x - 8 - (2x - 12))\, dx =$$

$$= \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$\left| \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \right| = \left| F(4) - F(2) \right| = \left| \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

052 Halla el área de la región del plano indicada en el dibujo, sabiendo que las tres funciones son $y = 8 - 2x - x^2$, $y = x + 4$ y $11x + 3y - 12 = 0$.



$$\int_{-4}^{0} \left(8 - 2x - x^2 - (x + 4)\right) dx + \int_0^3 \left(8 - 2x - x^2 - \left(-\frac{11}{3}x + 4\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(4 - 3x - x^2\right) dx + \int_0^3 \left(4 + \frac{5}{3}x - x^2\right) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} + \left[4x + \frac{5x^2}{6} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left|0 + \frac{56}{3}\right| + \left|0 + \frac{21}{2}\right| = \frac{175}{6}$$

053 Un móvil que parte con una velocidad inicial de 3 m/s se somete a una aceleración constante de 2 m/s. Eso significa que su velocidad viene expresada por la fórmula $v = 3 + 2t$, mientras que el espacio que recorre en función del tiempo es: $e = 3t + t^2$.

(Recuerda que, en un movimiento uniformemente acelerado,

$v = v_0 + at$ *y* $e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$*).*

Representa la función velocidad y calcula.

a) El área comprendida entre la gráfica, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 2.

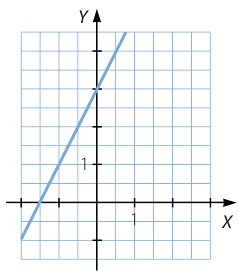
b) El espacio recorrido en los dos primeros segundos.

c) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 5.

d) El espacio recorrido en los cinco primeros segundos.

e) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 2 y 6.

f) El espacio recorrido entre el segundo 2 y el segundo 6.



a) $\displaystyle\int_0^2 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_0^2 = 10$

b) $e = 3 \cdot 2 + 2^2 = 10$ m

c) $\displaystyle\int_0^5 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_0^5 = 40$

d) $e = 3 \cdot 5 + 5^2 = 40$ m

e) $\displaystyle\int_2^6 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_2^6 = |54-10| = 44$

f) $(3 \cdot 6 + 6^2) - (3 \cdot 2 + 2^2) = 54 - 10 = 44$ m

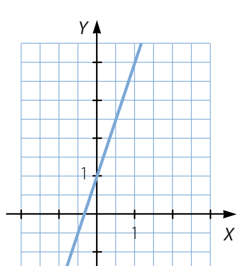
054 La velocidad de un móvil viene dada por la fórmula $v = 1 + 3t$.
Representa la función.

Calcula, utilizando la medida de sus áreas:

a) El espacio recorrido en los tres primeros segundos.

b) El espacio recorrido entre el segundo 1 y el segundo 6.

c) El espacio recorrido entre el segundo 8 y el segundo 12.



a) $\displaystyle\int_0^3 (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3 = \frac{33}{2}$

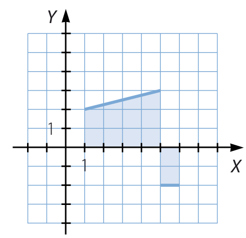
b) $\displaystyle\int_1^6 (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_1^6 = 60 - \frac{5}{2} = \frac{115}{2}$

c) $\displaystyle\int_8^{12} (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_8^{12} = 228 - 104 = 124$

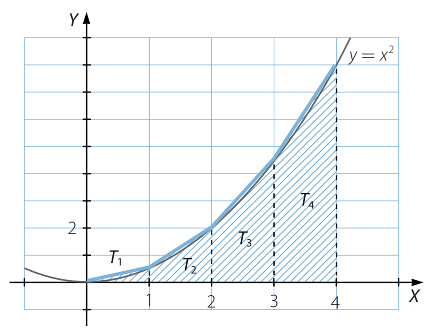
055 ¿Es posible encontrar una función tal que $\int_1^6 f(x)\,dx = 8$, pero que el área descrita por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$ sea 12?

En caso afirmativo, represéntala.

Sí, es posible si la gráfica de la función está por encima y por debajo del eje X.
Respuesta abierta.



056 La siguiente función tiene por ecuación $y = x^2$. Para calcular el área que queda debajo de la curva, sobre el eje X y las abscisas 0 y 4, podemos hacerlo de forma aproximada utilizando el área de los trapecios que hemos dibujado.



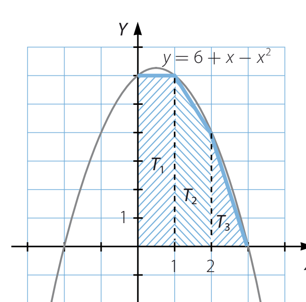
El área de esos trapecios es:

$$A_1 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = \frac{5}{2} \qquad A_3 = \frac{13}{2} \qquad A_4 = \frac{25}{2}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 22 \text{ unidades cuadradas}$$

a) Realiza el cálculo por medio de integrales y comprueba que el error no es excesivo.

b) Calcula, mediante los dos procedimientos, el área de la región que la curva $y = 6 + x - x^2$ describe en el primer cuadrante.



a) $$\int_0^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}33$$

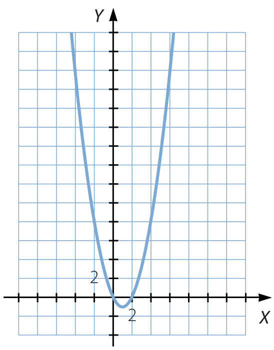
b) $T_1 = 6 \qquad T_2 = 5 \qquad T_3 = 2$

$T_1 + T_2 + T_3 = 13$

$$\int_0^3 (6 + x - x^2)\,dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

057 El cálculo de una integral definida se relaciona con el área bajo una curva. Explica por qué se verifica entonces que:

$$\int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx < \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$



$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx < 0 \rightarrow \int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx < \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$

058 De la función $f(x) = x^2 + bx + c$ se sabe que determina un área de 36 unidades cuadradas con el eje X y las abscisas 0 y 3, y que corta al eje X, al menos, en el punto $(-3, 0)$. Determina la expresión algebraica de la función $f(x)$.

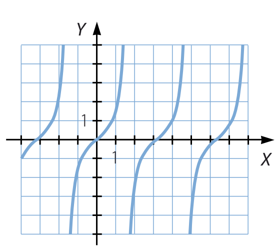
$$\int_0^3 (x^2 + bx + c)\,dx = 36 \rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^3 = 36$$

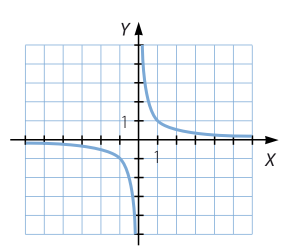
$$\rightarrow 9 + \frac{9b}{2} + 3c = 36 \rightarrow 3b + 2c = 18$$

Si el punto $(-3, 0)$ pertenece a la gráfica de la función: $9 - 3b + c = 0 \rightarrow 3b - c = 9$, y se obtiene que: $c = 3 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 3$

059 Calcula $\int_0^\pi tg\,x\,dx$ y $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ y explica los resultados obtenidos.

$$\int_0^\pi tg\,x\,dx = \int_0^\pi \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx = \Big[-\ln|cos\,x|\Big]_0^\pi = 0 \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^1 = 0$$





Las integrales definidas son iguales a cero, porque las áreas determinadas por las gráficas por encima y por debajo del eje X tienen el mismo valor, pero son de distinto signo, y se anulan.

060 Al llover, una gota de agua cae desde una altura de 600 m. ¿Qué velocidad tendrá a los 3 segundos? Determina mediante integrales el espacio que habrá recorrido hasta ese momento.

¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

(La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2.)

La velocidad viene dada por la fórmula: $v = 9{,}8t$

A los 3 segundos, la velocidad es: $v = 29{,}4$ m/s

$$e = \int_0^3 9{,}8t\ dt = \left[4{,}9t^2\right]_0^3 = 44{,}1\text{ m} \qquad 4{,}9t^2 = 600 \rightarrow t^2 = 122{,}44 \rightarrow t = 11{,}06\text{ s}$$

061 Halla una primitiva, $F(x)$, de la función:

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$$

tal que $F(2) = 5$.

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = 3\sqrt{1+x^2} + k$$

$$F(2) = 5 \rightarrow 3\sqrt{5} + k = 5 \rightarrow k = 5 - 3\sqrt{5}$$

Así, la función es: $F(x) = 3\sqrt{1+x^2} + 5 - 3\sqrt{5}$

062 Siendo $f(x)$ una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 4 & \text{si} \quad x \in (2, 3] \\ -2x + 10 & \text{si} \quad x \in (3, 4] \end{cases}$$

calcula $\displaystyle\int_0^x f(x)\, dx$.

Si $x \in (0, 2]$:

$$\int_0^x f(x)\, dx = \int_0^x 2x\ dx = \left[x^2\right]_0^x = x^2$$

Si $x \in (2, 3]$:

$$\int_0^x f(x)\, dx = \int_0^2 2x\ dx + \int_2^x 4\ dx = \left[x^2\right]_0^2 + \left[4x\right]_2^x = 4 + 4x - 8 = 4x - 4$$

Y si $x \in (3, 4]$:

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^2 2x\ dx + \int_2^3 4\ dx + \int_3^x (-2x+10)\, dx = \left[x^2\right]_0^2 + \left[4x\right]_2^3 + \left[-x^2 + 10x\right]_3^x =$$

$$= 4 + 4 - x^2 + 10x - 21 = -x^2 + 10x - 13$$

063 De una función $f(x)$ sabemos que:

$$f(-1) = -19 \qquad f'(2) = 24 \qquad f''(x) = 18x - 10$$

Determina su expresión analítica.

$$F'(x) = \int (18x - 10)\,dx = 9x^2 - 10x + k$$

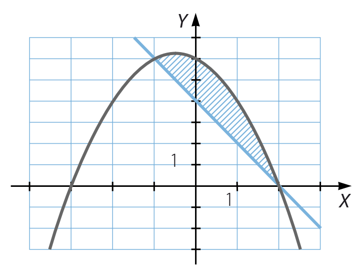
Si $f'(2) = 24 \to 36 - 20 + k = 24 \to k = 8$, y entonces: $f'(x) = 9x^2 - 10x + 8$

$$F(x) = \int (9x^2 - 10x + 8)\,dx = 3x^3 - 5x^2 + 8x + k$$

Si $f(-1) = -19 \to -3 - 5 - 8 + k = -19 \to k = -3$

Por tanto, la función es: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

064 **Calcula el área de la región limitada por las dos curvas de la figura, sabiendo que una de ellas es una parábola.**



La parábola pasa por los puntos: (0, 6), (−3, 0) y (2, 0), su ecuación será de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

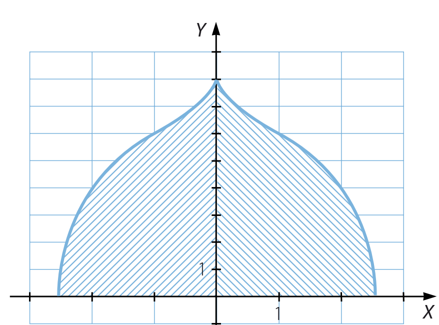
$$\left.\begin{array}{r} c = 6 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a - b = -2 \\ 2a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right\} \to f(x) = -x^2 - x + 6$$

La recta pasa por los puntos: (2, 0) y (0, 4), y su ecuación es $g(x) = -2x + 4$.

El área de la región limitada por las dos curvas es:

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 - x + 6 - (-2x + 4))\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

065 **La siguiente figura es la silueta del arco de un palacio árabe. Halla el área de la superficie que forma con el eje *X*, sabiendo que la figura se construye trasladando y haciendo simetrías de la función $y = tg\,x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{18}\right)$.**



$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} tg\,x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx =$$

$$= \Big[-\ln|cos\,x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} = 0{,}72$$

066 Dada la integral $\displaystyle\int \frac{8x-7}{x^2-x-2}$, encuentra los valores de A y B tales que:

$$\frac{8x-7}{x^2-x-2}=\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Opera en el último miembro e iguala los polinomios. Después, resuelve la integral.

$$\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\to 8x-7=A(x+1)+B(x-2)$$

$$\to \left.\begin{aligned}A+B&=8\\A-2B&=-7\end{aligned}\right\}\begin{aligned}A&=3\\B&=5\end{aligned}$$

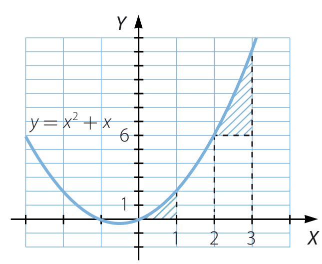
$$\int\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x+1}\right)dx=3\ln|x-2|+5\ln|x+1|+k$$

067 La variación instantánea de la cotización, su derivada, sigue durante una semana la función $f(x)=0{,}02x^2+1$, donde x es el día de la semana ($0=$ lunes, $1=$ martes, …). Si el lunes cotiza a 5 €, halla la función de cotización.

$$F(x)=\int(0{,}02x^2+1)\,dx=0{,}02\cdot\frac{x^3}{3}+x+k$$

$$\text{Si } F(0)=5\to k=5\to F(x)=0{,}02\cdot\frac{x^3}{3}+x+5$$

068 Halla el área de las figuras coloreadas, si la gráfica corresponde a la función $f(x)=x^2+x$.

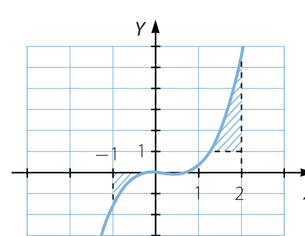


$$\int_0^1(x^2+x)\,dx+\int_2^3(x^2+x)\,dx-6=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_2^3-6=$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{53}{6}-6=\frac{11}{3}$$

069 Determina el área de las zonas coloreadas sabiendo que la curva corresponde a $f(x)=x^3-\dfrac{2x^2}{3}$.



$$x^3-\frac{2x^2}{3}=0\to\begin{cases}x=0\\[4pt] x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$x^3-\frac{2x^2}{3}=1\to x\cong 1{,}28$$

$$\left|\int_{-1}^0\left(x^3-\frac{2x^2}{3}\right)dx\right|+\left|\int_{1,28}^2\left(x^3-\frac{2x^2}{3}\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{9}\right]_{-1}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{9}\right]_{1,28}^2\right|=$$

$$=0{,}47+2{,}22-0{,}205=2{,}485$$

070 De la función f sabemos que:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 8 \qquad \int_5^{10} f(x)\,dx = 2$$

Calcula razonadamente las siguientes integrales, e indica si utilizas alguna propiedad.

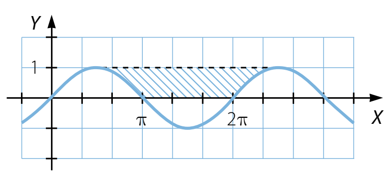
a) $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^5 (2\cdot f(x))\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^5 (7+f(x))\,dx$

a) $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^{10} f(x)\,dx = 8+2=10$

b) $\displaystyle\int_1^5 (2\cdot f(x))\,dx = 2\int_1^5 f(x)\,dx = 2\cdot 8 = 16$

c) $\displaystyle\int_1^5 (7+f(x))\,dx = \int_1^5 7\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \left[7x\right]_1^5 + 8 = 28+8=36$

071 La función cuya gráfica aparece en el dibujo es $f(x) = sen\,x$. Considera el recinto sombreado en la figura y contesta a las siguientes preguntas.



a) Halla de forma aproximada su área, y razona cuál puede ser su medida aproximada.

b) Calcula su valor mediante el cálculo integral.

a) El recinto sombreado corresponde aproximadamente a 4 rectángulos.

$$A = 4\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right) = \frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}18$$

b) $sen\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - sen\,x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\,dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (1 - sen\,x)\,dx =$$

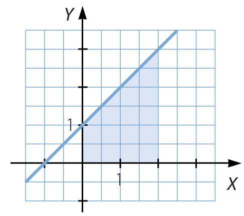
$$= \left[x + cos\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x + cos\,x\right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= \pi - 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi - \pi + \frac{5\pi}{2} - 2\pi - 1 = 2\pi - 2 \simeq 4{,}28$$

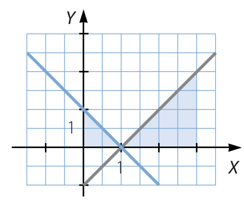
072 Representa gráficamente las siguientes funciones, y halla sus integrales sin utilizar la regla de Barrow.

a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

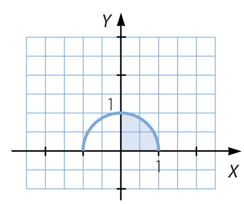
a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)\,dx = \frac{4}{2} + 2 = 4$



b) $\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx = \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = \frac{5}{2}$



c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$



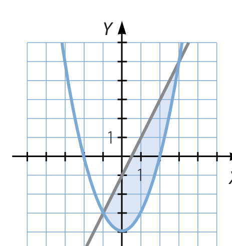
073 Dada la función $f(x) = sen\,x$, compara los valores de $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx$ y el área bajo la curva en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = \left[-cos\,x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad sen\,x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\,x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx\right| = \left|\left[-cos\,x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\left[-cos\,x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| = 1 + 1 = 2$$

La integral vale 0 mientras que el área es 4.

074 Representa gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta que pasa por los puntos $A(-1, -3)$ y $B(3, 5)$. Calcula su área.



La ecuación de la recta es: $y = 2x - 1$

$$\int_{-1}^{3} (2x - 1 - (x^2 - 4))\,dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

075 **Determina el área que encierra una parábola que pase por los puntos:**

$$(-2, 0) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \qquad (0, 6)$$

y la recta $y = x$ en el intervalo [1, 3].

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2, 0) \rightarrow 4a - 2b + c = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{25}{4} \\ (0, 6) \rightarrow c = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a - b = -3 \\ a + 2b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

Entonces, resulta que:

$$y = -x^2 + x + 6 \qquad -x^2 + x + 6 = x \rightarrow -x^2 + 6 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + x + 6 - x)\,dx = \int_{1}^{\sqrt{6}} (-x^2 + 6)\,dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (-x^2 + 6)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{1}^{\sqrt{6}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{\sqrt{6}}^{3} = 4\sqrt{6} - \frac{17}{3} + 9 - 4\sqrt{6} = \frac{10}{3}$$

PARA FINALIZAR...

076 **Comprueba que los siguientes pares de funciones son primitivas de la misma función.**

a) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \ln ax$

b) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ y $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$

c) $f(x) = 2\,sen^2\,x$ y $g(x) = -cos\,2x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}$

b) $f'(x) = 2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

$g'(x) = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

c) $f'(x) = 2 \cdot 2\,sen\,x\,cos\,x = 4\,sen\,x\,cos\,x$

$g'(x) = sen\,2x \cdot 2 = 2\,sen\,x\,cos\,x \cdot 2 = 4\,sen\,x\,cos\,x$

077 Calcula $\int sen^2 x\, dx$ y $\int cos^2 x\, dx$.

$$\int sen^2 x\ dx = \int \frac{1 - cos\,2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sen\,2x}{2}\right) + k$$

$$\int cos^2 x\ dx = \int \frac{1 + cos\,2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen\,2x}{2}\right) + k$$

078 Resuelve estas integrales.

a) $\int sec\ x\ dx$ b) $\int cosec\ x\ dx$

a) $$\int sec\ x\ dx = \int \frac{sec\ x\,(sec\ x + tg\ x)}{sec\ x + tg\ x}\,dx = \int \frac{sec^2 x + sec\ x\ tg\ x}{sec\ x + tg\ x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1}{cos^2 x} + \dfrac{sen\ x}{cos^2 x}}{\dfrac{1}{cos\ x} + \dfrac{sen\ x}{cos\ x}}\,dx = \ln\left|\frac{1}{cos\ x} + \frac{sen\ x}{cos\ x}\right| + k = \ln\left|sen\ x + tg\ x\right| + k$$

b) $$\int cosec\ x\ dx = \int \frac{1}{sen\ x}\,dx = \int \frac{1}{2\ sen\ \dfrac{x}{2}\cdot cos\ \dfrac{x}{2}}\,dx = 2\int \frac{\dfrac{1}{cos^2 \dfrac{x}{2}}}{\dfrac{sen\ \dfrac{x}{2}}{cos\ \dfrac{x}{2}}}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{sec^2 \dfrac{x}{2}}{tg\ \dfrac{x}{2}}\,dx = 2\ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right| + k$$

079 Justifica el razonamiento y calcula: $\int_{-2}^{2} sen^{27} x\ dx$.

Si $f(x)$ es par $\rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$ Si $f(x)$ es impar $\rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

Si $f(x)$ es par, la gráfica de la función es simétrica respecto del eje Y.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx \rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

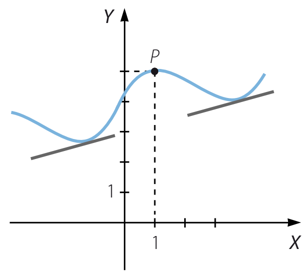
Si $f(x)$ es impar, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, y los recintos determinados por encima y por debajo del eje X son iguales:

$$\int_{-a}^{0} f(x) dx = -\int_0^a f(x)\ dx \rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx = 0$$

Como $sen^{27} x$ es una función impar:

$$\int_{-2}^{2} sen^{27} x\ dx = 0$$

080 Halla la función que pasa por el punto $P(1, 5)$ y tal que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos viene dada por la función $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.



$$f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int (3x^2 + 5x - 2)\, dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + k$$

$$(1, 5) \rightarrow 1 + \frac{5}{2} - 2 + k = 5 \rightarrow k = \frac{7}{2} \rightarrow f(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}$$

081 La velocidad de un cuerpo, lanzado verticalmente con una velocidad inicial v_0, y despreciando la resistencia del aire, viene dada por la función:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

donde g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo, en segundos. El cuerpo alcanza una altura que viene dada por la fórmula: $e = v \cdot t$, donde e es la altura.

a) ¿A qué altura se encontrará este cuerpo transcurridos t segundos?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en caer al suelo?

d) ¿Qué espacio recorre?

a) $e = v \cdot t \rightarrow e = v_0 \cdot t = 9{,}8t^2$

b) La fórmula corresponde a una función cuadrática cuya representación gráfica es una parábola. Como el coeficiente de mayor grado es negativo, la altura máxima se alcanza en el vértice de la parábola:

$$t = -\frac{v_0}{2 \cdot (-9{,}8)} = \frac{5v_0}{98} \rightarrow e = v_0 \cdot \frac{5v_0}{98} - 9{,}8 \cdot \left(\frac{5v_0}{98}\right)^2 = \frac{5{v_0}^2}{98} - \frac{5{v_0}^2}{196} = \frac{5{v_0}^2}{196}$$

c) El cuerpo tarda el mismo tiempo en alcanzar la máxima altura que en caer al suelo. Por tanto, el tiempo que tarda en caer al suelo es:

$$t = 2 \cdot \frac{5v_0}{98} = \frac{5v_0}{49}$$

d) El espacio que recorre en total es el doble del espacio que recorre para alcanzar la altura máxima.

$$e = 2 \cdot \frac{5{v_0}^2}{196} = \frac{5{v_0}^2}{98}$$

12 Estadística bidimensional

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La caverna

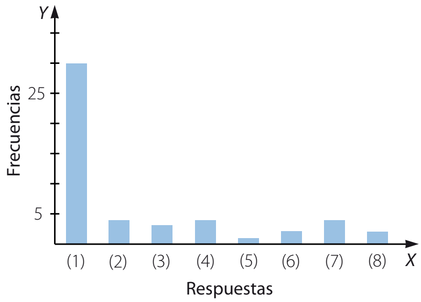
Buenas tardes, señor Algor, Buenas tardes, señor, Supongo que imagina por qué motivo le estoy telefoneando hoy, Supone bien, señor, dígame, Tengo ante mí los resultados y las conclusiones del sondeo acerca de sus artículos, [...] Y esos resultados cuáles son, señor, preguntó Cipriano Algor, Lamento informarle de que no fueron tan buenos cuanto desearíamos, Si es así nadie lo lamentará más que yo, Temo que su participación en la vida de nuestro Centro ha llegado al final, [...] Vaya tomando nota de los resultados, Dígamelos, El universo de los clientes sobre el que incidiría el sondeo quedó definido desde el principio por la exclusión de las personas que por edad, posición social, educación y cultura, y también por sus hábitos conocidos de consumo, fuesen previsible y radicalmente contrarias a la adquisición de artículos de este tipo, es bueno que sepa que si tomamos esta decisión, señor Algor, fue para no perjudicarlo de entrada, Muchas gracias, señor, Le doy un ejemplo, si hubiéramos seleccionado cincuenta jóvenes modernos, cincuenta chicos y chicas de nuestro tiempo, puede tener la certeza, señor Algor, de que ninguno querría llevarse a casa uno de sus muñecos, o si se lo llevase sería para usado en algo así como tiro al blanco, Comprendo, Escogimos veinticinco personas de cada sexo, de profesiones e ingresos medios, personas con antecedentes familiares modestos, todavía apegadas a gustos tradicionales, y en cuyas casas la rusticidad del producto no desentonaría demasiado, E incluso así, Es verdad, señor Algor, incluso así los resultados fueron malos, Qué le vamos a hacer, señor, Veinte hombres y diez mujeres respondieron que no les gustaban los muñecos de barro, cuatro mujeres dijeron que quizá los compraran si fueran más grandes, tres podrían comprarlos si fuesen más pequeños, de los cinco hombres que quedaban, cuatro dijeron que ya no estaban en edad de jugar y otro protestó por el hecho de que tres de las figurillas representasen extranjeros, para colmo exóticos, y en cuanto a las ocho mujeres que todavía faltan por mencionar, dos se declararon alérgicas al barro, cuatro tenían malos recuerdos de esta clase de objetos, y sólo las dos últimas respondieron agradeciendo mucho la posibilidad que les había sido proporcionada de decorar gratuitamente su casa con unos muñequitos tan simpáticos, hay que añadir que se trata de personas de edad que viven solas, Me gustaría conocer los nombres y las direcciones de esas señoras para darles las gracias, dijo Cipriano Algor, Lo lamento, pero no estoy autorizado a revelar datos personales de los encuestados, es una condición estricta de cualquier sondeo de este tipo, respetar el anonimato de las respuestas. [...] Buenas tardes, Buenas tardes.

JOSÉ SARAMAGO

Resume los datos en una tabla de frecuencias y represéntalos en un gráfico estadístico. ¿Puedes calcular alguna medida de centralización?

Se ha elegido una muestra de 50 personas con características personales y profesionales similares.

Respuestas	f_i
No les gustan los muñecos (1)	30
Los comprarían si fueran más grandes (2)	4
Los comprarían si fueran más pequeños (3)	3
No están en edad de jugar (4)	4
Protestan por figurillas de extranjeros (5)	1
Alérgicas al barro (6)	2
Malos recuerdos (7)	4
Agradecidas por ser gratuitas (8)	2



No es posible calcular ninguna medida de centralización porque la variable no es cuantitativa.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 En una revista leemos que el pastor alemán tiene una alzada media de 55 cm. ¿Crees que han medido a todos los pastores alemanes del planeta? Explica cómo crees que han llegado a esta conclusión.

No los han medido. Se elige una muestra representativa de la población de pastores alemanes y se estudia el valor de la media en dicha muestra.

002 Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando.

a) El programa favorito de los miembros de tu familia.
b) El número de calzado de los alumnos de un IES.
c) La temperatura media diaria de tu provincia.
d) La edad de los habitantes de un país.
e) El sexo de los habitantes de un pueblo.
f) El dinero gastado a la semana por tus amigos.
g) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
h) El color del pelo de tus compañeros de clase.

a) Cualitativa
b) Cuantitativa discreta
c) Cuantitativa continua
d) Cuantitativa discreta
e) Cualitativa
f) Cuantitativa discreta
g) Cualitativa
h) Cualitativa

003 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2 0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

a) Organiza los resultados en una tabla de frecuencias.
b) ¿Qué significan las frecuencias acumuladas?

a)

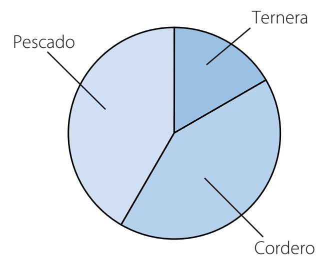
Horas	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,27	11	0,37
2	7	0,23	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1
	$N = 30$	$\sum h_i = 1$		

b) Las frecuencias acumuladas indican el número de alumnos que estudian como máximo el número de horas correspondiente. Por ejemplo, la frecuencia acumulada para el valor 2 es 18, es decir, hay 18 alumnos que estudian 0, 1 o 2 horas.

004 **De los 30 asistentes a una cena, el 20 % comió ternera, el 40 % cordero y el resto tomó pescado. Indica la variable estadística y organiza los resultados en una tabla de frecuencias; después, representa los datos en un diagrama de sectores.**

La variable estadística es el plato elegido en la cena.

Plato	f_i	h_i	F_i	H_i
Ternera	6	0,2	6	0,2
Cordero	12	0,4	18	0,6
Pescado	12	0,4	30	1
	$N = 30$	$\sum h_i = 1$		



ACTIVIDADES

001 **Pon dos ejemplos de variables estadísticas unidimensionales.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: la calificación de los alumnos de una clase en un examen y la estatura de los miembros de un equipo de baloncesto.

002 **Organiza estos datos en una tabla de frecuencias absolutas y relativas.**

0	5	1	1	4	4
0	6	2	2	3	6
1	4	7	1	7	5
3	6	8	2	8	6

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	2	0,08	2	0,08
1	4	0,17	6	0,25
2	3	0,13	9	0,38
3	2	0,08	11	0,46
4	3	0,13	14	0,59
5	2	0,08	16	0,67
6	4	0,17	20	0,84
7	2	0,08	22	0,92
8	2	0,08	24	1
	$N = 24$	$\sum h_i = 1$		

003 **La tabla muestra la estatura, en centímetros, de un grupo de personas.**

Estatura (cm)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195)
N.º de personas	40	85	25

a) **Elabora una tabla de frecuencias.**

b) **¿Qué porcentaje de personas miden entre 165 cm y 175 cm? ¿Y menos de 185 cm?**

a)

Estatura	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[165, 175)	170	40	0,27	40	0,27
[175, 185)	180	85	0,57	125	0,83
[185, 195)	190	25	0,17	150	1
		$N = 150$	$\sum h_i = 1$		

b) El porcentaje de personas que miden entre 165 cm y 175 cm es del 27 %.
Y el porcentaje de personas que miden menos de 185 cm es del 83 %.

004 **A partir de los datos, construye la tabla de frecuencias, y calcula las medidas de centralización.**

23	10	25	12	13	24	17	22
16	20	26	23	22	13	21	18
16	19	14	17	11	17	15	26

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
10	1	0,04	1	0,04
11	1	0,04	2	0,08
12	1	0,04	3	0,13
13	2	0,08	5	0,21
14	1	0,04	6	0,25
15	1	0,04	7	0,29
16	2	0,08	9	0,38
17	3	0,13	12	0,5
18	1	0,04	13	0,54
19	1	0,04	14	0,58
20	1	0,04	15	0,63
21	1	0,04	16	0,67
22	2	0,08	18	0,75
23	2	0,08	20	0,83
24	1	0,04	21	0,88
25	1	0,04	22	0,92
26	2	0,08	24	1
	$N = 24$	$\sum h_i = 1$		

$\overline{x} = \frac{440}{24} = 18{,}33 \rightarrow$ El valor medio es 18,33.

$Mo = 17 \rightarrow$ El valor más frecuente es 17.

$Me = \frac{17 + 18}{2} = 17{,}5$

Hay tantos valores menores que 17,5 como mayores.

005 **Obtén e interpreta las medidas de centralización correspondientes a los datos de esta tabla.**

Peso (kg)	[50, 65)	[65, 80)	[80, 95)
N.º de personas	75	140	80

Peso	x_i	f_i	h_i
[50, 65)	57,5	75	75
[65, 80)	72,5	140	215
[80, 95)	87,5	80	295
		$N = 295$	

$$\overline{x} = \frac{21.462,5}{295} = 72,75$$

El peso medio es de 72,75 kg.

El intervalo modal es [65, 80); su marca de clase: 72,5 es la moda.

Lo más frecuente es que el peso esté comprendido entre 65 kg y 80 kg.

El intervalo mediano es [65, 80); su marca de clase: 72,5 es la mediana.

Hay tantas personas que pesan menos de 72,5 kg como personas que pesan más.

006 **Calcula las medidas de dispersión para estos datos.**

Clases	[5, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)
Frecuencias	35	15	25	45

Clases	x_i	f_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
[5, 15)	10	35	16,67	277,89
[15, 25)	20	15	6,67	44,49
[25, 35)	30	25	3,33	11,09
[35, 45)	40	45	13,33	177,69
		$N = 120$		

$$\overline{x} = \frac{3.200}{120} = 26,67$$

Rango: $R = 45 - 5 = 40$

Desviación media: $DM = \dfrac{1.366,6}{120} = 11,39$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{18.666,8}{120} = 155,56$

Desviación típica: $\sigma = 12,47$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{12,47}{26.67} = 0,47$

007 **Compara las edades, en años, de los jugadores de estos equipos de baloncesto, utilizando las medidas estadísticas.**

A:	18	26	20	26	22	26	23	27	25	25
B:	20	21	20	21	22	23	23	24	25	25

$\overline{x}_A = \frac{238}{10} = 23{,}8 \qquad \sigma_A = \frac{79{,}6}{10} = 7{,}96 \qquad \sigma_A = 2{,}82 \qquad CV_A = \frac{2{,}82}{23{,}8} = 0{,}12$

$\overline{x}_B = \frac{224}{10} = 22{,}4 \qquad \sigma_B^2 = \frac{32{,}4}{10} = 3{,}24 \qquad \sigma_B = 1{,}8 \qquad CV_B = \frac{1{,}8}{22{,}4} = 0{,}08$

La media de las edades del equipo *A* es superior, pero también es mayor el coeficiente de variación de este equipo, por lo que hay más diferencias entre sus jugadores.

008 **Considera estas variables bidimensionales, y escribe las variables unidimensionales correspondientes y tres pares de valores que las determinan.**

a) Edad y sexo de los asistentes a un concierto.

b) Tamaño de un archivo informático y tiempo que se tarda en copiarlo.

a) $X \rightarrow$ Edad, en años, de los asistentes al concierto
$Y \rightarrow$ Sexo de los asistentes
(20, mujer) (25, hombre) (28, mujer)

b) $X \rightarrow$ Tamaño, en kb, del archivo informático
$Y \rightarrow$ Tiempo, en s, que se tarda en copiarlo
(220, 35) (158, 24) (285, 42)

009 **Ordena estos datos en una tabla de doble entrada.**

X	*Y*
0	18
0	12
2	8

X	*Y*
1	14
2	23
1	17

Y \ *X*	0	1	2	Total
8	0	0	1	1
12	1	0	0	1
14	0	1	0	1
17	0	1	0	1
18	1	0	0	1
23	0	0	1	1
Total	2	2	2	6

010 **Construye la tabla de doble entrada y las tablas marginales correspondientes.**

X	16	17	18	16	14	17	14	13	14	15
Y	5	4	6	6	8	3	5	4	8	8

Y \ *X*	13	14	15	16	17	18	Total
3	0	0	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	0	2
5	0	1	0	1	0	0	2
6	0	0	0	1	0	1	2
8	0	2	1	0	0	0	3
Total	1	3	1	2	2	1	10

Tabla de frecuencias marginales de *X*

x_i	f_i
13	1
14	3
15	1
16	2
17	2
18	1
Total	10

Tabla de frecuencias marginales de *Y*

y_i	f_i
3	1
4	2
5	2
6	2
8	3
Total	10

011 **Determina la covarianza para los datos que aparecen en la siguiente tabla.**

X	8	10	11	9	13	12	9	14
Y	20	18	16	22	10	10	21	9

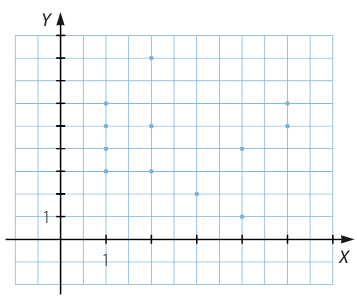
$$\overline{x} = \frac{86}{8} = 10,75$$

$$\overline{y} = \frac{126}{8} = 15,75$$

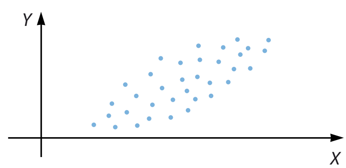
$$\sigma_{XY} = \frac{1.279}{8} - 10,75 \cdot 15,75 = -9,44$$

012 **Representa la nube de puntos correspondiente a la siguiente variable estadística bidimensional.**

X	1	1	3	5	2	4	5	2	5	2	4	3	2	1	1
Y	4	5	2	5	5	4	5	3	6	5	1	2	8	6	3



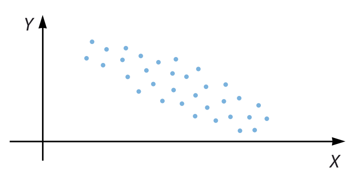
013 **Indica la dependencia entre estas variables.**



Dependencia lineal débil y positiva.

014 **Describe el grado de correlación entre las dos variables representadas.**

La correlación lineal es débil y negativa.



015 **Si el signo de la covarianza entre dos variables es negativa, ¿qué podemos decir del signo del coeficiente de correlación?**

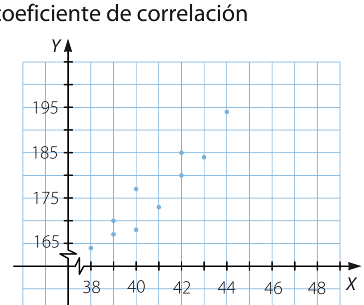
¿Y si la covarianza es positiva?

Si la covarianza es negativa, el coeficiente de correlación es negativo.
Y si la covarianza es positiva, el coeficiente de correlación es también positivo.

016 **Representa el diagrama de dispersión y halla el coeficiente de correlación de esta variable.**

X	39	43	40	40	42	41	42	38	39	44
Y	167	184	177	168	185	173	180	164	170	194

¿Qué relación puedes describir entre ellos?

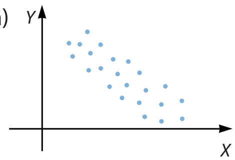


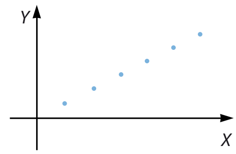
$\overline{x} = \frac{408}{10} = 40{,}8$ $\qquad \overline{y} = \frac{1.762}{10} = 176{,}2$

$\sigma_X = \sqrt{3{,}36} = 1{,}83$ $\qquad \sigma_Y = \sqrt{81{,}96} = 9{,}05$

$\sigma_{XY} = \frac{72.046}{10} - 40{,}8 \cdot 176{,}25 = 13{,}6$ $\qquad r_{XY} = \frac{13{,}6}{1.83 \cdot 9.05} = 0{,}82$

017 **Razona qué valor tomará el coeficiente de correlación.**

a) 

b) 

a) El coeficiente de correlación tomará un valor relativamente cercano a −1, porque la nube de puntos se aproxima bastante a una recta con pendiente negativa y la correlación es fuerte.

b) El coeficiente de correlación es 1, ya que la nube de puntos coincide con una recta de pendiente positiva.

018 **Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.**

X	2	5	6	8	9
Y	4	13	16	22	25

$$\overline{x} = \frac{30}{5} = 6 \qquad \overline{y} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\sigma_X^2 = \frac{30}{5} = 6 \qquad \sigma_{XY} = \frac{570}{5} - 6 \cdot 16 = 18$$

Recta de regresión de *Y* sobre *X*: $y - 16 = \frac{18}{6}(x - 6) \rightarrow y = 3x - 2$

019 **Determina la recta de regresión correspondiente.**

X	39	40	40	42	43	38	39	44	42	40
Y	167	168	180	164	177	154	185	195	183	172

$$\overline{x} = \frac{407}{10} = 40{,}7 \qquad \overline{y} = \frac{1.745}{10} = 174{,}5$$

$$\sigma_X^2 = \frac{16.599}{10} - 40{,}7^2 = 3{,}41 \qquad \sigma_{XY} = \frac{71.145}{10} - 40{,}7 \cdot 174{,}5 = 12{,}35$$

Recta de regresión de *Y* sobre *X*: $y - 174{,}5 = \frac{12{,}35}{3{,}41}(x - 40{,}7) \rightarrow y = 3{,}62x + 27{,}17$

020 **Determina las dos rectas de regresión, e indica la relación que hay entre las variables.**

a)

X	10	10	13	15	12
Y	6	5	2	3	5

b)

X	8	10	11	12	16	13	12	17	13	13
Y	15	10	15	10	20	15	10	25	10	15

a) $\overline{x} = \dfrac{60}{5} = 12$ $\overline{y} = \dfrac{21}{5} = 4{,}2$

$\sigma_X^2 = \dfrac{738}{5} - 12^2 = 3{,}6$ $\sigma_{XY} = \dfrac{241}{5} - 12 \cdot 4{,}2 = -2{,}2$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 4{,}2 = -\dfrac{2{,}2}{3{,}6}(x - 12) \rightarrow y = -0{,}61x + 11{,}52$

$\sigma_X^2 = \dfrac{99}{5} - 4{,}2^2 = 2{,}16$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 12 = -\dfrac{2{,}2}{2{,}16}(y - 4{,}2) \rightarrow x = -1{,}02y + 16{,}28$

$\sigma_X = \sqrt{3{,}6} = 1{,}89$ $\sigma_Y = \sqrt{2{,}16} = 1{,}47$

$r_{XY} = -\dfrac{2{,}2}{1{,}89 \cdot 1{,}47} = -0{,}79 \rightarrow$ La dependencia es débil y negativa.

b) $\overline{x} = \dfrac{125}{10} = 12{,}5$ $\overline{y} = \dfrac{145}{10} = 14{,}5$

$\sigma_X^2 = \dfrac{1.625}{10} - 12{,}5^2 = 6{,}25$ $\sigma_{XY} = \dfrac{1.890}{10} - 12{,}5 \cdot 14{,}5 = 7{,}75$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 14{,}5 = \dfrac{7{,}75}{6{,}25}(x - 12{,}5) \rightarrow y = 1{,}24x - 1$

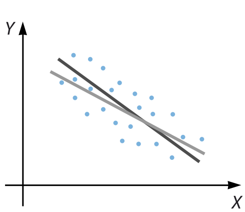
$\sigma_X^2 = \dfrac{2.325}{10} - 14{,}5^2 = 22{,}25$

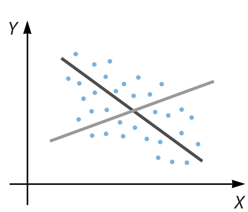
Recta de regresión de X sobre Y: $x - 12{,}5 = \dfrac{7{,}75}{22{,}25}(y - 14{,}5) \rightarrow x = 0{,}35y + 7{,}43$

$\sigma_X = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ $\sigma_Y = \sqrt{22{,}25} = 4{,}72$

$r_{XY} = \dfrac{7{,}75}{2{,}5 \cdot 4{,}72} = 0{,}66 \rightarrow$ La dependencia es débil y positiva.

021 **Razona cuál es el grado de dependencia entre las variables en cada caso.**

a)


b)


a) La dependencia es fuerte y negativa.

b) La dependencia es débil y negativa.

022 En un estudio sobre los ingresos mensuales, X, y la superficie de las viviendas, Y, resulta: $y = 0{,}02x + 47{,}96$.

a) Halla la estimación de la superficie de la vivienda de una familia cuyos ingresos mensuales son de 3.200 €.

b) Si una familia vive en una casa de 90 m², ¿cuáles serán sus ingresos mensuales?

a) $y = 0{,}02 \cdot 3.200 + 47{,}96 = 111{,}96\ \text{m}^2$

b) $0{,}02x + 47{,}96 = 90 \rightarrow x = 2.102$ €

023 En un estudio estadístico, el coeficiente de correlación entre dos variables X e Y es $-0{,}8$. Se sabe que $\overline{x} = 20$; $\sigma_X = 4$; $\overline{y} = 8$ y $\sigma_Y = 1$.

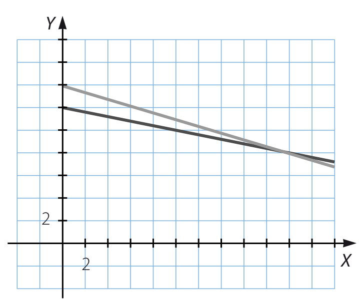
a) Determina las dos rectas de regresión, represéntalas y analiza la correlación que existe entre las variables.

b) Si $x = 30$, ¿cuál es la estimación de y?

a) $-0{,}8 = \dfrac{\sigma_{XY}}{4 \cdot 1} \rightarrow \sigma_{XY} = -3{,}2$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 8 = -\dfrac{3{,}2}{16}(x - 20) \rightarrow y = -0{,}2x + 12$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 20 = -\dfrac{3{,}2}{1}(y - 8) \rightarrow x = -3{,}2y + 45{,}6$



La dependencia es fuerte y negativa.

b) $y = -0{,}2 \cdot 30 + 12 = 6$

024 Utiliza la calculadora para determinar todas las medidas estadísticas.

a)

X	2	4	2	3	5	1	4	5	1	3	4	2	1	3	4
Y	5	8	8	7	6	5	9	6	7	7	8	9	5	6	5

b)

X	24	27	22	23	24	26	27	28	22	23
Y	2	1	2	4	5	2	3	4	1	2

a) $\overline{x} = 2{,}93$ $\quad \overline{y} = 6{,}73$

$\sigma_X^2 = 1{,}82$ $\quad \sigma_Y^2 = 1{,}97$

$\sigma_X = 1{,}35$ $\quad \sigma_Y = 1{,}4$

$\sigma_{XY} = 0{,}35$

$r_{XY} = 0{,}19$

b) $\overline{x} = 24{,}6$ $\quad \overline{y} = 2{,}6$

$\sigma_X^2 = 4{,}44$ $\quad \sigma_Y^2 = 1{,}64$

$\sigma_X = 2{,}11$ $\quad \sigma_Y = 1{,}28$

$\sigma_{XY} = 0{,}44$

$r_{XY} = 0{,}16$

025 Estudia la correlación entre estas variables, utilizando la calculadora para realizar las operaciones.

X	14	16	17	14	15	12	13	13	14	16
Y	32	34	36	34	32	34	31	36	38	32

Determina la recta de regresión y razona si tiene sentido estimar el valor de Y si la variable X toma el valor 18.

$\overline{x} = 14{,}4$ $\quad\quad \overline{y} = 33{,}9$

$\sigma_X^2 = 2{,}24$ $\quad\quad \sigma_Y^2 = 4{,}49$

$\sigma_X = 2{,}11$ $\quad\quad \sigma_Y = 2{,}12$

$\sigma_{XY} = 0{,}14$

$r_{XY} = 0{,}03$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 33{,}9 = \dfrac{0{,}14}{2{,}24}(x - 14{,}4) \rightarrow y = 0{,}06x + 33$

Como la correlación es casi nula, no tiene sentido estimar el valor de y para $x = 18$.

026 Representa la nube de puntos asociada a las siguientes distribuciones bidimensiones.

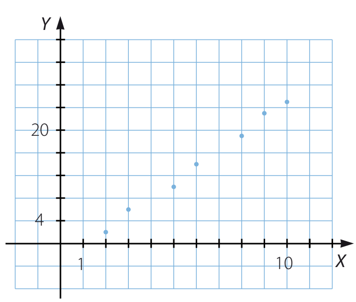
a) (2, 2) (3, 6) (5, 10) (6, 14) (8, 19) (9, 23) (10, 25)

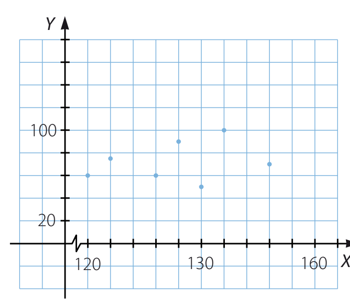
b) (5, 2) (6, 0) (8, −2) (10, −7) (11, −9) (13, −13) (15, −17)

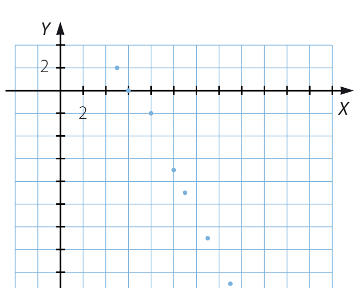
c) (120, 60) (122, 75) (126, 60) (128, 90) (130, 50) (132, 100) (136, 70)

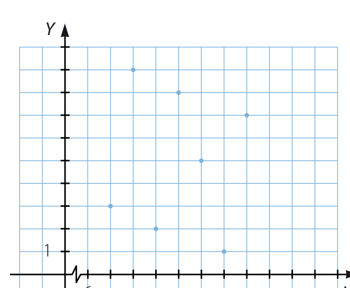
d) (7, 3) (8, 9) (9, 2) (10, 8) (11, 5) (12, 1) (13, 7)

Decide si existe dependencia entre las variables y de qué tipo es.

a) 

c) 

b) 

d) 

027 ●○○

Representa la nube de puntos asociada a estas variables bidimensionales, y decide si hay dependencia entre las variables que las forman.

En caso afirmativo, califícala.

a)

A	6	8	9	11	13	15	16	18
B	8	13	13	16	21	26	28	33

b)

C	1	3	6	7	10	13	17	18
D	25	21	18	20	12	15	8	6

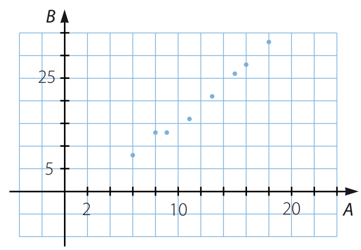
c)

E	110	112	115	116	118	120	121	124
F	40	45	35	40	60	70	45	33

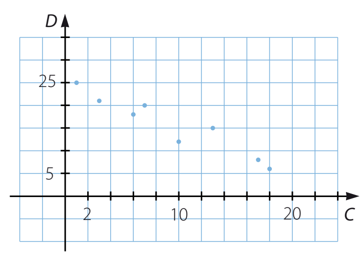
d)

G	26	24	23	22	18	15	14	12
H	8	12	14	7	10	11	9	13

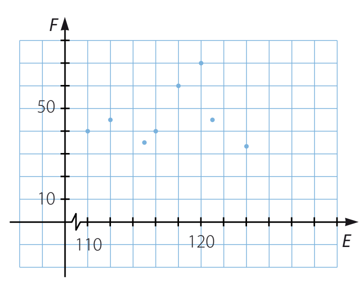
a) La dependencia es fuerte y positiva.



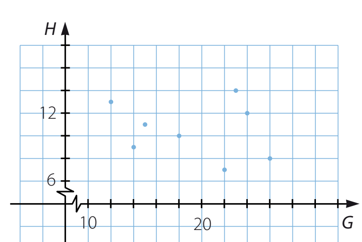
b) La dependencia es fuerte y negativa.



c) No se aprecia dependencia entre las variables *E* y *F*.

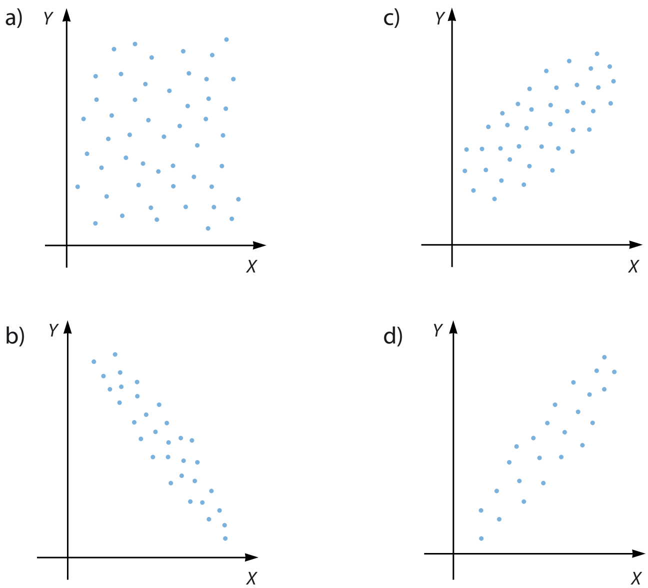


d) No se aprecia dependencia entre las variables *G* y *H*.



028

A partir de los diagramas de dispersión, decide si hay o no dependencia lineal y, en su caso, si es fuerte o débil, y si es positiva o negativa.



a) No hay dependencia lineal.

b) La dependencia lineal es fuerte y negativa.

c) La dependencia lineal es débil y positiva.

d) La dependencia lineal es fuerte y positiva.

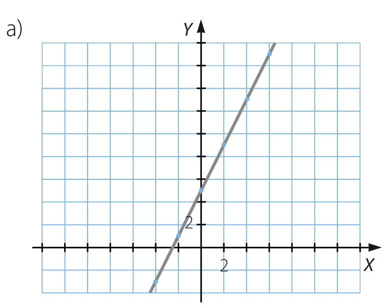
029

Representa las nubes de puntos correspondientes a las variables bidimensionales definidas por estas fórmulas.

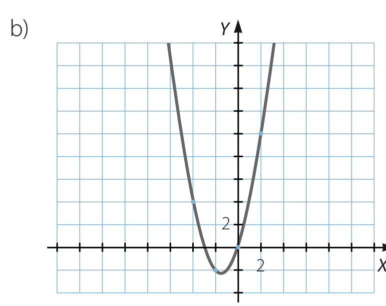
a) $y = 2x + 5$

b) $y = x^2 + 3x$

¿Qué tipo de dependencia presentan?



La dependencia es lineal.



La dependencia es funcional.

030 ●○○ La tabla muestra el número de cuadros que han pintado los alumnos de un taller sobre paisajes y bodegones.

Bodegones \ Paisajes	4	5	6	7	8
4	2	1	0	0	0
5	4	4	3	0	1
6	2	5	4	2	0
8	0	0	3	2	1

a) Determina las tablas de frecuencias marginales de paisajes y bodegones.

b) Calcula las medias y las desviaciones típicas de cada una de las variables.

c) Usa el coeficiente de variación para decidir cuál de las dos variables es más dispersa.

d) Realiza el diagrama de dispersión correspondiente a la variable bidimensional.

a) Tabla de frecuencias marginales de los paisajes

x_i	f_i
4	8
5	10
6	10
7	4
8	2
Total	34

Tabla de frecuencias marginales de los bodegones

y_i	f_i
4	3
5	12
6	13
8	6
Total	34

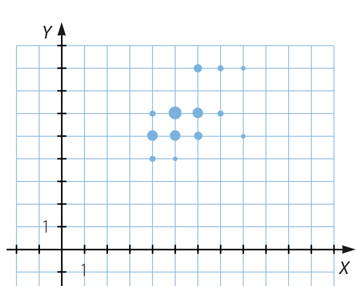
b) $\overline{x} = 5{,}47$ $\quad\overline{y} = 5{,}82$

$\sigma_X = 1{,}15$ $\quad\sigma_Y = 1{,}19$

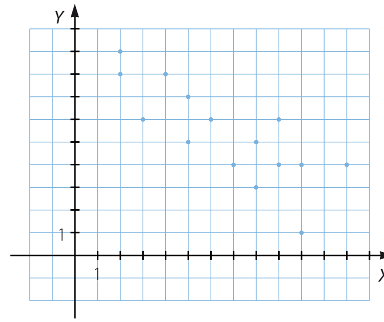
c) $CV_X = 0{,}21$ $\quad CV_Y = 0{,}204$

La variable de los paisajes es un poco más dispersa que la de los bodegones.

d)

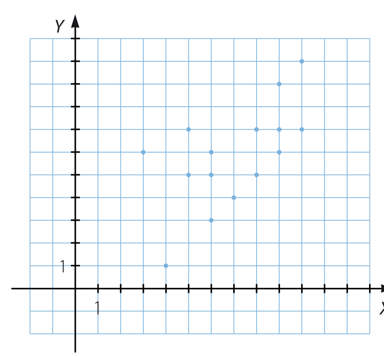


031 Construye la tabla de doble entrada que corresponde a esta variable bidimensional, representada mediante el diagrama de dispersión.



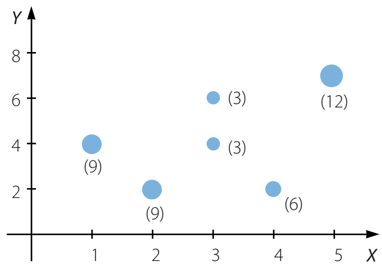
Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	Total
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	4
5	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
6	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Total	2	1	1	2	1	1	2	2	2	1	15

032 A partir de este diagrama de dispersión, construye la tabla de doble entrada correspondiente.



Y \ X	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	1	1	0	1	0	0	3
6	1	0	0	1	0	0	1	0	3
7	0	0	1	0	0	1	1	1	4
9	0	0	0	0	0	0	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Total	1	1	2	3	1	2	3	2	15

033 Construye la tabla de doble entrada correspondiente, a partir del diagrama de dispersión, teniendo en cuenta la frecuencia de los datos que figura entre paréntesis.



Y \ X	1	2	3	4	5	Total
2	0	9	0	6	0	**15**
4	9	0	3	0	0	**12**
6	0	0	3	0	0	**3**
7	0	0	0	0	12	**12**
Total	**9**	**9**	**6**	**6**	**12**	**42**

034 Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación para las variables bidimensionales indicadas en las siguientes tablas.

P	0	1	2	3	4	5	6	7
Q	20	18	17	15	12	10	7	4

R	90	80	70	60	50	40	30
S	−5	−7	−8	−11	−13	−16	−17

$\sigma_{PQ} = -7{,}22$ $\quad r_{PQ} = -0{,}11$ $\quad \sigma_{RS} = 84{,}29$ $\quad r_{RS} = 0{,}99$

035 Halla la covarianza y el coeficiente de correlación correspondientes a estas variables estadísticas.

T	−12	−14	−15	−16	−18	−20	−22
U	8	5	3	12	20	10	6

V	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2
W	100	150	220	270	340	400	460	520

$\sigma_{TU} = -3{,}69$ $\quad r_{TU} = -0{,}22$ $\quad \sigma_{VW} = 127{,}5$ $\quad r_{VW} = 0{,}99$

036 Representa la variable bidimensional cuyos pares de valores son:

(8, 2) (12, 6) (10, 4) (12, 2) (8, 6)

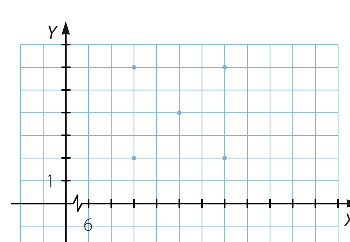
a) Calcula su covarianza y razona el resultado.

b) Elimina un punto de manera que se mantenga la correlación.

a) $\sigma_{XY} = 0$

No hay dependencia entre las variables, por lo que la covarianza es nula.

b) Al eliminar el punto (10, 4), la correlación no varía.



037 ●●○ Construye el diagrama de dispersión correspondiente a la variable bidimensional determinada por los siguientes pares de datos.

(10, 20) (16, 30) (10, 30) (16, 20)

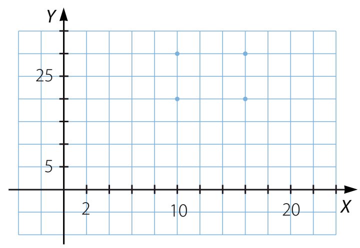
a) Calcula su covarianza y explica a qué se debe el resultado.

b) Añade un punto de manera que se mantenga la correlación.

a) $\sigma_{XY} = 0$

No hay dependencia entre las variables, por lo que la covarianza es nula.

b) Al añadir el punto (13, 15), la correlación no varía.



038 ●●○ En la tabla se presentan datos climatológicos referidos a una ciudad: la temperatura, en °C; la humedad relativa del aire, en %, y la velocidad del viento, en km/h.

Días	L	M	X	J	V	S	D
Temperatura	22	24	25	24	23	21	20
Humedad	78	90	80	92	88	74	80
Velocidad del viento	1	3	6	4	4	1	0

Determina la covarianza y el coeficiente de correlación de las siguientes variables bidimensionales.

a) *Temperatura–Humedad.*

b) *Temperatura–Velocidad del viento.*

c) *Humedad–Velocidad del viento.*

a) $\sigma_{TH} = 6{,}46$ $r_{TH} = 0{,}59$

b) $\sigma_{TV} = 3{,}17$ $r_{TV} = 0{,}93$

c) $\sigma_{HV} = 6{,}404$ $r_{HV} = 0{,}507$

039 ●●○ Se ha hecho una encuesta a personas que han tenido un accidente de tráfico, preguntando por el número de meses transcurridos e incluyendo el grupo de edad.

Las respuestas han sido:

Carmen, 35: [60, 70)
Teresa, 15: [50, 60)
Pilar, 12: [50, 60)
Esther, 6: [20, 30)
Juan, 8: [40, 50)
Jacinto, 15: [30, 40)
Jesús, 24: [50, 60)
Marta, 12: [30, 40)
José, 28: [40, 50)
Andrés, 3: [20, 30)
María Jesús, 20: [40, 50)
Beatriz, 16: [30, 40)

a) Construye la tabla correspondiente a la variable bidimensional.

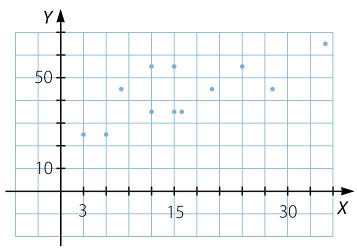
b) Representa el diagrama de dispersión.

c) Estudia si hay correlación entre ambas variables, y determina su coeficiente de correlación lineal.

a)

Y \ X	3	6	8	12	15	16	20	24	28	35	Total
[20, 30)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
[30, 40)	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	3
[40, 50)	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	3
[50, 60)	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3
[60, 70)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Total	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	12

b) La correlación es débil y positiva.



c) $\sigma_{XY} = 89{,}5$
$r_{XY} = 0{,}73$

040 ●●○

En la siguiente tabla se han perdido dos datos.

x_1	23	24	25	27	28	29	33	34	36
2	4	3	5	y_5	6	7	9	6	8

Se sabe que la media de la primera variable es 28 y la media de la segunda variable es 5,8. Completa la tabla y determina el coeficiente de correlación.

$$\overline{x} = 28 \rightarrow \frac{x_1 + 259}{10} = 28 \rightarrow x_1 = 21 \qquad \overline{y} = 5{,}8 \rightarrow \frac{y_5 + 50}{10} = 5{,}8 \rightarrow y_5 = 8$$

$r_{XY} = 0{,}802$

041 ●●○

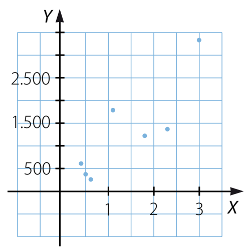
Se está estudiando imponer un impuesto a las empresas químicas que sea proporcional a sus emisiones de azufre a la atmósfera.
Se ha experimentado con varios procedimientos para medir dichas emisiones, pero no se ha encontrado ninguno fiable. Finalmente, se ha decidido investigar algún método indirecto.

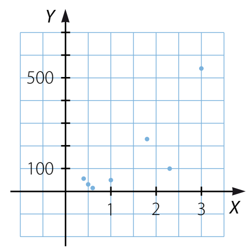
Se cree que la emisión de azufre puede estar relacionada con el consumo eléctrico, con el consumo de agua o con el volumen de las chimeneas de las fábricas. Para valorarlo se ha realizado un estudio en un medio controlado. Los resultados pueden verse en la tabla.

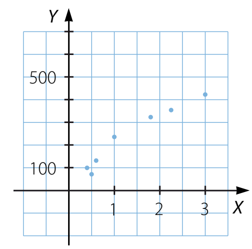
Cantidad de azufre (t)	2,3	1,8	1	0,4	0,6	3	0,5
Consumo eléctrico (kWh)	1.400	1.250	1.850	600	300	3.400	400
Consumo de agua (ℓ)	100	230	45	50	10	540	22
Volumen de las chimeneas (m^3)	18	16	12	5	6	21	4

¿Cuál de las medidas estadísticas se relaciona de forma más evidente con las emisiones de azufre? Justifica la respuesta.

El volumen de las chimeneas es la variable que más se relaciona con la cantidad de emisiones de azufre.

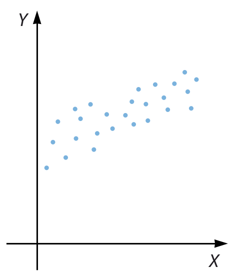




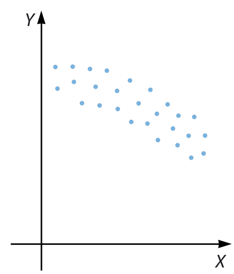


042 Traza a mano alzada, y sin realizar cálculos, la recta de regresión de las siguientes variables bidimensionales.

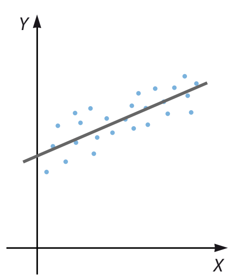
a)



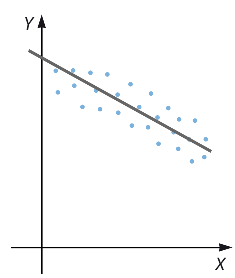
b)



a)

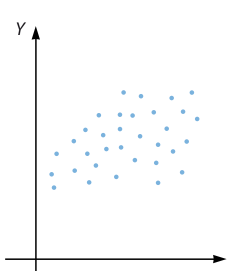


b)

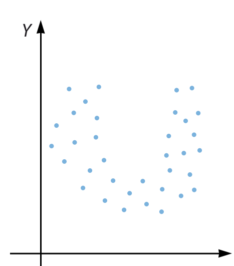


043 Representa, sin hallar su ecuación, la recta de regresión correspondiente a estas variables.

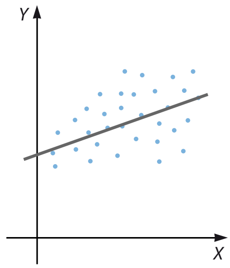
a)



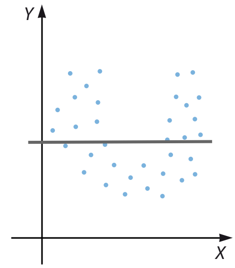
b)



a)

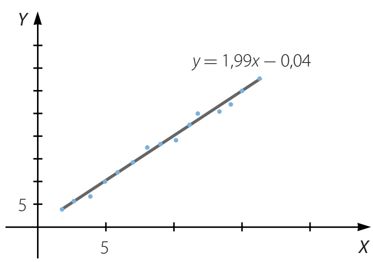


b)

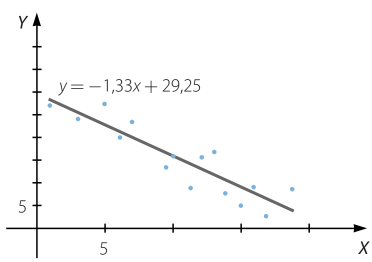


044 Para las variables bidimensionales representadas a continuación, hemos ajustado diferentes rectas de regresión a las nubes de puntos correspondientes. Estima el valor que tendrá y en cada una de ellas para un valor de $x = 12$.

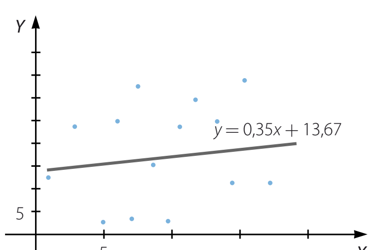
a)



b)



c)



¿Cuál de las estimaciones te parece más fiable?

a) $y = 1,99 \cdot 12 - 0,04 = 23,84$

b) $y = -1,83 \cdot 12 + 29,25 = 7,29$

c) $y = 0,35 \cdot 12 + 13,67 = 17,87$

La estimación más fiable es la del apartado a).

045 Determina la recta de regresión de Y sobre X y la recta de regresión de X sobre Y correspondientes a estas tablas.

a)

X	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	20	24	28	30	36	32	42	40

b)

X	60	70	80	90	100	110	120
Y	−5	−8	−12	−15	−16	−24	−20

c)

X	−3	−4	−5	−6	−9	−10	−13
Y	80	92	100	88	76	70	60

d)

X	0,2	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,2
Y	40	50	120	70	40	40	60	50

a) $\overline{x} = 13{,}5$ $\quad \overline{y} = 31{,}5$ $\quad \sigma_{XY} = 15{,}5$
$\sigma_X^2 = 5{,}25$ $\quad \sigma_Y^2 = 50{,}75$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 31{,}5 = \frac{15{,}5}{5{,}25}(x - 13{,}5) \rightarrow y = 2{,}95x - 8{,}33$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 13{,}5 = \frac{15{,}5}{50{,}75}(y - 31{,}5) \rightarrow x = 0{,}31y + 3{,}74$$

b) $\overline{x} = 90$ $\quad \overline{y} = -14{,}29$ $\quad \sigma_{XY} = -115{,}33$
$\sigma_X^2 = 400$ $\quad \sigma_Y^2 = 37{,}22$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y + 14{,}29 = -\frac{115{,}33}{400}(x - 90) \rightarrow y = -0{,}29x + 11{,}81$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 90 = -\frac{115{,}33}{37{,}22}(y + 14{,}29) \rightarrow x = -3{,}099y + 45{,}72$$

c) $\overline{x} = -7{,}14$ $\quad \overline{y} = 80{,}86$ $\quad \sigma_{XY} = 34{,}48$
$\sigma_X^2 = 11{,}31$ $\quad \sigma_Y^2 = 159{,}37$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 80{,}86 = \frac{34{,}48}{11{,}31}(x + 7{,}14) \rightarrow y = 3{,}049x + 102{,}63$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x + 7{,}14 = \frac{34{,}48}{159{,}37}(y - 80{,}86) \rightarrow x = 0{,}22y - 24{,}93$$

d) $\overline{x} = 0{,}71$ $\quad \overline{y} = 58{,}75$ $\quad \sigma_{XY} = -1{,}088$
$\sigma_X^2 = 0{,}099$ $\quad \sigma_Y^2 = 635{,}94$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 58{,}75 = -\frac{1{,}088}{0{,}099}(x - 0{,}71) \rightarrow y = -10{,}99x + 66{,}55$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 0{,}71 = -\frac{1{,}088}{635{,}94}(y - 58{,}75) \rightarrow x = -0{,}0017y + 0{,}81$$

046 Encuentra cinco puntos que pertenecen a la recta $y = 4x + 6$.

a) Calcula el coeficiente de correlación correspondiente y explica el resultado.

b) Halla las dos rectas de regresión.

Respuesta abierta.

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	2	6	10	14

a) $\overline{x} = 0$ $\quad \overline{y} = 6$ $\quad \sigma_X = \sqrt{2} = 1{,}41$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{32} = 5{,}66$ $\quad \sigma_{XY} = 8$

$r_{XY} = 1 \rightarrow$ La dependencia es lineal.

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 6 = \frac{8}{2}(x - 0) \rightarrow y = 4x + 6$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 0 = \frac{8}{32}(y - 6) \rightarrow x = \frac{1}{4}y - \frac{3}{2}$$

047 Obtén cinco puntos que pertenecen a la recta.

$$y = -20x + 10$$

a) Calcula el coeficiente de correlación y explica el resultado.

b) Halla las dos rectas de regresión. Razona los resultados obtenidos.

Respuesta abierta.

x	-2	-1	0	1	2
y	50	30	10	-10	-30

a) $\overline{x} = 0$ $\quad \overline{y} = 10$ $\quad \sigma_X = \sqrt{2} = 1{,}41$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{800} = 28{,}28$ $\quad \sigma_{XY} = -40$

$r_{XY} = -1 \rightarrow$ La dependencia es lineal.

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 10 = -\frac{40}{2}(x - 0) \rightarrow y = -20x + 10$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 0 = -\frac{40}{800}(y - 10) \rightarrow x = -\frac{1}{20}y + \frac{1}{2}$$

048 ●●○

Se cree que el número de zorros en una finca está relacionado con el número de conejos.

En los últimos años se han realizado ocho censos de ambos animales, resultando estos datos.

N.º de zorros	20	32	16	18	25	30	14	15
N.º de conejos	320	500	260	300	400	470	210	240

Si la correlación es fuerte:

a) Determina las dos rectas de regresión.

b) Estima la cantidad de conejos que habría si hubiera 10 zorros.

c) ¿Cuántos zorros serían si hubiéramos contado 350 conejos?

d) ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

a) $\overline{x} = 21{,}25$ $\quad \overline{y} = 337{,}5$ $\quad \sigma_X = \sqrt{42{,}19} = 6{,}5$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{10.168{,}75} = 100{,}84$

$\sigma_{XY} = 653{,}13$ $\quad r_{XY} = 0{,}99 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y positiva.

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 337{,}5 = \frac{653{,}13}{42{,}19}(x - 21{,}25) \rightarrow y = 15{,}48x + 8{,}55$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 21{,}25 = \frac{653{,}13}{10.168{,}75}(y - 337{,}5) \rightarrow x = 0{,}064y - 0{,}35$$

b) $x = 10 \rightarrow y = 15{,}48 \cdot 10 + 8{,}55 = 163{,}35$

En este caso habría 163 conejos.

c) $y = 350 \rightarrow x = 0{,}064 \cdot 350 - 0{,}35 = 22{,}05$

En este caso serían 22 zorros.

d) Como el coeficiente de correlación es muy próximo a 1, las dos estimaciones son bastante fiables.

049 ●●○

A lo largo de un día se han medido la tensión y el pulso cardíaco de una persona, tratando de decidir si ambas variables tienen alguna relación.

Los datos obtenidos se han reflejado en la tabla.

Nivel mínimo de tensión	6	5	9	4	10	8	6	9
N.º de pulsaciones por minuto	60	55	80	40	95	75	55	90

a) Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y las dos rectas de regresión.

b) Si la correlación es fuerte, estima las pulsaciones que tendrá la persona cuando su nivel mínimo de tensión sea 15.

c) ¿Qué nivel mínimo de tensión se estima cuando las pulsaciones cardíacas por minuto son 70?

d) ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

e) Dibuja la nube de puntos y la recta de regresión correspondientes.

a) $\overline{x} = 7{,}13$ $\overline{y} = 68{,}75$ $\sigma_X = \sqrt{4{,}04} = 2{,}01$ $\sigma_Y = \sqrt{323{,}44} = 17{,}98$

$\sigma_{XY} = 35{,}44$ $r_{XY} = 0{,}98 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y positiva.

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 68{,}75 = \frac{35{,}44}{4{,}04}(x - 7{,}13) \rightarrow y = 8{,}77x + 6{,}22$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 7{,}13 = \frac{35{,}44}{323{,}44}(y - 68{,}75) \rightarrow x = 0{,}11y - 0{,}43$$

b) $x = 15 \rightarrow y = 8{,}77 \cdot 15 + 6{,}22 = 137{,}77$

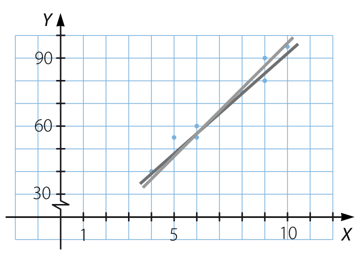
En este caso tendría 138 pulsaciones por minuto.

c) $y = 70 \rightarrow x = 0{,}11 \cdot 70 - 0{,}43 = 7{,}27$

Se estima que tendría un nivel mínimo de 7.

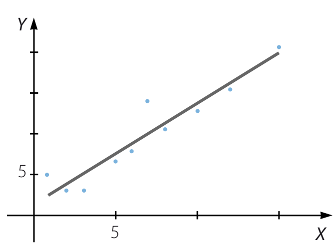
d) Las dos estimaciones son muy fiables, porque el coeficiente de correlación es bastante cercano a 1.

e)

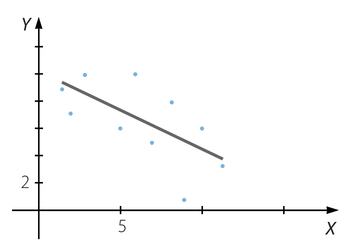


050 Tenemos dos variables bidimensionales representadas por estas nubes de puntos.

(I)



(II)



a) Elige los coeficientes de correlación de ambas y razónalo.

$-0{,}92$ $0{,}6$ $0{,}95$ $-0{,}65$

b) Ahora decide cuáles son las ecuaciones de las dos rectas de regresión correspondientes.

$y = 3x + 0{,}2$ $y = 1{,}3x + 0{,}9$ $y = -0{,}6x + 10$ $y = -2x + 12{,}6$

Justifica la respuesta.

a) El coeficiente de correlación de las variables representadas en el gráfico I es 0,95; porque la nube de puntos muestra una dependencia entre las variables fuerte y positiva. El coeficiente de correlación de las variables representadas en el gráfico II es $-0{,}65$; por ser la dependencia entre las variables débil y negativa.

b) La recta de regresión del gráfico I es $y = 1{,}3x + 0{,}9$; ya que la pendiente de la recta dibujada es un valor próximo a 1. La recta de regresión del gráfico II es $y = -0{,}6x + 10$, puesto que el valor de la ordenada de la recta representada es 10.

051 ●●○ **Una empresa está investigando la relación entre sus gastos en publicidad y sus beneficios (en millones de euros).**

Este es un resumen del estudio.

Año	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07
Gastos	2	2,4	2	2,8	3	3,2	3,2	3,3	3,5	4
Beneficios	12	15	13	15	18	19	19	20	20	22

a) Comprueba si existe relación entre las magnitudes y, si es posible, estima los beneficios que se obtendrán en el año 2008, si se van a invertir 4,2 millones de euros en publicidad.

b) ¿Qué inversión sería necesaria para alcanzar 30 millones de euros de beneficios?

a) $\overline{x} = 2,94$ $\quad \overline{y} = 17,3$ $\quad \sigma_X = \sqrt{0,38} = 0,61$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{10,01} = 3,16$ $\quad \sigma_{XY} = 1,89$

$r_{XY} = 0,98 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y positiva.

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 17,3 = \frac{1,89}{0,38}(x - 2,94) \rightarrow y = 4,97x + 2,69$$

$x = 4,2 \rightarrow y = 4,97 \cdot 4,2 + 2,69 = 23,56$

Los beneficios serían de 23,56 millones de euros.

b) Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 2,94 = \frac{1,89}{10,01}(y - 17,3) \rightarrow x = 0,19y - 0,35$$

$y = 30 \rightarrow y = 0,19 \cdot 30 - 0,35 = 5,35$

La inversión tendría que ser de 5,35 millones de euros.

052 ●●○ **María y Diego viven en la misma calle, pero en aceras opuestas. Los dos tienen un termómetro en su balcón y, como María cree que el suyo está estropeado, deciden tomar la temperatura exterior, en °C, durante una semana y a la misma hora del día.**

Han anotado los resultados en una tabla.

Diego	22	24	25	27	18	20	21
María	18	20	18	17	20	21	16

a) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? ¿Y opinas que deberían estarlo?

b) Razona si con estos datos se puede obtener alguna conclusión sobre el termómetro de María.

a) $\overline{x} = 22,43$ $\quad \overline{y} = 18,57$ $\quad \sigma_X = 2,86$ $\quad \sigma_Y = 1,69$ $\quad \sigma_{XY} = -2,097$

$r_{XY} = -0,43 \rightarrow$ La dependencia es débil y negativa.

Las dos variables están poco relacionadas, pues al estar los termómetros en lados opuestos de la acera reciben distinta exposición solar.

b) Como la dependencia es débil no se puede concluir nada sobre el termómetro de María.

053 ●●○

Se ha medido el peso, X, y la estatura, Y, de los alumnos de una clase. Su peso medio ha sido de 56 kg, con una desviación típica de 2,5 kg.

La ecuación de la recta de regresión que relaciona la estatura y el peso es: $y = 1{,}8x + 62$

a) ¿Qué estatura puede estimarse en un alumno que pesa 64 kg?

b) Y si un alumno pesara 44 kg, ¿cuál sería su altura?

c) ¿Cuál es la estatura media de los alumnos de esa clase?

d) La pendiente de esa recta es positiva. ¿Qué significa esto?

a) $x = 64 \rightarrow y = 1{,}8 \cdot 64 + 62 = 177{,}2$

El alumno medirá 1,77 m.

b) $x = 44 \rightarrow y = 1{,}8 \cdot 44 + 62 = 141{,}2$

En este caso medirá 1,41 m.

c) $y = 1{,}8 \cdot 56 + 62 = 162{,}8$

La estatura media es 1,63 m.

d) Si la pendiente es positiva, entonces la correlación entre las variables también es positiva, es decir, cuando los valores de una variable aumentan, los valores de la otra variable también lo hacen.

054 ●●○

Daniel afirma que si una nube de puntos es de una recta, el coeficiente de correlación siempre vale 1 o −1. Como Eva no está de acuerdo, Daniel prueba con los puntos de la recta cuya ecuación es $y = -5x + 20$, y Eva hace lo mismo con los puntos de $y = 2x - x^2$.

¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Si $y = -5x + 20$, entonces algunos de los puntos son:

X	−2	−1	0	1	2
Y	30	25	20	15	10

$\overline{x} = 0$ $\quad \overline{y} = 20$ $\quad \sigma_X = 1{,}41$ $\quad \sigma_Y = 7{,}07$ $\quad \sigma_{XY} = -10$

$r_{XY} = -1 \rightarrow$ La dependencia es lineal.

Si $y = 2x - x^2$, no es una recta, y algunos de los puntos son:

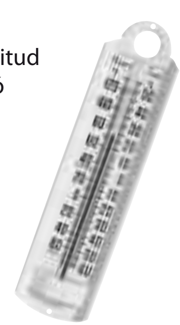
X	−2	−1	0	1	2
Y	−8	−3	0	1	0

$\overline{x} = 0$ $\quad \overline{y} = -2$ $\quad \sigma_X = 1{,}41$ $\quad \sigma_Y = 3{,}29$ $\quad \sigma_{XY} = 4$

$r_{XY} = 0{,}86 \rightarrow$ La dependencia es débil; por tanto, Eva no tiene razón.

055 ●●○

Un equipo de alpinistas que escaló una montaña, midió la altitud y la temperatura cada 200 metros de ascensión. Luego reflejó los datos en estas tablas.



Altitud (m)	800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000
Temperatura (°C)	22	20	17	15	11	9	8

Altitud (m)	2.200	2.400	2.600	2.800	3.000	3.200
Temperatura (°C)	5	3	2	2	2	1

a) Toma las diez primeras mediciones y, si la correlación es fuerte, calcula la recta de regresión de la temperatura sobre la altitud.
b) Estima la temperatura que habrá a los 1.900 metros de altitud.
c) ¿Qué temperatura se estima a los 3.200 metros? ¿Cómo explicas las diferencias?

a) $\overline{x} = 1.700 \quad \overline{y} = 11{,}2 \quad \sigma_X = 574{,}46 \quad \sigma_Y = 6{,}69 \quad \sigma_{XY} = -3.820$

$r_{XY} = -0{,}99 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y negativa.

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 11{,}2 = -\frac{3.820}{330.000}(x - 1.700) \rightarrow y = -0{,}012x + 31{,}6$$

b) $x = 1.900 \rightarrow y = -0{,}012 \cdot 1.900 + 31{,}6 = 8{,}8$

La temperatura estimada es de 8,8 °C.

c) $x = 3.200 \rightarrow y = -0{,}012 \cdot 3.200 + 31{,}6 = -6{,}8$

La diferencia se debe a que el valor no está incluido en el intervalo [800, 2.600], formado por los datos que se han utilizado para calcular la recta de regresión.

056 El alcalde de un pueblo ha constatado una reducción del número de nacimientos de niños, y ha encargado realizar un estudio.

Año	86	89	92	95	98	01	04	07
Nacimientos	50	54	40	33	34	23	21	17

a) ¿Puede establecerse, de forma fiable, una fórmula que relacione el año con el número de nacimientos?
b) ¿Cuántos nacimientos pueden estimarse en 2008? ¿Y en 2010? ¿Qué puede estimarse para 2050?
c) ¿Es fiable esta última estimación? Razona la respuesta.

a)

X	0	3	6	9	12	15	18	21
Y	50	54	40	33	34	23	21	17

$\overline{x} = 10{,}5 \quad \overline{y} = 34 \quad \sigma_X = 6{,}87 \quad \sigma_Y = 12{,}61 \quad \sigma_{XY} = -83{,}63$

$r_{XY} = -0{,}97 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y negativa, por lo que puede utilizarse la recta de regresión para relacionar las dos variables.

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 34 = -\frac{83{,}63}{47{,}25}(x - 10{,}5) \rightarrow y = -1{,}77x + 52{,}59$$

En el año 2008 se estiman: $x = 22 \rightarrow y = -1{,}77 \cdot 22 + 52{,}59 = 13{,}65$ nacimientos

En el año 2010 se estiman: $x = 64 \rightarrow y = -1{,}77 \cdot 64 + 52{,}59 = -60{,}69$ nacimientos

Para el año 2050 se estiman -60 nacimientos.

c) No es fiable, ya que el año 2050 está muy alejado del rango de años estudiados en la regresión.

057 ●○○ En una empresa se está estudiando el número de días de baja por enfermedad, Y, de cada uno de sus empleados en el último año. Para compararlo con la antigüedad, X, de los empleados dentro de la empresa, se ha elaborado la siguiente tabla.

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5
0	6	12	8	3	0
2	4	5	3	2	1
3	0	1	3	2	0
5	0	0	2	2	1
9	0	0	0	0	1

a) Calcula las medias y las desviaciones típicas de las distribuciones marginales.
b) Determina la covarianza y el coeficiente de correlación.
c) Halla la recta de regresión de Y sobre X y estima, si es fiable, el número de días de baja que puede esperarse en un empleado con 6 años de antigüedad en la empresa.

a) Tabla de frecuencias marginales de los años de antigüedad

x_i	f_i
1	10
2	18
3	16
4	9
5	3
Total	56

Tabla de frecuencias marginales de los días de baja

y_i	f_i
0	29
2	15
3	6
5	5
9	1
Total	56

$\overline{x} = 2,59$ $\qquad \overline{y} = 1,46$

$\sigma_X = 1,11$ $\qquad \sigma_Y = 1,89$

b) $\sigma_{XY} = 1,02$ $\qquad r_{XY} = 0,49$

c) Recta de regresión de Y sobre X: $y - 1,46 = \dfrac{1,02}{1,23}(x - 2,59) \rightarrow y = 0,83x - 0,69$

La dependencia es débil, por lo que la estimación no es fiable.

058 ●●○ Un inversor bursátil quiere predecir la evolución que va a tener el Índice de la Bolsa de Madrid (IBEX).

Ha concluido que lo que sucede con el IBEX un día es lo que le sucede a la cotización de la empresa AW&B el día anterior.

Investiga si esto es correcto, a partir de sus cotizaciones durante una semana y los valores alcanzados por el IBEX al día siguiente.

Día	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º
AW&B	21,8	23,4	19,6	19,4	18,4	19,9	19,2

Día	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
IBEX	12.560	12.720	11.580	11.420	10.930	11.450	11.480

a) ¿Qué cotización tendrá AW&B el día anterior al día en que el IBEX alcance los 14.000 puntos?
b) Si un día AW&B tiene una cotización de 24 euros, ¿qué valor podemos esperar que alcance el IBEX al día siguiente?

$\overline{x} = 20{,}24$ $\quad\overline{y} = 11.734{,}29$

$\sigma_X = \sqrt{2{,}77} = 1{,}66$ $\quad\sigma_Y = \sqrt{366.809{,}62} = 605{,}65$

$\sigma_{XY} = 977{,}26$

$r_{XY} = 0{,}97 \rightarrow$ La dependencia es fuerte y positiva.

a) Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 20{,}24 = \frac{977{,}26}{366.809{,}62}(y - 11.734{,}29) \rightarrow x = 0{,}0027y - 11{,}44$$

$y = 14.000 \rightarrow x = 0{,}0027 \cdot 14.000 - 11{,}44 = 26{,}36$

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 11.734{,}29 = \frac{977{,}26}{2{,}77}(x - 20{,}24) \rightarrow y = 352{,}8x - 4.593{,}62$$

$x = 24 \rightarrow y = 352{,}8 \cdot 24 - 4.593{,}62 = 3.873{,}58$

059 Encuentra el coeficiente de correlación de la variable bidimensional cuyas rectas de regresión son:

- Recta de Y sobre X: $2x - y - 1 = 0$
- Recta de X sobre Y: $9x - 4y - 9 = 0$

a) Halla la media aritmética de cada una de las variables.
b) ¿Podrías calcular la desviación típica de Y sabiendo que la de la variable X es $\sqrt{2}$?

$$2x - y - 1 = 0 \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 2 \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{2}}$$

$$9x - 4y - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{9}y + 1 \rightarrow \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{4}{9} \rightarrow \sigma_Y = \frac{3\sqrt{\sigma_{XY}}}{2}$$

$$r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\sigma_{XY}}}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94$$

a) Las rectas de regresión se cortan en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ 9x - 4y - 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5,\ y = 9$$

Entonces, resulta que: $\overline{x} = 5, \overline{y} = 9$

b) $\sigma_X = \sqrt{2} \rightarrow \dfrac{\sigma_{XY}}{2} = 2 \rightarrow \sigma_{XY} = 4 \rightarrow \sigma_Y = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3$

060 ●○○ Se tiene la siguiente variable bidimensional.

Investiga lo que sucede con la covarianza y el coeficiente de correlación en cada caso.

X	3	5	8	9	10	12	15
Y	2	3	7	4	8	5	8

a) Sumamos 10 a todos los valores de la variable *X*.

b) Sumamos 10 a todos los valores de la variable *X* y de la variable *Y*.

c) Multiplicamos por 4 todos los valores de la variable *X*.

d) Multiplicamos por 4 todos los valores de la variable *X* y de la variable *Y*.

$\overline{x} = 8{,}86$ $\quad\overline{y} = 5{,}29$ $\quad\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_X = \sqrt{14{,}07} = 3{,}75$ $\quad\sigma_Y = \sqrt{5{,}02} = 2{,}24$ $\quad r_{XY} = 0{,}76$

a)

X	13	15	18	19	20	22	25
Y	2	3	7	4	8	5	8

$\overline{x} = 8{,}86 + 10 = 18{,}86$ $\quad\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_X = 3{,}75$ $\quad r_{XY} = 0{,}76$

b)

X	13	15	18	19	20	22	25
Y	12	13	17	14	18	15	18

$\overline{y} = 5{,}29 + 10 = 15{,}29$ $\quad\sigma_{XY} = 6{,}42$

$\sigma_Y = 2{,}24$ $\quad r_{XY} = 0{,}76$

c)

X	12	20	32	36	40	48	60
Y	2	3	7	4	8	5	8

$\overline{x} = 8{,}86 \cdot 4 = 35{,}44$ $\quad\sigma_{XY} = 6{,}42 \cdot 4 = 25{,}68$

$\sigma_X = 3{,}75 \cdot 4 = 15$ $\quad r_{XY} = 0{,}76$

d)

X	12	20	32	36	40	48	60
Y	8	12	28	16	32	20	32

$\overline{y} = 5{,}29 \cdot 4 = 21{,}16$ $\quad\sigma_{XY} = 6{,}42 \cdot 16 = 102{,}72$

$\sigma_Y = 2{,}24 \cdot 4 = 8{,}96$ $\quad r_{XY} = 0{,}76$

061 ●●○ Investiga sobre las siguientes cuestiones.

a) ¿Es cierto que el signo de las pendientes de las dos rectas de regresión de una variable bidimensional es siempre igual?

b) ¿Qué sucede si las dos rectas de regresión tienen la misma pendiente? ¿Cómo es la correlación?

a) Es cierto, porque el signo de las pendientes de las rectas de regresión coincide con el signo de la covarianza en ambas.

b) Como las dos rectas pasan por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, si tienen la misma pendiente, entonces son coincidentes. Por tanto, la dependencia entre las dos variables unidimensionales es lineal.

La correlación es igual a 1 o 0.

062 El ángulo que forman las dos rectas de regresión de una distribución bidimensional es mayor cuanto menor sea el coeficiente de correlación.

Vamos a comprobarlo estudiando las dos magnitudes en estas distribuciones.

10	12	14	16	18
3	8	1	9	2

10	12	14	16	18
3	6	8	6	7

10	12	14	16	18
5	6	6,5	8,5	9

$\overline{x} = 14$ $\quad\overline{y} = 4,6$ $\quad\sigma_{XY} = -0,4$

$\sigma_X = \sqrt{8} = 2,83$ $\quad\sigma_Y = \sqrt{1,55} = 1,24$ $\quad r_{XY} = -0,11$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 4,6 = -\dfrac{0,4}{8}(x - 14) \rightarrow y = -0,05x + 5,3$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 14 = -\dfrac{0,4}{1,55}(y - 4,6) \rightarrow x = -0,26y + 15,2$

El ángulo que forman las rectas es:

$$\cos\alpha = \frac{0,26 + 0,05}{\sqrt{(-1)^2 + 0,05^2} \cdot \sqrt{(-0,26)^2 + 1^2}} = 0,29 \rightarrow \alpha = 72^\circ\, 33'\, 48''$$

$\overline{y} = 6$ $\quad\sigma_Y = \sqrt{2,8} = 1,67$ $\quad\sigma_{XY} = 3,2$ $\quad r_{XY} = 0,68$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 6 = \dfrac{3,2}{8}(x - 14) \rightarrow y = 0,4x + 0,4$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 14 = \dfrac{3,2}{2,8}(y - 6) \rightarrow x = 1,14y + 7,16$

El ángulo que forman las rectas es:

$$\cos\alpha = \frac{1,14 - 0,4}{\sqrt{1^2 + 0,4^2} \cdot \sqrt{1,14^2 + (-1)^2}} = 0,45 \rightarrow \alpha = 63^\circ\, 3'\, 30''$$

$\overline{y} = 7$ $\quad\sigma_Y = \sqrt{2,4} = 1,55$ $\quad\sigma_{XY} = 4,2$ $\quad r_{XY} = 0,96$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 7 = \dfrac{4,2}{8}(x - 14) \rightarrow y = 0,53x - 0,42$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 14 = \dfrac{4,2}{2,4}(y - 7) \rightarrow x = 1,75y + 1,75$

El ángulo que forman las rectas es:

$$\cos\alpha = \frac{1,75 + 0,53}{\sqrt{1^2 + 0,53^2} \cdot \sqrt{1,75^2 + 1^2}} = 0,99 \rightarrow \alpha = 1^\circ\, 49'\, 16''$$

063 Se ha realizado un test de memoria, X, y otro test de atención, Y, a varios alumnos y se han reflejado los resultados en esta tabla.

Y \ X	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
[0, 10)					
[10, 20)	Beatriz	Jesús	Marta		
[20, 30)		Daniel	María Esther	Miguel	
[30, 40)			Elena	Jacinto Carmen	Inés
[40, 50)				Diego	

a) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación.

b) Determina las dos rectas de regresión.

c) Si es factible, estima qué puntuación obtendrá Andrés en memoria, si ha obtenido 33 en atención.

d) Si es factible, estima qué puntuación obtendrá Eva en atención, si ha obtenido 27 en memoria.

x_i \ y_j	5	15	25	35	45	Total
5	0	0	0	0	0	**0**
15	1	1	1	0	0	**3**
25	0	1	2	1	0	**4**
35	0	0	1	1	1	**3**
45	0	0	0	1	0	**1**
Total	**1**	**2**	**4**	**3**	**1**	**11**

a) $\overline{x} = 25{,}91$ $\quad \overline{y} = 26{,}82$ $\quad \sigma_{XY} = 71{,}0038$

$\sigma_X = \sqrt{117{,}31} = 10{,}83$ $\quad \sigma_Y = \sqrt{87{,}51} = 9{,}35$ $\quad r_{XY} = 0{,}7$

b) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 26{,}82 = \frac{71{,}0038}{117{,}31}(x - 25{,}91) \rightarrow y = 0{,}61x + 11{,}01$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x - 25{,}91 = \frac{71{,}0038}{87{,}51}(y - 26{,}82) \rightarrow x = 0{,}81y + 4{,}19$$

c) $y = 33 \rightarrow x = 0{,}81 \cdot 33 + 4{,}19 = 30{,}92$

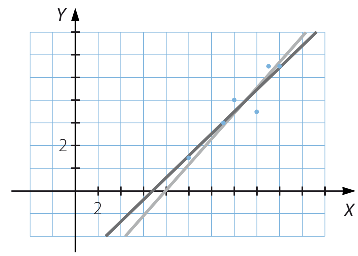
d) $x = 27 \rightarrow y = 0{,}61 \cdot 27 + 11{,}01 = 27{,}48$

PARA FINALIZAR…

064 **Halla la relación existente entre el coeficiente de correlación lineal de una distribución bidimensional y las pendientes de sus rectas de regresión.**

Comprueba el resultado obtenido para estos datos.

X	10	13	16	14	17	18
Y	3	6	7	8	11	11



Las pendientes de las rectas de regresión son:

$$\begin{cases} m_X = \dfrac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2} \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_x}} \\ m_Y = \dfrac{\sigma_{XY}}{{\sigma_Y}^2} \rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_Y}} \end{cases}$$

Entonces, resulta que: $r_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_X}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_{XY}}{m_Y}}} = m_X \cdot m_Y$

$\overline{x} = 14{,}67$ $\qquad \overline{y} = 7{,}67$ $\qquad \sigma_{XY} = 6{,}98$

$\sigma_X = \sqrt{7{,}12} = 2{,}67$ $\qquad \sigma_Y = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8$ $\qquad r_{XY} = 0{,}93$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 7{,}67 = \dfrac{6{,}98}{7{,}12}(x - 14{,}67) \rightarrow m_X = 0{,}98$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 14{,}67 = \dfrac{6{,}98}{7{,}84}(y - 7{,}67) \rightarrow m_Y = 0{,}89$

$m_X \cdot m_Y = 0{,}93$

065 **Discute si es posible que la recta de regresión de X sobre Y y la recta de regresión de Y sobre X sean paralelas. ¿Y perpendiculares?**

No es posible que sean paralelas, ya que tienen siempre un punto común: $(\overline{x}, \overline{y})$

Son perpendiculares si la correlación es nula.

066 **Investiga sobre cómo varía el coeficiente de correlación entre dos variables estadísticas cuando multiplicamos los datos relativos a una de ellas por una cantidad constante, k. ¿Y si las multiplicamos por la misma constante? ¿Qué sucedería si multiplicamos cada variable por una constante distinta?**

Al multiplicar los datos de una variable por una cantidad constante k, sus medidas estadísticas verifican que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot kx_i}{N} = \frac{k \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = k \cdot \overline{x}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (kx_i - k\overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot k^2(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N} = k^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sqrt{k^2 \cdot \sigma_X^2} = k \cdot \sigma_X$$

Entonces la covarianza entre las dos variables es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot kx_i \cdot y_i}{N} - k\overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{k \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - k\overline{x} \cdot \overline{y} = k\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y}\right) = k \cdot \sigma_{XY}$$

Así, el coeficiente de correlación es:

$$\frac{k \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

Si se multiplican los datos de las dos variables por la misma constante k, entonces el coeficiente de correlación es:

$$\frac{k^2 \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot k \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

Y si multiplicamos la segunda variable por un constante m:

$$\frac{k \cdot m \cdot \sigma_{XY}}{k \cdot \sigma_X \cdot m \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = r_{XY}$$

067 **Demuestra que el coeficiente de correlación de dos variables estadísticas no varía si a cada valor de las dos variables se les suma o resta un mismo número.**

Utiliza esta propiedad para calcular el coeficiente de correlación de las siguientes variables estadísticas.

X	2.001	2.002	2.003	2.004	2.005
Y	7.390	7.350	7.240	7.210	7.110

Si se suma un valor c a cada valor de una variable estadística, entonces la media de los datos obtenidos es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i + c)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot c}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i + c \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i}{N} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i + c \cdot N}{N} = \overline{x} + c$$

La varianza de estos datos verifica que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i + c - (\overline{x} + c))^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N} = \sigma_X^2$$

Por tanto, la desviación típica también coincide.

La covarianza entre las dos variables es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i + c) \cdot y_i}{N} - (\overline{x} + c) \cdot \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot c \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} - c \cdot \overline{y} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i + c \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} - c \cdot \overline{y} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} + c \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{y} - c \cdot \overline{y} = \sigma_{XY}$$

Así, el coeficiente de correlación es igual que el de las variables iniciales. Del mismo modo, si se suma o se resta un mismo número a las dos variables el coeficiente no varía.

068 **En dos estudios realizados sobre los datos de una variable bidimensional, las rectas de regresión fueron las siguientes.**

En el primer estudio, la recta de regresión de Y sobre X es: $8x - 3y - 61 = 0$ y la recta de X sobre Y es: $x - y + 18 = 0$.

Y en el otro estudio, las rectas de regresión son, respectivamente:

$$8x - 5y + 20 = 0 \qquad 5x - 2y - 10 = 0$$

Si conocemos $\overline{x} = 23$, $\overline{y} = 41$ y $r = 0{,}8$, comprueba cuál de los estudios es válido.

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 3y - 61 = 0 \\ x - y + 18 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 23, y = 41 \qquad \left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 20 = 0 \\ 5x - 2y - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10,\ y = 20$$

El primer estudio es el correcto, ya que las rectas se cortan en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$.

069 **Sean dos variables estadísticas X e Y. Sabemos que:**

- **La recta de regresión de Y sobre X pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5).**
- **La recta de regresión de X sobre Y tiene pendiente $m = 3$ y su ordenada en el origen es 2.**
- **La varianza de Y es 3.**

Calcula las medidas estadísticas de cada una de las variables estadísticas y el coeficiente de correlación.

La recta que pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5) tiene como ecuación: $y = 2x + 1$

La ecuación de la otra recta es: $y = 3x + 2$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -1,\ y = -1$$

Entonces, resulta que: $\begin{cases} \overline{x} = -1 \\ \overline{y} = -1 \end{cases}$

El coeficiente de correlación es igual a la raíz cuadrada del producto de la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X por la inversa de la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y:

$$r = \sqrt{m \cdot \frac{1}{m'}} = \sqrt{\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \cdot \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Por tanto, tenemos que: $r = \sqrt{2 \cdot \dfrac{1}{3}} = 0{,}8164$

El sistema de ecuaciones formado por las dos rectas de regresión es:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 2 \\ \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_{XY}} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = 2 \cdot 3 \rightarrow \sigma_Y^2 = 6\sigma_X^2 \rightarrow \sigma_Y = \sqrt{6}\,\sigma_X$$

Como la varianza de Y es 3: $\sigma_X^2 = \dfrac{1}{2}$

13 Probabilidad

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El curioso incidente del perro a medianoche

El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las matemáticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir era que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas.

Eso es así porque el señor Jeavons no entiende los números.

He aquí una famosa historia llamada *El Problema de Monty Hall,* que he incluido en este libro porque ilustra lo que quiero decir.

Había una columna titulada «Pregúntale a Marilyn» en una revista llamada *Parade*, en Estados Unidos. Y esa columna la escribía Marilyn vos Savant y en la revista se decía que tenía el mayor coeficiente intelectual del mundo según el *Libro Guinness de los Récords.* En la columna respondía a preguntas sobre matemáticas enviadas por los lectores. En septiembre de 1990 envió la siguiente pregunta Craig F. Whitaker, de Columbia, Maryland […]:

«Estás en un concurso en la televisión. En este concurso la idea es ganar como premio un coche. El locutor del programa te enseña tres puertas. Dice que hay un coche detrás de una de las puertas y que detrás de las otras dos hay cabras. Te pide que elijas una puerta. Tú eliges una puerta, que no se abre todavía. Entonces, el locutor abre una de las puertas que tú no has elegido y muestra una cabra (porque él sabe lo que hay detrás de las puertas). Entonces dice que tienes una última oportunidad de cambiar de opinión antes de que las puertas se abran y consigas un coche o una cabra. Te pregunta si quieres cambiar de idea y elegir la otra puerta sin abrir. ¿Qué debes hacer?».

Marilyn vos Savant dijo que siempre debías cambiar y elegir la última puerta, porque las posibilidades de que hubiese un coche detrás de esa puerta eran de 2 sobre 3.

Pero, si usas la intuición, decides que las posibilidades son de 50 y 50, porque crees que hay igual número de posibilidades de que el coche esté detrás de cualquiera de las puertas.

Mucha gente escribió a la revista para decir que Marilyn vos Savant se equivocaba, incluso después de que ella explicara detalladamente por qué tenía razón. [...]

MARK HADDON

Demuestra que la respuesta correcta a *El problema de Monty Hall* es la que dio Marilyn vos Savant.

Si la puerta elegida tenía una cabra detrás, y esto ocurre en dos de los tres casos, hay dos posibilidades: mantener la opción y ganar una cabra, o cambiarla y elegir la otra puerta (la que no se ha abierto), donde estará el coche.

Si la puerta elegida tenía detrás el coche también hay dos posibilidades: mantener la opción y ganarlo, o cambiarla y elegir la otra puerta, en la que hay una cabra.

Por tanto, si se cambia de puerta dos de las tres veces se gana el coche.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $10 \cdot 9!$
b) $10! - 9!$
c) $4! + 5!$
d) $10! \cdot 9!$

a) $10 \cdot 9! = 10! = 3.628.800$
b) $10! - 9! = 9! \cdot (10 - 1) = 9! \cdot 9 = 3.265.920$
c) $4! + 5! = 4! \cdot (1 + 5) = 4! \cdot 6 = 144$
d) $10! \cdot 9! = 1.316.818.944.000$

002 Haz estas operaciones.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$

b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6}$

c) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3}$

d) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 + 84 = 294$

c) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{10!}{5! \cdot 5!} - \frac{8!}{7! \cdot 1!} - \frac{9!}{3! \cdot 6!} =$
$= 5 + 252 - 8 - 84 = 165$

d) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10} = 1.024$

003 Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?

$V_{6,\,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ formas

004 Con 14 bolas rojas, 13 azules, 12 naranjas y 11 blancas, ¿cuántos collares diferentes de 10 bolas podemos hacer?

$VR_{50,\,10} = 50^{10}$ collares

005 ¿Cuántas formas hay de ponerse 5 anillos, uno en cada dedo de la mano?

$P_5 = 5! = 120$ formas

006 **Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?**

$$C_{4,\,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ mezclas}$$

ACTIVIDADES

001 **Describe tres experimentos aleatorios y otros tres deterministas.**

Respuesta abierta.

Experimentos aleatorios: lanzar una moneda y anotar el resultado de la cara superior; extraer una de las cinco bolas distintas de una urna y anotar su color, y hacer girar una ruleta numerada del 1 al 7 y anotar el número en el que se detiene.

Experimentos deterministas: hallar el volumen de agua desplazado por un objeto en un recipiente; medir el tiempo necesario para realizar un trayecto a una velocidad constante, y calcular la altura alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente.

002 **Indica los sucesos elementales y el espacio muestral de cada uno de los experimentos aleatorios de la actividad anterior.**

Respuesta abierta.

Los sucesos elementales del primer experimento son: {cara} y {cruz}

El espacio muestral es: $E = \{\text{cara, cruz}\}$

Los sucesos elementales del segundo experimento son: {blanca}, {amarilla}, {azul}, {roja} y {negra}

El espacio muestral es: $E = \{\text{blanca, amarilla, azul, roja, negra}\}$

Los sucesos elementales del tercer experimento son: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} y {7}

El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

003 **Halla experimentos aleatorios que tengan:**

a) Cuatro sucesos elementales.

b) Seis sucesos elementales.

Respuesta abierta.

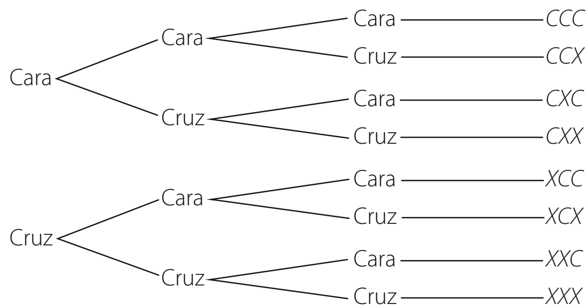
a) Lanzar un dado tetraédrico y anotar el resultado de la cara inferior.

b) Elegir una de las tarjetas de un sobre en el que hay una tarjeta de cada uno de estos colores: amarillo, naranja, verde, azul, violeta y marrón.

004 **Razona por qué no se puede encontrar ningún experimento aleatorio con un solo suceso elemental.**

Si solo hay un suceso elemental, entonces el espacio muestral tiene un único elemento, es decir, solo hay un resultado posible. Por tanto, el experimento es determinista, y no aleatorio.

005 **Con ayuda de un diagrama de árbol, calcula el espacio muestral asociado al experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas y anotar el número de caras y cruces.**



El espacio muestral es: $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

006 **En el experimento aleatorio que consiste en lanzar 3 monedas, encuentra dos sucesos compatibles y dos incompatibles.**
Escribe dos sucesos seguros y dos imposibles.

Respuesta abierta.

Dos sucesos compatibles son: «Obtener cara en una moneda» y «Obtener cruz en una moneda».

Dos sucesos incompatibles son: «Obtener tres caras» y «Obtener cruz en una moneda».

Dos sucesos seguros son: «Obtener cara o cruz en cada moneda» y «Obtener 0, 1, 2 o 3 cruces».

Dos sucesos imposibles son: «Salir un número par» y «Salir un as».

007 **Al extraer una carta de una baraja española, expresa estos sucesos en forma de uniones e intersecciones.**

a) A = «Salir una figura de copas» **b) B = «Salir una sota o bastos»**

a) $A = \{\text{Salir la sota de copas}\} \cup \{\text{Salir el caballo de copas}\} \cup \{\text{Salir el rey de copas}\}$

b) $B = \{\text{Salir una sota}\} \cup \{\text{Salir una carta de bastos}\}$

008 **Pon un ejemplo y comprueba las siguientes igualdades.**

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$**

Respuesta abierta.

En el experimento que consiste en lanzar un dado consideramos los sucesos:

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{1, 3, 5\}$

a) $A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 5\} = \{1, 2\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$

b) $A \cup (B \cap C) = A \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

009 **Lanzamos 2 monedas y contamos el número de caras.**

a) Describe el espacio muestral.

b) ¿Podrías asignarle alguna probabilidad a los sucesos elementales?

a) El espacio muestral es: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$

b) La probabilidad de obtener una cara o una cruz en una moneda es igual. Repartimos la probabilidad total entre los sucesos elementales y obtenemos:

$$P(CC) = \frac{1}{4} \qquad P(CX) = \frac{1}{4}$$

$$P(XC) = \frac{1}{4} \qquad P(XX) = \frac{1}{4}$$

010 **En un llavero hay 3 llaves de las que solo una llave abre un cofre.**

a) ¿Qué probabilidad hay de abrir en un intento?

b) ¿Y de abrir en tres intentos o menos?

a) $P(\text{Abrir en un intento}) = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{Abrir en tres intentos o menos}) = 1$

011 **Se lanza un dado de 6 caras donde hay marcados tres 1, dos X y un 2.**

Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) «Salir 1» b) «Salir X» c) «Salir 2»

a) $P(\text{Salir 1}) = \frac{1}{2}$ b) $P(\text{Salir X}) = \frac{1}{3}$ c) $P(\text{Salir 2}) = \frac{1}{6}$

012 **De 20 alumnos hay que elegir a 3 representantes para formar un grupo de trabajo.**

Calcula la probabilidad de que los representantes sean Marta, Julia y Rodrigo.

$$C_{20,\,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1.140$$

$$P(\text{Salir Marta, Julia y Rodrigo}) = \frac{1}{1.140} = 0{,}00088$$

013 **En una empresa de rodamientos tienen una máquina que fabrica arandelas.**

Diseña un método para calcular la probabilidad de que la máquina fabrique una arandela que sea defectuosa.

Se examina un número grande de arandelas para ver cuántas son defectuosas y se apuntan las frecuencias absolutas. Se calculan las frecuencias relativas para observar su tendencia y asignar la probabilidad de que la máquina fabrique una arandela defectuosa.

014 Al lanzar un dado se han obtenido estos resultados.

	1	2	3	4	5	6
f_i	51	48	52	50	49	102

¿Qué conclusión puedes deducir?

Resultados	f_i	h_i
1	51	0,14
2	48	0,14
3	52	0,15
4	50	0,14
5	49	0,14
6	102	0,29
	$N = 352$	

La frecuencia relativa del último valor es aproximadamente el doble de las demás; por tanto, el dado está trucado de modo que el suceso «Salir 6» tenga el doble de probabilidad que el resto de los sucesos elementales.

015 Si $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$; calcula.

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(\overline{B} - A)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}8$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$

d) $P(\overline{B} - A) = P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

016 Razona las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}45$; los sucesos A y B son compatibles.

b) Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}4$; A y B son contrarios.

a) $P(A) + P(B) > 1 \rightarrow P(A \cap B) \neq 0 \rightarrow A$ y B son sucesos compatibles.

b) $P(A) + P(B) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(B) \rightarrow A$ y B son sucesos contrarios.

017 En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica, sabiendo que lleva gafas. b) Lleve gafas, sabiendo que es chico.

A = «Ser chica» B = «Ser chico» G = «Llevar gafas»

a) $P(A/G) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ b) $P(G/B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

018 En un panel electrónico hay 4 interruptores, de los que solo uno de ellos enciende una luz. Halla la probabilidad de acertar con el interruptor correcto:

a) En el primer intento.

b) En el segundo intento.

c) En el tercer intento.

d) En el cuarto intento.

a) $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$

b) $P(A_2/\overline{A_1}) = \dfrac{1}{3}$

c) $P(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \dfrac{1}{2}$

d) $P(A_4/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1$

019 En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos un trabajador al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) Sea chica y no lleve gafas.

b) No lleve gafas y sea chico.

A = «Ser chica» B = «Ser chico» G = «Llevar gafas»

a) $P(A \cap \overline{G}) = P(A) \cdot P(\overline{G}/A) = \frac{9}{17} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{17}$

b) $P(\overline{G} \cap B) = P(\overline{G}) \cdot P(B/\overline{G}) = \frac{7}{17} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{17}$

020 En un panel electrónico hay 4 interruptores, de los que solo uno de ellos enciende una luz. Consideramos el experimento aleatorio que consiste en anotar el número de interruptores que necesito pulsar para encender la luz. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

E = {un conmutador, dos conmutadores, tres conmutadores, cuatro conmutadores}

$P(\text{un conmutador}) = P(A_1) = \frac{1}{4}$

$P(\text{dos conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap A_2/\overline{A_1}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(\text{tres conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}/\overline{A_1} \cap A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$P(\text{cuatro conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}/\overline{A_1} \cap \overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_4/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

021 Completa la siguiente tabla de contingencia, explicando cómo obtienes los datos que faltan.

	Fuma	No fuma	
Hombre	**60**	**50**	110
Mujer	**45**	45	90
	105	95	**200**

60 + 45 = 105 fumadores

60 + 50 = 110 hombres

200 − 110 = 90 mujeres

90 − 45 = 45 mujeres que no fuman

50 + 45 = 95 no fumadores

022 Utilizando la tabla de la actividad anterior, calcula las siguientes probabilidades.

a) Al elegir una persona, ¿qué probabilidad hay de que sea fumadora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar no fume y sea mujer?

c) Si la persona fuma, ¿qué probabilidad hay de que sea un hombre?

A = «Ser hombre» B = «Ser mujer» F = «Ser fumador»

a) $P(F) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40}$ b) $P(\overline{F} \cap B) = \frac{45}{200} = \frac{9}{40}$ c) $P(A/F) = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$

023 El porcentaje de tornillos defectuosos y del total de producción, que fabrican tres máquinas, viene recogido en la siguiente tabla.

	M_1	M_2	M_3
Producción	40 %	25 %	35 %
Defectuosos	2 %	5 %	3 %

Halla la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso.

$$P(D) = P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}031$$

024 Disponemos de dos urnas, que contienen bolas de colores. La primera urna, U_1, contiene 2 bolas blancas y 12 negras, y la segunda urna, U_2, tiene 3 bolas blancas y 10 negras.

Si escogemos una urna al azar y sacamos una bola:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte de color negro?

b) ¿Y de que resulte de color blanco?

a) $P(N) = P(U_1)P(N/U_1) + P(U_2)P(N/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13} = \frac{74}{91}$

b) $P(B) = P(U_1)P(B/U_1) + P(U_2)P(B/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{17}{91}$

025 El porcentaje de tornillos defectuosos y del total de producción, que fabrican tres máquinas, es:

	M_1	M_2	M_3
Producción	40 %	25 %	35 %
Defectuosos	2 %	5 %	3 %

Si el tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la máquina 1?

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1)P(D/M_1)}{P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}031} = 0{,}258$$

026 Disponemos de dos urnas, que contienen bolas de colores. La primera urna, U_1, contiene 2 bolas blancas y 12 negras, y la segunda urna, U_2, tiene 3 bolas blancas y 10 negras.

Si la bola extraída es de color negro, calcula la probabilidad de que:

a) Sea de la primera urna.

b) Sea de la segunda urna.

a) $P(U_1/N) = \dfrac{P(U_1)P(N/U_1)}{P(U_1)P(N/U_1) + P(U_2)P(N/U_2)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{14}}{\frac{74}{91}} = \dfrac{273}{518}$

b) $P(U_2/N) = \dfrac{P(U_2)P(N/U_2)}{P(U_{11})P(N/U_1) + P(U_2)P(N/U_2)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13}}{\frac{74}{91}} = \dfrac{455}{962}$

027 Describe tres experimentos aleatorios, y determina sus sucesos elementales y el espacio muestral de cada uno.

Respuesta abierta.

Si se tienen cinco tarjetas con las vocales en una bolsa y se extrae una de ellas; los sucesos elementales son: {a}, {e}, {i}, {o} y {u}, y el espacio muestral es: $E = \{a, e, i, o, u\}$

Se lanza un dado con las caras de distintos colores y se anota el color de la cara superior; los sucesos elementales son: {blanco}, {azul}, {verde}, {amarillo}, {rojo} y {negro}, y el espacio muestral es: $E =$ {blanco, azul, verde, amarillo, rojo, negro}

En una caja se tienen las fichas de un damero y se extrae una de ellas; los sucesos elementales son: {blanca} y {negra}, y el espacio muestral es: $E =$ {blanca, negra}

028 Indica experimentos aleatorios que tengan:

a) Tres sucesos elementales. b) Doce sucesos elementales.

Respuesta abierta.

a) Se extrae una bola de una urna en la que hay bolas azules, rojas y amarillas.

b) Se extrae una tarjeta de una caja en la que hay tarjetas numeradas del 1 al 12.

029 Si un experimento aleatorio tiene dos sucesos elementales, A y B:

a) ¿Cuántos sucesos tiene el experimento?

b) Describe la unión, la intersección y los contrarios de los sucesos A y B.

a) El experimento tiene tres sucesos: A, B y el suceso seguro E.

b) $A \cup B = E$ $A \cap B = \varnothing$ $\overline{A} = B$ $\overline{B} = A$

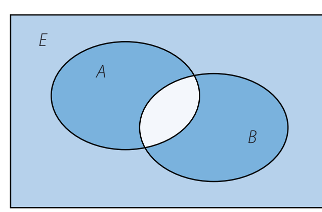
030 A partir del gráfico, comprueba las siguientes igualdades de sucesos.

a) $A - B = A \cap \overline{B}$

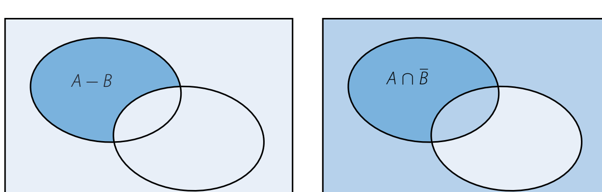
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

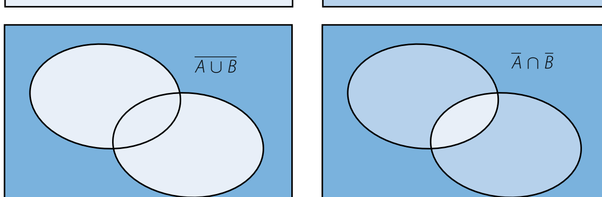
d) $\overline{\overline{A}} = A$

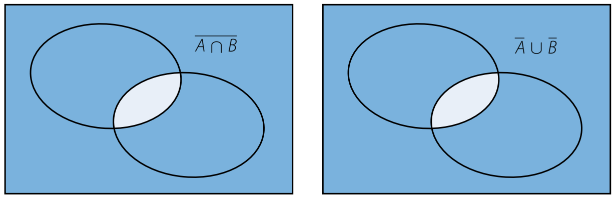


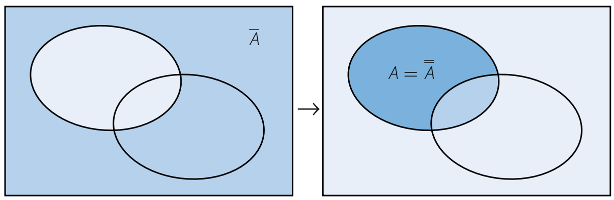
a)



b)



c) 

d) 

031 ●○○

En el experimento que consiste en lanzar 3 veces una moneda, consideramos los siguientes sucesos.

A = «Salir dos cruces» C = «La última es una cruz»
B = «Salir alguna cara» D = «La primera es una cara»

Describe los casos elementales que componen los sucesos.

a) $A \cap C$ c) $A \cup C$ e) $C \cap D$
b) $A - B$ d) $B \cap \overline{D}$ f) $\overline{C} \cup \overline{D}$

a) $A \cap C = \{CXX, XCX\}$
b) $A - B = \varnothing$
c) $A \cup C = \{CXX, XCX, XXC, CCX, XXX\}$
d) $B \cap \overline{D} = \{XCC, XCX, XXC\}$
e) $C \cap D = \{CCX, CXX\}$
f) $\overline{C} \cup \overline{D} = E$

032 ●○○

Se lanzan tres monedas y se consideran los sucesos:

A = «Salir dos caras» B = «Salir tres cruces» C = «Salir una cara»

Define verbalmente estos sucesos.

a) $\overline{C}$ b) $\overline{A} \cup B$ c) $C \cap \overline{B}$

a) «Salir dos caras, tres o ninguna»
b) «Salir una cara, tres o ninguna»
c) «Salir una cara»

033 ●○○

Lanzamos tres veces un dado de cuatro caras, anotando el resultado de la cara oculta, y consideramos los sucesos.

A = «Salir, al menos, un 1»
B = «No salir un 2»
C = «Los tres números sumen menos que 8»
D = «Salir más de un 3»
E = «Salir menos de dos números 4»

Describe los sucesos contrarios de cada uno de los sucesos anteriores.

$\overline{A}$ = «No salir ningún número 1»
$\overline{B}$ = «Salir uno, dos o tres números 2»
$\overline{C}$ = «Los tres números sumen 8 o más»
$\overline{D}$ = «Salir uno o ningún número 3»
$\overline{E}$ = «Salir dos, tres o cuatro números 4»

034 ●○○ En una caja tenemos carteles con las siguientes letras.

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u

a) En el experimento aleatorio consistente en extraer uno de los carteles, describe los sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

V = «Vocal»
C = «Consonante»
A = «Letra alta como b o f»
B = «Letra baja como g»
M = «Letra mediana como a o c»

b) Enumera los sucesos elementales que tiene cada uno de estos sucesos.

$A \cup B$ $\quad M \cap A$
$M \cup V$ $\quad \overline{A}$
$\overline{C} \cup A \cup B$ $\quad M \cap V$
$\overline{A \cap C}$ $\quad C - A$

c) Comprueba las propiedades.

$\overline{C \cap M} = \overline{C} \cup \overline{M}$
$\overline{C \cup M} = \overline{C} \cap \overline{M}$

a) $V = \{a, e, i, o, u\}$
$C = \{b, c, d, f, g, h, j\}$
$A = \{b, d, f, h\}$
$B = \{g, j\}$
$M = \{a, c, e, i, o, u\}$

b) $A \cup B = \{b, d, f, g, h, j\}$

$M \cap A = \varnothing$

$M \cup V = \{a, c, e, i, o, u\}$

$\overline{A} = \{a, c, e, g, i, j, o, u\}$

$\overline{C} \cup A \cup B = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$

$M \cap V = \{a, e, i, o, u\}$

$\overline{A \cap C} = \{a, c, e, g, i, j, o, u\}$

$C - A = \{c, g, j\}$

c) $C \cap M = \{C\} \rightarrow \overline{C \cap M} = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{C} = \{a, e, i, o, u\}\\ \overline{M} = \{b, d, f, g, h, j\}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{C} \cup \overline{M} = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$$

$C \cup M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\} \rightarrow \overline{C \cup M} = \varnothing$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{C} = \{a, e, i, o, u\}\\ \overline{M} = \{b, d, f, g, h, j\}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{C} \cap \overline{M} = \varnothing$$

035 ●●○ Un experimento consiste en sacar una bola de una urna con 4 bolas rojas, numeradas del 1 al 4; 5 azules, numeradas del 1 al 5, y 3 negras, numeradas del 1 al 3.

$R =$ «Salir bola roja»
$A =$ «Salir bola azul»
$N =$ «Salir bola negra»
$I =$ «Salir número impar»
$P =$ «Salir número par»

Describe los sucesos.

a) $R \cup P$ c) $\overline{P} \cap N$ e) $\overline{N}$
b) $I \cup P$ d) $R \cap I$ f) $\overline{R \cup A}$

a) $R \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A2, A4, N2\}$

b) $I \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5, N1, N2, N3\}$

c) $\overline{P} \cap N = \{N1, N3\}$

d) $R \cap I = \{R1, R3\}$

e) $\overline{N} = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5\}$

f) $\overline{R \cup A} = \{N1, N2, N3\}$

036 ●○○ En una caja hay 5 botones rojos, 3 azules y 7 verdes. Si sacamos un botón al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

$A =$ «Salir botón rojo»
$B =$ «Salir botón verde o azul»
$C =$ «No salir botón azul»

$P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{2}{3}$ $P(C) = \frac{4}{5}$

037 ●○○ Una baraja española se compone de 40 cartas. Llamamos figuras a las sotas, los caballos y los reyes. En el experimento consistente en sacar una carta de la baraja, consideramos $A =$ «Salir un as», $C =$ «Salir copas» y $F =$ «Salir una figura».

Determina las siguientes probabilidades.

$P(A)$ $P(C)$ $P(F)$
$P(A \cap F)$ $P(A \cup C)$ $P(C \cap F)$
$P(\overline{A} \cap F)$ $P(\overline{A} \cap C)$ $P(A \cup \overline{C})$

$P(A) = \frac{1}{10}$ $P(C) = \frac{1}{4}$ $P(F) = \frac{3}{10}$

$P(A \cap F) = 0$ $P(A \cup C) = \frac{13}{40}$ $P(C \cap F) = \frac{3}{40}$

$P(\overline{A} \cap F) = \frac{3}{10}$ $P(\overline{A} \cap C) = \frac{9}{40}$ $P(A \cup \overline{C}) = \frac{31}{40}$

038 En una empresa disponen de los tipos y las marcas de vehículos reflejados en la tabla.

	Opel	Renault	Seat
Turismo	3	6	5
Furgoneta	1	2	8

Si las llaves están en una caja y elegimos una llave al azar, determina cuál será la probabilidad de que:

a) Las llaves sean de un vehículo de la marca Seat.
b) Las llaves sean de una furgoneta de la marca Renault.
c) Las llaves pertenezcan a un turismo que no sea Opel.
d) Las llaves no sean de una furgoneta, ni de un vehículo de la marca Seat.

a) $P(S) = \frac{13}{25}$ c) $P(T \cap \overline{O}) = \frac{11}{25}$

b) $P(F \cap R) = \frac{2}{25}$ d) $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = \frac{9}{25}$

039 El 35 % de los vecinos de un barrio practica algún deporte (D). El 60 % está casado (C) y el 25 % no está casado, ni hace deporte.

Describe, en función de D y C, los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

a) Está casado y practica deporte.
b) Practica deporte, pero no está casado.
c) Está casado, pero no practica deporte.
d) No está casado.
e) No está casado, ni practica deporte.

a) $C \cap D$

$P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}25 \to P(C \cup D) = 0{,}75$

$\to P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0{,}6 + 0{,}35 - 0{,}75 = 0{,}2$

b) $D \cap \overline{C}$

$P(D \cap \overline{C}) = P(D) - P(D \cap C) = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$

c) $C \cap \overline{D}$

$P(C \cap \overline{D}) = P(C) - P(C \cap D) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

d) $\overline{C}$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

e) $\overline{C} \cap \overline{D}$

$P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}25$

040 ●●○ Un vidente predice que, en el próximo sorteo de lotería, el primer premio va a ser un número con tres cifras distintas de 0 y, además, todas serán diferentes. Juan ha comprado el número 00175, Belén ha comprado 13340 y Andrés ha comprado 00643.

En el caso de que el vidente esté en lo cierto, di cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Juan resulte afortunado.
b) Belén acierte la terminación.
c) Andrés acierte las tres primeras cifras (006).

a) $\dfrac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{1}{21.168}$

b) $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{1}{7}$

c) Podemos hacer: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números de tres cifras distintas de cero.

Hay $\dbinom{5}{2} = 10$ formas distintas de colocar 2 ceros en un número de 5 cifras.

Si el vidente tiene razón, el número de posibilidades es: $10 \cdot 504 = 5.040$ posibilidades, y de ellas 56 posibilidades comienzan por 006,

luego la probabilidad es: $\dfrac{56}{5.040} = \dfrac{1}{90}$

041 ●●○ El espacio muestral de un experimento aleatorio se compone de los sucesos elementales *a*, *b*, *c* y *d*.

Sabiendo que estos sucesos son equiprobables y que:

$$M = \{a\} \qquad N = \{b\} \qquad P = \{c, d\} \qquad Q = \{b, c, d\}$$

Calcula las probabilidades de los sucesos:

a) M b) $M \cup Q$ c) P d) $\overline{P} \cup N$ e) $M \cap Q$ f) $\overline{Q} \cup P$

a) $P(M) = \dfrac{1}{4}$ c) $P(P) = \dfrac{1}{2}$ e) $P(M \cap Q) = 0$

b) $P(M \cup Q) = 1$ d) $P(\overline{P} \cup N) = \dfrac{1}{2}$ f) $P(\overline{Q} \cup P) = \dfrac{3}{4}$

042 ●●○ Se lanzan dos dados y se calcula la diferencia entre los resultados mayor y menor. Halla las siguientes probabilidades.

a) La diferencia sea 0.
b) La diferencia sea 1.
c) La diferencia sea 2.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea 3 o más?
e) ¿Y de que la diferencia se encuentre entre 2 y 4, ambos números incluidos?

a) $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$ e) $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$ d) $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

043 Los médicos de un hospital hacen guardias tres días a la semana.

a) Calcula la probabilidad de que un médico haga guardia el lunes, el martes y el miércoles.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que libre el fin de semana (sábado y domingo)?

c) ¿Y de que esté de guardia tres días alternos, es decir, con un día de descanso entre la primera y la segunda guardias, y otro día de descanso entre la segunda y la tercera?

a) $P(\text{Hacer guardia lunes, martes y miércoles}) = \frac{1}{C_{7,\,3}} = \frac{1}{35}$

b) $P(\text{No hacer guardia sábado y domingo}) = 1 - P(\text{Hacer guardia sábado, domingo y otro día de la semana}) = 1 - \frac{5}{35} = \frac{6}{7}$

c) $P(\text{Hacer guardia lunes, miércoles y viernes}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, miércoles y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, jueves y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, viernes y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, jueves y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, jueves y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, viernes y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia miércoles, viernes y domingo}) = \frac{8}{35}$

044 Sacamos una ficha del dominó. Determina las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Que la ficha obtenida tenga un 1.

b) Que la suma de sus puntos sea mayor que 4.

c) Que la ficha se pueda encadenar a la ficha 3:5.

Imagina que hemos sacado una ficha y ha resultado ser la ficha 2:6.
¿Cuál es la probabilidad de sacar otra ficha y de que no se pueda encadenar a esta?

a) $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{17}{28}$ c) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

La probabilidad pedida es: $\frac{15}{28}$

045 Elegimos al azar una ficha de dominó. Sea:

$A =$ «La ficha contiene, al menos, un número impar»
$B =$ «La ficha tiene los dos números iguales»

Describe los siguientes sucesos, escribiendo sus sucesos elementales.

$A \qquad A \cap B$
$B \qquad A \cup B$

Halla sus probabilidades y comprueba que se verifica la propiedad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A = \{0{:}1, 0{:}3, 0{:}5, 1{:}1, 1{:}2, 1{:}3, 1{:}4, 1{:}5, 1{:}6, 2{:}3, 2{:}5, 3{:}3, 3{:}4, 3{:}5, 3{:}6, 4{:}5, 5{:}5, 5{:}6\}$

$B = \{0{:}0, 1{:}1, 2{:}2, 3{:}3, 4{:}4, 5{:}5, 6{:}6\}$

$A \cap B = \{1{:}1, 3{:}3, 5{:}5\}$

$A \cup B = \{0{:}0, 0{:}1, 0{:}3, 0{:}5, 1{:}1, 1{:}2, 1{:}3, 1{:}4, 1{:}5, 1{:}6, 2{:}2, 2{:}3, 2{:}5, 3{:}3, 3{:}4, 3{:}5, 3{:}6, 4{:}4, 4{:}5, 5{:}5, 5{:}6, 6{:}6\}$

$P(A) = \frac{9}{14} \qquad P(B) = \frac{1}{4} \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{28} \qquad P(A \cup B) = \frac{11}{14}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{14} + \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

046 En un experimento aleatorio sabemos que:

$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$

Calcula.

a) $P(\overline{A})$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
d) $P(A - B)$
e) $P(\overline{B} - A)$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}8$

d) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4$

e) $P(\overline{B} - A) = P(\overline{B}) - P(\overline{B} \cap A) = 1 - P(B) - \left[P(A) - P(A \cap B)\right] = 1 - P(A \cup B) = 0{,}1$

047 Si A y B son incompatibles y $P(A) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$; halla:

$P(B) \qquad P(A - B) \qquad P(\overline{A} \cap B)$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}3$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3$

048 Determina $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, si:

$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}3$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}7$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$

049 Halla $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A} \cap B)$, si:

$$P(A \cup B) = 0{,}8 \qquad P(\overline{B}) = 0{,}6 \qquad P(A \cap B) = 0{,}3$$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}4$

$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0{,}7$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1$

050 ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$?

No es posible.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7 \rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}7 \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}3 = 1{,}1 > 1$

051 ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$? ¿Cómo son esos sucesos?

Sí, es posible, pues: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}6$.
El suceso A está contenido en el suceso B.

052 ¿Es posible encontrar dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$?

Sí, es posible.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}6 \rightarrow P(A \cup B) = 0{,}4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

053 Si $P(A) = 0{,}7$ y $P(B) = 0{,}4$; ¿pueden ser incompatibles?

No, porque si $P(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 1$.

054 Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}3$; ¿pueden ser incompatibles? En caso afirmativo, ¿cuánto tiene que valer $P(A \cup B)$?

Sí, pueden ser incompatibles: $P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}3 < 1$

Entonces, resulta que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}9$

055 Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$.

a) Decide cómo son los sucesos A y B.
b) Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

El enunciado indica que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$, y por otra parte, sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

De ambas igualdades obtenemos que $P(B) = 0$ y $P(A \cap B) = 0$.

a) Los sucesos A y B son disjuntos, pues la probabilidad de su intersección es cero.
b) $P(A \cup B) = P(A) \qquad P(A \cap B) = 0$

056 Si $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ es el espacio muestral de un experimento aleatorio:

a) ¿Puede suceder que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{2}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ y $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

b) ¿Y que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{1}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ y $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

Justifica tus respuestas.

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$

No puede suceder, porque la probabilidad no puede valer más de 1.

b) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$

No puede suceder, porque la probabilidad del espacio muestral es igual a 1.

057 Discute si estás de acuerdo con el razonamiento.

«Cuando lanzo dos dados y sumo los resultados, para obtener 11 necesito un 5 y un 6. Si deseo conseguir 12 es preciso que aparezcan dos 6. Es decir, hay un caso favorable para cada uno de los sucesos, luego la probabilidad es la misma».

Comprueba el resultado anterior, calculando su probabilidad de manera experimental: lanza un dado 200 veces (o cinco dados 40 veces) y estudia cuál de los dos sucesos sale más veces.

El razonamiento no es correcto, porque hay dos formas de obtener un 5 y un 6; por tanto, la probabilidad de obtener 11 es el doble que la de obtener 12.

$P(\text{Obtener } 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\qquad P(\text{Obtener } 12) = \frac{1}{36}$

058 Un jugador de parchís fabrica un dado trucado, donde todos los números tengan la misma probabilidad de salir, salvo el 5, que quiere que salga dos veces más que el 1, el 2, el 3 y el 4, y el 6, que quiere que salga el doble de veces que el 5. ¿Cuál es la probabilidad de cada número?

$P(\text{Salir } 1) = x$ $\qquad P(\text{Salir } 3) = x$ $\qquad P(\text{Salir } 5) = 2x$

$P(\text{Salir } 2) = x$ $\qquad P(\text{Salir } 4) = x$ $\qquad P(\text{Salir } 6) = 4x$

$P(E) = 1 \rightarrow x + x + x + x + 2x + 4x = 1 \rightarrow 10x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{10}$

Entonces: $P(\text{Salir } 1) = \frac{1}{10}$ $\qquad P(\text{Salir } 2) = \frac{1}{10}$

$P(\text{Salir } 3) = \frac{1}{10}$ $\qquad P(\text{Salir } 4) = \frac{1}{10}$

$P(\text{Salir } 5) = \frac{1}{5}$ $\qquad P(\text{Salir } 6) = \frac{2}{5}$

059

En un montón de cartas hemos determinado que

$$P(\text{Oros}) = \frac{5}{12},\ P(\text{Copas}) = \frac{1}{4},\ P(\text{Espadas}) = \frac{1}{3} \text{ y } P(\text{Bastos}) = 0$$

¿Cuántas cartas de cada palo hay en el montón?

$$P(\text{Oros}) = \frac{5}{12} \qquad P(\text{Copas}) = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \qquad P(\text{Espadas}) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

El número de cartas del montón es proporcional a 12, luego si suponemos que se trata de una sola baraja, puede haber 12, 24 o 36 cartas y, por tanto, habrá 5, 3 y 4; 10, 6 y 8; o 15, 9 y 12 cartas de oros, copas y espadas, respectivamente. No hay cartas de bastos, porque la suma de las probabilidades de oros, copas y espadas es 1.

060

Vamos a extraer una bola de una urna que contiene 3 bolas rojas, 2 azules y 5 verdes, numeradas del 1 al 3, del 1 al 2 y del 1 al 5, respectivamente.

Consideremos los sucesos.

R = «Salir bola roja»
A = «Salir bola azul»
V = «Salir bola verde»
S_2 = «Salir bola con un 2»
S_3 = «Salir bola con un 3»
S_5 = «Salir bola con un 5»

Determina las probabilidades.

a) $P(R/S_3)$
b) $P(\overline{V}/S_2)$
c) $P(S_5/V)$
d) $P(A/S_2)$
e) $P(S_3/R)$
f) $P(V/S_5)$
g) $P(S_5 \cap V)$
h) $P(A \cap S_2)$

a) $P(R/S_3) = \frac{1}{2}$

b) $P(\overline{V}/S_2) = \frac{2}{3}$

c) $P(S_5/V) = \frac{1}{5}$

d) $P(A/S_2) = \frac{1}{3}$

e) $P(S_3/R) = \frac{1}{3}$

f) $P(V/S_5) = 1$

g) $P(S_5 \cap V) = P(V) \cdot P(S_5/V) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

h) $P(A \cap S_2) = P(A) \cdot P(S_2/A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

061

A una excursión acuden niños, padres y profesores de dos colegios, como se indica en la tabla.

	Niños	Padres	Profesores
Colegio *A*	50	5	5
Colegio *B*	30	3	2

Si llamamos N = «Ser niño», P = «Ser padre», F = «Ser profesor», A = «Pertenecer al colegio A» y B = «Pertenecer al colegio B», calcula las probabilidades.

a) $P(P)$
b) $P(A)$
c) $P(A/N)$
d) $P(B/F)$
e) $P(P \cap B)$
f) $P(P/B)$

Comprueba si los sucesos P y B son independientes.

a) $P(P) = \frac{8}{95}$

b) $P(A) = \frac{60}{95} = \frac{12}{19}$

c) $P(A/N) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$

d) $P(B/F) = \frac{2}{7}$

e) $P(P \cap B) = \frac{3}{95}$

f) $P(P/B) = \frac{3}{35}$

$P(P) \cdot P(B) = \frac{8}{95} \cdot \frac{35}{95} \neq \frac{3}{95} = P(P \cap B) \rightarrow P$ y B no son sucesos independientes.

062 ●●○ En un instituto, la probabilidad de aprobar Matemáticas es del 60 % y la de aprobar Física es del 50 %. La probabilidad de aprobar las dos asignaturas es del 30 %. ¿Son independientes ambos sucesos?

$P(M) \cdot P(F) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 = P(M \cap F)$

Los sucesos M = «Aprobar Matemáticas» y F = «Aprobar Física» son independientes.

063 ●●○ Una empresa de transporte tiene dos autobuses, A y B, y tres conductores, Diego (D), Elena (E) e Inés (I). Los viajes realizados por los conductores y los autobuses durante el último mes se han reflejado en la tabla.

	Diego	Elena	Inés
Autobús A	10	5	20
Autobús B	30	10	30

Durante uno de los viajes se produjo un accidente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que condujera Elena?
b) ¿Y de que el autobús afectado fuera B?
c) Estudia si E y B son sucesos independientes.
d) Haz lo mismo con los sucesos I y A.

a) $P(E) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

b) $P(B) = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}$

c) $P(E \cap B) = \frac{10}{105} = \frac{2}{21} = P(E) \cdot P(B) \rightarrow E$ y B son sucesos independientes.

d) $P(I \cap A) = \frac{20}{105} = \frac{4}{21} \neq \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{3} = P(I) \cdot P(A) \rightarrow I$ y A no son sucesos independientes.

064 ●●○ El médico de una empresa tiene una tabla en la que distribuye a los empleados según el sexo y su condición de fumadores, pero se ha perdido un dato. Complétala sabiendo que «ser mujer» y «ser fumador» son sucesos independientes.

	Fumador	No fumador
Mujer	30	45
Hombre	80	*x*

Sea x el número de hombres no fumadores de la empresa.

Si M y F son sucesos independientes:

$$P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F) \rightarrow \frac{30}{155 + x} = \frac{75}{155 + x} \cdot \frac{110}{155 + x}$$

$$\rightarrow 30(155 + x) = 8.250 \rightarrow 155 + x = 275 \rightarrow x = 120$$

065 ●○○ Una urna contiene 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul.

a) Extraemos una bola, anotamos su color, la devolvemos a la urna, sacamos otra bola y anotamos su color. Halla las siguientes probabilidades.

- Que las dos bolas sean rojas.
- Que haya alguna bola azul.
- Que no haya ninguna bola verde.

b) Repetimos el experimento sin devolver la bola a la urna. Determina las mismas probabilidades.

Si sacáramos las dos bolas a la vez, ¿en cuál de las dos situaciones anteriores nos encontraríamos?

a) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\text{Al menos una bola azul}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$

$P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$P(\text{Al menos una bola azul}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$

$P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Nos encontraríamos en la situación del apartado b), ya que si se sacan dos bolas a la vez no hay reemplazamiento como en el primer caso.

066 De una caja que contiene 3 fichas azules y 5 rojas sacamos 2 fichas. Determina las siguientes probabilidades.

a) Salgan 2 fichas azules.
b) Sean 2 fichas rojas.
c) La primera sea azul y la segunda roja.
d) Haya una ficha azul y otra roja.
e) La segunda sea roja, si la primera es azul.
f) La segunda sea roja, si la primera es roja.

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

c) $P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

d) $P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$

e) $P(R_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap R_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$

f) $P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$

067 De una bolsa en la que tenemos 3 fichas azules y 5 rojas sacamos dos fichas con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos fichas sean azules.
b) Las dos fichas sean rojas.
c) La primera ficha sea azul y la segunda roja.
d) Haya una ficha azul y otra roja.

Al realizar el experimento con reemplazamiento, las dos extracciones son independientes:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

c) $P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

d) $P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

068

Un examen tipo test consta de dos preguntas para las que se ofrecen cuatro posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar dos preguntas? ¿Y de no acertar ninguna? Resuélvelo considerando que el examen consta de cuatro preguntas.

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$$

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$$

069

¿Cuál es la probabilidad de tener 15 aciertos en una quiniela de fútbol compuesta por 15 partidos? ¿Y de tener 14 aciertos?

$$P(15 \text{ aciertos}) = \frac{1}{3^{15}} = 0{,}000000069$$

$$P(14 \text{ aciertos}) = 15 \cdot \frac{1}{3^{14}} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}00000209$$

070

De una baraja extraemos dos montones de cartas; en el primer montón hay 5 oros y 2 copas, y en el segundo montón hay 2 oros, 3 copas y 5 espadas.

Se saca una carta del primer montón y otra del segundo. Determina las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Salen dos cartas de oros.
b) Son dos cartas de copas.
c) Hay una carta de oros y otra de copas.
d) La segunda carta es de espadas.
e) La segunda carta es de espadas, sabiendo que la primera fue de copas.

a) $P(O_1 \cap O_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{7}$

b) $P(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{35}$

c) $P(O_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap O_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{10} = \frac{19}{70}$

d) $P(E_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

e) $P(E_2/C_1) = \frac{1}{2}$, porque los sucesos son independientes.

071 ●○○ En la caja A hay un dado de cuatro caras, en la caja B uno de seis caras y en la caja C otro de ocho. Elegimos una caja al azar y lanzamos el dado que contiene.
Calcula las probabilidades de que:

a) Salga un 3.
b) Salga un 3, si resultó elegida la caja A.
c) Hayamos tirado el dado de la caja A, si sabemos que ha salido un 3.
d) Salga un 6.
e) Hayamos sacado el dado de la caja A, si sabemos que salió un 6.
f) Salga un 6, si la caja seleccionada fue la caja C.

a) $P(T) = P(A) \cdot P(T/A) + P(B) \cdot P(T/B) + P(C) \cdot P(T/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$

b) $P(T/A) = \frac{1}{4}$

c) $P(A/T) = \dfrac{P(A) \cdot P(T/A)}{P(A) \cdot P(T/A) + P(B) \cdot P(T/B) + P(C) \cdot P(T/C)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{72}} = \frac{6}{13}$

d) $P(S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{72}$

e) $P(A/S) = \dfrac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C)} = \dfrac{0}{\frac{7}{72}} = 0$

f) $P(S/C) = \frac{1}{8}$

072 ●●○ Sacamos la sota, el caballo y el rey de copas de una baraja y hacemos dos montones, uno con las figuras restantes y otro con las demás cartas. Lanzamos un dado, y si aparece un número menor que 5, sacamos una carta del montón de las figuras, y del otro montón si sale un 5 o un 6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta de oros? ¿Y de que salga una figura? ¿Cuál es la probabilidad de que sea una carta de oros si al tirar el dado salió un 3?

A = «Salir un número menor que 5 al lanzar el dado»

B = « Salir 5 o 6 al lanzar el dado»

$P(O) = P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{36}$

$P(F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$

$P(O/A) = \frac{1}{3}$

073 En una caja hay 6 fichas rojas y 4 fichas negras. Se sacan dos fichas. Determina la probabilidad de los sucesos.

a) La segunda ficha es roja.

b) La segunda es roja, si la primera fue negra.

a) $P(R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(R_2/N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

b) $P(R_2/N_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

074 El 1 % de los ejemplares de una variedad europea de pez presenta una malformación congénita consistente en la ausencia de la aleta dorsal. Ese defecto está presente en el 3 % de los peces de la variedad africana. En un criadero de peces, el 80 % de sus ejemplares es de procedencia europea y el resto africana.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez del criadero no tenga aleta dorsal?

b) Si el criadero tiene aproximadamente dos millones de ejemplares de peces, ¿cuántos no tendrán aleta dorsal?

a) $P(\overline{D}) = P(E) \cdot P(\overline{D}/E) + P(A) \cdot P(\overline{D}/A) = 0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}014$

b) $0{,}014 \cdot 2.000.000 = 28.000$ ejemplares no tendrán aleta dorsal.

075 En la central telefónica de una empresa hay tres telefonistas, *A*, *B* y *C*, que atienden a la misma proporción de clientes. Cuando estos solicitan hablar con el servicio técnico, los telefonistas deben derivar la llamada, de forma aleatoria, a las extensiones 1, 2, 3 o 4. Pero *A* solo tiene acceso a las extensiones 1, 2 y 3; *B* solo puede comunicar con 2, 3 y 4 y, finalmente, *C* solo tiene acceso a 1 y 4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda *C*?

b) ¿Y de llamar al servicio técnico y que te atienda 4?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda 3, si el telefonista que te respondió fue *A*?

d) ¿Y la de que te atendiera *A*, si te desviaron al número 3?

e) ¿Y la de que te pasen con el número 1, si no te atendió *C*?

a) $P(C) = \frac{1}{3}$

b) $P(E_4) = P(A) \cdot P(E_4/A) + P(B) \cdot P(E_4/B) + P(C) \cdot P(E_4/C) =$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

c) $P(E_3/A) = \frac{1}{3}$

d) $P(A/E_3) = \dfrac{P(A) \cdot P(E_3/A)}{P(A) \cdot P(E_3/A) + P(B) \cdot P(E_3/B) + P(C) \cdot P(E_3/C)} =$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{1}{2}$$

e) $P(E_1/\overline{C}) = P(E_1/A) + P(E_1/B) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

076 En un montón de cartas hay 3 cartas de oros y 2 de copas, y en un segundo montón hay 2 cartas de oros, 2 de copas y 4 de espadas. Se saca una carta del primer montón y se mete en el segundo. A continuación se saca una carta del segundo montón. Calcula las probabilidades de:

a) Sacar una carta de oros.

b) Pasar una carta de copas y que luego salgan copas.

c) Que salga una carta de copas, si se pasó una de oros.

a) $P(O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2/O_1) + P(C_1) \cdot P(O_2/C_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{45}$

b) $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

c) $P(C_2/O_1) = \frac{2}{9}$

077 Se han metido 6 bolas rojas y 4 negras en la urna 1, y 3 bolas rojas y 4 negras en la urna 2. Se saca una bola de la primera urna y se pasa a la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sacada sea negra?

b) Si finalmente salió una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que hubiéramos pasado una bola roja?

a) $P(N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{20}$

b) $P(R_1/R_2) = \dfrac{P(R_1) \cdot P(R_2/R_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(R_2/N_1)} = \dfrac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{3}$

078 ●●● En un cine hay tres salas. En la sala A están proyectando una película y hay 240 espectadores. En la sala B hay 180 butacas ocupadas y en la sala C hay 80 personas. Se sabe que la película de la sala A agrada al 40 % de los espectadores, mientras que las películas de las otras salas tienen un 50 % y un 90 % de aceptación.

A la salida de las tres películas elegimos un espectador al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la película le haya gustado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala C?

c) ¿Y cuál es la probabilidad de que salga de la sala C si sabemos que la película le ha gustado?

a) $P(G) = P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) =$
$$= \frac{240}{500} \cdot \frac{40}{100} + \frac{180}{500} \cdot \frac{50}{100} + \frac{80}{500} \cdot \frac{90}{100} = \frac{129}{250}$$

b) $P(G/C) = \dfrac{9}{10}$

c) $$P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C)} = \frac{\dfrac{80}{500} \cdot \dfrac{90}{100}}{\dfrac{129}{250}} = \frac{36}{129}$$

079 ●●● El 60 % de los productos de una marca se fabrica en su factoría de Portugal, el 30 % se fabrica en España y el resto en la factoría de Andorra. El 1 % de los productos fabricados en Portugal presenta algún defecto de fabricación, mientras que en España y en Andorra estos porcentajes son del 0,5 % y el 3 % respectivamente.

a) Determina la probabilidad de que un producto resulte defectuoso.

b) Si compramos un producto y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de Andorra?

a) $P(D) = P(P) \cdot P(D/P) + P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A) =$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}005 + 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}0105$$

b) $$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(P) \cdot P(D/P) + P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}03}{0{,}0105} = 0{,}28$$

080 ●●● El 60 % de los habitantes adultos de un pueblo es votante del partido QW y el resto vota al partido SZ.
Se ha organizado un referéndum. El 35 % de los votantes de QW está a favor de la propuesta, mientras que el 90 % de los votantes de SZ también está dispuesto a apoyarla.

a) Si se realiza la votación, ¿cuál es la probabilidad de que la propuesta sea aprobada?

b) Elegimos al azar un votante de los que votaron afirmativamente. ¿Cuál es la probabilidad de que sea votante de QW?

a) $P(A) = P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ) =$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}57$$

b) $$P(QW/A) = \frac{P(QW) \cdot P(A/QW)}{P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}35}{0{,}57} = 0{,}37$$

081

En un cajón tengo 3 calcetines rojos, 5 verdes y 8 negros. Si con la luz apagada saco un par, determina la probabilidad de que los calcetines sean de los colores que se indican en cada caso.

a) Ambos sean verdes.

b) Los dos sean del mismo color.

c) No haya ninguno rojo.

d) Si el primero que saqué resultó ser verde, el segundo también lo sea.

e) El primero es verde y el segundo es de cualquier otro color, excepto el verde.

a) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{12}$

b) $P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) =$
$= \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{41}{120}$

c) $P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = P(\overline{R}_1) \cdot P(\overline{R}_2/\overline{R}_1) = \frac{13}{16} \cdot \frac{12}{15} = \frac{13}{20}$

d) $P(V_2/V_1) = \frac{4}{15}$

e) $P(V_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap N_2) = P(V_1) \cdot P(R_2/V_1) + P(V_1) \cdot P(N_2/V_1) =$
$= \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{15} + \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{11}{48}$

082

En una caja hay 3 fichas rojas y 1 ficha azul. Un juego consiste en sacar una ficha, anotar su color, devolverla a la caja y seguir sacando hasta el momento en que se hayan conseguido 2 fichas azules.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar con menos de cuatro extracciones?

b) ¿Y cuál es la probabilidad de sacar 5 fichas y no ganar?

a) $P(A \cap A) + P(A \cap R \cap A) + P(R \cap A \cap A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

b) $P(R \cap R \cap R \cap R \cap R) + 5P(A \cap R \cap R \cap R \cap R) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{128}$

083

En una urna hay 5 bolas rojas, 2 negras y un número indeterminado de bolas azules. Se sabe que la probabilidad de que, al sacar dos bolas, haya 1 bola roja y 1 bola azul es de $\frac{1}{3}$. Determina el número de bolas azules que hay en la urna.

Sea x el número de bolas azules de la urna.

$P(R_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(A_2/R_1) + P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) = \frac{1}{3}$

$\rightarrow \frac{5}{7+x} \cdot \frac{x}{6+x} + \frac{x}{7+x} \cdot \frac{5}{6+x} = \frac{1}{3} \rightarrow 30x = 42 + 13x + x^2 \rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = 3 \end{cases}$

084 Para recibir las quejas de los clientes, una empresa telefónica dispone de una oficina atendida por tres empleados.

- El empleado *A* está exclusivamente dedicado a la atención a los clientes y los otros dos empleados realizan, además, otras tareas.
- El empleado *A* atiende al 60 % de los visitantes, *B* al 25 % y *C* al resto.
- El empleado más efectivo es *A*, que resuelve el 95 % de los problemas que le plantean los clientes, mientras que *B* solo resuelve el 80 % y *C* el 60 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no me atienda el empleado *A*?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que me resuelvan el problema si no me atiende *A*?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema si me atiende *A*?
e) Si no me han resuelto el problema, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido *B*?

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$

b) $P(\overline{R}) = P(A) \cdot P(\overline{R}/A) + P(B) \cdot P(\overline{R}/B) + P(C) \cdot P(\overline{R}/C) =$
$= 0,6 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,4 = 0,14$

c) $P(R/\overline{A}) = \dfrac{P(R \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,25 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,6}{0,4} = 0,725$

d) $P(\overline{R}/A) = 0,05$

e) $P(B/\overline{R}) = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{R}/B)}{P(A) \cdot P(\overline{R}/A) + P(B) \cdot P(\overline{R}/B) + P(C) \cdot P(\overline{R}/C)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,2}{0,14} = 0,36$

085 Calcula.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren dos amigos y hayan nacido el mismo día de la semana?
b) Y si se encuentran tres amigos, ¿cuál es la probabilidad de que haya, por lo menos, dos amigos que nacieran el mismo día de la semana?
c) ¿Cuántos amigos han de juntarse para poder asegurar, con más del 50 % de probabilidad, que haya dos amigos, al menos, que nacieran el mismo día de la semana?

S = «Haber nacido un día de la semana»

a) $7 \cdot P(S \cap S) = 7 \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{7} = 0,14$

b) P(Al menos dos nacieron el mismo día) $= P$(Dos nacieron el mismo día) $+ P$(Tres nacieron el mismo día) $= 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{19}{49} = 0{,}39$

c) Si se reúnen cuatro amigos: P(Al menos dos nacieron el mismo día) $= P$(Dos nacieron el mismo día) $+ P$(Tres nacieron el mismo día) $+ P$(Cuatro nacieron el mismo día) $=$

$$= 6 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} =$$
$$= \frac{205}{343} = 0{,}59$$

086 **Averigua la relación que deben cumplir *x, y, z* y *t* para que *A* y *P* sean sucesos independientes.**

	A	*B*	
P	x	y	$x+y$
Q	z	t	$z+t$
	$x+z$	$y+t$	$x+y+z+t$

Si A y P son independientes, entonces:

$P(A \cap P) = P(A) \cdot P(P)$

$$\rightarrow \frac{x}{x+y+z+t} = \frac{x+z}{x+y+z+t} \cdot \frac{x+y}{x+y+z+t}$$

$$\rightarrow x^2 + xy + xz + xt = x^2 + xy + xz + yz \rightarrow xt = yz$$

087 **Sol y Jesús lanzan dos monedas. Sol afirma que los resultados posibles son: 2 caras, 1 cara y 0 caras, y asegura que la probabilidad de sacar cara es de $\frac{1}{3}$. Jesús lanza las monedas sesenta veces y asegura que la probabilidad de que salga una cara es del 50 %.**

Decide quién está en lo correcto y razónalo.

Jesús tiene razón, ya que el espacio muestral de este experimento es:

$E = \{CC, CX, XC, XX\}$

Entonces la probabilidad de que salga una cara es:

$$P(CX \cup XC) = P(CX) + P(XC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

088 ●●● **En un juego se lanza una moneda al aire y si sale cara, pierde un punto Beatriz y lo gana Jesús, y si sale cruz, se hace al contrario. Entre ambos acuerdan que solo se puede jugar si se dispone de puntos para perder.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Jesús tenga que dejar de jugar al tercer lanzamiento?

b) ¿Y cuál es la probabilidad de que, tras lanzar la moneda cuatro veces, Jesús tenga solo un punto?

Suponemos que el juego es equitativo, es decir, que Beatriz y Jesús parten con un mismo número de puntos.

a) Queremos calcular la probabilidad de que Jesús pierda todos sus puntos al tercer lanzamiento.

Esto quiere decir que debe tener 1 punto después del segundo lanzamiento y que salga cruz en el tercero.

Como tras el segundo lanzamiento tiene 1 punto, la única posibilidad es que tras el primer lanzamiento tenga 2 puntos, es decir, en el segundo lanzamiento debe salir cruz.

Si tras el primer lanzamiento tiene 2 puntos, necesariamente ha de tener 1 o 3 puntos al comenzar a jugar, pero no puede tener 1 punto, ya que esto significaría que el juego acaba en la primera tirada, pues Jesús o Beatriz se quedarían sin puntos para jugar.

Por tanto, la única opción válida para que Jesús termine de jugar en el tercer lanzamiento es que haya partido con tres puntos y que salgan 3 cruces seguidas.

$$P(XXX) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Si al comienzo de la partida, tuvieran un número de puntos distinto de 3, la probabilidad de que Jesús pierda exactamente al tercer lanzamiento es cero.

b) Con un razonamiento análogo al anterior, que podemos resumir en el siguiente cuadro, comprobamos que las únicas opciones válidas para que Jesús tenga 1 punto tras la cuarta tirada es que haya comenzado con 3 puntos o con 5 puntos.

$$1 \xleftarrow{4^\circ +} 2 \left\{ \begin{array}{l} \xleftarrow{3^\circ +} 3 \left\{ \begin{array}{l} \xleftarrow{2^\circ +} 4 \left\{ \begin{array}{l} \xleftarrow{1^\circ +} 5 \\ \xleftarrow{1^\circ C} 3 \end{array} \right. \\ \xleftarrow{2^\circ C} 2 \xleftarrow{1^\circ +} 3 \end{array} \right. \\ \xleftarrow{3^\circ C} 1 \xleftarrow{2^\circ +} 2 \xleftarrow{1^\circ +} 3 \end{array} \right.$$

Si ha comenzado con 3 puntos, la probabilidad de que acabe con 1 punto es:

$$P(\text{Acabar con 1 punto}) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

Y si ha comenzado con 5 puntos:

$$P(\text{Acabar con 1 punto}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

089 ●●●

En una urna en la que hay dos bolas de color desconocido introducimos una tercera bola de color rojo. Después de remover las tres bolas, sacamos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

Hay tres posibles composiciones de la urna tras introducir la tercera bola: las tres bolas son rojas (U_1), dos bolas son rojas y una es de otro color (U_2) o una bola es roja y las otras dos son de otro color (U_3).

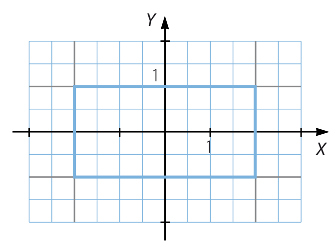
$$P(R) = P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

PARA FINALIZAR...

090

Se lanza un dardo sobre el rectángulo determinado por las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 1$ en un sistema de ejes coordenados.

Calcula la probabilidad de que el dardo impacte sobre un punto que:



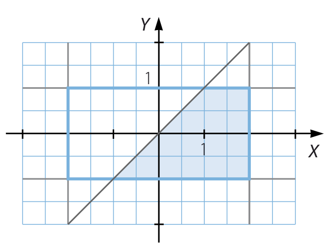
a) Tenga su abscisa mayor que su ordenada.

b) La suma de sus coordenadas sea mayor que 1.

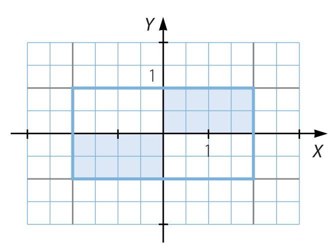
c) El producto de sus coordenadas sea positivo.

d) La suma de los valores absolutos de sus coordenadas sea mayor que 1.

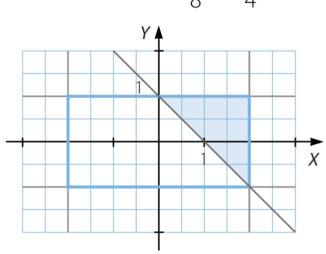
a) P(La abscisa es mayor que la ordenada) $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



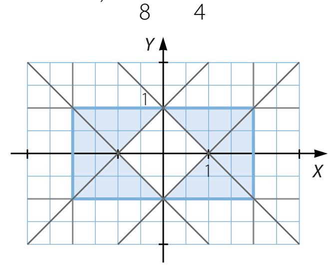
c) P(El producto de las coordenadas es positivo) $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



b) P(La suma de las coordenadas es mayor que 1) $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



d) P(La abscisa es mayor que la ordenada) $= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$



091 **En la ecuación de segundo grado:**

$$x^2 + ax + b = 0$$

los coeficientes, *a* y *b*, son los posibles resultados al lanzar dos dados.

Calcula la probabilidad de que la ecuación no tenga solución real.

Los resultados al lanzar dos dados son:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

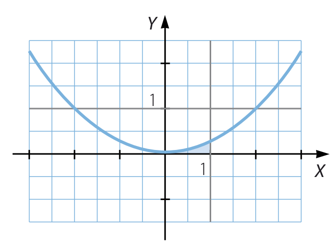
La ecuación de segundo grado no tiene solución si el discriminante es negativo:

$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \rightarrow a^2 < 4b \rightarrow P(\text{No solución}) = \frac{17}{36}$$

092 **En la ecuación de segundo grado $x^2 + ax + b = 0$, los coeficientes, *a* y *b*, son dos números reales escogidos al azar en el intervalo [0, 1].**

Calcula la probabilidad de que tenga dos soluciones reales distintas.

La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas si el discriminante es positivo: $\Delta = a^2 - 4b > 0 \rightarrow a^2 > 4b$



$$\text{Área encerrada bajo la curva} = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{Dos soluciones distintas}) = \frac{\text{Área favorable}}{\text{Área posible}} = \frac{\frac{1}{12}}{1} = \frac{1}{12}$$

093 **¿Cuál es el mínimo número de personas necesarias, para que la probabilidad de que, al menos, dos de ellas cumplan años el mismo día, sea superior al 50 %?**

Suponemos que el año tiene 365 días.

Si estudiamos un grupo de *n* personas, el número de casos posibles es 365^n.

$$P(n \text{ personas no cumplen años el mismo día}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$P(\text{Al menos dos personas del grupo de } n \text{ personas cumplen años el mismo día}) =$$

$$= 1 - P(n \text{ personas no cumplen años el mismo día}) =$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

n	Probabilidad
5	0,027
10	0,12
15	0,25
20	0,41
25	0,57

n	Probabilidad
20	0,41
21	0,44
22	0,47
23	0,51

El mínimo número de personas es 23.

094 **Tenemos dos urnas iguales, una con 25 bolas rojas y otra con 25 bolas negras. Cambiamos el número de bolas que queramos de una urna a otra. Si después se elige una urna al azar y se saca una bola:**

¿Cómo distribuirías las bolas para que la probabilidad de sacar una bola roja sea la mayor posible? ¿Cuál es esa probabilidad?

U_1	U_2	Probabilidad
25 rojas	25 negras	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}=0{,}5$
25 rojas y 5 negras	20 negras	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}=0{,}41$
25 rojas y 20 negras	5 negras	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{18}=0{,}22$
20 rojas y 5 negras	20 negras y 5 rojas	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}=0{,}5$
15 rojas y 5 negras	20 negras y 10 rojas	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{24}=0{,}54$
20 rojas	25 negras y 5 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{12}=0{,}58$
15 rojas	20 negras y 10 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}=\frac{9}{14}=0{,}64$
10 rojas	25 negras y 15 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8}=\frac{11}{16}=0{,}69$
5 rojas	25 negras y 20 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{9}=\frac{13}{18}=0{,}72$
1 roja	25 negras y 24 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{49}=\frac{1}{2}\cdot\frac{73}{49}=\frac{73}{98}=0{,}74$

Observamos que, al cambiar las bolas negras de urna, la probabilidad de extraer una bola roja es menor que al cambiar las bolas rojas. Por tanto, esta probabilidad es máxima al pasar 24 bolas rojas a la segunda urna, junto con las 25 bolas negras, y su valor es 0,74.

14 Distribuciones binomial y normal

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El teorema

–Como la mayoría de los que estamos presentes en esta aula, Laplace fue incomprendido por sus padres –dijo Caine mientras caminaba por delante de la pizarra–. Aunque su padre quería que fuera soldado o sacerdote, Laplace se decidió por la vida académica. Por lo tanto, cuando cumplió los dieciocho años marchó al epicentro académico de Francia: París. Allí consiguió un trabajo como profesor de geometría de los cadetes de una academia militar. Entre ellos había un chico bajito llamado Napoleón Bonaparte que, según me han dicho, hizo después algunas cosas extraordinarias.

Los doce estudiantes reunidos alrededor de la mesa se rieron cortésmente.

–En 1770, Laplace presentó su primer trabajo en la prestigiosa Académie des Sciences. Después de aquello, quedó claro para todos que era un genio matemático. Así que dedicó el resto de su vida a dos campos: la probabilidad y la astronomía. Casi treinta años más tarde, en 1799, unió los dos campos cuando publicó el libro de astronomía más importante de la época: *Tratado de la mecánica celeste*. El libro no sólo contenía una exposición analítica del sistema solar, sino que también incluía nuevos métodos para calcular las órbitas planetarias.

»Sin embargo, la razón por la que el *Tratado de la mecánica celeste* sigue considerándose hoy muy importante no es por sus hallazgos astronómicos, sino porque fue la primera persona que aplicó la teoría de las probabilidades a la astronomía. Laplace demostró que las múltiples observaciones de la posición de una estrella tendían a formar una curva con forma de campana. […]

–¿A qué se refiere con «múltiples observaciones de la posición de una estrella»?–, preguntó un estudiante paliducho y con pelo lacio y oscuro.

–Ah, buena pregunta. –Caine se acercó a la pizarra–. En aquel entonces, uno de los grandes problemas de la astronomía era que todos tomaban sus mediciones un poco a ojo de buen cubero y, como las personas cometen errores, los datos no eran claros. Veinte astrónomos diferentes medían la posición de una estrella y obtenían veinte lecturas diferentes. Lo que hizo Laplace fue tomar aquellas veinte observaciones diferentes y elaborar un gráfico. Cuando lo hizo, vio que las posiciones formaban una curva con forma de campana como ésta. –Caine señaló una gráfica de distribución normal en la pared–. En cuanto vio esto, exclamó: «Ajá, si las observaciones están en una distribución normal, entonces la punta nos indica la posición más probable de la estrella».

Adam Fawer

Mide las dimensiones, en mm, de tu mesa y calcula su superficie. Con los datos de tus compañeros elabora un polígono de frecuencias y, a partir de él, calcula la superficie más probable de la mesa.

Respuesta abierta.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Indica el tipo de variable estadística.

a) Talla de una persona.

b) Temperatura.

c) Sexo de una persona.

d) Dinero gastado a la semana.

a) Cuantitativa continua

b) Cuantitativa continua

c) Cualitativa

d) Cuantitativa discreta

002 Organiza en una tabla de frecuencias estos datos relativos al peso, en kg, de 20 personas.

42 51 56 66 75 47 51 45 63 79

69 59 50 70 59 62 54 60 63 58

Respuesta abierta.

Peso	f_i	h_i	F_i	H_i
[40, 50)	3	0,15	3	0,15
[50, 60)	8	0,4	11	0,55
[60, 70)	6	0,3	17	0,85
[70, 80)	3	0,15	20	1
	$N = 20$	$\sum h_i = 1$		

003 Lidia ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas: 7, 5, 6, 10, 9, 7 y 6.
Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

$$\overline{x} = \frac{50}{7} = 7{,}14$$

$$\sigma^2 = \frac{376}{7} - 7{,}14^2 = 2{,}73$$

$$\sigma = 1{,}65$$

004 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de que la suma:

a) Sea 3.

b) No sea 7.

c) Sea inferior a 11.

d) Sea 4 o 5.

a) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

c) $1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

d) $\frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$

ACTIVIDADES

001 Lanzamos dos dados de 6 caras.

a) Comprueba que la función que asigna a cada suceso elemental la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

b) Elabora su tabla de valores y represéntala gráficamente.

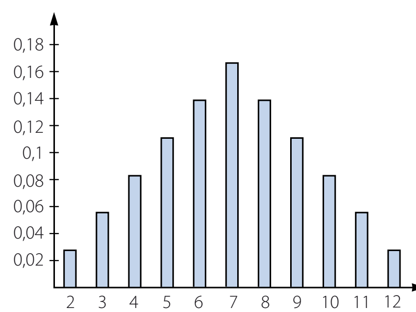
a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2$ $X(1, 2) = 3$ $X(1, 3) = 4$ $X(1, 4) = 5$ $X(1, 5) = 6$ $X(1, 6) = 7$
$X(2, 1) = 3$ $X(2, 2) = 4$ $X(2, 3) = 5$ $X(2, 4) = 6$ $X(2, 5) = 7$ $X(2, 6) = 8$
$X(3, 1) = 4$ $X(3, 2) = 5$ $X(3, 3) = 6$ $X(3, 4) = 7$ $X(3, 5) = 8$ $X(3, 6) = 9$
$X(4, 1) = 5$ $X(4, 2) = 6$ $X(4, 3) = 7$ $X(4, 4) = 8$ $X(4, 5) = 9$ $X(4, 6) = 10$
$X(5, 1) = 6$ $X(5, 2) = 7$ $X(5, 3) = 8$ $X(5, 4) = 9$ $X(5, 5) = 10$ $X(5, 6) = 11$
$X(6, 1) = 7$ $X(6, 2) = 8$ $X(6, 3) = 9$ $X(6, 4) = 10$ $X(6, 5) = 11$ $X(6, 6) = 12$

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{36}$	1



002 Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

a) Calcula el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental.

b) Define sobre este experimento dos variables aleatorias y represéntalas.

a) El espacio muestral es:

$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$.

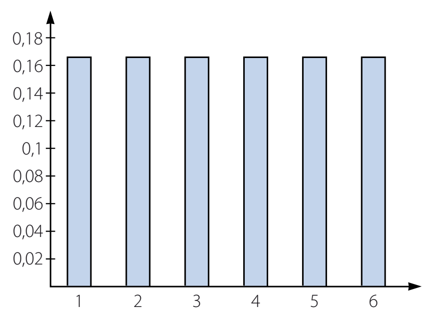
b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$X(1, C) = 1$ $X(2, C) = 2$ $X(3, C) = 3$ $X(4, C) = 4$ $X(5, C) = 5$ $X(6, C) = 6$

$X(1, X) = 1$ $X(2, X) = 2$ $X(3, X) = 3$ $X(4, X) = 4$ $X(5, X) = 5$ $X(6, X) = 6$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1

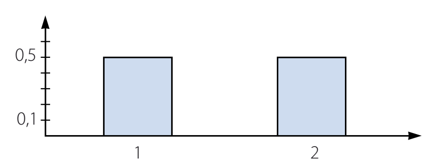


La función Y asigna a cada suceso el número elemental 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$Y(1, C) = 1$ $Y(2, C) = 1$ $Y(3, C) = 1$ $Y(4, C) = 1$ $Y(5, C) = 1$ $Y(6, C) = 1$

$Y(1, X) = 2$ $Y(2, X) = 2$ $Y(3, X) = 2$ $Y(4, X) = 2$ $Y(5, X) = 2$ $Y(6, X) = 2$

Y	$P(Y = y_i)$	$P(Y \leq y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



003 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta la suma de las puntuaciones al lanzar dos dados de 6 caras. Calcula los parámetros de esta variable aleatoria.**

Media: $\mu = 7$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{5{,}852} = 2{,}419$

004 **¿Puedes encontrar una variable aleatoria discreta que proceda de una variable estadística continua? ¿Y lo contrario?**

Consideramos la variable estadística cuantitativa continua «altura de las personas de un país, medida en metros». Definimos sobre esta variable estadística la variable aleatoria:

Para cada altura $h \rightarrow X(h) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad h > 1 \end{cases}$

Esta variable está definida para cualquier suceso elemental de la variable estadística, es decir, cada una de las alturas; además, es discreta, pues solo toma dos valores.

Por tanto, de una variable estadística continua se puede obtener una variable aleatoria discreta, pero no a la inversa, pues un número finito de valores no puede tener un número infinito de imágenes.

005 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados de 6 caras, consideramos la variable aleatoria X, que asocia a cada suceso elemental el producto de las puntuaciones que se ven. Halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

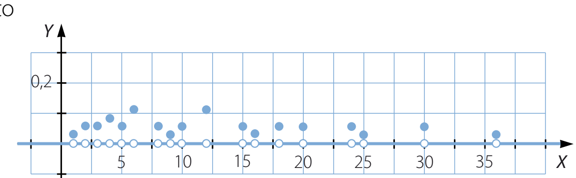
$X(1, 1) = 1$	$X(1, 2) = 2$	$X(1, 3) = 3$	$X(1, 4) = 4$	$X(1, 5) = 5$	$X(1, 6) = 6$
$X(2, 1) = 2$	$X(2, 2) = 4$	$X(2, 3) = 6$	$X(2, 4) = 8$	$X(2, 5) = 10$	$X(2, 6) = 12$
$X(3, 1) = 3$	$X(3, 2) = 6$	$X(3, 3) = 9$	$X(3, 4) = 12$	$X(3, 5) = 15$	$X(3, 6) = 18$
$X(4, 1) = 4$	$X(4, 2) = 8$	$X(4, 3) = 12$	$X(4, 4) = 16$	$X(4, 5) = 20$	$X(4, 6) = 24$
$X(5, 1) = 5$	$X(5, 2) = 10$	$X(5, 3) = 15$	$X(5, 4) = 20$	$X(5, 5) = 25$	$X(5, 6) = 30$
$X(6, 1) = 6$	$X(6, 2) = 12$	$X(6, 3) = 18$	$X(6, 4) = 24$	$X(6, 5) = 30$	$X(6, 6) = 36$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$
5	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$
8	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$
9	$\frac{1}{36}$	$\frac{17}{36}$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
10	$\frac{1}{18}$	$\frac{19}{36}$
12	$\frac{1}{9}$	$\frac{23}{36}$
15	$\frac{1}{18}$	$\frac{25}{36}$
16	$\frac{1}{36}$	$\frac{13}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{9}$
20	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$
24	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{9}$
25	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{12}$
30	$\frac{1}{18}$	$\frac{35}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	1

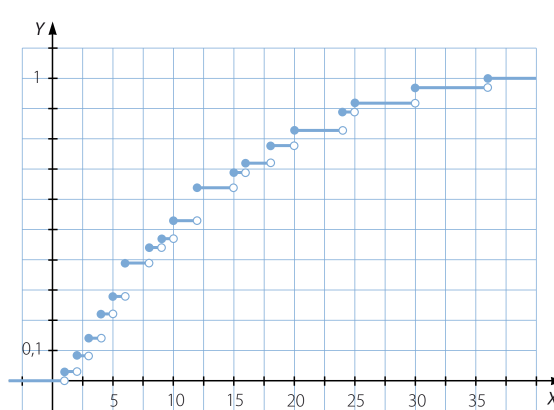
La función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x = 1, 9, 16, 25, 36 \\ \frac{1}{18} & \text{si } x = 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x = 4 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 6, 12 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

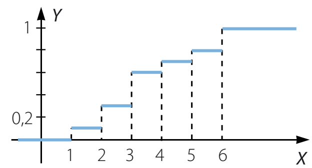


La función de distribución es:

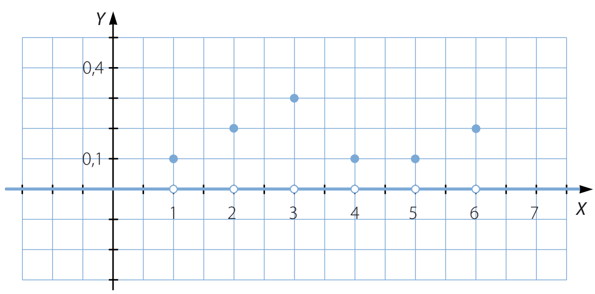
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ \dfrac{1}{36} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{12} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \dfrac{5}{36} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \dfrac{2}{9} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \dfrac{5}{18} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ \dfrac{7}{18} & \text{si } 6 \le x < 8 \\ \dfrac{4}{9} & \text{si } 8 \le x < 9 \\ \dfrac{17}{36} & \text{si } 9 \le x < 10 \\ \dfrac{19}{36} & \text{si } 10 \le x < 12 \\ \dfrac{23}{36} & \text{si } 12 \le x < 15 \\ \dfrac{25}{36} & \text{si } 15 \le x < 16 \\ \dfrac{13}{18} & \text{si } 16 \le x < 18 \\ \dfrac{7}{9} & \text{si } 18 \le x < 20 \\ \dfrac{5}{6} & \text{si } 20 \le x < 24 \\ \dfrac{8}{9} & \text{si } 24 \le x < 25 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 25 \le x < 30 \\ \dfrac{35}{36} & \text{si } 30 \le x < 36 \\ 1 & \text{si } 36 \le x < +\infty \end{cases}$$



006 **Esta es la gráfica de una función de distribución. Halla y representa la función de probabilidad.**



$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty < x < 1\\ 0{,}1 & \text{si } 1 \le x < 2\\ 0{,}3 & \text{si } 2 \le x < 3\\ 0{,}6 & \text{si } 3 \le x < 4\\ 0{,}7 & \text{si } 4 \le x < 5\\ 0{,}8 & \text{si } 5 \le x < 6\\ 1 & \text{si } 6 \le x < +\infty\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{si } x = 1, 4, 5\\ 0{,}2 & \text{si } x = 2, 6\\ 0{,}3 & \text{si } x = 3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$



007 **Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar 4 veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial.**

La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n = 4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 5», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$

008 **Calcula la probabilidad de que la variable aleatoria, *X*, que cuenta el número de veces que sale un 5 en 4 tiradas de un dado, sea mayor o igual que 3.**

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}0162$$

009 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula la probabilidad de que obtenga 2 bolas blancas.**

$$X \equiv B\left(3, \frac{2}{5}\right) \qquad P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}288$$

010 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X=3)+P(X=0)=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0+\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=0{,}28$

b) $1-P(X=3)=1-\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0=0{,}936$

011 Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula, utilizando la tabla de la distribución binomial, la probabilidad de que haya anotado 2 bolas blancas.

$X\equiv B(3;0{,}4)$

$P(X=2)=0{,}288$

012 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X=3)+P(X=0)=0{,}064+0{,}216=0{,}28$

b) $1-P(X=3)=1-0{,}064=0{,}936$

013 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad, y halla la función de distribución asociada a ella.

$$f(x)=\begin{cases} kx & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^2 kx\,dx=\left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^2=2k\rightarrow k=\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty< x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } 2<x<+\infty\end{cases}$$

014 Halla la función de densidad que corresponde a esta función de distribución.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty< x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x<+\infty\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

015 Tipifica los siguientes valores de una variable aleatoria con $\mu = 3$ y $\sigma = 2$.

a) $x_1 = 3$ b) $x_2 = 4{,}5$ c) $x_3 = -0{,}5$ d) $x_4 = -1$

a) $\frac{3-3}{2} = 0$

b) $\frac{4{,}5-3}{2} = 0{,}75$

c) $\frac{-0{,}5-3}{2} = -1{,}75$

d) $\frac{-1-3}{2} = -2$

016 Compara los datos de estas distribuciones.

$x_1 = 2$ (con $\mu = 1$, $\sigma = 2$)
$x_2 = 1$ (con $\mu = 2$, $\sigma = 1$)
$x_3 = 1{,}5$ (con $\mu = 1{,}5$; $\sigma = 1{,}5$)

$z_1 = \frac{2-1}{2} = 0{,}5$ $z_2 = \frac{1-2}{1} = -1$ $z_3 = \frac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5} = 0$

$z_2 < z_3 < z_1$

017 Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 2)$ c) $P(X = 4)$ e) $P(X < 7)$
b) $P(X > 3)$ d) $P(X = 6)$ f) $P(X = 8)$

a) $P(X < 2) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{2-5}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z \le 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(X > 3) = P\left(\frac{X-5}{2} > \frac{3-5}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

c) $P(X = 4) = 0$

d) $P(X = 6) = 0$

e) $P(X < 7) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{7-5}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

f) $P(X = 8) = 0$

018 Una variable aleatoria X se distribuye según una normal de media μ y desviación típica σ. Sabemos que los cuartiles de la distribución valen 12 y 36, respectivamente. ¿Cuánto valen la media μ y la desviación típica σ?

$$P(X < 12) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25$$

$$\to P\left(Z < -\frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \to -\frac{12-\mu}{\sigma} = 0{,}68 \to 12 - \mu = -0{,}68\sigma$$

$$P(X < 36) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \to \frac{36-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$\to 36 - \mu = 0{,}68\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 - \mu = -0{,}68\sigma \\ 36 - \mu = 0{,}68\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 17{,}647 \end{array}$$

019 Una fábrica de componentes elabora 2.000 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 1 %, ¿cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sea mayor que 50? ¿Y menor que 25?

$$X \equiv B(2.000;\ 0{,}01) \approx N(20;\ 4{,}45)$$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} > \frac{50-20}{4{,}45}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1 - P(Z \leq 6{,}74) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} < \frac{25-20}{4{,}45}\right) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$$

020 El 10 % de las personas de una ciudad afirma que no ve nunca televisión. Calcula la probabilidad de que, escogidas 100 personas al azar, haya al menos 14 personas que no vean televisión. ¿Qué probabilidad hay de que sean exactamente 14?

$$X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10{,}3)$$

$$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{14-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) =$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

$$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}879 = 0{,}0542$$

021 En una urna hay 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se sacan 3 bolas y se anota el número de bolas azules que se han conseguido. Realiza una tabla con la distribución de probabilidad, y halla la media y la desviación típica.

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

Media: $\mu = \frac{9}{8} = 1{,}125$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}502} = 0{,}709$

022 ●○○ En el experimento aleatorio consistente en elegir al azar una ficha de dominó, se considera la variable $X =$ «mayor número de las dos puntuaciones de la ficha».

Construye la distribución de probabilidad y halla la media, la desviación típica y la varianza.

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
0	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$
4	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$
5	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{4}$
6	$\frac{1}{4}$	1

Media: $\mu = \dfrac{112}{28} = 4$

Varianza: $\sigma^2 = 3$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}732$

023 ●○○ Se lanzan dos dados y se considera la variable aleatoria que a cada suceso elemental le hace corresponder la diferencia entre el mayor y el menor de los resultados de ambos dados.

a) Clasifica la variable aleatoria.

b) Describe la distribución de probabilidad en forma de tabla.

a) Es una variable discreta.

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{18}$
5	$\frac{1}{18}$	1

024 Hemos pintado tres caras de un dado con un 1, dos caras con un 2 y una cara con un 3. Si consideramos la variable que asigna a cada suceso elemental su puntuación:

a) Elabora una tabla con la distribución de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica.

a)

X	$P(X=x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	1

b) Media: $\mu = \frac{5}{3} = 1{,}667$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}554} = 0{,}745$

025 Un juego consiste en lanzar dos dados, anotar la suma de los resultados dividida entre 2 y aproximarla, por exceso, al número entero más próximo.

a) Realiza la distribución de probabilidad.

b) Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

a)

X	$P(X=x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
4	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{18}$
5	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{12}$
6	$\frac{1}{12}$	1

b) Media: $\mu = \frac{135}{36} = 3{,}75$

Varianza: $\sigma^2 = 1{,}52$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}23$

026 Dada la siguiente tabla, que corresponde a los valores que toma una variable aleatoria X y a sus probabilidades:

X	4	5	6	7
$P(X)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprueba que corresponde a una distribución de probabilidad.

b) Calcula la función de distribución.

c) Halla su media y su desviación típica.

a) $0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 4 \\ 0{,}6 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0{,}95 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x < +\infty \end{cases}$$

c) Media: $\mu = 4{,}65$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}8275} = 0{,}909$

027 ●●○ Con la distribución de la actividad anterior, determina las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 4)$ c) $P(4 \leq X < 7)$

b) $P(X < 6)$ d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

a) $P(X > 4) = 0{,}4$ c) $P(4 \leq X < 7) = 0{,}95$

b) $P(X < 6) = 0{,}8$ d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3{,}741 < X < 5{,}559) = 0{,}8$

028 ●○○ Identifica las variables aleatorias que siguen una distribución binomial.

a) Tenemos tres fichas blancas y cinco fichas azules en una bolsa. Sacamos cuatro fichas y contamos el número de fichas que son blancas.

b) En la situación anterior sacamos una ficha, anotamos su color y la devolvemos a la bolsa. Repetimos el experimento 3 veces y anotamos el número de fichas de color blanco.

c) Lanzamos un dado diez veces y anotamos las veces que sale el número 1.

d) Se lanza un dado y si sale un número par, se vuelve a lanzar el mismo dado, pero si sale un número impar se lanza un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4. Se cuenta el número de las veces que sale el número 3.

e) En una ciudad, el 10 % de la población tiene los ojos de color azul. Se eligen, al azar, 20 personas y se anota el número de ellas que tiene los ojos azules.

a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

$n = 3$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir una ficha blanca», entonces $P(A) = \frac{3}{8}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una extracción no influye en la siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$

c) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 1», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

d) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

e) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Tener los ojos azules», entonces $P(A) = 0{,}1$.

Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0{,}1)$

029 ●○○ Calcula las probabilidades que se indican en las siguientes distribuciones binomiales.

a) En $B(8; 0{,}2)$ $\quad P(X=4)$, $P(X=1)$, $P(X=0)$

b) En $B(12; 0{,}9)$ $\quad P(X=2)$, $P(X<3)$, $P(X\geq 11)$

c) En $B(6; 0{,}8)$ $\quad P(2\leq X\leq 5)$, $P(1\leq X\leq 4)$

a) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^4=0{,}045875$ $\qquad P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^7=0{,}33554$

$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^8=0{,}16777$

b) $P(X=2)=\binom{12}{2}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^{10}=0{,}000000005346$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$=0{,}000000000001+0{,}000000000108+0{,}000000005346=0{,}000000005455$

$P(X\geq 11)=P(X=11)+P(X=12)=0{,}37657+0{,}28243=0{,}659$

c) $P(2\leq X\leq 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=0{,}01536+0{,}08192+0{,}24576+0{,}39322=0{,}73626$

$P(1\leq X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$=0{,}001536+0{,}001536+0{,}08192+0{,}24576=0{,}344576$

030 ●○○ Haz la tabla de la distribución de una distribución $B(5; 0{,}8)$ y comprueba que se verifica que $\mu=np$ y $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$\mu=5\cdot 0{,}8=4$ $\qquad \sigma=\sqrt{0{,}8}=0{,}89=\sqrt{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}$

031 ●○○ La probabilidad de que un lanzamiento dé en el blanco es de $\frac{2}{3}$. Efectuamos 8 lanzamientos.

a) Determina la probabilidad de acertar 3 veces en el blanco.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que den en el blanco más de 2 lanzamientos?

c) ¿Y de que no acierte ninguno?

d) Determina la probabilidad de que el número de lanzamientos que acierten en el blanco sea mayor o igual que 1 y menor o igual que 4.

a) $P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=0{,}06828$

b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=$
$=1-(0{,}0001524+0{,}002438+0{,}01707)=0{,}9803$

c) $P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8=0{,}0001524$

d) $P(1\leq X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$=0{,}002438+0{,}01707+0{,}06828+0{,}1707=0{,}2585$

032 Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de discos sin error. Si escogemos 10 de ellos al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) No hay ninguno defectuoso.

b) Hay más de uno defectuoso.

a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10}=0{,}3487$

b) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))=1-(0{,}3487+0{,}3874)=0{,}2639$

033 Un examen tipo test tiene 30 preguntas a las que se ofrecen cuatro respuestas posibles.

a) Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de dos preguntas?

b) Si para aprobar hay que tener más de 15 respuestas correctas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un aprobado?

$X\equiv B(30;\ 0{,}25)$

$$\left.\begin{array}{l} np=7{,}5>5\\ n(1-p)=22{,}5>5\end{array}\right\}\rightarrow X\equiv B(30;\ 0{,}25)\approx N(7{,}5;\ 2{,}37)$$

a) $P(X>2)=P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}37}>\dfrac{2-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>-2{,}32)=P(Z<2{,}32)=0{,}9898$

b) $P(X>15)=P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}37}>\dfrac{15-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>3{,}16)=1-P(Z\le 3{,}16)=$
$=1-0{,}9992=0{,}0008$

034 Se lanza el dado 25 veces. Cada vez que se obtiene un número mayor que 2 gana Eva. En caso contrario, gana Daniel.

a) Describe la función de probabilidad y la función de distribución.

b) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que Eva gane exactamente 3 veces?

d) ¿Cual es la probabilidad de que Daniel gane más de 22 veces?

a) La función de probabilidad es: $f(x)=\begin{cases}\binom{25}{x}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{25-x} & \text{si } x=0,1,2,\dots,25\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

La función de distribución es: $F(x)=\sum_{-\infty}^{x}\binom{25}{x}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{25-x}$

b) $\mu=25\cdot\dfrac{2}{3}=16{,}67$

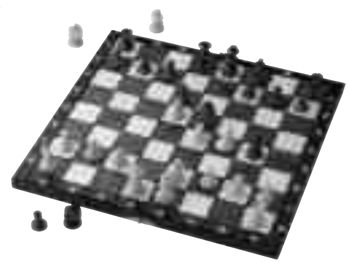
$\sigma=\sqrt{25\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}}=2{,}36$

c) $\left.\begin{array}{l} np = 16{,}67 > 5 \\ n(1-p) = 8{,}33 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(25;\ 0{,}66) \approx N(16{,}67;\ 2{,}36)$

$$P(X = 3) = P(2{,}5 < X < 3{,}5) = P\left(\frac{2{,}5 - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3{,}5 - 16{,}67}{2{,}36}\right) =$$
$$= P(-6 < Z < -5{,}5) = P(5{,}5 < Z < 6) = 0$$

d) $P(X < 3) = P\left(\frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3 - 16{,}67}{2{,}36}\right) = P(Z < -5{,}79) = 1 - P(Z \le 5{,}79) = 0$

035 De cada 10 veces que mi hermano juega conmigo al ajedrez, me gana 7 veces.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane 1 vez?

b) ¿Y de hacer tablas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane entre 1 y 3 veces, ambos números incluidos?

d) Si apostamos que, en 10 partidas, yo le ganaré al menos 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de ganar la apuesta?

$X \equiv B(10;\ 0{,}7)$

a) $P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 = 0{,}0001378$

b) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}1029$

c) $P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$$= \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^7 =$$
$$= 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 = 0{,}0105868$$

d) $P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$$= 0{,}000005904 + 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 + 0{,}03676 + 0{,}1029 =$$
$$= 0{,}15025$$

036 En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

a) Determina la probabilidad de que haya 2 personas a las que la prueba les dé positivo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de 1 persona?

$X \equiv B(10;\ 0{,}02)$

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 = 0{,}01531$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$$= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^9 = 1 - 0{,}8171 - 0{,}1667 = 0{,}0162$$

037 ●○○

Si 1 de cada 5 turistas que entra en una tienda compra algún artículo y hoy hemos atendido a 8 personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) 3 personas compraron algún artículo.

b) Hubo entre 5 y 7 personas, ambos números incluidos, que adquirieron algún artículo.

c) Más de 2 personas compraron en la tienda.

$X \equiv B(8; 0{,}2)$

a) $P(X = 3) = 0{,}1468$

b) $P(5 \le X \le 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) =$
$= 0{,}0092 + 0{,}0011 + 0{,}0001 = 0{,}0104$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$
$= 1 - 0{,}1678 - 0{,}3355 - 0{,}2936 = 0{,}2031$

038 ●●○

El 2 ‰ de las pilas fabricadas llegan descargadas al proceso de envasado. Si escogemos 12 pilas al azar, calcula la probabilidad de que haya más de 2 pilas descargadas.

$X \equiv B(12; 0{,}002)$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}002^1 \cdot 0{,}998^{11} - \binom{12}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{10} =$$
$$= 1 - 0{,}97626 - 0{,}023477 - 0{,}00025877 = 0{,}000004$$

039 ●○○

Un estudio médico asegura que 1 de cada 8 niños tiene gingivitis. Escogidos 7 niños al azar:

a) Determina la probabilidad de que haya exactamente 2 niños con la enfermedad.

b) Los dentistas han decidido que, si en el grupo hay más de 2 niños enfermos, se iniciaría un tratamiento a todo el grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la padezcan 6 niños o menos?

$X \equiv B(7; 0{,}125)$

a) $P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^5 = 0{,}1683$

b) $$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^7 - \binom{7}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^6 - \binom{7}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^5 =$$
$$= 1 - 0{,}3927 - 0{,}3927 - 0{,}1683 = 0{,}0463$$

c) $$P(X \le 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - P(X = 7) = 1 - \binom{7}{7} \cdot 0{,}125^7 \cdot 0{,}875^0 =$$
$$= 1 - 0{,}00000048 = 0{,}99999952$$

040 ●○○ El 20 % de la población de una ciudad es inmigrante de procedencia africana. Se eligen cinco personas al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Haya un inmigrante africano.
b) Sean dos o más inmigrantes africanos.
c) Las cinco sean inmigrantes africanos.
d) Haya, al menos, un africano.
e) Sean cuatro inmigrantes africanos.

$X \equiv B(5;\, 0{,}2)$

a) $P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$

$= 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 - \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 1 - 0{,}3277 - 0{,}4096 = 0{,}2627$

c) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 1 - 0{,}3277 = 0{,}6723$

e) $P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064$

041 ●●○ Juan suele dar en el blanco con una de cada tres flechas que lanza a la diana.

a) ¿Es cierto que si lanza 3 flechas, al menos una de ellas dará en el blanco?
b) ¿Qué probabilidad hay de que eso suceda?
c) Y si lanza 6 flechas, ¿puede estar seguro de que alguna de sus flechas va a dar en el blanco?
d) ¿Cuántas flechas debería lanzar para asegurar, con una probabilidad de más del 95%, que va a conseguirlo?

a) No, la probabilidad no puede asegurar el resultado del lanzamiento.

b) $X \equiv B\left(3, \frac{1}{3}\right)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - 0{,}2963 = 0{,}7037$

c) No, la probabilidad no varía y no puede asegurar el resultado.

d) $X \equiv B\left(n, \frac{1}{3}\right)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0{,}95$

$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0{,}05 \rightarrow n = \dfrac{\log 0{,}05}{\log \frac{2}{3}} = 7{,}21$

A partir de 8 flechas, la probabilidad de que al menos una flecha dé en el blanco es más del 95%.

042 Comprueba que esta función es de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}04x + 0{,}06 & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

a) Halla la función de distribución.

b) Calcula las siguientes probabilidades.

$$P(X < 2) \qquad P(X > 4) \qquad P(2 < X < 4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^6 (0{,}04x + 0{,}06)\,dx = \left[0{,}02x^2 + 0{,}06x\right]_1^6 = 1{,}08 - 0{,}08 = 1$$

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 0{,}02x^2 + 0{,}06x & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ 1 & \text{si } 6 < x < +\infty \end{cases}$

b) $P(X < 2) = F(2) = 0{,}2$

$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$

$P(2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2) = 0{,}56 - 0{,}2 = 0{,}36$

043 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad, y halla su función de distribución.

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + k & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-0{,}5x + k)\,dx = \left[-0{,}25x^2 + kx\right]_{-1}^{1} = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ -0{,}25x^2 + 0{,}5x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

044 La función de distribución de una variable continua es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determina las siguientes probabilidades.

a) $P(2 \le X \le 3)$ b) $P(X \le 3)$ c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5)$ d) $P(X > 2)$

a) $P(2 \le X \le 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = F(3) - F(2) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{2}{3}$

c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = P(X \le 2{,}5) - P(X \le 1{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

045 Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 3) \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{8} & \text{si } x \in [3, 4] \\ 1 & \text{si } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(3 \le X \le 4)$

b) $P(3{,}5 \le X < 3{,}6)$

c) $P(X \le 3{,}5)$

d) $P(X > 3{,}8)$

a) $P(3 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = F(4) - F(3) = 1 - 0 = 1$

b) $P(3{,}5 \le X < 3{,}6) = P(X < 3{,}6) - P(X \le 3{,}5) = F(3{,}6) - F(3{,}5) = 0{,}57 - 0{,}47 = 0{,}1$

c) $P(X \le 3{,}5) = F(3{,}5) = 0{,}47$

d) $P(X > 3{,}8) = 1 - P(X \le 3{,}8) = 1 - F(3{,}8) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$

046 La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Halla su función de distribución y las siguientes probabilidades.

a) $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$

b) $P(1 < X < 2)$

c) $P(X < 1{,}5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

a) $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = P(X < 1{,}5) - P(X < 0{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = 0{,}42 - 0{,}015 = 0{,}405$

b) $P(1 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = F(2) - F(1) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$

c) $P(X < 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}42$

047 En una distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades.

a) $P(Z < 0{,}73)$

b) $P(Z < 2{,}05)$

c) $P(Z \le 1{,}77)$

d) $P(Z < 0{,}274)$

e) $P(Z > -0{,}38)$

f) $P(Z > -1{,}297)$

g) $P(Z = -2{,}75)$

h) $P(Z \ge -1{,}04)$

a) $P(Z < 0{,}73) = 0{,}7673$

b) $P(Z < 2{,}05) = 0{,}9798$

c) $P(Z \le 1{,}77) = 0{,}9616$

d) $P(Z < 0{,}274) = 0{,}6079$

e) $P(Z > -0{,}38) = P(Z < 0{,}38) = 0{,}648$

f) $P(Z > -1{,}297) = P(Z < 1{,}297) = 0{,}9026$

g) $P(Z = -2{,}75) = 0$

h) $P(Z \ge -1{,}04) = P(Z \le 1{,}04) = 0{,}8508$

048 ●○○ En una distribución $N(0, 1)$, halla las siguientes probabilidades.

a) $P(Z > 3{,}58)$
b) $P(Z \geq 1{,}3487)$
c) $P(Z = 2{,}107)$
d) $P(Z \geq 0{,}53)$
e) $P(Z < -0{,}33)$
f) $P(Z < -1{,}334)$
g) $P(Z \leq -2{,}19)$
h) $P(Z < -3{,}487)$

a) $P(Z > 3{,}58) = 1 - P(Z < 3{,}58) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

b) $P(Z \geq 1{,}3487) = 1 - P(Z \leq 1{,}3487) = 1 - 0{,}9113 = 0{,}0887$

c) $P(Z = 2{,}107) = 0$

d) $P(Z \geq 0{,}53) = 1 - P(Z \leq 0{,}53) = 1 - 0{,}7019 = 0{,}2981$

e) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

f) $P(Z < -1{,}334) = 1 - P(Z \leq 1{,}334) = 1 - 0{,}9088 = 0{,}0912$

g) $P(Z \leq -2{,}19) = 1 - P(Z \leq 2{,}19) = 1 - 0{,}9857 = 0{,}0143$

h) $P(Z < -3{,}487) = 1 - P(Z \leq 3{,}487) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

049 ●○○ En una distribución $N(0, 1)$, obtén las probabilidades.

a) $P(0{,}26 < Z < 0{,}39)$
b) $P(1{,}16 < Z < 2{,}03)$
c) $P(-0{,}64 < Z < 1{,}36)$
d) $P(-0{,}56 < Z < 3{,}92)$
e) $P(-2{,}6 < Z < -0{,}4329)$
f) $P(-1{,}49 < Z < -1{,}07)$

a) $P(0{,}26 < Z < 0{,}39) = P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0{,}26) = 0{,}6517 - 0{,}6026 = 0{,}0491$

b) $P(1{,}16 < Z < 2{,}03) = P(Z < 2{,}03) - P(Z < 1{,}16) = 0{,}9788 - 0{,}877 = 0{,}1018$

c) $P(-0{,}64 < Z < 1{,}36) = P(Z < 1{,}36) - (1 - P(Z < 0{,}64)) = 0{,}9131 - 1 + 0{,}7389 = 0{,}652$

d) $P(-0{,}56 < Z < 3{,}92) = P(Z < 3{,}92) - (1 - P(Z < 0{,}56)) = 0{,}9999 - 1 + 0{,}7123 = 0{,}7122$

e) $P(-2{,}6 < Z < -0{,}4329) = P(Z < 2{,}6) - P(Z < 0{,}4329) = 0{,}9953 - 0{,}6674 = 0{,}3279$

f) $P(-1{,}49 < Z < -1{,}07) = P(Z < 1{,}49) - P(Z < 1{,}07) = 0{,}9319 - 0{,}8577 = 0{,}0742$

050 ●○○ Calcula el valor de k para que se verifiquen las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(Z < k) = 0{,}9608$
b) $P(Z < k) = 0{,}3192$
c) $P(Z > k) = 0{,}9573$
d) $P(Z \geq k) = 0{,}0113$

a) $k = 1{,}76$

b) $P(Z < k) = 0{,}3192 \rightarrow P(Z < -k) = 0{,}6808 \rightarrow -k = 0{,}47 \rightarrow k = -0{,}47$

c) $P(Z > k) = 0{,}9573 \rightarrow P(Z < -k) = 0{,}9573 \rightarrow -k = 1{,}72 \rightarrow k = -1{,}72$

d) $P(Z \geq k) = 0{,}0113 \rightarrow P(Z < k) = 0{,}9887 \rightarrow k = 2{,}28$

051 ●○○ Determina las siguientes probabilidades en una distribución $N(12, 2)$.

a) $P(X < 12{,}36)$
b) $P(X < 16{,}4)$
c) $P(X \leq 17{,}01)$
d) $P(X < 12{,}0273)$
e) $P(X > 11{,}82)$
f) $P(X > 9{,}84)$
g) $P(X = 12{,}55)$
h) $P(X \geq 7{,}89)$

a) $P(X < 12{,}36) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{12{,}36-12}{2}\right) = P(Z < 0{,}18) = 0{,}5714$

b) $P(X < 16{,}4) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{16{,}4-12}{2}\right) = P(Z < 2{,}2) = 0{,}9861$

c) $P(X \leq 17{,}01) = P\left(\frac{X-12}{2} \leq \frac{17{,}01-12}{2}\right) = P(Z < 2{,}51) = 0{,}994$

d) $P(X < 12{,}0273) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{12{,}0273-12}{2}\right) = P(Z < 0{,}014) = 0{,}5056$

e) $P(X > 11{,}82) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{11{,}82-12}{2}\right) = P(Z < -0{,}09) = 1 - P(Z \leq 0{,}09) =$
$= 1 - 0{,}5359 = 0{,}4641$

f) $P(X > 9{,}84) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{9{,}84-12}{2}\right) = P(Z < -1{,}08) = 1 - P(Z \leq 1{,}08) =$
$= 1 - 0{,}8599 = 0{,}1401$

g) $P(X = 12{,}55) = 0$

h) $P(X \geq 7{,}89) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{7{,}89-12}{2}\right) = P(Z < -2{,}06) = 1 - P(Z \leq 2{,}06) =$
$= 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197$

052 En una distribución $N(56, 4)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 68{,}4)$
b) $P(X \geq 62{,}45)$
c) $P(X = 56)$
d) $P(X \geq 52{,}45)$
e) $P(X < 53{,}3)$
f) $P(X \geq 57{,}32)$
g) $P(X \leq 46{,}92)$
h) $P(X < 46{,}877)$

a) $P(X > 68{,}4) = P\left(\frac{X-56}{4} > \frac{68{,}4-56}{4}\right) = P(Z > 3{,}1) = 1 - P(Z \leq 3{,}1) =$
$= 1 - 0{,}999 = 0{,}001$

b) $P(X \geq 62{,}45) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{62{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}61) = 1 - P(Z < 1{,}61) =$
$= 1 - 0{,}9463 = 0{,}0537$

c) $P(X = 56) = 0$

d) $P(X \geq 52{,}45) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{52{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq -0{,}89) = P(Z \leq 0{,}89) = 0{,}8133$

e) $P(X < 53{,}3) = P\left(\frac{X-56}{4} < \frac{53{,}3-56}{4}\right) = P(Z < -0{,}68) = 1 - P(Z \leq 0{,}68) =$
$= 1 - 0{,}7517 = 0{,}2483$

f) $P(X \geq 57{,}32) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{57{,}32-56}{4}\right) = P(Z \geq 0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) =$
$= 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

g) $P(X \leq 46{,}92) = P\left(\frac{X-56}{4} \leq \frac{46{,}92-56}{4}\right) = P(Z \leq -2{,}27) = 1 - P(Z < 2{,}27) =$
$= 1 - 0{,}9884 = 0{,}0116$

h) $P(X < 46{,}877) = P\left(\frac{X-56}{4} < \frac{46{,}877-56}{4}\right) = P(Z < -2{,}28) = 1 - P(Z \leq 2{,}28) =$
$= 1 - 0{,}9887 = 0{,}0113$

053 En una distribución $N(90, 12)$, obtén estas probabilidades.

a) $P(106 < X < 120)$
b) $P(109 < X < 117{,}3)$
c) $P(84 < X < 112{,}6)$
d) $P(76{,}67 < X < 103{,}96)$
e) $P(58{,}89 < X < 82)$
f) $P(69 < X < 87)$

a) $P(106 < X < 120) = P\left(\dfrac{106-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{120-90}{12}\right) = P(1{,}33 < Z < 2{,}5) =$
$= P(Z < 2{,}5) - P(Z < 1{,}33) = 0{,}9938 - 0{,}9082 = 0{,}0856$

b) $P(109 < X < 117{,}3) = P\left(\dfrac{109-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{117{,}3-90}{12}\right) = P(1{,}58 < Z < 2{,}28) =$
$= P(Z < 2{,}28) - P(Z < 1{,}58) = 0{,}9887 - 0{,}9429 = 0{,}0458$

c) $P(84 < X < 112{,}6) = P\left(\dfrac{84-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{112{,}6-90}{12}\right) = P(-0{,}5 < Z < 1{,}88) =$
$= P(Z < 1{,}88) - (1 - P(Z < 0{,}5)) = 0{,}9699 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}6614$

d) $P(76{,}67 < X < 103{,}96) = P\left(\dfrac{76{,}67-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{103{,}96-90}{12}\right) =$
$= P(-1{,}11 < Z < 1{,}16) = P(Z < 1{,}16) - (1 - P(Z < 1{,}11)) =$
$= 0{,}877 - 1 + 0{,}8665 = 0{,}7435$

e) $P(58{,}89 < X < 82) = P\left(\dfrac{58{,}89-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{82-90}{12}\right) =$
$= P(-2{,}59 < Z < -0{,}67) = P(Z < 2{,}59) - P(Z < 0{,}67) =$
$= 0{,}9952 - 0{,}7486 = 0{,}2466$

f) $P(69 < X < 87) = P\left(\dfrac{69-90}{12} < \dfrac{X-90}{12} < \dfrac{87-90}{12}\right) = P(-1{,}75 < Z < -0{,}25) =$
$= P(Z < 1{,}75) - P(Z < 0{,}25) = 0{,}9599 - 0{,}5987 = 0{,}3612$

054 Halla $a, b, c, \ldots$, para que en una distribución normal $N(108, 16)$ se cumpla que:

a) $P(X < a) = 0{,}8849$
b) $P(X < b) = 0{,}9972$
c) $P(X < c) = 0{,}3632$
d) $P(X \geq d) = 0{,}0495$
e) $P(X \geq e) = 0{,}5987$

a) $P(X < a) = 0{,}8849 \rightarrow P\left(\dfrac{X-108}{16} < \dfrac{a-108}{16}\right) = 0{,}8849 \rightarrow \dfrac{a-108}{16} = 1{,}2$
$\rightarrow a = 127{,}2$

b) $P(X < b) = 0{,}9972 \rightarrow P\left(\dfrac{X-108}{16} < \dfrac{b-108}{16}\right) = 0{,}9972 \rightarrow \dfrac{b-108}{16} = 2{,}77$
$\rightarrow b = 152{,}32$

c) $P(X < c) = 0{,}3632 \rightarrow P\left(\dfrac{X-108}{16} < \dfrac{c-108}{16}\right) = 0{,}3632$
$\rightarrow P\left(\dfrac{X-108}{16} \leq -\dfrac{c-108}{16}\right) = 0{,}6368 \rightarrow -\dfrac{c-108}{16} = 0{,}35$
$\rightarrow c = 102{,}4$

d) $P(X \geq d) = 0{,}0495 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}0495$

$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}9505 \rightarrow \frac{d-108}{16} = 1{,}65$

$\rightarrow d = 134{,}4$

e) $P(X \geq e) = 0{,}5987 \quad \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987$

$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987 \rightarrow -\frac{e-108}{16} = 0{,}25$

$\rightarrow e = 104$

055 El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(192,12)$. Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

a) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - P(Z \leq 0{,}67) =$
$= 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right) = P(-1 < Z < 2{,}33) =$
$= P(Z < 2{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

056 La edad de un grupo de personas sigue una distribución $N(35,10)$. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegida al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

c) Di entre qué edades estará comprendido el 50 % central de la distribución.

a) $P(X > 40) = P\left(\frac{X-35}{10} > \frac{40-35}{10}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) =$
$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $P(23 < X < 47) = P\left(\frac{23-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{47-35}{10}\right) = P(-1{,}2 < Z < 1{,}2) =$
$= P(Z < 1{,}2) - (1 - P(Z < 1{,}2)) = 2 \cdot 0{,}8849 - 1 = 0{,}7698$

c) $P(35 - a < X < 35 + a) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{35-a-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{35+a-35}{10}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{10} < Z < \frac{a}{10}\right) = P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{10}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - 1 = 0{,}5 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{10}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{a}{10} = 0{,}68 \rightarrow a = 6{,}8$

El 50 % central de la distribución estará comprendido entre 28 y 42 años.

057 El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 kg y una desviación típica de 2,4 kg.

a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 kg?

b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación?

a) $P(50 < X < 57) = P\left(\frac{50-53}{2,4} < \frac{X-53}{2,4} < \frac{57-53}{2,4}\right) = P(-1,25 < Z < 1,67) =$
$= P(Z < 1,67) - (1 - P(Z < 1,25)) = 0,9525 - 1 + 0,8944 = 0,8469$

b) $P(X > a) = 0,25 \rightarrow P\left(\frac{X-53}{2,4} > \frac{a-53}{2,4}\right) = P\left(Z > \frac{a-53}{2,4}\right) =$
$= 1 - P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,25 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,75$
$\rightarrow \frac{a-53}{2,4} = 0,68 \rightarrow a = 54,63$

La separación debe hacerse a partir de 54,63 kg.

058 En una distribución normal $N(\mu, \sigma)$:

$$P(X < 8) = 0,9938 \qquad P(X > 4,8) = 0,9332$$

determina μ y σ.

$P(X < 8) = 0,9938 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{8-\mu}{\sigma}\right) = 0,9938$
$\rightarrow \frac{8-\mu}{\sigma} = 2,5 \rightarrow 8 - \mu = 2,5\sigma$

$P(X > 4,8) = 0,9332 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) =$
$= P\left(Z < -\frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) = 0,9332 \rightarrow -\frac{4,8-\mu}{\sigma} = 1,5 \rightarrow 4,8 - \mu = -1,5\sigma$

$$\left.\begin{array}{r} 8-\mu = 2,5\sigma \\ 4,8-\mu = -1,5\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 6 \\ \sigma = 0,8 \end{array}$$

059 Un fabricante de correas para relojes ha estudiado que el contorno de la muñeca de los varones sigue una distribución normal cuya media es 20,5 cm y la desviación típica es 1,5 cm.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm?

b) Si fabricamos correas que midan entre 17 y 22 centímetros, ¿qué porcentaje de la población podrá usarlas?

c) Se pretende reducir costes fabricando menos variedad de longitudes de correas. Encuentra un intervalo $(20,5 - a; 20,5 + a)$ en el que se incluya el 95 % de los varones.

a) $P(X > 23) = P\left(\frac{X-20,5}{1,5} > \frac{23-20,5}{1,5}\right) = P(Z > 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) =$
$= 1 - 0,9525 = 0,0475$

El 4,75 % de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm.

b) $P(17 < X < 22) = P\left(\frac{17 - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \frac{22 - 20,5}{1,5}\right) = P(-2,33 < Z < 1) =$
$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2,33)) = 0,8413 - 1 + 0,9901 = 0,8314$

Estas correas podrá usarlas el 83,14 % de la población.

c) $P(20,5 - a < X < 20,5 + a) = 0,95$
$\rightarrow P\left(\frac{20,5 - a - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \frac{20,5 + a - 20,5}{1,5}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{1,5} < Z < \frac{a}{1,5}\right) = P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - 1 = 0,95 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) = 0,975 \rightarrow \frac{a}{1,5} = 1,96 \rightarrow a = 2,94$

El intervalo en el que se encuentra el 95 % de los varones es (17,56; 23,44).

060 **Se ha comprobado que el tiempo medio que resiste un adulto sin respirar es de 40 segundos, con una desviación típica de 6,2 segundos, y que los datos anteriores siguen una distribución normal.**

a) Halla el porcentaje de personas que aguantan más de 53 segundos y menos de 30 segundos.

b) ¿Qué porcentaje resiste entre 30 y 50 segundos?

a) $P(X > 53) \cdot P(X < 30) = P\left(\frac{X - 40}{6,2} > \frac{53 - 40}{6,2}\right) \cdot P\left(\frac{X - 40}{6,2} < \frac{30 - 40}{6,2}\right) =$
$= P(Z > 2,09) \cdot P(Z < -1,61) = (1 - P(Z \leq 2,09)) \cdot (1 - P(Z \leq 1,61)) =$
$= (1 - 0,9817) \cdot (1 - 0,9463) = 0,00098$

El porcentaje de personas es del 0,09 %.

b) $P(30 < X < 50) = P\left(\frac{30 - 40}{6,2} < \frac{X - 40}{6,2} < \frac{50 - 40}{6,2}\right) = P(-1,61 < Z < 1,61) =$
$= P(Z < 1,61) - (1 - P(Z < 1,61)) = 2 \cdot 0,9463 - 1 = 0,8926$

El 89,26 % resiste entre 30 y 50 segundos.

061 El tiempo medio de espera de un viajero en una estación ferroviaria, medido en minutos, sigue una distribución normal $N(7{,}5; 2)$. Cada mañana 4.000 viajeros acceden a esa estación. Determina el número de viajeros que esperó:

a) Más de 9 minutos.

b) Menos de 6 minutos.

c) Entre 5 y 10 minutos.

d) Completa la frase: «Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de … minutos».

a) $P(X > 9) = P\left(\frac{X-7{,}5}{2} > \frac{9-7{,}5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z \le 0{,}75) =$
$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

$0{,}2266 \cdot 4.000 = 906{,}4 \rightarrow$ 906 viajeros esperaron más de 9 minutos.

b) $P(X < 6) = P\left(\frac{X-7{,}5}{2} < \frac{6-7{,}5}{2}\right) = P(Z < -0{,}75) = 1 - P(Z \le 0{,}75) =$
$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

$0{,}2266 \cdot 4.000 = 906{,}4 \rightarrow$ 906 viajeros esperaron menos de 6 minutos.

c) $P(5 < X < 10) = P\left(\frac{5-7{,}5}{2} < \frac{X-7{,}5}{2} < \frac{10-7{,}5}{2}\right) = P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) =$
$= P(Z < 1{,}25) - (1 - P(Z < 1{,}25)) = 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$

$0{,}7888 \cdot 4.000 = 3.155{,}2 \rightarrow$ 3.155 viajeros esperaron entre 5 y 10 minutos.

d) $\frac{1.000}{4.000} = 0{,}25 \rightarrow P(X < a) = 0{,}25 \rightarrow P\left(\frac{X-7{,}5}{2} < \frac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}25$
$\rightarrow P\left(Z < \frac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}25 \rightarrow P\left(Z \le \frac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}75$
$\rightarrow \frac{a-7{,}5}{2} = 0{,}68 \rightarrow a = 8{,}86$

Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de 8 minutos.

062 Se sabe que el 98,61% de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media $\mu = 3,2$ mm, determina la desviación típica.

$$P(X < 3{,}398) = 0{,}9861 \to P\left(\frac{X-3{,}2}{\sigma} < \frac{3{,}398-3{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}9861$$

$$\to P\left(Z < \frac{0{,}198}{\sigma}\right) = 0{,}9861 \to \frac{0{,}198}{\sigma} = 2{,}2 \to \sigma = 0{,}09$$

063 Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5. El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?

No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$$X \equiv B\left(30, \frac{1}{6}\right) \qquad P(X=0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0{,}0042$$

064 El 60 % de una población de 20.000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos, al azar, 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

$$X \equiv B(50;\ 0{,}6)$$

$$\left.\begin{array}{l} np = 30 > 5 \\ n(1-p) = 20 > 5 \end{array}\right\}$$

$$X \equiv B(50;\ 0{,}6) \approx N(30;\ 3{,}46)$$

$$P(X < 30) = P\left(\frac{X-30}{3{,}46} < \frac{30-30}{3{,}46}\right) = P(Z < 0) = 0{,}5$$

065 El 7 % de los pantalones de una marca tiene algún defecto. Se empaquetan en cajas de 80 unidades para distribuirlos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

$$X \equiv B(80;\ 0{,}07)$$

$$\left.\begin{array}{l} np = 5{,}6 > 5 \\ n(1-p) = 78{,}4 > 5 \end{array}\right\}$$

$$X \equiv B(80;\ 0{,}07) \approx N(5{,}6;\ 2{,}28)$$

$$P(X > 10) = P\left(\frac{X-5{,}6}{2{,}28} > \frac{10-5{,}6}{2{,}28}\right) = P(Z > 1{,}93) = 1 - P(Z \le 1{,}93) =$$
$$= 1 - 0{,}9732 = 0{,}0268$$

066 Se estima que 1 de cada 8 españoles padece hipertensión. Si elegimos a 60 personas al azar:

a) Determina la probabilidad de que en ese grupo haya exactamente 7 personas hipertensas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de diez personas hipertensas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo tengan hipertensión 11 personas o menos?

$X \equiv B(60;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 7{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}56 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(60;\ 0{,}125) \approx N(7{,}5;\ 2{,}56)$$

a) $$P(X = 7) = P(6{,}5 < X < 7{,}5) = P\left(\frac{6{,}5 - 7{,}5}{2{,}56} < \frac{X - 7{,}5}{2{,}56} < \frac{7{,}5 - 7{,}5}{2{,}56}\right) =$$
$$= P(-0{,}39 < Z < 0) = P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0) = 0{,}6517 - 0{,}5 = 0{,}1517$$

b) $$P(X > 10) = P\left(\frac{X - 7{,}5}{2{,}56} > \frac{10 - 7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z > 0{,}97) = 1 - P(Z \le 0{,}97) =$$
$$= 1 - 0{,}834 = 0{,}166$$

c) $$P(X \le 11) = P\left(\frac{X - 7{,}5}{2{,}56} \le \frac{11 - 7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z \le 1{,}36) = 0{,}9131$$

067 Se está experimentando una nueva vacuna para la malaria que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar 45 personas, halla las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que en ese grupo la vacuna sea efectiva en 27 personas.

b) La probabilidad de que sea efectiva en un número de personas comprendido entre 25 y 27, ambos inclusive.

c) La probabilidad de que resulte efectiva en menos de 20 personas.

$X \equiv B(45;\ 0{,}6)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 27 > 5 \\ n(1-p) = 10{,}8 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(45;\ 0{,}6) \approx N(27;\ 3{,}28)$$

a) $$P(X = 27) = P(26{,}5 < X < 27{,}5) = P\left(\frac{26{,}5 - 27}{3{,}28} < \frac{X - 27}{3{,}28} < \frac{27{,}5 - 27}{3{,}28}\right) =$$
$$= P(-0{,}15 < Z < 0{,}15) = P(Z < 0{,}15) - (1 - P(Z < 0{,}15)) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}5596 - 1 = 0{,}1192$$

b) $$P(25 \le X \le 27) = P\left(\frac{25 - 27}{3{,}28} \le \frac{X - 27}{3{,}28} \le \frac{27 - 27}{3{,}28}\right) = P(-0{,}61 \le Z \le 0) =$$
$$= P(Z \le 0{,}61) - P(Z \le 0) = 0{,}7291 - 0{,}5 = 0{,}2291$$

c) $$P(X < 20) = P\left(\frac{X - 27}{3{,}28} < \frac{20 - 27}{3{,}28}\right) = P(Z < -2{,}13) = 1 - P(Z \le 2{,}13) =$$
$$= 1 - 0{,}9834 = 0{,}0166$$

068 ●●○

Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina.

a) La probabilidad de que ese año 10 de ellos tengan un accidente.

b) La probabilidad que sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese año se accidenten más de 15 vehículos?

$X \equiv B(40;\ 0{,}2)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 8 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}4 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(40;\ 0{,}2) \approx N(8;\ 2{,}53)$$

a) $P(X = 10) = P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P\left(\dfrac{9{,}5-8}{2{,}53} < \dfrac{X-8}{2{,}53} < \dfrac{10{,}5-8}{2{,}53}\right) =$
$= P(0{,}59 < Z < 0{,}98) = P(Z < 0{,}98) - P(Z < 0{,}59) =$
$= 0{,}8365 - 0{,}7224 = 0{,}1141$

b) $P(10 \leq X \leq 12) = P\left(\dfrac{10-8}{2{,}53} \leq \dfrac{X-8}{2{,}53} \leq \dfrac{12-8}{2{,}53}\right) = P(0{,}79 \leq Z \leq 1{,}58) =$
$= P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq 0{,}79) = 0{,}9429 - 0{,}7852 = 0{,}1577$

c) $P(X > 15) = P\left(\dfrac{X-8}{2{,}53} > \dfrac{15-8}{2{,}53}\right) = P(Z > 2{,}76) = 1 - P(Z \leq 2{,}76) =$
$= 1 - 0{,}9971 = 0{,}0029$

069 ●●○

En un concurso dan a elegir una entre tres pruebas. Si las probabilidades de encestar lanzando un tiro son $\frac{1}{5}$ y las de acertar al blanco son $\frac{1}{3}$, elige la prueba en la que tengas más probabilidad de ganar.

- Lanzar 5 tiros a una canasta de baloncesto y encestar 2 por lo menos.
- Tirar 6 veces al blanco y acertar 3 como mínimo.
- Tirar 2 veces a canasta y hacer 1 tiro al blanco. Para superar la prueba se debe conseguir 1 canasta por lo menos y dar en el blanco.

En la primera prueba:

$X \equiv B\left(5;\ \dfrac{1}{5}\right)$

$P(X \geq 2) = 1 - P\left(X < 2\right) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$

$$= 1 - \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 0{,}3277 - 0{,}4096 = 0{,}2627$$

En la segunda prueba:

$Y \equiv B\left(6;\ \dfrac{1}{3}\right)$

$P(Y \geq 3) = 1 - P\left(Y < 3\right) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)) =$

$$= 1 - \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$
$$= 1 - 0{,}0878 - 0{,}2634 - 0{,}3292 = 0{,}3196$$

En la tercera prueba:

$$Z \equiv B\left(2; \frac{1}{5}\right)$$

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

La probabilidad de ganar es: $0{,}36 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}12$

Por tanto, hay más probabilidad de ganar la segunda prueba.

070 **Solo el 10 % de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más fácil, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?**

Si se compran 10 boletos: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 0{,}1937$

Si se compran 3 boletos: $P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

071 **Supongamos que la probabilidad de que nazca una niña es la misma de que nazca un niño.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga 2 hijos y 1 hija?

b) Si tomamos 100 familias con 3 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que haya 35 familias con 2 hijos y 1 hija?

c) ¿Y de que se encuentre entre 35 y 39?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en esas 100 familias haya 12 familias que solo tengan hijas?

a) $P(\text{2 hijos y 1 hija}) = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}375$

b) $X \equiv B(100; 0{,}375)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 37{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 62{,}5 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(100; 0{,}375) \approx N(37{,}5; 4{,}84)$$

$$P(X = 35) = P(34{,}5 < X < 35{,}5) = P\left(\frac{34{,}5 - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{X - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{35{,}5 - 37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}62 < Z < -0{,}41) = P(Z < 0{,}62) - P(Z < 0{,}41) =$$
$$= 0{,}7324 - 0{,}6591 = 0{,}0733$$

c) $$P(35 < X < 39) = P\left(\frac{35 - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{X - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{39 - 37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}51 < Z < 0{,}31) = P(Z < 0{,}31) - (1 - P(Z < 0{,}51)) =$$
$$= 0{,}6217 - 1 + 0{,}695 = 0{,}3167$$

d) $P(\text{3 hijas}) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$X \equiv B(100;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 12{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 87{,}5 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100;\ 0{,}125) \approx N(12{,}5;\ 0{,}33)$$

$$P(X = 12) = P(11{,}5 < X < 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5 - 12{,}5}{0{,}33} < \frac{X - 12{,}5}{0{,}33} < \frac{12{,}5 - 12{,}5}{0{,}33}\right) =$$
$$= P(-3 < Z < 0) = P(Z < 3) - P(Z < 0) = 0{,}9987 - 0{,}5 = 0{,}4987$$

072 ●●○

Marta va a salir de viaje y ha consultado las previsiones meteorológicas. Ha visto que la probabilidad de que llueva el sábado es del 50 %, siendo la misma para el domingo.

Marta hace la siguiente reflexión.

«Como 50 + 50 = 100, es seguro que un día va a llover».

a) ¿Es correcta su reflexión?

b) Calcula la probabilidad de que llueva solo un día.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva los dos días?

d) ¿Y de que no llueva ningún día?

a) No es correcta, porque la probabilidad de que llueva algún día es: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

b) $P(\text{llueva solo un día}) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

c) $P(\text{llueva los dos días}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

d) $P(\text{no llueva ningún día}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

073 ●●○

La talla media del pie de los bomberos que ingresaron en el cuerpo el año pasado era 42, con una desviación típica de 1,4. Este año ingresarán 40.000 personas en el cuerpo de bomberos.

a) Determina el número aproximado de los bomberos que tendrán una talla media del pie de 44 o 45.

b) Calcula el número de botas del número 38 que debería encargar el cuerpo de bomberos.

(Consideramos que un pie tiene talla 40 cuando le correspondería un tallaje comprendido en [39,5; 40,5). Por ejemplo, si a una persona le corresponde una talla de 36,7; diremos que su tallaje es 37. Y si es 38,4; diremos que su tallaje es 38.)

$X \equiv N(42;\ 1{,}4)$

a) $$P(43{,}5 \le X < 45{,}5) = P\left(\frac{43{,}5 - 42}{1{,}4} \le \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{45{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$$
$$= P(1{,}07 \le Z < 2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - P(Z \le 1{,}07) =$$
$$= 0{,}9938 - 0{,}8577 = 0{,}1361$$

$0{,}1361 \cdot 40.000 = 5.444$ bomberos

b) $$P(37{,}5 \le X < 38{,}5) = P\left(\frac{37{,}5 - 42}{1{,}4} \le \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{38{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$$
$$= P(-3{,}21 \le Z < -2{,}5) = P(Z \le 3{,}21) - P(Z < 2{,}5) =$$
$$= 0{,}9993 - 0{,}9938 = 0{,}0055$$

Por tanto, encargarán: $0{,}0055 \cdot 40.000 = 220$ pares de botas.

074 Escoge, entre los juegos a) y b), el juego que tengas mayor probabilidad de ganar.

a) Se lanzan 2 dados y si la suma es mayor que 9 ganas.

b) Se lanzan 10 monedas y ganas si salen más de 6 caras.

a) $P(\text{suma mayor que 9 al lanzar dos dados}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$

b) $X \equiv B(10;\ 0{,}5)$

$$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^3 +$$
$$+ \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}5^9 \cdot 0{,}5^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 = 0{,}1718$$

En el juego b) se tiene mayor probabilidad de ganar.

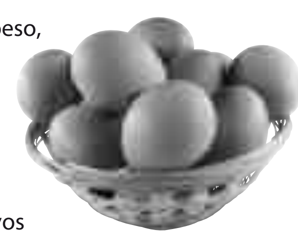
075 La distribución de edades de los miembros de una asociación sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.

$$P(X < 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9452 \to \frac{32-\mu}{\sigma} = 1{,}6$$
$$\to 32 - \mu = 1{,}6\sigma$$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2119$$
$$\to P\left(Z < -\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881 \to -\frac{20-\mu}{\sigma} = 0{,}8 \to 20 - \mu = -0{,}8\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 32 - \mu = 1{,}6\sigma \\ 20 - \mu = -0{,}8\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 5 \end{array}$$

076 En una granja de gallinas se clasifican los huevos por su peso, en gramos, según las categorías incluidas en la tabla.



Categoría	S	M	L	XL
Peso	< 53	[53, 63)	[63, 73)	≥ 73

El peso de los huevos de las gallinas de esa granja sigue una distribución $N(62, 8)$. Calcula los porcentajes de huevos que se obtienen de cada categoría.

$$P(X < 53) = P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{53-62}{8}\right) = P(Z < -1{,}125) = 1 - P(Z \leq 1{,}125) =$$
$$= 1 - 0{,}8697 = 0{,}1303$$

$$P(53 \leq X < 63) = P\left(\frac{53-62}{8} \leq \frac{X-62}{8} < \frac{63-62}{8}\right) = P(-1{,}125 \leq Z < 0{,}125) =$$
$$= P(Z < 0{,}125) - (1 - P(Z \leq 1{,}125)) = 0{,}5497 - 1 + 0{,}8697 = 0{,}4194$$

$$P(63 \leq X < 73) = P\left(\frac{63-62}{8} \leq \frac{X-62}{8} < \frac{73-62}{8}\right) = P(0{,}125 \leq Z < 1{,}375) =$$
$$= P(Z < 1{,}375) - P(Z \leq 0{,}125) = 0{,}9154 - 0{,}5497 = 0{,}3657$$

$$P(X \geq 73) = P\left(\frac{X-62}{8} \geq \frac{73-62}{8}\right) = P(Z \geq 1{,}375) = 1 - P(Z < 1{,}375) =$$
$$= 1 - 0{,}9154 = 0{,}0846$$

Hay un 13,03 % de huevos de tamaño S; un 41,94 % de tamaño M; un 36,57 % de tamaño L; y un 8,46 % de tamaño XL.

077 El gerente de una granja de gallinas ha observado que la categoría de huevos S no tiene éxito en el mercado, mientras que la categoría XL es la más rentable para la empresa, y sin embargo le corresponde una proporción demasiado baja de la producción. Por ese motivo decide hacer nuevas categorías que denominará, de mayor a menor peso: A, B, C, D y E, de modo que los porcentajes de huevos en cada categoría sean las siguientes.

Categoría	A	B	C	D	E
Porcentaje	15 %	20 %	35 %	25 %	5 %

Encuentra los intervalos de peso correspondientes a cada categoría.

$$P(X < A) = 0{,}15 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{A-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{A-62}{8}\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq -\frac{A-62}{8}\right) = 0{,}15 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{A-62}{8}\right) = 0{,}85$$
$$\rightarrow -\frac{A-62}{8} = 1{,}04 \rightarrow A = 53{,}68$$

$$P(X < B) = 0{,}35 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{B-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{B-62}{8}\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq -\frac{B-62}{8}\right) = 0{,}35 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{B-62}{8}\right) = 0{,}65$$
$$\rightarrow -\frac{B-62}{8} = 0{,}39 \rightarrow B = 58{,}88$$

$$P(X < C) = 0{,}7 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{C-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{C-62}{8}\right) = 0{,}7$$
$$\rightarrow \frac{C-62}{8} = 0{,}53 \rightarrow C = 66{,}24$$

$$P(X < D) = 0{,}95 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{D-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{D-62}{8}\right) = 0{,}95$$
$$\rightarrow \frac{D-62}{8} = 1{,}65 \rightarrow D = 75{,}2$$

La categoría A corresponde a los huevos que pesan menos de 53,68 gramos; la categoría B a los que pesan entre 53,68 y 58,88 gramos; la categoría C a los que pesan entre 58,88 y 66,24 gramos; la categoría D a los que pesan entre 66,24 y 75,2 gramos, y la categoría E a los que pesan más de 75,2 gramos.

078 La nota media de las Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios en un distrito sigue una ley normal con media 6,2 y desviación típica 1,3.

a) Uno de los estudios más solicitados es Fisioterapia, por lo que un periódico local afirma que solo el 10 % de los alumnos del distrito tendrá nota suficiente para realizar esos estudios. ¿A qué nota se refiere?
b) ¿Qué porcentaje de alumnos supera el sobresaliente?
c) ¿Qué nota supera el 25 % de los alumnos?

a) $P(X \geq a) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\dfrac{X-6{,}2}{1{,}3} \geq \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = P\left(Z \geq \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) =$

$= 1 - P\left(Z < \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}1 \rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}9$

$\rightarrow \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3} = 1{,}29 \rightarrow a = 7{,}87$

La nota suficiente para acceder a Fisioterapia es 7,87.

b) $P(X \geq 9) = P\left(\dfrac{X-6{,}2}{1{,}3} \geq \dfrac{9-6{,}2}{1{,}3}\right) = P(Z \geq 2{,}15) = 1 - P(Z < 2{,}15) =$

$= 1 - 0{,}9842 = 0{,}0158$

El 1,58 % de los alumnos supera el sobresaliente.

c) $P(X \leq a) = 0{,}25 \rightarrow P\left(\dfrac{X-6{,}2}{1{,}3} \leq \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) =$

$= 1 - P\left(Z \leq -\dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}25 \rightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}75$

$\rightarrow -\dfrac{a-6{,}2}{1{,}3} = 0{,}68 \rightarrow a = 5{,}31$

El 25 % de los alumnos supera una nota de 5,31.

079 En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure dos horas.
b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

a) $X \equiv N(180,\ 25)$

$P(X \leq 120) = P\left(\dfrac{X-180}{25} \leq \dfrac{120-180}{25}\right) = P(Z \leq -2{,}4) = 1 - P(Z < 2{,}4) =$

$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$

b) $P(X > 200) = P\left(\dfrac{X-180}{25} > \dfrac{200-180}{25}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) =$

$= 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$

Como $0{,}2119 \cdot 150 = 31{,}785$; en 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

c) $P(X \geq 180) = P\left(\frac{X-180}{25} \geq \frac{180-180}{25}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0,5 = 0,5$

$Y \equiv B(150;\ 0,5)$

$\left.\begin{array}{l} np = 75 > 5 \\ n(1-p) = 75 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow Y \equiv B(150;\ 0,5) \approx N(75;\ 6,12)$

$P(Y = 110) = P(109,5 < Y < 110,5) = P\left(\frac{109,5-75}{6,12} < \frac{Y-75}{6,12} < \frac{110,5-75}{6,12}\right) =$
$= P(5,62 < Z < 5,8) = P(Z < 5,8) - P(Z < 5,62) = 1 - 1 = 0$

080 ●●● **La estatura de los 1.200 alumnos de un colegio sigue una distribución normal, de media 156 cm y desviación típica 9 cm.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno seleccionado al azar mida más de 180 cm?
b) ¿Cuántos estudiantes debemos esperar que midan entre 140 y 170 cm?
c) Busca un intervalo de alturas que contenga el 90 % de los alumnos y que sea el mínimo posible.
d) Si elijo 10 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellos midan más de 165 cm?
e) Si elijo 40 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 10 que midan más de 165 cm?

a) $P(X > 180) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{180-156}{9}\right) = P(Z > 2,67) = 1 - P(Z \leq 2,67) =$
$= 1 - 0,9962 = 0,0038$

b) $(140 < X < 170) = P\left(\frac{140-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{170-156}{9}\right) =$
$= P(-1,78 < Z < 1,56) = P(Z < 1,56) - (1 - P(Z < 1,78)) =$
$= 0,9406 - 1 + 0,9625 = 0,9031$

Como $0,9031 \cdot 1.200 = 1.083$, hay 1.083 estudiantes que miden entre 140 y 170 cm.

c) $P(156 - a < X < 156 + a) = P\left(\frac{156-a-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{156+a-156}{9}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{9} < Z < \frac{a}{9}\right) = P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{9}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - 1 = 0,9 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{9}\right) = 0,95 \rightarrow \frac{a}{9} = 1,65$
$\rightarrow a = 14,85 \rightarrow (141,15;\ 170,85)$ es el intervalo de alturas.

d) $P(X > 165) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{165-156}{9}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$
$= 1 - 0,8413 = 0,1587$

$Y \equiv B(10;\ 0,1587)$

$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,1587^6 \cdot 0,8413^4 = 0,0017$

e) $Y' \equiv B(40;\ 0{,}1587)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 6{,}348 > 5 \\ n(1-p) = 33{,}652 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow Y \equiv B(40;\ 0{,}1587) \approx N(6{,}348;\ 2{,}31)$$

$$P(Y' > 10) = P\left(\frac{Y' - 6{,}348}{2{,}31} > \frac{10 - 6{,}348}{2{,}31}\right) = P\left(Z > 1{,}58\right) = 1 - P\left(Z \le 1{,}58\right) =$$
$$= 1 - 0{,}719 = 0{,}281$$

081 El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 y 3,5 kg, respectivamente:

a) Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.
b) Halla la probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.
c) ¿Cuál es el percentil 10?
d) Determina la mediana de la distribución.

$$P(X < 3{,}2) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{3{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$P(X < 3{,}5) = 0{,}9 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \rightarrow \frac{3{,}5-\mu}{\sigma} = 1{,}29$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2 - \mu = 0{,}68\sigma \\ 3{,}5 - \mu = 1{,}29\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 2{,}86 \\ \sigma = 0{,}49 \end{array}$$

a) $$P(X < 2{,}5) = P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} < \frac{2{,}5 - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < -0{,}73\right) = 1 - P(Z \le 0{,}73) =$$
$$= 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$$

b) $$P(X > 4) = P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} > \frac{4 - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z > 2{,}32\right) = 1 - P(Z \le 2{,}32) =$$
$$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$$

c) $$P(X < a) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} < \frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < \frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}1$$
$$\rightarrow P\left(Z \le -\frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}9 \rightarrow -\frac{a - 2{,}86}{0{,}49} = 1{,}29 \rightarrow a = 2{,}23$$

d) $$P(X \le M) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} \le \frac{M - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z \le \frac{M - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}5$$
$$\rightarrow \frac{M - 2{,}86}{0{,}49} = 0 \rightarrow M = 2{,}86$$

082 El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1.500 €. Si el sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75 % de los trabajadores de la empresa cobra más que él:

a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1.600 €.
b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5 % de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

$$P(X > 960) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X - 1.500}{\sigma} > \frac{960 - 1.500}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{540}{\sigma}\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{540}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{540}{\sigma} = 0{,}68 \rightarrow \sigma = 794{,}12$$

a) $P(X > 1.600) = P\left(\frac{X - 1.500}{794{,}12} > \frac{1.600 - 1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z > 0{,}13\right) = 1 - P(Z \le 0{,}13) =$
$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

b) $P(X \ge a) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X - 1.500}{794{,}12} \ge \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z \ge \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}05$
$\rightarrow P\left(Z < \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{a - 1.500}{794{,}12} = 1{,}65 \rightarrow a = 2.810{,}29$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2.810,29 euros.

PARA FINALIZAR…

083 **Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad de una variable aleatoria continua.**

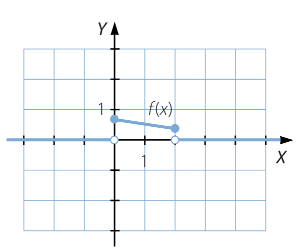
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x + k & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

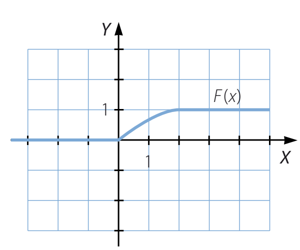
a) Obtén la función de distribución $F(x)$.
b) Representa gráficamente ambas funciones.
c) Calcula las probabilidades. $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $P(X = 1)$

a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{6}x + k\right) dx = \left[-\frac{x^2}{12} + kx\right]_0^2 = -\frac{1}{3} + 2k \rightarrow 2k = \frac{4}{3} \rightarrow k = \frac{2}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ -\frac{x^2}{12} + \frac{2x}{3} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

b)





c) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = P\left(X < \frac{3}{2}\right) - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{48} - \frac{15}{48} = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = 0$

084 La probabilidad de que un reloj sea defectuoso es del 4 %. Halla.

a) El número de relojes defectuosos que se estima en un lote de 1.000.

b) La probabilidad de menos de 10 defectuosos.

a) $\mu = 1.000 \cdot 0{,}04 = 40$ relojes

b) $B(1.000; 0{,}04) \oplus N(40; 6{,}19)$

$$P(X < 10) = \left(\frac{X-40}{6{,}19} < \frac{10-40}{6{,}19}\right) = P\big(Z < -4{,}84\big) = 1 - P\big(Z < 4{,}84\big) = 0$$

085 En una distribución normal, el 3 % de los valores es inferior a 19 y el 5 % es superior a 28,6. Calcula $P(X < 18)$.

$$P(X < 19) = 0{,}03 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}03$$

$$\rightarrow P\left(Z \le -\frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}97 \rightarrow -\frac{19-\mu}{\sigma} = 1{,}89$$

$$\rightarrow 19 - \mu = -1{,}89\sigma$$

$$P(X > 28{,}6) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$$

$$\rightarrow P\left(Z \le \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{28{,}6-\mu}{\sigma} = 1{,}65$$

$$\rightarrow 28{,}6 - \mu = 1{,}65\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 19-\mu = -1{,}89\sigma \\ 28{,}6-\mu = 1{,}65\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24{,}13 \\ \sigma = 2{,}71 \end{array}$$

$$P(X < 18) = P\left(\frac{X-24{,}13}{2{,}71} < \frac{18-24{,}13}{2{,}71}\right) = P(Z < -2{,}26) = 1 - P(Z \le 2{,}26) =$$

$$= 1 - 0{,}9881 = 0{,}0119$$

086 Las bolas para rodamiento se someten a un control de calidad consistente en eliminar las que pasan por un orificio de diámetro d y, también, las que no pasan por otro orificio de diámetro D, con $d < D$.

Calcula la probabilidad de eliminar una bola, sabiendo que la medida de sus diámetros sigue una distribución normal de parámetros: $N\left[\frac{D+d}{2};\ 0{,}3(D-d)\right]$.

$$P(X < d) + P(X > D) = P\left(\frac{X - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)} < \frac{d - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) + P\left(\frac{X - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)} > \frac{D - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\frac{d-D}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) + P\left(Z > \frac{\frac{D-d}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) =$$

$$= P\left(Z < -\frac{1}{0{,}6}\right) + P\left(Z > \frac{1}{0{,}6}\right) = P(Z < -1{,}67) + P(Z > 1{,}67) =$$

$$= 2P(Z > 1{,}67) = 2(1 - 0{,}9525) = 0{,}095$$

087 Una máquina tiene 800 componentes y la probabilidad de que, en un tiempo determinado, falle uno de ellos es $2 \cdot 10^{-4}$. Calcula la probabilidad de que en ese tiempo:

a) Falle al menos 1 componente.
b) Fallen exactamente 2 componentes.
c) Fallen, como máximo, 2 componentes.
d) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

$X \equiv B(800;\ 0{,}0002)$

$800 \cdot 0{,}0002 = 0{,}16 < 5 \rightarrow$ No se puede aproximar con una distribución normal.

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{800}{0} \cdot 0{,}0002^0 \cdot 0{,}9998^{800} =$

$= 1 - 0{,}8521 \simeq 0{,}1479$

b) $P(X = 2) = \binom{800}{2} \cdot 0{,}0002^2 \cdot 0{,}9998^{798} = 319.600 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8724 \simeq 0{,}001$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{800}{0} \cdot 0{,}0002^0 \cdot 0{,}9998^{800} +$

$+ \binom{800}{1} \cdot 0{,}0002^1 \cdot 0{,}9998^{799} + \binom{800}{2} \cdot 0{,}0002^2 \cdot 0{,}9998^{798} =$

$= 0{,}8521 + 800 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}8523 + 319.600 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8224 \simeq 0{,}9894$

d) $\mu = 800 \cdot 0{,}0002 = 0{,}16$

$\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}9998} = 0{,}39$

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **Carrió/Sánchez/Lacasta**
Interiores: **Manuel García, Rosa Barriga**
Ilustración: **Enrique Cordero, José María Valera**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **Rosa María Barriga, José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Félix Rotella**
Confección y montaje: **MonoComp, S. A., Luis González, Hilario Simón**

Corrección: **Marta Rubio, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: A. Toril; D. López; E. Marín; F. Ontañón; I. Rovira; J. C. Muñoz; J. I. Medina; J. Jaime; J. Lucas; J. M.ª Escudero; J. M.ª Regalado; J. V. Resino; L. Olivenza; M. Blanco; ORONOZ; P. Carrió/S. Sánchez; P. Esgueva; Prats i Camps; S. Cid; S. Enríquez; A. G. E. FOTOSTOCK; CENTRAL STOCK; COMSTOCK; CONTIFOTO/SYGMA/KEYSTONE; DIGITALVISION; EFE/EPA/Humayoun Shiab, EPA/Armin Weigel, A. Estévez; EFE/SIPA-PRESS/J. Sommers; FOTONONSTOP; GETTY IMAGES SALES SPAIN/The Bridgeman Art Library, David Young-Wolff, Stone/Ryan McVay; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. Preysler; JOHN FOXX IMAGES; MUSEUM ICONOGRAFÍA/J. Martin; NASA/Credit Image created by Reto Stockli with the help of Alan Nelson, under the leadership of Fritz Hasler; PHOTODISC; STOCKBYTE; FUNDACIÓN GIANNI MATTIOLI, MILÁN; HP/Hewlett-Packard; MATTON-BILD; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-4354-7
CP: 833210
Depósito legal: